Editora UFPE

AO MESTRE COM CARINHO

reflexões e pesquisas em educação matemática

Jadilson Ramos de Almeida
Regina Celi de Melo André
André Pereira da Costa
[Organizadores]

AO MESTRE COM CARINHO

reflexões e pesquisas em educação matemática

Jadilson Ramos de Almeida
Regina Celi de Melo André
André Pereira da Costa
[Organizadores]

Editora UFPE

Recife | 2021

Catalogação na fonte:
Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

A638 Ao mestre com carinho [recurso eletrônico] : reflexões e pesquisas em educação matemática / organizadores : Jadilson Ramos de Almeida, Regina Celi de Melo André, André Pereira da Costa. – Recife : Ed. UFPE, 2021.

Vários autores
Inclui referências.
ISBN 978-65-86732-99-3 (online)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Professores de matemática – Formação. I. Almeida, Jadilson Ramos de (Org.). II. André, Regina Celi de Melo (Org.). III. Costa, André Pereira da (Org.).

372.7 CDD (23.ed.) UFPE (BC2021-006)

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, pelo apoio financeiro à publicação desse livro.

Ao professor Rafael José da Silva, pela revisão e formatação de alguns capítulos.

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Escrever o prólogo deste livro-homenagem a Marcelo Câmara foi um momento de muita satisfação. Por isso, agradeço aos organizadores da obra por me terem oferecido a oportunidade de dizer um pouco sobre o amigo de quase 30 anos.

Olhando para trás, dou conta de que nossa amizade parece ter nascido pronta. Desde nosso encontro inicial, e até hoje, acompanho suas jornadas pelas searas da educação matemática. Algumas delas percorremos juntos, em equipes de trabalho; outras foram proveitosas parcerias entre nós. No entanto, seus caminhos foram sempre bastante diversificados, e muitos deles acompanhei mais a distância, ainda que, sempre, com admiração e reconhecimento. Sendo assim, não pretendo, nem caberia em poucas páginas, comentar toda sua trajetória profissional e suas realizações, que podem ser conhecidas em outros textos e, em particular, adiante neste livro.

Marcelo Câmara iniciou seu percurso como professor do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco (CAp-UFPE), em meados da década de 1980. Aquela foi a década da formação da educação matemática como um campo de atuação acadêmica, em vários centros do país e, entre eles, em instituições pernambucanas. Vem do convívio com colegas do CAp sua participação no grupo de professores que, naquela época, lançava as sementes da educação matemática em nosso estado.

Em particular, estava em curso uma ampla iniciativa, compartilhada entre vários polos institucionais, que contava com um leque diversificado de ações: o *Projeto*

de Rede Ciências, Matemática e Educação Ambiental em Pernambuco. Tal projeto fazia parte de um programa nacional que teve papel fundamental na criação e no desenvolvimento de instituições dedicadas à educação científica em nosso país, o Subprograma de Educação Científica – SPEC, executado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES. Com o apoio do SPEC, a educação matemática ganhou um significativo impulso em vários centros educacionais brasileiros.

Marcelo Câmara realizou seus estudos de pós-graduação na França, como bolsista do citado Projeto de Rede: Mestrado na Universidade de Lyon I e Doutorado na Universidade de Paris X. Daí vem sua filiação à corrente da didática da matemática, da qual se tornou um dos líderes no nosso país. Posteriormente, nos estágios de pós-doutorado na Universidade de Rennes I, França, e na Universidade Laval, no Canadá, manteve-se no campo ampliado da didática da matemática de origem francesa.

O ano de 1995 marcou a volta de Marcelo Câmara ao Brasil. Entre nós, inicia uma carreira acadêmico-científica muito produtiva, a respeito da qual procuro trazer um depoimento parcial.

Um primeiro olhar sobre sua trajetória acadêmica nos revela um dos pioneiros e incessantes batalhadores pela criação e manutenção de um programa de pós-graduação em educação matemática na UFPE. Tal projeto, acolhido inicialmente como uma linha de pesquisa no Programa de Pós-graduação em Educação, ganhou autonomia e consolidou-se no que se denomina hoje Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec. Para o sucesso dessa empreitada, Marcelo contou com a entusiástica colaboração de um coeso grupo de educadores matemáticos.

Além da presença no Edumatec, que se prolonga até hoje, estendeu suas contribuições ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências, da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e ao Programa de Pós-graduação em Gestão e Avaliação da Educação Pública, da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), em Minas Gerais.

Quando se examina seu Currículo Lattes, despertam-se a atenção e a admiração, diante da importância da contribuição de Marcelo Câmara para a formação de pesquisadores em educação matemática em nosso país. No plano quantitativo, vinculados às instituições acima mencionadas, contam-se as orientações de cerca de 20 doutorados, 50 mestrados e 25 especializações. A esse notável desempenho acadêmico, somam-se as aproximadamente 250 publicações nas categorias de artigos em periódicos, capítulos de livros, pareceres técnicos e outras produções escritas. Sem esquecer que não está contado, nessa extensa produção acadêmica, o elevado número de participações em eventos e bancas registrados em seu currículo oficial.

Além disso, mais admiração advém quando se percorrem os temas tratados nesses trabalhos acadêmicos e se constata a sua grande variedade, no âmbito da didática da matemática.

Para os que não são familiarizados com as características dessa vertente da educação matemática, apelo para uma digressão, que se arrisca a ser um tanto longa.

Sabemos que a matemática é uma atividade exercida pelo ser humano desde os tempos mais remotos. Por isso, compreender, minimamente, o modo de existência histórica dessas atividades é um projeto intelectual de enorme complexidade. Por isso, farei uma "aterrissagem forçada" para delinear, sucintamente, o que estudam aqueles que se dedicam à educação matemática. Eles ocupam-se, entre outros, com os estudos das atividades matemáticas nas diversas práticas culturais e com a difusão, nas sociedades, do conhecimento historicamente produzido e sistematizado nessa área do saber. Em particular, dedicam-se aos estudos teóricos e às investigações empíricas dos fenômenos do ensino e da aprendizagem dos conceitos matemáticos, nas instituições educacionais. Nesta última direção, situa-se a corrente da didática da matemática, originada na França, e que se expandiu para outros países, incluindo o Brasil.

Na didática da matemática em sua vertente francesa, investigam-se os fenômenos do ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos. Nessas pesquisas, é fundamental explorar a dimensão epistemológica dos conceitos, por meio do estudo de sua gênese histórica, de seus vínculos culturais, de seu estatuto como saber matemático estabelecido e de suas conexões com outros conceitos. Simultaneamente, investigam-se, com igual importância, os fenômenos que se podem revelar quando um sujeito (professor), inserido num contexto institucional, age intencionalmente para que outro sujeito (aluno) adquira determinado conceito (saber matemático), propondo-lhe uma situação problema (meio) na qual é possível atribuir sentido ao referido conceito.

Naturalmente, é demasiado esquemático o que descrevo acima. Trata-se apenas de uma provocação para que se explore a extensa e diversificada produção científica na didática da matemática que, desde a década de 1960, na França e em outros países, progressivamente se adensou em várias teorias. Dessas, cito as mais influentes nas pesquisas e estudos conduzidos por Marcelo Câmara: teoria da relação ao saber (Bernard Charlot); teoria das situações didáticas (Guy Brousseau); teoria dos campos conceituais (Gérard Vergnaud); teoria antropológica do didático (Yves Chevallard); teoria dos registros de representação semiótica (Raymond Duval).

A despeito de já ser bastante amplo o espectro de teorias indicadas, cada uma delas é integrada por vários construtos teóricos, entre outros, os de: engenharia didática; contrato didático; obstáculo; noosfera; praxeologia; percurso de ensino e pesquisa; conversões e tratamentos. Marcelo debruçou-se sobre muitos desses, em aulas nos programas de pós-graduação, em numerosas publicações e em orientações de dissertações e teses.

Em consonância com a característica fundamental da didática da matemática, quase sempre há um conceito – ou conjunto de conceitos inter-relacionados – que é visado nas investigações que se filiam a essa vertente. Em um olhar sobre os trabalhos acadêmicos dos quais Marcelo participou, descortina-se um painel diversificado, que inclui conceitos nos campos dos números, da álgebra, da geometria e das grandezas e medidas.

Essas constatações revelam um acolhimento de novos aportes teóricos e sua rara capacidade de se debruçar, ao mesmo tempo, sobre múltiplas questões no campo da didática da matemática. Arrisco a hipótese de que a amplitude de seus interesses teóricos e a variedade de temas de seus trabalhos acadêmicos provêm de uma prática coerente com a concepção defendida na didática da matemática: o aluno é igualmente protagonista no processo de ensino aprendizagem. Com mais razão ainda, quando se trata de um aluno de pós-graduação que, mais claramente, é um pesquisador em formação. Nesse sentido, suponho que Marcelo acolhe variados pré-projetos que os pesquisadores em formação trazem ao ingressarem nos programas de pós-graduação e procura ajustar seu repertório teórico e sua experiência aos objetivos almejados por eles.

Tecidas essas considerações sobre o homenageado neste livro como um artífice incansável no campo da formação de pesquisadores em educação matemática, cabe discorrer sobre sua atuação no sistema educacional de nosso estado e de nosso país, no âmbito do ensino de matemática.

De início, é preciso destacar que Marcelo Câmara lecionou desde 1985 até bem recentemente no CAp/UFPE. Dessa longa prática docente, resulta que ele sempre conta com os conhecimentos enraizados no cotidiano da sala de aula para dialogar com as contribuições teóricas com as quais se defronta no contexto acadêmico. Esse amálgama – teoria/prática – favoreceu, de modo decisivo, Marcelo Câmara a se tornar um sempre requisitado consultor técnico em, pelo menos, quatro grandes campos de atuação relacionados ao ensino básico de matemática: a) formação de professores; b) avaliação de sistemas de ensino; c) currículos; d) avaliação de livros didáticos.

Nos três primeiros campos, quando se examina detalhadamente seu Currículo Lattes, encontra-se uma extensa e importante lista de suas contribuições. Com efeito, pelo menos desde 1995 – ano em que retornou de seu doutoramento – até o presente, de modo praticamente contínuo, envolveu-se em projetos coordenados seja por secretarias de educação, seja pelo Ministério da Educação (MEC), nas áreas de formação, avaliação e currículo. A respeito disso, faremos alguns destaques nos parágrafos que seguem.

Marcelo Câmara atuou constantemente em programas de formação continuada de professores, promovidos por secretarias de educação locais (municipais e estaduais) e em cursos de especialização destinados a professores da educação básica. No âmbito nacional destacou-se nesta área, chegando a ocupar o cargo de Diretor de Formação da CAPES, em 2017.

Quanto à avaliação de sistemas de ensino, do mesmo modo, ele teve participação quase permanente na elaboração de matrizes de avaliação de rede de ensino, tanto no âmbito estadual (Secretaria de Educação de Pernambuco), quanto no nacional (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira/MEC).

No que respeita ao currículo de matemática, há duas menções à sua atuação, ambas de inegável relevância. A primeira é a participação na elaboração da Base Curricular Comum para o Estado de Pernambuco e, posteriormente, na dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco. A segunda, de maior amplitude, foi sua presença na equipe que elaborou a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na área de matemática, que vigora atualmente no país e se estende a todos os níveis da educação básica.

No que segue, me deterei no campo da avaliação de livro didático de matemática.

Marcelo Câmara foi um dos destacados participantes da avaliação das obras no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e atuou em quase todas as edições do programa, na área de matemática, desde a inicial, PNLD 1996, até o PNLD 2018. Durante os encontros de avaliação, pelo Brasil afora, nós pudemos trabalhar intensamente, sem abdicar das conversas descontraídas, pós-trabalho, falando de livros didáticos e da vida.

Ao longo dos anos, do trabalho de avaliação do PNLD na área de matemática, participaram cerca de duas centenas de educadores empenhados em que os professores e estudantes da escola básica em nosso país pudessem ter, no livro didático, um recurso para tornar o estudo da matemática uma atividade atraente, estimulante e que favorecesse a aquisição de conhecimentos validados pela comunidade científica.

Competência, presteza, rigor no exame das obras, companheirismo, capacidade de coordenação de grupos, foram marcas permanentes de Marcelo durante os longos anos da avaliação do livro didático de matemática, no PNLD. Cumpre ressaltar sua presença salvadora quando uma dificuldade não prevista exigia um trabalho extra, que era acolhido por ele e resolvido em curtíssimos prazos. Todas essas marcas tão significativas foram deixadas por esse amigo em nossas andanças nas sendas do PNLD.

Cabe-me encerrar com um comentário sobre o papel que Marcelo Câmara exerceu, no período de 1999 a 2010, como dirigente da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Nos seis primeiros anos, fez parte da Diretoria da Regional de Pernambuco (SBEM-PE), período em que foram realizados dois encontros estaduais da Sociedade.

Entre julho de 2004 e julho de 2010, foi Secretário Geral da Diretoria Nacional da SBEM. Durante seu mandato, foram organizados cinco congressos ou seminários nacionais.

Em todos esses eventos científicos, Marcelo foi responsável pela coordenação da programação científica. Para aqueles que não se ocuparam com essa função, é difícil avaliar quão delicada e penosa é a tarefa. Acrescente-se, a essa, o não menos exigente esforço de editar o principal periódico da SBEM, a Educação Matemática em Revista. Ao seu trabalho árduo e à sua tenacidade deve ser creditada a publicação de nove edições da revista da SBEM durante o seu mandato.

O fato de Marcelo ter assumido tantas vezes, e com tanta eficiência, os encargos da SBEM dá uma medida da sua dedicação a um trabalho de enorme repercussão para o crescimento da Sociedade que congrega os educadores matemáticos em nosso país.

Até este ponto, teci alguns comentários sobre o homenageado neste livro e desejaria discorrer muito mais sobre ele. Mas é preciso ouvir Ítalo Calvino a nos lembrar que, para o grande Galileu: *"O discorrer é como o correr"*. Portanto, convém me apressar e deixar entrar em cena os que vão dar outro tipo de testemunho da capacidade de Marcelo de dialogar com o mundo à sua volta.

Ao fazer isso, não só atendo ao dito dos clássicos, como sigo as pegadas de Marcelo, sempre disponível a iniciar, de pronto, uma nova tarefa; sem esquecer que, entre nós, foi sempre o mais rápido a concluir a sua parte no trabalho conjunto.

Paulo Figueiredo Lima

APRESENTAÇÃO

Para início de conversa, destacamos o que nos motivou a publicar esta obra especial: o sonho de materializar o amplo repertório de estudos e produções científicas, construído, ao longo de duas décadas, por meio de pesquisas que resultaram em dissertações de Mestrado, realizadas sob a orientação do nosso querido e competente orientador **Marcelo Câmara dos Santos**. O fato de termos sido orientados pelo mesmo professor, a quem admiramos, não apenas nos reuniu em um grupo de pesquisa, mas também despertou a ideia de homenagear, por meio da publicação de um livro, aquele que nos guiou e contribuiu tão significativamente para o desenvolvimento de nossa formação enquanto pesquisadores iniciantes.

Esta foi a maior razão que nos levou à escolha do título: ***Ao mestre com carinho: reflexões e pesquisas em educação matemática****.* Além de nos apoiar na trilha da pesquisa acadêmica, Marcelo Câmara representa uma referência ímpar, que serve de inspiração até os dias atuais para todos os seus orientandos.

Alguns dos autores aqui reunidos se vinculam ao Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, credenciado no CNPq em 2004, e do qual Marcelo Câmara é o líder. O Grupo acumula, em sua trajetória, quase duas décadas de pesquisas sobre os complexos e diversificados fenômenos que emergem nas salas de aula de matemática.

Os estudos presentes neste livro, em especial, são resultados de dissertações de mestrado desenvolvidas ao longo desses anos no estado de Pernambuco. Com esta publicação, na qualidade de pesquisadores, esperamos que os estudos e reflexões que realizamos se tornem mais acessíveis e possam chegar ao maior número possível de leitores, de diferentes segmentos, como estudantes de licenciatura e de pós-graduação e, sobretudo, professores que ensinam matemática em todas as etapas da educação básica, já que o foco do grupo é contribuir para a formação docente, inicial e continuada.

Esta obra é resultado do esforço coletivo de reunir parte da produção desenvolvida no/pelo Grupo e de compartilhar, com pessoas que têm interesse pela matemática escolar, reflexões que dizem respeito ao ensino e à aprendizagem dessa área. Trata-se de uma iniciativa que promove a continuidade da coleção lançada em 2010, intitulada Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, e que alcança, com a presente publicação, o volume 3.

Para percorrer esta obra**,** o **Capítulo 1** inicia apresentando um trabalho, desenvolvido por **Gracivane Apolônio e Marcelo Câmara,** que aborda o resultado de uma pesquisa feita em uma escola pública de Pernambuco, nos anos de 1998 e 2001, sobre o cálculo mental, identificado como esquema que comporta regras de ação, invariantes operatórios, antecipações e inferências, dentro da concepção da Teoria dos Campos Conceituais de Gerárd Vergnaud. No resultado da pesquisa, viu-se que as crianças utilizaram a memória, contagem, decomposição, comparação, composição e algoritmo formal. A memória e algoritmo formal não foram considerados como cálculo mental. Constatou-se ainda que as crianças usaram muitos invariantes relacionados ao conceito de número e às regras do sistema de numeração decimal.

O **Capítulo 2** apresenta uma pesquisa que busca fazer uma reflexão mais aprofundada sobre o conceito de Transposição Didática discutido por Yves Chevallard. Tal conceito descreve a trajetória cumprida pelo saber, desde a sua produção, na comunidade científica, até a sua inserção na sala de aula. Nesse processo, o saber científico sofre várias adaptações e deformações, até se constituir como um saber a ensinar e, posteriormente, um saber ensinado. Assim, **Marcus Bessa e Marcelo Câmara** deram enfoque, inicialmente, à Didática da Matemática, como ciência e área de pesquisa, pontuando os elementos que estão envolvidos na análise da relação didática que envolve professor, aluno e um determinado saber, representado, no estudo em questão, pelos quadriláteros. Em seguida, centralizaram a discussão no fenômeno da transposição didática interna, analisando de que forma dois professores introduzem, no cenário didático, as ideias relativas aos quadriláteros, em duas salas de aula de 7ª série. Por meio da análise dos dados coletados, puderam identificar, entre outros elementos, que essa transposição didática interna parece se apresentar fortemente influenciada pela relação existente entre o professor e o saber a ser ensinado.

O **Capítulo 3** traz uma pesquisa que buscou evidenciar a importância do livro didático de matemática como material escolar, bem como sua ampla utilização ao longo do tempo. Para tal, **Clóvis Gomes e Marcelo Câmara** percorreram o caminho histórico do livro didático, abordando sua origem, sua estrutura física, sua função de transmissor do conhecimento. Nessa pesquisa, elegeram como objetivo principal investigar quais os critérios, utilizados pelos professores de matemática, para adoção e utilização dos livros didáticos. Os procedimentos metodológicos se basearam em uma abordagem quantitativa composta de 247 professores de matemática do ensino fundamental do agreste pernambucano. Os resultados indicam que, para o professor, o livro didático de matemática é mais que um simples material de uso nos processos de ensino e aprendizagem. No entanto, um em cada dez professores do ensino fundamental não utilizam o livro didático de matemática, e esta mesma proporção é mantida em relação à não adequação deste mesmo livro em função dos alunos.

O **Capítulo 4** refere-se a um estudo no qual **Vânia Moura e Marcelo Câmara** buscaram realizar uma reflexão acerca da importância de estudos sobre uma das etapas provenientes da Teoria da Transposição Didática de Chevallard, a etapa das escolhas dos saberes ensinados. Os autores partiram do levantamento dos registros dos saberes ensinados por professores de matemática de escolas da Gerência Regional de Educação Recife Sul, com o intuito de analisar de que maneira os saberes propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática e na Base Curricular Comum de Pernambuco (BCC-PE) estavam contemplados nas escolhas feitas pelos professores. Como resultado, identificou-se uma maior ênfase com relação às escolhas dos saberes referentes ao bloco Números e Operações.

Presente no **Capítulo 5,** a pesquisa realizada por **Adegundes Maciel e Marcelo Câmara** teve como objetivo identificar as concepções de frações e de equivalência de frações de estudantes das séries finais do Ensino Fundamental e do

Ensino Médio. Para isto, aplicou-se um instrumento diagnóstico a 630 alunos de uma escola da Rede Municipal do Recife e de outra, da Rede Estadual de Pernambuco. O instrumento era composto por dez questões, que foram posteriormente tabuladas e graficamente analisadas, envolvendo frações como parte-todo, quociente e operador, além de questões como a influência de figuras nas questões, quantidades discretas e contínuas e equivalência das frações. Revelou-se que os melhores desempenhos se encontram nos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental e a partir do 2º ano do Ensino Médio.

O **Capítulo 6** apresenta uma pesquisa cujo objetivo geral foi investigar como estudantes do oitavo ano do ensino fundamental da rede pública de ensino realizam o processo de transição da linguagem natural para a linguagem algébrica em problemas associados à equação de primeiro grau. O estudo desenvolvido por **Regina Melo e Marcelo Câmara** teve como principal referencial teórico a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Foi realizada uma investigação envolvendo 343 estudantes de escolas da rede pública estadual de ensino, na cidade do Recife. Realizou-se uma análise preliminar de livros didáticos de Matemática para o mapeamento dos tipos de questões mais utilizadas e a elaboração das atividades aplicadas durante as intervenções. Para a coleta de dados, foram aplicados, como instrumento, testes compostos por 14 questões cada um. A análise permitiu verificar as questões que apresentaram maiores dificuldades na conversão entre os registros de representação usados.

O **Capítulo 7** relata alguns dos principais resultados obtidos a partir de uma pesquisa de mestrado, desenvolvida por **Dilson Cavalcanti e Marcelo Câmara**, que investigou as concepções dos alunos do 3º ano do Ensino Médio acerca dos significados do símbolo “=” em contextos aritméticos e algébricos. A hipótese subjacente foi a de que o significado do símbolo “=” nem sempre é compatível com a ideia de igualdade e, portanto, depende do contexto no qual está inserido. Os resultados permitiram evidenciar um desencontro entre as concepções dos alunos e o significado do símbolo “=”, nos contextos em que ele está inserido.

No **Capítulo 8**, o objetivo do estudo foi analisar os erros dos estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental, em avaliações em larga escala – SAEPE 2002 e 2005 – em Matemática. Por meio de uma investigação dos itens e dos descritores da matriz de referência da avaliação, **Maria José França e Marcelo Câmara** investigaram os resultados dos estudantes no cálculo das operações com números naturais e resolução de problemas, realizando a análise documental de quatro descritores e quatorze itens, sendo seis itens relativos ao cálculo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, e oito itens relativos à resolução de problemas. Evidenciou-se que os estudantes sabem operar com os números naturais e efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, fazendo uso do cálculo mental, na resolução de problemas e nas operações. A dificuldade dos estudantes foi compreender o enunciado das questões buscando dar sentido aos dados dos problemas.

A pesquisa apresentada no **Capítulo 9** considerou o conceito de perímetro, enquanto grandeza comprimento. **Mônica Campelo e Marcelo Câmara** elegeram como suporte teórico o modelo didático de Douady & Perrin-Glorian (1989), que trata da articulação e diferenciação entre os quadros geométrico, das grandezas e numérico, assim como a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau. O experimento iniciou-se com a aplicação de um pré-teste, seguido de uma sequência de atividades composta por seis sessões e culminou com a aplicação de um pós-teste. Os resultados revelaram que houve um avanço significativo, no que concerne à construção do conceito de perímetro, enquanto grandeza comprimento, nas duas turmas.

A pesquisa apresentada no **Capítulo 10** teve como objetivo investigar os efeitos didáticos que emergiram de uma sequência de atividades que explora a noção de fração mediante o significado parte/todo do número racional. A sequência didática, constituída por três grupos de atividades, foi extraída do livro didático de Matemática adotado por professores de uma rede municipal de ensino da Região Metropolitana do Recife. Em uma das escolas vinculadas a essa rede, **Luciana Santos e Marcelo Câmara** propuseram a aplicação da sequência didática selecionada, para quarenta e dois alunos do 5º Ano do Ensino Fundamental. Para viabilizar a análise dos dados, recorreu-se ao aporte teórico e a fundamentos presentes na Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau, 1986). Entre as conclusões apresentadas nesse estudo destaca-se que o jogo de variáveis didáticas e o dos respectivos valores, manipuladas pelos autores do livro didático, também influenciam as estratégias mobilizadas pelos alunos durante a resolução das atividades e/ou dos exercícios.

O **Capítulo 11** apresenta uma análise das respostas, elaboradas por estudantes de 9º ano do Ensino Fundamental, a dois itens de álgebra, ocorridas em três momentos distintos. Esta pesquisa, desenvolvida por **Rinaldo Beltrão e Marcelo Câmara,** em um primeiro momento, observou respostas que remontam ao exame do SAEPE de 2008; no segundo momento, retoma pesquisa apresentada como conclusão do curso de pós-graduação stricto sensu em 2011; no terceiro momento, apresentam-se questões oriundas do curso *Preparatório para Exames Seletivos*, oferecido em 2017 a estudantes das escolas da rede pública municipal de ensino do Recife. Os resultados encontrados nos dão uma sinalização de que existe um avanço na aprendizagem da Matemática. O que precisamos, diante das necessidades e demandas de nossa sociedade, é encontrar caminhos para acelerar esse processo.

O **Capítulo 12** apresenta uma pesquisa realizada por **Marcelo Leôncio e Marcelo Câmara**, com objetivo de investigar que fatores de congruência, na perspectiva de Raymond Duval (2004), interferem na conversão da linguagem natural em linguagem algébrica, na resolução de problemas. Adotou-se a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval. Foram abordados os problemas de partilha de Marchand e Bednarz (1999). Os protocolos possuíam oito problemas, com a variação da presença ou não dos fatores de não congruência, com posterior análise dos registros encontrados com o auxílio do software *CHIC*. Os resultados obtidos indicaram que a existência ou não da conservação de fatores de transformação pode indicar o emprego de registros não algébricos.

O **Capítulo 13** relata uma investigação que teve como objetivo analisar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2011. Como resultado, **Jadilson Almeida e Marcelo Câmara** destacaram que os livros didáticos brasileiros têm uma forte tendência em explorar problemas que podem não favorecer a passagem da aritmética à álgebra, os denominados "falsos problemas", e os problemas de estrutura aritmética. Em relação aos problemas de estrutura algébrica, observou-se que todos os livros dão preferência aos problemas de partilha de quantidades.

No **Capítulo 14**, **Josué Ferreira e Marcelo Câmara** investigaram como os professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais, tomando por base as expectativas de aprendizagem dos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco. A pesquisa teve como instrumento diagnóstico um questionário, composto de vinte propostas de ensino sobre os números racionais, aplicado a 152 professores do 4º e do 5º ano. Nesta pesquisa, eles apresentam as análises referentes às propostas de ensino sobre equivalência de frações em quantidades intensivas e extensivas. Os resultados revelaram que os professores, em geral, não demonstram conhecimento matemático para o ensino, pois não consideram as quantidades intensivas e extensivas quando trabalham a equivalência de frações em situações contextualizadas.

Para finalizar, o **Capítulo 15** apresenta um estudo que teve por objetivo analisar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o software educacional GeoGebra como recurso didático. Com uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi realizada com 30 alunos do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública do Recife (Pernambuco). Para isso, **André Pereira e Marcelo Câmara** utilizaram como fundamentação teórica o modelo de Van-Hiele sobre o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, centrando nos níveis iniciais. Entre os resultados obtidos, constatou-se que uma parte considerável dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais de pensamento geométrico (do primeiro nível para o segundo nível), por meio da sequência didática (sendo verificado entre 27% do total de alunos participantes do estudo).

Enfim, esperamos que esta obra contribua para a construção de novos olhares sobre a conexão entre a teoria e a prática docente e impulsione a realização de novas reflexões sobre as questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem no campo da matemática escolar.

Desejamos a todos uma leitura proveitosa!

Jadilson Almeida

Regina Celi

André Pereira

Organizadores

CAPÍTULO 1

REFLETINDO SOBRE A ATIVIDADE MATEMÁTICA: O CÁLCULO MENTAL DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL[1]

Graciane Apolônio da Silva
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Trata-se de artigo sobre uma pesquisa realizada entre 1998 e 2001, para analisar os procedimentos de cálculo de adição e subtração mobilizados por crianças de primeira e quarta séries de uma escola pública no Recife/PE. Procurou-se identificar, também, quais os invariantes ou princípios, os procedimentos, as regras de ação e as inferências que norteiam as estratégias utilizadas. Essa pesquisa foi objeto da Dissertação de Mestrado em Educação defendida pela autora.

Hoje, quase vinte anos depois, surgiu a iniciativa de um grupo de alunos, todos do mesmo orientador, professor Dr. Marcelo Câmara, de homenageá-lo com a publicação de um livro com artigos produzidos por seus orientandos, razão pela qual este trabalho de dissertação de mestrado está sendo revisitado.

[1] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2000.

A pesquisa foi feita utilizando-se o método clínico de Piaget, em que o examinador procura, durante o exame, acompanhar o raciocínio do sujeito, atentando para o que ele diz ou faz, sem corrigi-lo e sem completar a sua resposta. Deu-se mais ênfase ao processo do que ao resultado do cálculo.

Para participação na pesquisa, foram selecionadas quatro turmas – duas de primeira série e duas de quarta série. De cada série foram entrevistados 20 alunos, dentre aqueles que não tiveram reprovações, que apresentavam menor infrequência escolar e que estavam na mesma faixa etária. Depois, foram realizadas sessões de entrevistas com cada aluno, para explicitação dos procedimentos de cálculo, sendo tudo registrado por meio da escrita, da gravação de áudios e de vídeos.

Em regra, foram utilizadas contas aritméticas de adição e subtração, que foram aplicadas oralmente. Subsidiariamente, recorreu-se a problemas aritméticos, para estimular a explicitação dos procedimentos de cálculo. Tudo tinha que ser resolvido mentalmente, e a explicação e os resultados, ditos oralmente. Posteriormente foram feitas as transcrições dos áudios, complementando as informações com as imagens gravadas em vídeo, elaborando-se um protocolo para cada criança. A partir desses protocolos, elaboraram-se as categorias de análise, e foi feito o enquadramento das explicitações das crianças nas categorias formuladas.

Partiu-se da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para analisar os dados, categorizando-os em esquemas com regras de ação e invariantes.

Como já se passaram quase vinte anos da pesquisa, e, nesse período, novos documentos norteadores da prática pedagógica foram publicados, este artigo traz uma análise da Base Nacional Comum Curricular acerca da abordagem do cálculo mental.

Convém ressaltar que a autora sentiu a necessidade de fazer uma abordagem epistemológica acerca do cálculo mental, partindo do filósofo Kant, que influenciou a elaboração da Teoria dos Campos Conceituais de Gerárd Vergnaud.

Esses dois últimos pontos são acréscimos em relação ao trabalho de dissertação do Mestrado em Educação defendido há quase duas décadas.

Sobre o Cálculo Mental e a Teoria dos Campos Conceituais

Ao escrevermos a dissertação de Mestrado em Educação que teve por base a pesquisa em questão (SILVA, 2000), consideramos o Cálculo Mental como o conjunto de estratégias de cálculo mobilizadas para adicionar ou subtrair, que se apoiam no sistema de numeração decimal e que podem ser mobilizadas tanto na escola, como fora dela, sem a utilização de ferramentas, como a calculadora, e sem obedecer às regras de ação da conta formal.

O cálculo mental não é um tipo de estratégia “reprodutiva”, que consiste em recuperar diretamente os resultados armazenados na memória. É um tipo de estratégia “reconstrutiva”. Isso decorre do fato de que o funcionamento cognitivo humano pressupõe o estabelecimento de representações mentais e de conceptualizações. Um conceito só adquire sentido para uma criança por meio de situações e de problemas a resolver e não, simplesmente, por meio da sua definição; por isso, adota-se aqui a noção de esquema de Gerárd Vergnaud.

Falcão (1996) comenta que, para Vergnaud, o esquema se constitui como elemento central para a compreensão do funcionamento cognitivo e, consequentemente, do desenvolvimento dos conceitos. Consiste, assim, na organização invariante do comportamento para uma classe de situações dadas. Esse processo ocorre por meio de esquemas já automatizados ou da combinação, recombinação, ou acomodação de vários esquemas. Nessa última, ocorrem descobertas.

A confiabilidade no uso de um ou de outro esquema, para o sujeito, baseia-se no conhecimento, explícito ou implícito, que ele possui acerca das relações entre os conceitos e as características do problema a resolver. Cada esquema se relaciona a uma classe de situações com características bastante definidas. Assim, um esquema não é um estereótipo e, sim, uma função temporalizada de argumentos, que permite gerar diferentes sequências de ações e tomadas de informações, em função dos valores das variáveis da situação. Não se pode descartar o fato de se poder aplicar o esquema a uma classe mais ampla de situações, podendo-se falar, então, de generalização, deslocamento, transferência ou descontextualização. Nessa reflexão, considera-se, aqui, que o reconhecimento de invariantes se constitui como a chave da generalização de um esquema.

De acordo com Falcão (1996), se, no primeiro momento, considera-se que as regras de ação compõem os esquemas, estes não se resumem àquelas, pois comportam tais invariantes operatórios, inferências e antecipações. São os invariantes que permitem aos esquemas acharem as condições de funcionamento nas diversas situações com as quais o indivíduo se defronta e que dirigem tanto o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes à situação, como a tomada da informação sobre a situação a tratar; são as inferências que permitem aos esquemas levarem em conta os valores atuais das variáveis de situação e se adaptarem a situações novas, calculando regras e antecipações. Estas antecipações, por sua vez, são responsáveis pela funcionalidade dos esquemas. Enfim, as regras de ação engendram a sequência de ações do indivíduo. Tais regras de ação, contudo, não seriam nada sem os outros componentes.

Ocorre que os invariantes operatórios, que são os princípios e as propriedades que regem as regras de ação nos procedimentos de cálculo mental, segundo Vergnaud (1993), constituem-se, muitas vezes, como conceptualizações implícitas. Isso significa dizer que o sujeito pode até se utilizar de um princípio matemático, mas pode não saber falar sobre ele, e, muitas vezes, não tem consciência do seu significado no processo.

Ao ser colocado, aqui, o cálculo mental como esquema, entende-se que, como tal, ele é dotado também de regras de ação, invariantes, antecipações e inferências.

Resultados da Pesquisa

Na análise dos dados da pesquisa, constatou-se a mobilização de sete grandes categorias de estratégias de cálculo, conforme descrição nas tabelas abaixo.

Tabela 1 – Estratégias de cálculo utilizadas pelos alunos, com o percentual por série

Série/estratégia	Primeira série	Quarta série
Memória	4%	12%
Contagem	73%	42%
Decomposição	5%	25%
Comparação	0%	7%
Composição	1%	3%
Algoritmo formal	0%	5%
Sem explicação[2]	17%	6%
TOTAL	100%	100%

Fonte: Silva (2000, p. 96)

[2] As crianças deram a resposta, mas não a explicaram, ou se negaram a responder.

Vê-se que, entre as crianças menores (primeira série), duas categorias não foram mobilizadas: comparação e algoritmo formal. As crianças maiores (quarta-série) usaram todas as categorias, especialmente a contagem e a decomposição. Na contagem, as regras de ação utilizadas pelas crianças foram:

Tabela 2 – Regras de ação para o cálculo mental por contagem

Regras de ação/série	Primeira série	Quarta série
Contagem progressiva, regulada em zero	21,28%	5,45%
Contagem progressiva, partindo do cardinal	31,81%	39,15%
Contagem regressiva, a partir do maior número envolvido	28,75%	47,25%
Contagem regressiva, de dez em dez	-	8,15%
Contagem aleatória	18,16%	-
Total	100%	100%

Fonte: Silva (2000, p. 105)

Os invariantes constatados para cada regra de ação da contagem foram:

Quadro 1 – Invariantes de cada regra de ação da contagem

Regras de ação	Invariantes
Contagem progressiva, regulada em zero	Sequência numérica memorizada. Ideia de quantidade atrelada à representação numérica. Princípio da correspondência um a um (cada numeral pronunciado corresponde a um dedo, a um palitinho ou bolinha desenhados). Concepção da sequência numérica atrelada à quantidade. Relação de ordem que consiste em contar os elementos de uma coleção, uma vez apenas e sem se esquecer de contar nenhum. Princípio da inclusão hierárquica, que consiste em compreender que o último número é maior que o anterior e engloba o anterior mais um. Princípio da Cardinalidade, em que o último número falado reflete a quantidade envolvida.
Contagem progressiva, partindo do cardinal	Todos os Princípios da linha anterior. Propriedade comutativa, que é noção de que a ordem das parcelas não altera a soma. Princípio da economia das ações, em que se começa a contagem do segundo número, tomando por base o número maior, para contar menos.
Contagem regressiva, a partir do maior número envolvido.	Mesmos princípios da contagem progressiva, porém realiza-se a contagem na ordem decrescente.
Contagem regressiva, de dez em dez	Mesmos princípios da linha anterior. Princípio de organização decimal do sistema – ideia de dezena. Princípio de comparação de números menores com maiores múltiplos de 10.
Contagem aleatória	Identificação dos números, mas sem atrelar aos outros princípios.

Fonte: SILVA, 2000, p. 104/111

Na categoria de Decomposição, têm-se as seguintes regras de ação:

Tabela 3 – Regras de ação para o cálculo mental por Decomposição

REGRAS DE AÇÃO/SÉRIE	PRIMEIRA SÉRIE	QUARTA SÉRIE
Decomposição dos números em números menores, usando a ideia de unidade e dezenas, somando-se os resultados parciais.	2%	13%
Decomposição dos números em números menores, usando a ideia de unidade e dezenas, somando-se os resultados parciais.	3%	12%

Fonte: Silva (2000, p. 111-114)

Em relação aos invariantes envolvidos na decomposição, apresenta-se o seguinte:

Quadro 2 – Invariantes de cada regra de ação da Decomposição

Regras de ação	Invariantes
Decomposição dos números em números menores, usando a ideia de unidades e dezenas, somando-se os resultados parciais.	Todos os princípios da contagem. Princípio da Base dez. Princípio do valor absoluto do número. Princípio do valor relativo do número. Princípio do valor posicional dos números. Princípio multiplicativo para saber o valor do símbolo. Princípio aditivo para saber qual a quantidade registrada pelos símbolos combinados. Princípio da expressão da ausência de quantidade – o zero.
Decomposição dos números em números menores, usando a ideia de unidades e dezenas, somando-se os resultados parciais.	Os mesmos da linha anterior.

Fonte: Silva (2000, p. 111-114)

Quanto à comparação de quantidades, tem-se duas regras de ações:

Tabela 4 – Regras de ação para o cálculo mental por Comparação

Regras de ação/série	Primeira série	Quarta série
Comparação de somas ou subtrações de quantidade menores, multiplicando-se por dez, para resolver somas ou subtrações de quantidades maiores.	0%	3%
Comparação de somas com duplos	0%	4%

Fonte: Silva (2000, p. 115-116)

Os invariantes envolvidos nessas regras de ação são:

Quadro 3 – Invariantes de cada regra de ação da comparação

Regras de ação	Invariantes
Comparação de somas ou subtrações de quantidade menores, multiplicando-se por dez, para resolver somas ou subtrações de quantidades maiores.	Os princípios utilizados na decomposição.
Comparação de somas com duplos	Os princípios utilizados para a contagem associados à memorização de resultados de soma de duplos, como cinco mais cinco igual a dez, então cinco mais quatro são nove.

Fonte: Silva (2000, p. 115-116)

E na regra de ação de composição de quantidades, parte-se do menor cardinal e vai completando até chegar no maior cardinal e verifica-se quando foi acrescentado.

Tabela 5 – Regras de ação para o cálculo mental por composição

Regras de ação/série	Primeira série	Quarta série
Composição de quantidades, parte-se do menor cardinal, vai completando até chegar ao maior cardinal e verifica-se quanto foi acrescentado.	1%	3%

Fonte: Silva (2000, p. 116-117)

Os invariantes para a composição de quantidades são:

Quadro 4 – Invariantes da regra de ação da composição

Regras de ação	Invariantes
Composição de quantidades, parte-se do menor cardinal, vai completando até chegar ao maior cardinal e verifica-se quanto foi acrescentado.	Os princípios utilizados na contagem. Relações de complementariedade e de inversão entre adição e subtração.

Fonte: Silva (2000, p. 116-117)

Em todas essas situações, é importante destacar que as crianças já traziam as concepções de juntar ou tirar atreladas aos sinais de mais e de menos.

Diante desses resultados, segue uma análise filosófica e, consequentemente, epistemológica, acerca do cálculo mental, o que se constitui como novidade para essa pesquisa.

O Cálculo Mental e a Base Nacional Comum Curricular

Analisando-se a Base Nacional Comum Curricular do Brasil (BNCC), publicada em 2018, vê-se que o cálculo mental de adição e subtração já está contemplado. Vejamos:

> No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras. (BRASIL, 2019, p. 268).

O certo é que o cálculo mental de adição e subtração já está contemplado na Base Nacional Comum Curricular e nos livros didáticos utilizados na rede pública. Seria necessária uma pesquisa mais apurada para saber se, efetivamente, esse tipo de estratégia está sendo evidenciado nas salas de aula; formalmente, contudo, já está contemplado.

Alguns Aspectos Filosóficos e Epistemológicos na Análise do Cálculo Mental

Ao escrever este artigo sobre a dissertação de Mestrado elaborada quase 20 anos atrás, percebemos a necessidade de aprofundar a reflexão filosófica e, consequentemente, epistemológica, sobre a formação do conhecimento humano, para descobrir a natureza do cálculo mental.

Lopes, Sá e Darsie (2018, p. 251/252) afirmam que, para elaborar a Teoria dos Campos Conceituais, Gerard Vergnaud apoiou-se principalmente nas concepções de Jean Piaget e Vygotsky. Estes se apoiaram em outros filósofos e pesquisadores, como positivamente em Rousseau e Kant, incorporando seus pensamentos, e em Lévi-Strauss, negativamente, refutando seus pensamentos.

Rousseau levantou a questão da importância do cuidado com a formação na infância. Suas ideias influenciaram Jean Piaget e, consequentemente, Gerárd Vergnaud. Lopes, Sá e Darsie (2018, p. 252/253) indicam que o pensamento de Jean Piaget também foi influenciado por Kant, na medida em que este filósofo pensa num sujeito ativo, que organiza o mundo a partir do seu modo de percebê-lo, partindo de si próprio, adaptando o objeto às leis do sujeito. Contudo, Piaget critica o ponto de vista de Kant acerca de uma capacidade inata do sujeito, ao dizer que:

> Além de organizar os objetos do mundo a partir de si próprio, os sujeitos também constituem essas maneiras de organizar os objetos. Isto é, enquanto Kant afirma sobre a existência de uma capacidade intelectual que já estaria constituída no sujeito, Piaget extingue essa noção de capacidade e propõe a noção de um desenvolvimento intelectual em construção (LOPES; SÁ; DARSIE, 2018, p. 254).

Morujão (1981) afirma que Kant "funda a aritmética e a geometria, a ciência matemática, portanto". Por isso, escolheu-se analisar o pensamento do autor, nessa parte. Ainda segundo Morujão (1981, p. 225), Kant entende que o conhecimento humano vem da experiência, o que consiste em *juízo sintético*, mas afirma que isso não se aplica a tudo, pois existem também os *juízos analíticos*, que consistem em explicitação, depois de uma análise, de conceitos que já se tem das coisas, sem criar conhecimentos novos. Porém, apenas esses juízos (sintético e analítico) não são suficientes para se chegar a um saber autêntico, pois para este, são imprescindíveis as faculdades do sujeito. São essas faculdades que Piaget afirma estarem em desenvolvimento no sujeito, enquanto Kant as considera já existentes. É o que Kant designa por *juízo sintético "a priori*" (KANT, 1997, p. XII):

> O a priori que se busca diz respeito à estrutura do sujeito, a qual torna possível a experiência. Esta contribui para o conhecimento através dos sentidos, que nos fornecem impressões. Faltando estas, a faculdade de conhecer não tem matéria. Ordinariamente o conhecimento é assim constituído pela matéria e pela elaboração que esta sofre graças à estrutura do sujeito.

Observa-se aqui que, para Kant, além dos juízos sintéticos e analíticos, há uma espécie de juízo, chamado por ele de *sintético a priori*, que consiste nas faculdades que tornam possível o conhecimento autêntico. Diz respeito à estrutura do sujeito. Morujão (1981) afirma que são a *sensibilidade*, que é intuitiva e possibilita o acesso imediato às coisas, e o *entendimento*, que é espontâneo e não intuitivo. A sensibilidade é caracterizada pela receptividade, enquanto o entendimento caracteriza-se pela espontaneidade.

> A receptividade é conhecimento segundo o modo como a realidade se manifesta ou aparece ao sujeito cognoscente: é subjetividade. Pelo contrário, a espontaneidade é um conhecimento absolutamente livre de toda a condição subjectiva, logo plenamente objetivo. Os sentidos, por consequência, conhecem as coisas *uti apparent*, o entendimento *sicuti sunt*. A sensibilidade, pelo seu carácter receptivo, é passiva, exige a presença concreta, imediata, do objeto; é sempre intuitiva, em oposição ao conhecimento intelectual, que é simbólico, por conceitos universais em abstracto. A esta distinção entre sensibilidade e entendimento corresponde uma distinção entre os respectivos objetos. Lê-se na "Dissertatio": "o objeto da sensibilidade é o sensível; e o que apenas contém aquilo que pode ser conhecido pela inteligência é o inteligível. O primeiro chamava-se nas escolas antigas fenômeno; o segundo, númeno. Aos fenômenos, como objetos da sensibilidade, podem fazer-se corresponder as coisas *uti aparente*. Aos númenos, as coisas *sicuti sunt*. (MORUJÃO, 1981, p. 226/227).

Para Kant, os fenômenos são captados pelas formas *a priori* da sensibilidade – o espaço e o tempo – que fornecem representações ao homem. Essas formas *a priori* não são conceitos, mas intuições, ou seja, representações singulares. São formas cognitivas, *a priori,* com as quais se constrói a geometria (o espaço) e a aritmética (o tempo). Elas são o fundamento dos juízos sintéticos *a priori,* garantia da universalidade e necessidade destas disciplinas (KANT, 1997, p. XIII). Estas passam pela síntese *a priori* do entendimento, que unifica tais representações dando-lhes forma de objeto.

Nesse sentido, as condições supremas da sensação são o espaço e o tempo e são estudadas na Estética transcendental (a palavra estética em Kant não significa belo ou beleza). O seu escopo é, precisamente, estudar como são possíveis a matemática e a geometria. Elas são constituídas por conhecimentos universais de caráter intuitivo, ou seja, nascem do fato de que a mente humana é dotada de duas formas *a priori*, que têm precisamente as características da universalidade e da intuitividade, e que são sobrepostas a todos os conhecimentos da matemática e da geometria. Os sentidos externos recebem os estímulos sob a forma de espaço, de modo que toda sensação externa aparece extensa. Os sentidos internos recebem os estímulos sob a forma de tempo, pelo que toda sensação ocupa um lugar no tempo: a síntese dos dados sensoriais sob a forma de espaço e tempo dá como resultado o fenômeno, ou seja, a coisa em ralação a nós (e não o número – a coisa em si).

Mas, eles (espaço e tempo) não são produzidos pela experiência. Então, vem a pergunta básica kantiana: por que espaço e tempo não são produzidos pela experiência, mas são condições *a priori* de toda experiência? A resposta é que eles só podem ser considerados como forma *a priori*, vale dizer, formas da mente humana, esquemas em si vazios, presentes em toda mente e que se tornam perceptíveis no ato em que formam um conteúdo empírico.

Kant conclui que a matemática e a geometria são ciências porque são constituídas por proposições universais e extensivas do conhecimento humano. Quanto à universalidade, demonstra que é possível, provando que espaço e tempo, elementos que acompanham todas as proposições matemáticas e geométricas, são mesmo formas apriorísticas e, portanto, universais.

Quanto à extensividade, ele faz prova indireta, ao dizer que, para a descoberta de proposições matemáticas e geométricas, é preciso o uso dos sentidos. Dois exemplos podem ilustrar: não seria possível descobrir a proposição segundo a qual, em uma superfície plana, somente duas linhas retas podem cruzar-se em ângulo reto em um mesmo ponto; sem o uso dos cinco dedos ou outro artifício não é possível aprender a proposição segundo a qual sete mais cinco são doze.

O entendimento, por sua vez, fornece os conceitos e princípios que lá existem de um modo *a priori*. Consiste numa função unificadora caracterizada pelo ato de julgar, que se traduz numa espécie de categorização. “As categorias são assim para

Kant os diferentes pontos de vistas, segundo os quais o entendimento executa a síntese dos dados múltiplos da intuição, formando o objeto”. As categorias são as formas *a priori* do entendimento (MORUJÃO, 1981, p. 232). Elas têm um caráter objetivo e somente por meio delas é possível a experiência. Para Kant, as categorias aplicam-se aos fenômenos por meio de um esquema, que não é uma imagem, “mas um método de construir uma imagem em conformidade com um conceito [...] será uma determinação do tempo segundo as exigências de cada categoria. Obter-se-ão assim tantos esquemas quanto o número de categorias.” (KANT, 1997, p. XV).

Ocorre que, além da sensibilidade e do entendimento, há outra faculdade tratada por Kant: a razão. Esta tem a missão de unificar os juízos formados na instância do entendimento. A razão não se liga às experiências, mas aos conhecimentos formados a partir do entendimento. O ato próprio da razão é o raciocínio. Este tem a função de unificar os conhecimentos formados pelo entendimento. Vê-se que, para Kant, o raciocínio tem a função de ligar os conhecimentos, dando-lhes unidade, segundo uma relação de princípio e consequência. É uma necessidade de o homem unificar os conhecimentos dispersos, conferindo-lhes uma unidade mais completa.

A par desses esclarecimentos acerca do pensamento de Kant, tem-se que as estratégias de cálculo mental utilizadas pelas crianças de primeira e quarta séries são esquemas construídos a partir dos invariantes já mencionados no tópico anterior, e, como tais, constituem formulações do entendimento. Este, por sua vez, formula esquemas baseando-se em categorizações já existentes no sujeito e acionadas a partir da experiência. Sendo assim, o cálculo mental é uma espécie de juízo sintético *a priori*.

Conclusão

Kant entendia que o saber não consiste na recepção de dados, mas numa construção, uma vez que que uma pessoa não é uma tábula rasa. Sendo assim, para ele, os juízos matemáticos são todos sintéticos e, como tais, necessitam da experiência para serem formulados a partir das faculdades já existentes no sujeito.

Na perspectiva kantiana, o conhecimento que começa pela experiência consiste num conhecimento elaborado a partir da captação dos objetos por meio dos sentidos, o que gera representações que acionam a faculdade intelectual e levam o indivíduo a fazer comparações, estabelecer ligações ou separações. Esse conhecimento, chamado de experiência, é *a posteriori*, porque resulta de todo esse processo.

Porém, há tipos de conhecimentos que não decorrem diretamente da experiência, os quais Kant denomina de *a priori,* distinguindo-os do empírico, uma vez que este, como mencionamos, tem origem *a posteriori*, na experiência. Os juízos *a priori* independem absolutamente de experiências e podem ser considerados puros quando nada têm de empírico, distinguindo-se assim o conhecimento puro de um conhecimento empírico.

Kant estabelece, como critérios para que um juízo seja considerado *a priori,* o fato de ser **necessário**, e, verdadeira e rigorosamente, **universal** – qualidades inseparáveis – inadmitindo toda e qualquer exceção. O autor indica ser fácil mostrar que, no conhecimento humano, há juízos necessários e universais, no mais rigoroso sentido, ou seja, juízos puros *a priori*. Ele classifica assim todos os juízos da matemática.

Para Kant, os juízos matemáticos são juízos *a priori* puros, proposições *a priori* vazias, presentes no intelecto humano, que encontram na experiência seu preenchimento.

Ocorre que, mesmo a par das considerações kantianas, entende-se que esses juízos *a priori*, depois de acionados e significados na experiência e externados socialmente, ganham força de juízos universais. Continuam sendo juízos matemáticos, mas tornam-se patrimônio da humanidade e, como tais, podem ser captados também por meio dos sentidos, a partir da dinâmica da experiência. Percebe-se, portanto, que os juízos universais, derivados da externalização dos juízos *a priori,* depois de significados pela experiência, agora também são objeto de captação por meio dos sentidos, notadamente pela visão e pela audição.

Isto foi constatado na pesquisa em questão, eis que se observou que 73% das crianças da primeira série utilizam como estratégia de cálculo mental a contagem. Para esta, é imprescindível o uso do sistema de numeração decimal, que se tornou patrimônio universal. A criança aprendeu a contagem com alguém mesmo possuindo juízos *a priori* de representação de quantidade por meio de símbolos numa ordem de correspondência com os objetos.

Por exemplo, os invariantes da contagem progressiva regulada em zero são: sequência numérica memorizada; ideia de quantidade atrelada à representação numérica; princípio da correspondência um a um (cada numeral pronunciado corresponde a um dedo, a um palitinho ou bolinha desenhados); concepção da sequência numérica atrelada à quantidade; relação de ordem, que consiste em contar os elementos de uma coleção, uma vez apenas e sem se esquecer de contar nenhum; princípio da inclusão hierárquica, que consiste em compreender que o último número é maior que o anterior e engloba o anterior mais um; princípio da cardinalidade, em que o último número falado reflete a quantidade envolvida.

Diante da visão de Kant de que os seres humanos formulam juízos sintéticos *a priori*, e considerando que os juízos matemáticos se enquadram nessa categoria, pode-se dizer que os invariantes acima estão presentes na mente humana e são acionados a partir da experiência decorrente das representações do mundo empírico. Assim, seria necessário esperar o processo de descoberta da pessoa a partir das suas experiências cotidianas.

Ocorre que, pelo fato de os juízos matemáticos, quando externados, devido às suas qualidades de necessários e universais, tornarem-se juízos universais, desacoplados do intelecto humano para serem passíveis de captação por meio dos sentidos, notadamente, da audição e visão, esse fato leva a crer que não seria necessário esperar o processo de construção natural dos juízos sintéticos *a priori* do indivíduo. Este pode ser acelerado e abreviado por meio do acesso aos juízos universais, que se conformam aos juízos sintéticos numa justaposição de conhecimentos.

Isso repercute no processo de ensino aprendizagem.

Nesse caso, mantém-se o preenchimento dos juízos *a priori* a partir da experiência, mas esta se dá também com a captação, por meio dos sentidos, notadamente da visão e audição, dos juízos que se tornaram universais. A conformação de um com o outro é rápida e eficaz. O contato com os objetos empíricos que formam a experiência apenas ilustrará profundamente uma fusão que já ocorreu.

Portanto, tais juízos universais passam a ter existência própria e real fora do indivíduo, até porque podem ser manipulados por um indivíduo, em favor da formação de conhecimento mais rapidamente pelo outro. E, nesse ponto, tais juízos ligam-se à experiência, na medida em que são ensinados.

É possível identificar que há conceitos que derivaram da externalização de juízos sintéticos *a priori* e se tornaram juízos universais com existência independente, até mesmo, das faculdades de conhecer de um indivíduo, na medida em que podem ser ensinados àqueles que ainda não formularam tal conhecimento a partir da experiência decorrente do mundo empírico.

Essa constatação, de juízos matemáticos que se tornam universalmente aceitos e adquirem existência fora do indivíduo e, como tal, podem lhe ser ensinados, leva ao questionamento sobre o que nasceu primeiro: “o necessário e universal” ou o homem? Se este é capaz de ser modelado pelo “necessário e universal” pode ter vindo primeiro que isso? O necessário e universal só pode ser formulado inicialmente no nível das faculdades humanas de conhecer? Há algo fora do homem, tão universal e necessário, que exerça influência sobre as suas faculdades de conhecer e possa também se conformar a elas e preenchê-las? Fora do homem existe verdade?

Parece que sim. Para Kant, a matemática é uma prova da existência de conhecimentos *a priori* que não dependem da experiência, mas, neste trabalho, entende-se que os juízos matemáticos externalizados adquiriram *status* de conhecimentos aceitos universalmente e, como tais, adquiriram existência fora do indivíduo, podendo até mesmo lhe ser ensinados e conformados a juízos pré-existentes. Tais juízos, ditos aqui de universais, podem ser captados pelos sentidos, especialmente da visão e da audição, criando representações capazes de preencher os juízos sintéticos *a priori* numa conformação plena e, muitas vezes, profunda de significados.

Kant diz que Platão abandonou o mundo dos sentidos, e coloca-os como ponto de apoio para a formação de outros conhecimentos. Entretanto, Kant desprezou o fato de que mesmo os juízos matemáticos *a priori,* quando externalizados e aceitos universalmente, ganham existência fora do indivíduo e podem ser captados por meio dos sentidos, especialmente da visão e da audição, como já dito, preenchendo os juízos sintéticos a *priori.*

Outro ponto importante é que existem soluções matemáticas que decorrem apenas do juízo analítico. São apenas explicitação de algo já conhecido. Não são construções.

Na pesquisa realizada, observou-se que as crianças, tanto da primeira série quanto da quarta série, para resolver as operações matemáticas, utilizaram juízos analíticos, quando utilizaram a memória. São estratégia reprodutivas. O uso da memória para as crianças de primeira série foi em torno de 4%; entre as de quarta série, o percentual foi de 12%. Esses conhecimentos são analíticos e não sintéticos.

Diante dessa visão, não há problema nenhum em se estimular o uso da memória no processo de ensino–aprendizagem, já que se trata de um recurso utilizado naturalmente pelo homem e pode ser explorado para facilitar os desafios matemáticos.

Já os outros esquemas utilizados, tais como contagem, decomposição, comparação e composição, constituem juízos analíticos “a priori”, na medida em que são formulados no nível do entendimento pela categorização dos invariantes observados, os quais, relacionados, constroem a estratégia de cálculo. Eles assumem um caráter de universalização, eis que evidenciados da mesma forma, em várias crianças. Ainda assim, não prescindem de dados armazenados na memória e somente são formulados a partir da experiência que os impulsiona, mesmo já estando dispostos no entendimento do sujeito.

Esse entendimento tem implicações no processo pedagógico, na medida em que se admite que a criança possui a faculdade do entendimento, que formula juízos sintéticos *a priori*, por meio das categorias existentes, construindo esquemas a serem usados nas diversas situações. O cálculo mental é um exemplo desses esquemas. Possui invariantes que, relacionados e unificados entre si, a partir das exigências da experiência, formam uma estratégia de cálculo satisfatória.

Sendo assim, a criança não pode ser estimulada apenas a partir da experiência, mas deve ser estimulada, também, a utilizar a faculdade do entendimento para que possa elaborar esquemas capazes de serem aplicados nas experiências cotidianas. Deve ser estimulada a formulação de juízos sintéticos *a priori* por meio de práticas pedagógicas que levem a criança a reconhecer as faculdades do entendimento que já possui, bem como os esquemas e invariantes que já possui, para relacioná-los cada vez mais, até atingirem um grau de unificação por meio da razão, deixando de ser um simples esquema para virar um raciocínio matemático.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 set. 2019.

CORREIA, R. L.; COSTA, S. L.; AKERMAN, M. **Processos de ensinagem em desenvolvimento local participativo.** Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/inter/v18n3/1518-7012-inter-18-03-0023.pdf. Disponibilizado em 26 abr. 2017. Acesso em 01 set. 2019.

FALCÃO, J. T. R. **Elementos para uma abordagem psicológica do desenvolvimento de conceitos científicos e matemáticos.** In: DIAS, M. G. & SPINILO, A. G. Tópicos em psicologia cognitiva. Recife: Universitária UFPE, 1996.

KANT, Immanuel. **Crítica da Razão Pura.** Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 4 ed. Lisboa: Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

LOPES, T. B.; SÁ, P. F.; DARSIE, M. M. P. **Influências de epistemólogos anteriores e contemporâneos para a elaboração da Teoria Dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.** REVEMAT, Florianópolis (SC), v.13, n.2, p.250-263, 2018.

MORUJÃO, A. F. **Fenómeno, número, coisa em si: Notas sobre três conceitos kantianos.** Revista Portuguesa de Filosofia. T. 37, Fasc. 3. Jul. - Sep., 1981. p. 225-248.Disponível em:https://www.jstor.org/stable/40335672?read-now=1&s=3#page_scan_tab_

contents. Acesso em: 07 set. 2019.

SILVA, G. A. **Refletindo sobre a atividade matemática: o cálculo mental de adição e de subtração nas séries iniciais do ensino fundamental.** UFPE, 2000.

VERGNAUD, G. **Teoria dos Campos Conceituais**. In Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro – Projeto Fundão, Rio de Janeiro, 1993.

CAPÍTULO 2

INVESTIGANDO O PROCESSO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA: O CASO DOS QUADRILÁTEROS[3]

Marcus Bessa de Menezes
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Os saberes (os conteúdos ou conhecimentos) ensinados na escola, em certa medida, são uma produção exógena à própria escola. Esses saberes chegam ao ambiente escolar, por necessidades sociais de educação e difusão, adaptados (ou transpostos) à realidade do nível educacional que se está trabalhando. Para que um conhecimento seja ensinado, um trabalho transpositivo é necessário, a fim de que se atenda à linguagem e ao nível cognitivo dos estudantes a quem será ensinado.

A produção e a comunicação dos saberes de referência são, conforme mencionamos, necessidades sociais. O pesquisador, no mundo acadêmico/científico, sofre pressões internas e externas (ARSAC, 1989) para que comunique suas "descobertas", suas "teses". As pressões internas aparecem quando a própria

[3] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2004.

comunidade científica exige que tais saberes sejam comunicados, pois, a partir destes, novos saberes serão produzidos.

Por outro lado, existem, também, as pressões externas para a apresentação desse saber à sociedade. Os saberes comunicados, inicialmente, no mundo acadêmico e científico necessitam de um novo tratamento, no sentido de que sua roupagem mais acadêmica seja retirada e que ele possa, após essa primeira deformação, ser comunicado, compreendido e, se possível, utilizado socialmente, num período breve.

Uma vez produzido e comunicado o saber, ele necessita, agora, passar pelas adaptações necessárias para que se torne "ensinável". Assim, tem-se início a primeira etapa da transposição didática, como trataremos a seguir.

A Transposição Didática Externa: O conceito de Noosfera

Ao considerarmos o fenômeno da Transposição Didática, proposto por Chevallard (1991), observamos que a maioria dos estudos acerca desse fenômeno aborda principalmente essa etapa inicial, que consiste na transformação dos saberes científicos (*savoir savant*) em saberes a ensinar (*savoir à ensigner*). A etapa seguinte, que aqui trataremos como Transposição Didática Interna, chega a ser referida por vários autores (ARSAC, 1989; BORDET, 1997; CHEVALLARD, 1991; HENRY, 1991), mas há, ao que nos parece, muitas perguntas que ainda não foram respondidas (e que tentaremos abordar neste artigo) acerca dessa etapa.

O longo processo de transformação dos saberes científicos em saberes a ensinar é realizado no espaço que Chevallard intitula de NOOSFERA, e que envolve a comunidade (pessoas e instituições) responsável por estabelecer o que deve ser ensinado na escola.

Podemos, nesse sentido, referirmo-nos aos didatas, professores, pedagogos, técnicos de instituições do Governo responsáveis por gerir o ensino (no caso do Brasil, o MEC, por exemplo). Enfim, pessoas (muitas delas representando instituições) que vão elaborar programas, diretrizes curriculares, livros didáticos etc. Tais "programas, currículos, livros didáticos" aparecem, então, como instrumentos reguladores, no sentido de que vão normatizar o que deve ser ensinado na escola, o saber a ensinar, consolidando uma primeira etapa da transposição didática e caracterizando a transposição didática externa.

Henry (1991), por sua vez, fala na existência de uma etapa intermediária entre a transformação do saber científico em saber que deverá ser ensinado. Ele indica que o saber a ensinar é produzido quando da elaboração de programas de ensino (que devem ser acessíveis ao professor). Entretanto, não são os programas de ensino que conduzirão diretamente o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula. Aparecem, então, os manuais de ensino (aqui, no Brasil, livros didáticos), que estão relacionados aos programas, mas implicam uma nova adaptação: eles trazem o programa dividido em capítulos, apresentam ilustrações, podem conter exercícios; ou seja, caracterizam, na discussão proposta por este autor, um saber escolar (*savoir scolaire*). Henry (1991, p. 21) reafirma tal colocação, quando aponta que: "na realidade, os professores se referem mais aos manuais em vigor do que aos textos dos programas, quando estão a preparar uma sequência". E, mais além, que: "seu produto servirá durante um tempo de referência para a comunidade de professores e para os pais de alunos".

Não tencionamos aqui nos deter nessas diferenças. O que nos parece fundamental, considerando essas reflexões, é observar alguns aspectos relevantes: alguns mais gerais, relativos a esse processo de transformação do saber, e outros mais específicos, buscando estabelecer comparações entre essa abordagem em um país como a França e em um país como o nosso, o Brasil.

Primeiramente, ao sofrer tais "deformações", o saber científico, pouco a pouco, perde seu formato original. Isso implica dizer que ele começará a sofrer um processo de adaptações, supressões e modificações que farão com que alguns elementos originais sejam deixados pelo caminho. No entanto, é preciso considerar que, para Chevallard, o saber torna-se tanto mais legítimo quanto mais próximo ele for dos saberes de referência, e mais distante dos saberes espontâneos, vulgares, dos saberes dos pais.

Entretanto, embora Chevallard (1991) proponha que é fundamental que se considere que há uma distância entre o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado, não pode existir, para este autor, uma desconexão entre estes, pois esta desconexão provocaria situações de "crise". Assim, é necessário que se realize o que o autor chamou de vigilância epistemológica, para que tal distância, tais deformações e adaptações não culminem por “desfigurar” o saber original, de maneira que o saber a ensinar deixe de ser fiel a ele, criando obstáculos à aprendizagem.

É importante refletir que, no processo de transposição didática – considerando a distância entre o saber científico, o saber a ensinar e o saber ensinado – o professor nem sempre (quase nunca, na verdade) terá acesso ao saber original, mas à sua adaptação/deformação, através dos manuais de ensino e livros didáticos, e ainda será responsável por mais uma etapa nessa adaptação, que acontecerá no seio da relação didática, e que Chevallard chamou de trabalho interno de transposição didática (a ser discutido mais adiante).

Nesse processo de sucessivas adaptações, aparecem, também, as criações didáticas. Essas criações recebem tal nomenclatura exatamente por não existirem quando da produção do saber científico original. Elas são inventadas com um objetivo didático, ou seja, como um artifício para favorecer a apropriação, pelos alunos, do conhecimento em questão. Exemplos desse tipo de criação seriam os Diagramas de Venn, em matemática, ou o modelo da pizza para trabalhar noções de frações.

Ainda em relação à transposição didática externa, podemos refletir que Chevallard faz uma análise mais “sociológica” desse fenômeno, e que algumas de suas reflexões não são compartilhadas por outros teóricos que discutem o tema (BORDET, 1997).

Em sua análise, refletida em Bordet (op. cit.), Chevallard propõe que a noosfera, como um subsistema de um sistema maior – a sociedade – pode sofrer influências desta na proposição dos objetos de ensino.

Decerto que algumas disciplinas escolares nos parecem mais sujeitas às influências da sociedade – como um macrossistema – do que outras. Esse aspecto não foi discutido por Chevallard, mas acreditamos ser relevante, sobretudo quando nos referimos à organização do ensino no Brasil. Talvez possamos inferir que as disciplinas mais ligadas às Ciências Sociais sejam aquelas nas quais a noosfera mais sofre as pressões sociais.

Podemos tentar exemplificar essa ideia se tomarmos como referência o ensino de História em nosso país, nas últimas décadas. Até meados da década de 1970, ainda fortemente marcada pela Ditadura Militar, havia alguns conteúdos que eram trabalhados a partir da ótica política vigente na época. A questão do Golpe Militar de 1964, por exemplo, era tratado como Revolução, sem considerar que os conceitos de “Golpe” e de “Revolução” são bastante distintos. A própria ideia de “Descobrimento do Brasil”, por outro lado, foi modificada, sendo hoje compreendido que o que se passou foi um processo de colonização, de apropriação indevida das terras brasileiras e que o encontro dessas terras não se deu ao acaso, por um equívoco no caminho para as Índias, como era ensinado anteriormente à década de 1980.

Não se pode negar que há uma forte influência da comunidade científica nesse tipo de mudança: antropólogos, sociólogos, cientistas políticos contribuíram de modo fundamental para que esses objetos de ensino fossem modificados. Mas houve, também, todo um envolvimento da sociedade que não estava ligada à comunidade científica: movimentos sociais, organizações, etc. A noosfera, na nossa análise, sofreu as pressões sociais, havendo, assim, uma reestruturação dos saberes a ensinar, bem como dos textos didáticos que se encontravam nos livros.

É bem possível que a crítica que alguns teóricos propõem a essa visão de Chevallard (sobre a influência da sociedade na noosfera) possa estar relacionada a um caráter mais fechado, em relação ao ensino, na França e em outros países europeus, do que ao que encontramos no Brasil. Nesse sentido, quando Bordet (1997) afirma não compartilhar da concepção de Chevallard sobre a relação sociedade-noosfera, entendemos os princípios de sua análise, quando nos remetemos a outras sociedades e a outras relações sociais com os saberes a serem ensinados.

Seguindo-se todo esse processo, a transposição didática invade o universo da sala de aula. Nesse contexto, outras questões se delineiam, algumas até bastante diversas daqueles referentes à transposição didática externa. A seguir, abordaremos as peculiaridades dessa última etapa do processo, que é a que mais interessa ao nosso estudo.

A Transposição Didática Interna: O trabalho do professor

O passo final na transformação sofrida pelo saber científico é aquele que acontece intramuros da sala de aula, cujos parceiros envolvidos são, a rigor, professor e aluno, e que tem no professor o elemento humano responsável por tal transposição.

Logicamente, não podemos pensar que a transposição didática interna depende unicamente do professor; ela envolve questões bem mais amplas, que conferem uma complexidade considerável a tal processo, como discutiremos agora.

Na sala de aula, por exemplo, essa transformação implica, inicialmente, uma inversão do saber escolar em relação ao científico, como analisa Pais (1999, pp. 28-29):

> [...] o trabalho do professor envolve um importante desafio que consiste numa atividade que é, num certo sentido, inversa daquela do pesquisador. Pois, enquanto o matemático elimina as condições contextuais e busca níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática, ao contrário, deve recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno.

Quando nos referimos ao *trabalho do professor*, no sentido de estabelecer a transposição didática, e à sua importância na apropriação do saber pelos alunos, é necessário que consideremos alguns aspectos essenciais.

Em primeiro lugar, o professor organiza situações de ensino para alunos (elementos igualmente humanos da relação). Em segundo lugar – e não menos importante – o professor organiza situações de ensino sobre um dado saber. Isto posto, tomando em conta os dois elementos considerados, além do professor – aluno e saber – entendemos que a transposição didática, realizada pelo professor, está fundamentalmente vinculada a esses dois elementos que compõem, junto com ele, o sistema didático. Esse sistema não está, entretanto, sujeito à vontade do professor ou do aluno. Ele se institui a partir das relações aqui abordadas, que nem sempre – quase nunca, na verdade – têm um caráter objetivo. Olhar para a transposição didática interna é considerar, antes de mais nada, a triangulação proposta por Guy Brousseau (1986).

Se analisarmos que a transposição didática interna tem no professor o elemento central responsável pela sua realização, retomamos algumas ideias já abordadas anteriormente: relativas ao polo professor-saber e ao polo professor-aluno.

Primeiramente, a transposição didática interna faz, no nosso entendimento, uma interface com a relação do professor ao saber (*rapport au savoir*, na literatura francesa da Didática da Matemática). A transformação do texto didático em um saber ensinado perpassa pela relação que o professor tem com o saber em jogo. As situações de ensino a serem propostas estão, em certa medida, vinculadas a esta relação. A observação de professores em sala de aula revela que estes parecem se sentir mais à vontade e propõem, muitas vezes, situações de ensino mais interessantes, bem como suas intervenções em relação aos alunos parecem ser melhores, quando estes possuem uma relação mais estreita ao saber. Câmara dos Santos (1997), por exemplo, observa que em função da sua relação ao saber, os professores tendem a dilatar ou diminuir o tempo em que o saber em questão permanece no jogo didático.

Construtos metodológicos

Para darmos conta do que estava proposto, tomamos como sujeitos dois professores de uma mesma escola, com formação em licenciatura em Matemática, do 3° ciclo de ensino fundamental, tendo em vista que é nesse período que se trabalha o conteúdo de quadriláteros, e que utilizavam o mesmo livro didático. Essa escolha se justificou pelo fato de termos um único projeto pedagógico, em razão de os professores atuarem na mesma escola, e o mesmo referencial do saber a ensinar, na medida em que o livro didático pode, segundo a nossa hipótese, exercer a função de representante desse saber. Foi nesse contexto, portanto, que buscamos identificar como ocorreu a transposição didática interna, realizada por eles, para o conteúdo de quadriláteros.

Nesse sentido, dividimos nossa metodologia em quatro etapas: *análise do livro didático* – estabelecendo contato com o saber a ensinar; *observação das aulas* – gravadas em fita de vídeo – em que buscamos indícios da existência das transformações do saber, assim como a administração do tempo do objeto de conhecimento em sala de aula; *entrevista* – instrumento que nos forneceu informações necessárias, relativas ao interesse dos professores pela geometria, especificamente no conteúdo de quadriláteros; e *análise dos dados coletados* – criamos um modelo particular para podermos analisar esses dados, a partir dos elementos de nossa fundamentação.

O Livro Didático

Iniciamos nossa análise pelo livro didático. Os professores que participaram desta pesquisa utilizavam o livro “Aprendendo Matemática”, de autoria de José Ruy Giovanni e Eduardo Afonso de Medeiros Parente, que faz parte da Coleção “Aprendendo Matemática: novo”. É uma obra voltada para alunos da 5ª à 8ª série do Ensino Fundamental, datada de 1999, dividida em 4 (quatro) volumes. Analisamos o livro da 7ª série, no tema relativo a quadriláteros, em virtude de nossas observações terem sido em turmas dessa série e com esse conteúdo. A unidade começa estabelecendo os objetivos a serem alcançados pelos alunos, sendo dividida em três tópicos: Quadriláteros, Paralelogramos e Trapézios.

Ao final da unidade, existem duas listas de exercícios: uma de revisão sobre todo o assunto trabalhado, e uma segunda, chamada de autorrevisão, que apresenta questões extraídas de vestibulares realizados em vários lugares do país. Essas questões são de múltipla escolha, o que nos leva a crer que sejam para preparar os alunos para possíveis concursos (Escolas Militares, Escolas Técnicas, Colégios de Aplicação etc.). No final do livro encontram-se as respostas desses exercícios.

A partir dessa análise do livro Aprendendo Matemática, podemos acreditar que os seus autores possuem uma concepção de aprendizagem do tipo escadinha, pois a obra tem a sua ação dividida em três momentos (como vimos, anteriormente, na fundamentação teórica): primeiro define os objetivos – como está exposto no início do capítulo, no qual os autores deixam claro quais os objetivos a serem alcançados (aprendendo a: definir, reconhecer e representar quadriláteros...); em segundo lugar, elabora uma situação para um novo comportamento, quando, através de uma atividade, propõe-se que o aluno identifique a soma dos ângulos internos do quadrilátero; e, em terceiro, apresenta situações sistemáticas de treinamento, após o encerramento de cada objetivo proposto, com o intuito de coordenar o condicionamento. São esses momentos que podem caracterizar a concepção escadinha.

Observação das aulas e entrevistas

Outro ponto importante de análise, que devemos observar, além da Transposição Didática Externa, são as análises das aulas dos dois professores que participaram de nossa pesquisa, os quais serão tratados por Professor 1 e Professor 2. Ambos utilizam o mesmo Livro Didático (Aprendendo Matemática) e, também, têm formação em licenciatura em Matemática em Universidades Federais de Pernambuco (UFPE e UFRPE).

O Professor 1 segue os tópicos apresentados no Livro Didático, ou seja, percorre os mesmos passos do livro. Começa definindo quadrilátero como "...todo polígono que apresenta quatro lados e quatro ângulos"; apresenta algumas condições necessárias de existência, os principais elementos e a soma de seus ângulos internos. Depois, caminha para alguns casos particulares, como os paralelogramos e suas propriedades, o retângulo e suas propriedades, o losango e suas propriedades e o quadrado e suas propriedades. Porém, o Professor 1 tem como característica não efetuar as demonstrações dos conteúdos que são ministrados. Ele vai "apresentando" cada propriedade, inserindo estratégias próprias, as quais serão evidenciadas, mais adiante, no tópico sobre a análise dos discursos. Com isso, de certa forma, ele realiza uma nova organização na apresentação desse saber, modificando as ordens de apresentação do conteúdo, recorrendo a conhecimentos anteriores, que não são reapresentados pelo Livro Didático, para, no seu entendimento, facilitar a aprendizagem dos alunos.

A busca pelo reaparecimento de alguns conhecimentos, que já foram tratados anteriormente, tais como a retomada das propriedades do paralelogramo, antes de iniciar os assuntos sobre retângulo, losango e quadrado, e o uso das retas paralelas que são cortadas por uma transversal, para demonstrar a congruência entre os ângulos opostos do paralelogramo, são outros elementos que podem reforçar essa nossa hipótese de reorganização do saber, a qual pode ser motivada pela necessidade de eliminar uma dificuldade de aprendizagem.

Além da reorganização do saber, a não demonstração dessas propriedades poderia ocorrer em virtude de o professor achar desnecessário o conhecimento aprofundado dessas demonstrações, além do conteúdo matemático em questão, como ele afirma na entrevista:

Porque assim, tá certo que você saiba as propriedades, mas, isso, você só vai usar em Matemática. Algumas propriedades de diagonais, de lados, ele não vai usar em outra matéria, em outro trabalho que ele for fazer, assim, se ele for da área de saúde, área de ciências humanas. Então, é importante ele saber as figuras, mas as propriedades é um fato muito específico.

Nessas observações, verificamos a importância que o Professor 1 dá ao conteúdo em questão, tendo em vista ele mesmo não achar interessante esse assunto para o dia a dia, a não ser com o objetivo de vestibulares, como ele deixa claro ao afirmar que:

Professor 1: Aí, pro vestibular, você tem que aprofundar, realmente; mas, em termos de vida, o dia a dia pro aluno… Eu não vejo tanta utilidade do assunto, que a gente dá, pro dia a dia, não. Eu não vejo! Pode ser até que tenha, mas eu não enxergo.

O Professor 2, assim como o Professor 1, acompanha os tópicos do Livro Didático, porém, também estabelece uma reorganização do saber, ao incrementar com algumas inclusões que permitem completar, da maneira que acha necessário, o conteúdo do assunto de quadriláteros. Essas inclusões serão mais bem descritas adiante, no tópico sobre a análise dos discursos. Ele esclarece essas inclusões ao afirmar, na entrevista, que:

Professor 2: Muitas vezes, o Livro Didático que a gente está trabalhando, ele não tem demonstrações muito claras para um aluno, pra cabecinha do aluno de 7ª série, como eu tento buscar demonstrações que passe pra eles de uma forma, uma linguagem mais clara possível, uma coisa bem mais simples pra eles.

Já no tocante às demonstrações, é possível afirmar que o Professor 2 faz uso delas. Esse fato possivelmente se dá em virtude de ele acreditar que os alunos possam compreender melhor quando são feitas as demonstrações, de acordo com o que afirma na entrevista:

Professor 2: Quando a gente trabalha as propriedades de alguns quadriláteros, como o paralelogramo, dentro deles os losangos e outros mais, para eles compreenderem essas propriedades, sem apenas memorizarem, e se eles não memorizarem, se eles olharem o quadrilátero numa avaliação, eles vão caminhar sozinhos. Eles conseguem muito mais quando a gente demonstra essas propriedades, deles entenderem, de achar alguma coisa dentro daquele conteúdo e ter que ter aquele conhecimento das propriedades e eles entenderem muito mais quando a gente faz as demonstrações.

Observamos, também, que o Professor 2 possui um discurso de certa forma “maternal”, como se ele fosse a mãe, que elimina as dificuldades para o filho. O saber funcionaria como um alimento um pouco “indigesto”, que vai ser oferecido em pequenas quantidades. Essas evidências são percebidas no discurso do professor, quando diz: “...uma coisa bem mais simples pra eles. ...eles vão caminhar sozinhos”.

Foram percebidas, também, diferenças entre os tempos em que o saber esteve em jogo no cenário didático, as quais podem ser evidenciadas através da própria maneira com que cada professor conduz o saber, influenciados pela relação que possuem com esse saber e pelo contrato pedagógico (que estaria ligado às regulações do grupo de alunos em classe), estabelecido por cada professor.

No tocante à relação que possui com o saber, o Professor 1 não faz as demonstrações. Em consequência, o tempo gasto para que cada tópico se desenvolva é menor do que aquele do Professor 2, que realiza todas as demonstrações. Além disso, o Professor 1 gastou, em média, por aula, dezesseis minutos escrevendo e desenhando no quadro, sem se dirigir aos alunos, enquanto o Professor 2 gastou uma média de dois minutos, fazendo a mesma atividade.

Quanto à influência do contrato pedagógico estabelecido, notamos que o Professor 1 permite algumas brincadeiras em sala de aula, numa tentativa de descontrair a turma, como observamos quando os alunos brincam com o formato da cabeça de um companheiro de sala ou quando ele pergunta se a figura do livro é um pássaro, um avião ou um triângulo. Já o Professor 2 não permite esse tipo de atitude, regulando o funcionamento disciplinar da classe, direcionando toda a atenção para o saber em jogo. Com isso, na sala do Professor 2, o saber figura por um tempo maior do que na do Professor 1.

A essas diferenças em gerir o tempo em sala de aula, Câmara dos Santos (1997) chama “tempo do professor”, ou seja, um tempo cuja gestão estaria profundamente ancorada na relação que o professor possui com o conhecimento matemático, neste caso em particular, com os quadriláteros.

Essas variações no tempo do professor podem nos fornecer novos indícios de uma Transposição Didática Interna, na medida em que o saber em jogo entra no cenário didático tendo um tempo diferente, dependendo de cada professor, ou melhor, dependendo da relação que cada professor tem com o saber. Essa relação se apresenta como forte motivadora na realização das diferenças entre o saber a ser ensinado e o saber ensinado de cada um. Tais diferenças somente aparecerão no espaço intramuros da sala de aula, em um trabalho que Chevallard (1991) denomina de trabalho interno da transposição: um trabalho que começa depois que os programas são preparados, conformados, e adquirem força de lei.

Considerações Finais

Nesta nossa pesquisa, partimos em busca de identificar elementos que caracterizassem um processo de transposição didática interna no trabalho com quadriláteros, em duas turmas de 7ª série. Tal processo seria uma das “fases” na teoria da transposição didática do professor Yves Chevallard (1991), sendo caracterizada pela “transformação”, realizada pelos professores, no interior da sala de aula, dos saberes que são destinados a serem ensinados, a partir das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos Livros Didáticos. Tal interesse se dá pelo fato de que Chevallard se limita a explicar a “transformação” dos saberes ditos científicos em saberes a serem ensinados, realizada por uma pequena parcela da sociedade que pensa, segundo óticas às vezes muito distintas, o funcionamento didático, a qual chama de noosfera.

Quais os distanciamentos entre o saber inicialmente previsto, a ser ensinado (livro didático), e o saber efetivamente ensinado pelo professor? Como as concepções de ensino-aprendizagem que são reveladas pelo professor influenciariam nas diferenças entre os saberes efetivamente ensinados? Até que ponto as escolhas efetuadas pelos autores de livros didáticos, para o trabalho com quadriláteros, influenciaram nesse processo de “transformação” do saber por parte do professor? De que forma o contrato didático estabelecido em sala de aula e a gestão do tempo, em seus diferentes aspectos, contribuíram para a existência de diferenças entre os saberes (a ensinar e ensinados)? Acreditamos que esses questionamentos nos ajudaram a responder à questão de base do trabalho.

Para responder esses questionamentos e identificarmos os possíveis elementos dessa fase da transposição didática, realizamos um estudo de caso, observando, em sala de aula, duas turmas de 7ª série, de uma mesma escola, em que estava sendo lecionado o conteúdo de quadriláteros, por professores com licenciatura em Matemática. Essas escolhas foram feitas com o intuito de buscar uma mesma proposta pedagógica por parte da escola e o mesmo referencial do saber a ser ensinado, além da mesma formação acadêmica por parte dos professores e de, com isso, tentarmos minimizar os efeitos das diversas variáveis que poderiam surgir em nosso processo de análise. Porém, é importante deixar claro que algumas variáveis não foram contempladas em nossa pesquisa, as quais acreditamos não terem influenciado, de modo relevante, nossos elementos conclusivos, como, por exemplo, o sexo e o tempo de docência dos professores analisados na pesquisa, em virtude de estarmos em busca de elementos que caracterizavam a distância entre o saber a ser ensinado e o saber ensinado, e não distinções entre os saberes ensinados. Apesar de, durante a pesquisa, termos identificado indícios de diferenças entre os saberes ensinados, acreditamos que essas variáveis não mudariam as conclusões às quais chegamos. Pelo contrário, ratificariam nossa hipótese de que essas diferenças estariam enraizadas na relação que cada professor tem com o objeto de ensino.

Realizamos, também, uma análise do Livro Didático utilizado pelos professores para identificarmos o que, em nossa hipótese, serve de representante do saber a ser ensinado e, assim, em conjunto com as observações de sala de aula, nas quais encontramos o saber ensinado através da verbalização dos professores sobre o conteúdo de quadriláteros, identificarmos algumas possíveis diferenças entre esses saberes. Por último, fizemos uma entrevista com os professores, com a intenção de analisar quais as suas relações e expectativas referentes ao conteúdo de quadriláteros e ao Livro Didático utilizado pela escola.

Verificamos, em todas as análises, alguns pontos que evidenciavam diferenças entre o que era proposto pelo Livro Didático e o que os professores realizavam durante a aula. O primeiro ponto que pudemos identificar na análise global das aulas dos professores foi a tentativa de uma reorganização e diferentes gestões do tempo do saber no cenário didático, gerando, assim, uma nova “forma” na apresentação desse saber por parte dos professores.

Um outro ponto está nas expectativas que os professores apresentavam em relação ao saber, fazendo, assim, com que esse objeto de ensino recebesse uma maior ou menor relevância no seu discurso em sala de aula, criando, dessa forma, discursos diferentes para esses saberes em função das expectativas distintas trazidas por cada professor.

As criações didáticas realizadas pelos professores, nas quais inseriam elementos novos trazidos de uma relação particular que cada um possuía com o objeto de ensino, foi outro ponto que nos trouxe indícios do distanciamento entre o saber previsto a ser ensinado e o saber efetivamente ensinado, visto que, ao incrementar, com elementos novos, para que pudessem “facilitar” o entendimento por parte dos alunos, os discursos passaram a ser diferentes daquilo que estava previsto no Livro Didático.

Como último ponto de observação, contamos com o próprio discurso relativo aos conteúdos, em que os professores, em alguns momentos, buscaram caminhos diferentes (influenciados talvez pelas suas concepções de aprendizagem), inserindo atividades de dobradura de papel, recusando atividades e partindo para demonstrações diferentes daquelas propostas pelo Livro Didático.

Essas diferenças parecem se dar, como tentamos evidenciar ao longo da análise dos dados, por vários motivos: concepções de ensino, contratos didáticos, formação pedagógica, influências da escola, projetos pedagógicos, entre outros. Porém, a relação que o professor tem com o objeto de ensino nos mostrou estar sempre presente para que essas diferenças ocorressem. Ela parece servir como um “núcleo duro”, uma espinha dorsal, para que esse processo de Transposição Didática Interna exista. A escolha na condução do conteúdo, o tempo de permanência do saber no cenário didático, as criações didáticas realizadas, as relações que estabelecem entre os conteúdos tratados e a forma como tratam os conteúdos (chegando a tratá-los como uma espécie de entidade), reforçam nossa hipótese de que a forma como o saber chega ao aluno, por parte do professor, se dá, primeiramente, por essa ligação intrínseca professor-saber. Ligação essa que se apresentou de modo particular em cada um dos professores que participaram desta pesquisa, visto que apresentaram, na maioria das vezes, discursos e caminhos diferentes na condução do saber.

Podemos perceber, por meio de indícios apresentados na análise dos dados coletados, elementos relevantes que nos levam a acreditar que essa fase da teoria da transposição didática de Chevallard, a transposição didática interna, parece ser orientada pela relação existente entre o professor e o saber. Com isso, podemos acreditar que o objetivo proposto neste trabalho – identificar elementos que caracterizam um processo de transposição didática interna, no trabalho com quadriláteros, em duas turmas de 7ª série – foi alcançado.

Moreira & David (2003) afirmam que a Transposição Didática relega a formação pedagógica apenas a "fornecer o lubrificante" para o processo de ensino, e a prática se tornaria apenas a instância de aplicação dos saberes da formação ou, no máximo, uma referência para a detecção de elementos que podem conduzir a um "desvio" do desempenho ideal do professor. Essa afirmação não se revela em nossa pesquisa, até porque a Transposição Didática Interna ocorre de maneira inconsciente para o professor, pois ele acredita que o saber que está verbalizando é o saber-inicialmente-designado-como-o-que-deve-ser-ensinado. Ou seja, é necessário que haja diferenças entre os saberes para que o professor exista; caso contrário, o ensino não existiria, nem o professor estaria realizando seu papel de intermediário entre o saber e o aluno, "rompendo" com o sistema didático que é estabelecido em sala de aula.

A transposição não tem o objetivo de idealizar uma "forma de desempenho ideal" para o professor, já que identificamos indícios, durante esta pesquisa, de que cada professor, em virtude das relações com o saber em jogo, efetua uma transposição diferente. Revela-se, assim, que é impossível determinar "um desempenho ideal".

Em relação às distâncias entre os saberes, evidenciadas em nosso trabalho, Chevallard (1991) afirma serem necessárias, pois, para o ensino de um determinado elemento do saber, é mister que ele tenha sofrido certas deformações. Ou seja, a transposição didática evidencia que existe uma diferença entre os saberes que são verbalizados pelos professores em sala de aula e os saberes que são propostos no texto escolar. A existência dessa diferença coloca em xeque a validade do que é ensinado pelo professor, fazendo com que o saber ensinado possa perder sua legitimidade.

A necessidade da existência de uma vigilância epistemológica do saber em jogo no cenário didático, para que ele não se distancie muito do saber de origem (científico) e perca a sua legitimidade como tal, faz com que o estudo de como se processa a Transposição Didática seja muito relevante. Pudemos verificar, durante as observações em sala de aula, algumas possíveis transposições que provocaram esses distanciamentos entre os saberes, como, por exemplo, quando o Professor 1 disse que “os vértices opostos são ligados por diagonais”. O distanciamento ocorre na medida em que os vértices opostos não são ligados por diagonais; os vértices opostos “existem” sem a necessidade da “ligação” por uma diagonal. Esses distanciamentos podem causar alguns obstáculos didáticos, como entender que as diagonais ligam vértices opostos, e, assim sendo, os polígonos com lados ímpares não teriam diagonais. A vigilância epistemológica do saber, por parte dos professores, em virtude da realização de uma transposição didática interna, talvez seja a principal contribuição que nossa pesquisa possa fornecer à didática da matemática.

A Transposição Didática Interna se dá dentro do sistema didático, que é caracterizado pela relação ternária que envolve dois pólos humanos – o professor e o aluno – e um não humano: o saber. Começamos a entender a possibilidade da existência da Transposição Didática Interna devido à identificação do professor como um ser, sujeito não só às condições institucionais, mas, também, à sua própria subjetividade. Contudo, como foi discutido, ele não é o único elemento humano e sujeito às suas subjetividades dentro do sistema didático; temos, também, o aluno. Com isso, em nosso trabalho, percebemos a possibilidade da existência de mais uma parte no processo de Transposição Didática, ou seja, mais uma modificação do saber. Essa nova possível transposição seria realizada pelo aluno, transformando o saber ensinado pelo professor em um novo saber, o saber aprendido. É importante ressaltar, porém, que, para que possamos identificar a existência ou não dessa nova transformação do saber, necessitamos de uma investigação mais profunda do que esta que acabamos de realizar.

Outro ponto de aprofundamento da teoria da transposição didática, com a possível existência da transposição didática interna, seria na direção da identificação de obstáculos de aprendizagem devido a um excesso de "transformações" no objeto de ensino, com o intuito de facilitar o entendimento por parte do aluno. Ou seja, ao tentar facilitar a compreensão do conteúdo ministrado, o professor insere informações que poderão causar, mais na frente, conflitos com esses conhecimentos estabelecidos. Isso pode ser exemplificado a partir do discurso de alguns professores de séries iniciais, que, ao ensinarem a multiplicar, informam aos alunos que "a multiplicação sempre aumenta", ensinando a operação da multiplicação através de adições sucessivas, esquecendo-se de que essa "regra" não será válida para os números racionais. Isso possivelmente ocasionará interferências na formação e no desenvolvimento de conceitos futuros, acarretando o que poderíamos chamar de "efeitos da transposição interna". Porém, nesse caso, também, necessitamos de um embasamento teórico maior para chegarmos a conclusões mais efetivas.

Referências

ARSAC, G.; DEVELAY, M. ; TIBERGHIEN, A. **La transposition didactique en mathematiques, en physique, en biologie**. Lyon: IREM, 1989.

BORDET, D. Transposition didactique: une tentative d'éclaircissement. In: **DEES**, nº110. CNDP, 1997.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: **Recherches en Didactique des mathématiques**. Vol. 7, n° 2, p. 33-115. Grenoble, 1986.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O professor e o tempo. In: **Revista Tópicos Educacionais**. v.15. nº 1/2. Recife: Universitária/UFPE, 1997.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.

GIOVANNI, J. R.; PARENTE, E. A. M. **Aprendendo matemática** *(Coleção aprendendo matemática: novo)*. São Paulo: FTD, 1999. v. II, 303 p..

HENRY, M. Didactique des Mathématiques: sensibilizations à la didactique em vue de la formation initiale dês ensignants de mathématiques. **Laboratoire de Mathématiques** – IREM, Besançon, 1991.

MOREIRA, P. C., DAVID, M. M. M. S., (2003). Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, v. 11, nº 19, p. 57-80.

PAIS, L. C. Transposição Didática. In: MACHADO S. (Org.). **Educação Matemática:** uma Introdução. São Paulo: PUC-SP, 1999.

CAPÍTULO 3

CRITÉRIOS DE ADOÇÃO E UTILIZAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL, E A PARTICIPAÇÃO DO PROFESSOR NA ADOÇÃO: O CASO DO AGRESTE DE PERNAMBUCO[4]

Clóvis Gomes da Silva Júnior (In Memoriam)
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Dentre os materiais envolvidos nas atividades escolares que são denominados de material escolar, encontram-se os livros didáticos, utilizados sistematicamente no ambiente escolar em aulas e cursos. Esses livros vêm se consolidando como uma das duas formas de transmissão do saber matemático na escola: a comunicação oral, ou pessoal, e os textos escritos. Os textos escritos encontrados atualmente para este fim são de diversos contextos e, dentre eles, é possível citar os livros didáticos para os ensinos fundamental e médio, os livros-textos para a graduação e os artigos para os cursos de pós-graduação.

O livro didático tem como público alvo dois grandes grupos: professores, de uma lado, e alunos, de outro. Com o professor, ele mantém um diálogo aberto e

---

[4] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2005.

franco, buscando a construção de uma parceria, com o objetivo único de que o beneficiário final seja o aluno. Deste modo, parece-nos existir uma preocupação em oportunizar situações coletivas e individuais em sala de aula, com o intuito de concretizar a aprendizagem. Enquanto alguns desses livros didáticos levam em consideração os processos de aprendizagem vividos pelos alunos, outros apenas oferecem diretrizes para a prática de ensino do professor.

Todos os livros possuem uma característica em comum: a função de transmitir informações, para as gerações, por meios impressos ou digitais. Porém, para que estes livros possuam sua existência dentro do contexto matemático atual, tiveram que percorrer um longo caminho na história, motivo que nos leva a realizar uma breve discussão dessa caminhada.

Na próxima seção deste trabalho, propomos reflexões sobre um momento de transição entre a comunicação oral e a escrita e sobre o surgimento da imprensa. Em seguida, apresentamos o referencial teórico adotado, a metodologia e as análises dos nossos resultados. Por fim, nossas considerações finais e referências.

Livro didático: a origem

Segundo Schubring (2003), já existiam livros antes que fosse inventada a tecnologia para imprimi-los. Tal fato nos remete à consequência de que a noção de livro-texto independe da possibilidade de cada aluno ter o seu próprio exemplar. Esta leitura dá-se pelo fato de que vários povos passaram a registrar por escrito suas culturas e buscaram um modo de preservar esses escritos. No entanto, a propagação dessa escrita antes da invenção do papel era limitada, pois os materiais para escrever eram raros, dispendiosos e de difícil manuseio, como, por exemplo, o pergaminho (na Europa), os tabletes de argila (na região da Mesopotâmia), o papiro (no Egito), a folha seca de palmeira (na Índia), etc.

Com estas dificuldades para a reprodução de textos, o ensino passou a ser padronizado e institucionalizado para os jovens. Porém, este ensino se dava principalmente de forma oral, do professor para os alunos, os quais tinham a incumbência de realizar memorizações para reprodução perfeita. “O primado da oralidade dominou todas as culturas até os tempos modernos, e a arte da memorização caiu em descrédito há apenas uma ou duas gerações” (SCHUBRING, 2003, p. 20). Dentro deste contexto, a Mesopotâmia é que parece ter institucionalizado primeiro o ensino da matemática. Esta institucionalização deu-se por volta de 2.500 a. C., época em que apareceram os escribas.

Com o passar do tempo, a corporação dos escribas ganhou autonomia e, consequentemente, surgiram produções de textos. “Entre eles, podem ser distinguidos tipos diferentes: exercícios para casa e problemas para estudantes, e manuais para uso do professor” (RITTER, apud SCHUBRING, 2003, p.22).

Por volta do século VI d.C., a China possuía, em sua estrutura de ensino, currículo e livros-textos para as diversas disciplinas existentes. No ano de 656, aconteceu o “fato de que historicamente a primeira lista oficial de livros-textos autorizada da matemática foi estabelecida na China”. (SCHUBRING, 2003, P. 26).

Outro fato importante deu-se na Grécia, com um dos mais famosos livros usados em vários tipos de ensino, os “Elementos de Euclides”. Essa obra tem uma importância excepcional na história das matemáticas, por apresentar a geometria como um sistema lógico. As definições, os axiomas ou postulados (conceitos e proposições admitidos sem demonstração que constituem os fundamentos especificamente geométricos e fixam a existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano) e os teoremas não aparecem agrupados ao acaso mas, antes, expostos numa ordem perfeita. Cada teorema resulta das definições, dos axiomas e dos teoremas anteriores, de acordo com uma demonstração rigorosa. Euclides foi o primeiro a utilizar este método, chamado axiomático.

São raros os livros que têm sido tão editados, traduzidos e comentados como os Elementos de Euclides. Na antiga Grécia, essa obra foi comentada por Proclo (410-485), Herão (c. 10-75) e Simplício (490-560); na Idade Média, foi traduzida em latim e árabe; após a descoberta da imprensa, foram feitas numerosas edições dela em todas as línguas europeias. A primeira destas edições foi a de Campano (1220-1296), em latim, publicada em 1482, edição usada por Pedro Nunes (1502-1578), que a citou numerosas vezes nas suas obras.

Este breve histórico nos mostra, portanto, a existência dos livros-textos, mesmo antes da imprensa. Porém, o surgimento da imprensa dá um novo rumo à produção de livros-textos para fins de ensino, pois barateou os custos das cópias e o armazenamento delas.

Assim, começa a ser facilitada a divulgação dos exemplares, e a consulta para os interessados passou a ser mais acessível. Diante desse contexto, os livros passam a ser produzidos com fins comerciais, e sofrem influências metodológicas em sua composição. Essas influências são tais que, atualmente, os livros didáticos são encontrados com composições e produções das mais variadas.

A chegada do livro didático à sala de aula e sua qualidade

Tal objeto didático foi motivo de diversas discussões nas últimas décadas, em que se buscam justificar sua estrutura e funcionalidade, tornando-se, portanto, objeto de estudo e de debates nas mais variadas instâncias educacionais. Esse cenário torna necessário o entendimento da legitimação do livro didático diante da educação escolar e, ainda, como fonte transmissora de conhecimento. Segundo Arruda e Moretti (2002), a legitimação desse recurso vem desde a época de Comenius, com sua Didática Magna, em que era proposto um único livro como referência para o aluno.

Desse modo, esse recurso começa a padronizar a educação da época. Por meio dele, passa a ocorrer a reprodução do conhecimento científico, de modo simplificado, transformando-se, com o passar dos tempos, em um recurso para o currículo escolar. O recurso para o currículo acabou transformando-se no currículo que, de fato, é o que as editoras oferecem em seus pacotes didáticos: livro-texto do aluno, caderno de atividades, suplementos de atividades experimentais e manual do professor, este contendo objetivos gerais, programa anual, objetivos específicos, estratégias e, até, instrumentos de avaliação. (MONGILNIK, 1996, p.57).

O livro didático destina-se a dois leitores: o professor e o aluno, em que o professor é o transmissor e/ou o mediador dos conteúdos que estão nesses livros, e o aluno é o receptor de tais conteúdos. É por meio desses livros que o aluno vai aprender, construir e alterar significados, em relação a um padrão social que a própria escola estabeleceu como projeto de educação, ao adotar esse recurso. Porém, a adoção e a utilização do livro didático na escola sempre são abordadas com categorizações em torno de sua estrutura, que, a princípio, partem para uma análise de sua qualidade.

Em 1985, por meio do Decreto nº 91.542 de 19, de agosto de 1985, o governo federal criou o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com o objetivo de distribuir livros escolares a todos os alunos matriculados nas escolas públicas de ensino fundamental do país. Até 1996, os livros eram selecionados de modo técnico-administrativo por representantes do governo, quando, então, a Secretaria da Educação Fundamental (SEF), decidiu avaliar os livros a serem adquiridos para a distribuição e, para isto, compôs equipes de avaliação. A primeira dessas avaliações foi para o PNLD-1997, seguindo até os dias de hoje (Brasil, 1996; 1998; 2000; 2000/2001; 2002; 2004; 2005). Nesse processo, os critérios de avaliação, definidos pelas equipes de avaliação, foram comunicados aos editores e associados de classe através da SEF.

Tais critérios foram definidos em duas partes. Uma parte geral pedagógica, que se aplica a todas as áreas, e uma parte específica para cada área. Cada coleção é avaliada por dois pareceristas, que possuem a incumbência de redigirem uma resenha sobre os livros não excluídos, a ser incluída no guia no livro didático, distribuído a todas as escolas do país, para servir de apoio na escolha dos livros didáticos pelos professores, em cada escola pública.

Um dos critérios para avaliação do livro didático pelo PNLD consiste em não "veicular preconceitos de origem, cor, condição econômico-social, etnia, gênero ou qualquer outra forma de discriminação. [Tampouco] Fazer doutrinação religiosa desrespeitando o caráter laico do ensino público" (BRASIL, 2000/20001, p. 20). A partir desse contexto, várias são as discussões sobre a qualidade do livro didático, como, por exemplo, "o bom livro didático diferencia-se do livro didático ruim pelo tipo de diálogo que estabelece com o professor, diante do planejamento do curso" (LAJOLO, 1996, p.7).

Desta forma, a relação do livro didático de matemática com o professor passa a ser estruturada a partir de um exemplar específico para o professor, não contendo apenas a resolução dos exercícios, mas trazendo em seu plano de curso a estruturação para o planejamento das aulas. Nesse contexto,

> (...) o livro didático, de um modo geral, poucas vezes consegue escapar da apresentação convencional, que distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação, este por sua vez, quase sempre limita-se a problemas estereotipados, onde também se distingue com nitidez os dados (sempre necessários e

> suficientes para a resolução) dos pedidos, a serem destinados com a utilização dos dados.(MACHADO, 1997, p. 120).

Ainda segundo Machado (1997), a questão dos livros didáticos é histórica, razão pela qual existem, sempre existiram e provavelmente sempre existirão livros de boa qualidade e livros de qualidade duvidosa. No entanto, não podemos generalizar os livros, qualificando-os como sendo de má qualidade. A qualidade do livro didático tem sido examinada numa visão econômica e de utilização, em que o papel do livro tem sido superestimado, passando apenas a ser um livro-caderno.

Nessa perspectiva, há uma abdicação, por parte do professor, no que diz respeito à elaboração de seus programas, passando a concordar com o caminho proposto pelo autor do livro, o que gera um certo caminho sem dificuldades a ser trilhado pelo professor. Em uma outra visão, é feita uma análise do livro didático em função do bom professor, pois "a história sugere que a propriedade das condições de exercício do magistério, para boa parte do professorando, é responsável direta por vários dos desacertos que circundam questões relativas ao livro didático na escola brasileira" (LAJOLO, 1996, p. 8). Verifica-se que a escolha dos livros didáticos, por parte do professor, perpassa todas estas características qualitativas.

A princípio, as escolhas ocorrem pela categorização de exclusão do PNLD, que analisa, em perspectiva geral, uma formação social e cidadã. Arruda e Moretti (2002) fazem uma análise da relação entre o livro didático de matemática e as diferentes concepções de cidadania, citando o fato de que, nestes livros, podem vir dois tipos de exercícios: aqueles que conduzem à cidadania ativa e aqueles que levam à cidadania passiva.

Essa visão passa a ser analisada por seus modelos, suas analogias e suas transposições didáticas, de um texto científico para um texto educacional. Deste modo, um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino, é chamado transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, apud PAIS, 2001).

Depois, esta análise passa pela parte conteudista, em relação ao texto do saber, e pela parte comercial, em seu editorial. Por fim, recebe a influência de duas outras partes interessadas, o guia do livro didático fornecido pelo PNLD e o fato de que “nas escolas, professores são assediados pelas editoras nos momentos em que devem definir suas opiniões quanto aos livros que serão adotados” (BITENCOURT, 1997). Neste contexto, constata-se que os livros do ensino fundamental, que chegam para escolha e adoção nas escolas públicas brasileiras, são recomendados pelo PNLD com algumas distinções entre si, porém avaliados sob os mesmos critérios. Sendo assim, observa-se que todos os livros didáticos de matemática que chegam às escolas públicas, para o processo de adoção no PNLD, passaram por um processo de análise nas comissões de avaliação, que possuem critérios eliminatórios comuns a todos.

Portanto, pode-se verificar que, para ser utilizado nas escolas públicas do Brasil, qualquer livro didático precisa atender a determinados critérios, entre os quais: apresentar um conteúdo acessível para a faixa etária destinada, estimular e valorizar, no texto, a participação do aluno, combater atitudes e comportamentos passivos. O livro deve, também, promover uma integração entre os temas discutidos, valorizando o conhecimento do aluno, e conter ilustrações atualizadas e corretas. (ARRUDA; MORETTI, 2002). Porém, mesmo havendo toda essa análise sobre o livro didático de matemática que chega às escolas públicas brasileiras, não é possível encontrar uma uniformidade na base curricular nacional com adequações regionais.

Assim, dificulta-se a escolha por parte de alguns professores, que levam em consideração as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais, enquanto são os próprios livros que impõem um currículo.

Procedimentos Metodológicos

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido por meio de procedimentos técnicos e metodológicos característicos de uma abordagem quantitativa, com a coleta de dados através de questionários respondidos por 247 professores de matemática do ensino fundamental (125 professores dos anos iniciais e 122 professores dos anos finais), todos com atuação nas redes públicas municipais e estadual no estado de

Pernambuco, em uma tipologia de natureza descritiva. Para isto, foi elaborado um questionário com 33 questões, dividido em quatro etapas, descritas a seguir:

Primeira etapa: perfil de atuação e formação profissional do professor de matemática do ensino fundamental, com ênfase na situação funcional e localidade de trabalho, bem como no tempo de atuação profissional; *Segunda etapa*: utilização do livro didático de matemática, com ênfase no tempo e no tipo de utilização realizada por parte do professor; *Terceira etapa*: participação do professor na adoção do livro didático de matemática e observação sobre como se deu essa adoção; *Quarta etapa*: critérios para a adoção do livro didático de matemática, segundo o professor.

Para a produção deste artigo, selecionamos as seguintes variáveis: nível em que o professor leciona (anos iniciais ou finais); utilização (ou não) do livro didático de matemática; motivo da não utilização, quando for o caso; tempo semanal de utilização; tipo de utilização.

Para a seleção da amostra dessa população, utilizamos um misto de técnicas de amostragem: uma *estratificada*, composta por elementos das três Gerências Regionais de Educação da região do agreste pernambucano; uma de amostragem *probabilística*, na qual todos os elementos do universo da pesquisa têm a mesma chance de serem escolhidos, sendo selecionados aleatoriamente ao acaso, através de sorteio, referente à inclusão das cidades na amostra.

No processo de análise das variáveis, houve dois momentos distintos. O primeiro momento foi constituído por uma análise baseada nas frequências absolutas e relativas por questão, dando enfoque ao total de respostas dadas a cada uma das variáveis em relação ao todo. No segundo momento, foi feita uma análise sobre os resultados proporcionados pelo softtware CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva), que aborda a interação entre variáveis e suas dependências. A modelagem pela qual tratamos as informações no *software* CHIC foi a lei binomial. Esta lei é estruturada através de uma distribuição discreta de probabilidade, aplicável quando um experimento é realizado *n* vezes, cada prova possuindo probabilidade de sucesso *p* e sendo independente de qualquer outra prova anterior.

Principais resultados

Os resultados mostram que, do total de professores investigados, 93,11% utilizam o livro didático de matemática em suas aulas, o que nos parece confirmar a importância dada pelos professores a esse recurso didático. Em relação aos níveis de ensino, o percentual de utilização do livro aparece indicado na tabela seguinte.

Tabela 01 – Utilização do livro didático de matemático em função do nível

Nível de ensino	Utiliza	Não utiliza
Anos iniciais	95,2%	4,8%
Anos finais	91%	9 %

Fonte: a pesquisa.

Com estes dados, podemos observar que o percentual de professores dos anos finais do ensino fundamental que não utilizam o livro didático é quase o dobro daqueles dos anos iniciais. Porém, o que mais nos chama a atenção é que, mesmo com toda a campanha desenvolvida pelo PNLD, sete em cada cem professores não utilizam o livro didático de matemática em suas salas de aula.

O segundo item do questionário busca identificar os motivos dessa "não utilização". Esse item foi respondido apenas por aqueles professores que, no item anterior, afirmaram não utilizar o livro didático. Devemos ressaltar que, nesse item, o respondente poderia marcar mais de uma opção. Os dados obtidos estão representados na tabela seguinte.

Tabela 02 – Motivos do não uso do livro didático de matemática

Motivo	Anos iniciais	Anos finais	Total
O livro não chegou na escola	15,5%	3,5%	19 %
Não faz parte do meu modo de trabalho	3,5%	3,5%	7 %
O livro não é adequado aos alunos	23%	39%	62 %
Não participei da escolha do livro	3,5%	8,5%	12 %

Fonte: a pesquisa.

Parece-nos importante ressaltar que, dentre os 247 professores que responderam o questionário, encontramos aproximadamente 3% deles afirmando que os alunos não possuem o livro didático de matemática. Porém, não nos foi possível identificar, nesse trabalho, se esse percentual indica que o livro didático não chegou à escola, ou se, como podemos verificar em nossa prática como professores, ele chegou, mas não foi distribuído aos alunos.

Outro fato importante que nos revelam os dados obtidos, é que, dentre os professores que não utilizam o livro didático de matemática, 47% deles consideram que o livro adotado não é adequado aos seus alunos. Esse fato aparece amplificado quando observamos que quase 5% dos professores que utilizam o livro didático de matemática também consideram que esse livro não é adequado aos seus alunos.

Como as limitações de nosso trabalho não permitiram identificar o que estaria por trás dessa "não adequação" do livro didático aos alunos, seria importante avançar em outros estudos que pudessem revelar esses motivos.

As duas questões seguintes tratam da frequência de utilização do livro em sala de aula, e da forma como ele é utilizado. Em relação à frequência de utilização, obtivemos os resultados mostrados na tabela seguinte.

Tabela 03 – Tempo de utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental

Frequência de utilização	Anos iniciais	Anos finais	Total
Em todas as aulas	8,3 %	16,9 %	25,2 %
Em mais da metade das aulas	26,5 %	24,3 %	50,8 %
Em menos da metade das aulas	13,2 %	5,4 %	18,6 %
Raramente	2,9	2,5	5,4 %

Fonte: a pesquisa.

Em relação a esse contexto, temos 76% dos professores que utilizam o livro didático em mais da metade das aulas ou em todas as aulas de matemática, dos quais sua maioria (54,4%) é dos anos finais; observamos, ainda, 26% que utilizam em todas as aulas, com 67,2% dos quais sendo dos anos finais. Dos 18,6% que utilizam o livro em menos da metade das aulas, 71% são dos anos iniciais; e, por fim, apenas 5,4% dos professores raramente utilizam o recurso. Assim, é fato que mais de 80% dos professores afirmam fazer uso constante desse livro didático, sendo que os professores dos anos finais aparecem com uma maior incidência em todas as aulas ou mais da metade das aulas, enquanto os professores dos anos iniciais aparecem com maior uso em menos da metade das aulas

Buscamos, também, identificar, em nosso trabalho, a forma de utilização do livro didático de matemática por parte dos professores. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos. Nesse item, grande parte dos professores assinalou mais de uma forma de utilização do livro didático.

Tabela 04 – Modo de utilização do livro didático de matemática

Tipo de utilização	anos iniciais	anos finais
Leitura em sala	55,2 %	44,8 %
Exemplos	46,3 %	53,7 %
Exercícios	51,4 %	48,6 %
Planejamento	49,6 %	50,4 %

Fonte: a pesquisa

De acordo com os dados obtidos anteriormente, observamos que existe um equilíbrio entre os dois níveis do ensino fundamental em relação à utilização do livro didático de matemática, sendo que, nos anos iniciais do ensino fundamental, observa-se maior ênfase à leitura em sala de aula e à utilização dos exercícios, enquanto, nos anos finais, prioriza-se a utilização em função dos exemplos contidos nos livros e o planejamento de suas aulas. Dentro deste contexto, podemos ainda observar que os professores utilizam o livro didático de matemática não apenas com uma função, conforme nos mostra a tabela seguinte.

Tabela 05 – Modo de utilização do livro didático de matemática pelo professor do ensino fundamental na rede pública do agreste de Pernambuco

Modo de utilização	Total de professores
Leitura do texto em sala de aula	123
Pela utilização dos exemplos nele contidos	136
Pela utilização dos exercícios	183
Para planejar suas aulas	141
Não utilizo	12
Leitura do texto / utilização dos exemplos	1
Leitura do texto / utilização dos exercícios	22
Leitura do texto / planejar suas aulas	6

Utilização dos exemplos / utilização dos exercícios	16
Utilização dos exemplos / planejar suas aulas	9
Utilização dos exercícios / planejar suas aulas	20
Leitura do texto / utilização dos exemplos / utilização dos exercícios	17
Leitura do texto / utilização dos exemplos / planejar suas aulas	5
Leitura do texto / utilização dos exercícios / planejar suas aulas	15
Utilização dos exemplos / utilização dos exercícios / planejar suas aulas	27
Leitura do texto / utilização dos exemplos / utilização dos exercícios / planejar suas aulas	49
Não respondeu	3

Fonte: a pesquisa.

Os dados apresentados na tabela acima são de um total de 583 respostas, implicando que, ao responder esta questão, os professores tiveram, como opção para resposta, uma ou mais alternativas. Assim, 74% desses professores utilizam pela aplicação de exercícios, 55% através dos exemplos, 57,1% para planejar as aulas, e 49,8% pela leitura dos textos. Desta feita, tivemos uma maior ênfase de similaridade de utilização com leitura/exercícios em 41,7% e com exemplos/planejamento, com 36,1%.

Partindo desses resultados, buscamos fazer um cruzamento dos dados em relação à função docente, ao uso do livro didático, ao tempo de uso, e ao tipo de uso, com uma análise implicativa. A análise implicativa foi realizada utilizando o software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva), que, cruzando sujeitos e variáveis (ou atributos), tem por funções essenciais extrair, de um conjunto de dados, regras de associação entre variáveis, fornecer um índice de qualidade de associação e representar uma estruturação das variáveis obtidas por meio destas regras. Em função da implicabilidade, objetivamos alguns nós[5] de maior similaridade em duplas ou em grupos maiores, os quais passaremos a relatar a seguir.

Em relação ao uso, obtivemos cinco nós significativos de similaridade. O primeiro nó mostra que nove em cada dez professores que usam o livro didático em menos da metade das aulas também o utilizam para planejar as aulas. Isso

[5] Nós são cruzamentos de dados entre variáveis com implicabilidade entre eles.

nos leva a questionar as opções de recursos que teriam os professores para a sua prática docente, na medida em que a falta desses recursos poderia levar o professor a “separar” uma parte da exploração do livro didático para exercícios suplementares ou, até mesmo, para elaborar seus instrumentos de avaliação.

Em segundo lugar, verificamos que 90% dos professores que utilizam o livro didático de matemática fazendo a leitura dos textos, em sala de aula, buscam uma utilização mais completa desse livro. Em outras palavras, os professores que levam os alunos a realizarem a leitura dos textos contidos no livro didático de matemática também oferecem aos alunos a oportunidade de fazer os exercícios nele contidos. Outra similaridade se deu quando os professores utilizam o livro didático de matemática em todas as aulas. Nessa situação, é uma constante a utilização dos exercícios neles contidos.

O quarto nó de similaridade nos remete à questão da utilização do livro com leitura do texto em sala de aula. Em 60% desses acontecimentos, isso é feito em mais da metade das aulas e acompanhado pelos exercícios.

Por fim, observamos que 75% da utilização do livro didático de matemática feita pelos professores dos anos iniciais do ensino fundamental ocorre em todas as aulas, sendo em três situações: com a leitura do texto em sala de aula; pela utilização dos exemplos nele contidos e pela utilização dos exercícios.

Considerações Finais

Neste trabalho nos deparamos com dois contextos que merecem uma análise mais aprofundada. O primeiro é o fato de que, aproximadamente, um em cada dez professores do ensino fundamental não utiliza o livro didático de matemática, e esta mesma proporção é mantida em relação à não adequação deste mesmo livro em função dos alunos. O segundo fato é que a utilização do livro didático de matemática é uma constante na prática docente dos professores de matemática do ensino fundamental, sendo em todas as aulas ou não, seja com a leitura de textos, com a utilização de exemplos e exercícios, ou mesmo para planejar as aulas.

É fato que nenhumas dessas utilizações acontece separadamente. A pesquisa nos mostra que sempre há uma combinação entre tempo e modo de uso, com maior ênfase para: utilização dos exercícios junto à leitura do texto em mais da metade das aulas; e utilização em menos da metade das aulas acoplada à utilização do livro para planejar as aulas.

Assim, podemos concluir que o livro didático de matemática representa, para o professor, mais que um simples material de uso no processo de ensino-aprendizagem; é um objeto de apoio didático, que os professores, na grande maioria, utilizam para estruturar e ministrar aulas, apoiando-se nas considerações feitas por toda sua estrutura de texto do saber, em seus exemplos e analogias e seus mais variados exercícios. Tais observações vêm confirmar a necessidade de toda a discussão em torno do livro didático, em função de sua qualidade, de seu uso e de sua adoção.

Referências

ARRUDA, J. P.; MORETTI, M. T. **Cidadania e matemática**: um olhar sobre os livros didáticos para as séries iniciais do ensino fundamental. Contrapontos, Itajaí, v. 2, n.6, p. 423-438, 2002

BELFORT, E.; MANDARINO, M. C. F. **XI *Congresso Inter-Americano de Educação Matemática.* Blumenau: FURB-CIAEM.** Como é escolhido o livro didático de matemática dos primeiros anos do Ensino Fundamental? In: *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife: UFRPE. (2004).

BITTENCOUT, C. M. F. **Livro didático:** concepções e usos. Recife: SEE/Governo do Estado de Pernambuco,1997. BRASIL.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de livros didáticos:** 1ª a 4ª séries PNLD 1996. Brasília. FAE 1996.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de Livros Didáticos:** 1ª a 4ª séries PNLD 1. Guia de Livros Didáticos: 1ª a 4ª séries PNLD 1998. Brasília. FAE 1998.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de Livros Didáticos:** 1ª a 4ª séries PNLD 2000/2001. Brasília. SEF/FNDE/CEALE/CENPEC. 2000.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de Livros Didáticos:** 5ª a 8ª séries PNLD 2002. Brasília. SEF/FNDE/CEALE/CENPEC. 2001.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de Livros Didáticos:** v.2. 1ª a 4ª séries PNLD 2004. Brasília. SEF/FNDE. 2003.

BRASIL (MEC/SEF). **Guia de Livros Didáticos:** v.3. 5ª a 8ª séries PNLD 2005. Brasília. SEF/FNDE. 2005. BRASIL/MEC/UFPE.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber ensiñado. Tradução de Claudia Gilman. Buenos Aires: Aique Grupo Editor S.A., 1991.

FERREIRA G., J. Introdução, Tradução e Notas de Fundação Calouse Gulbenkian. COMENIUS IOHANNIS AMOS (1592-1670) **Didactica Magna (1621-1657)** Versão para eBook eBooksBrasil.com, Fonte Digital. Digitalização de Didáctica Magna. (2001)

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. **Em aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, 1996.

MACHADO, N. J. **Ensaios transversais:** Cidadania e educação. São Paulo: Escrituras Editora, 1997.

MOGILNIK, M. Como tornar pedagógico o livro didático de ciências. **Em aberto**, Brasília, v. 6, n. 69, 1996.

MIORIM, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática** . São Paulo: Atual. 1998.

MIORIN, M. A**. As propostas modernizadoras e os livros didáticos de matemática brasileiros nas décadas de 1960 e 1970***. 2004.*

PITOMBEIRA, J. B.; LIMA, P. F. O PNLD e sua influência sobre os livros didáticos. Rio de Janeiro: **Em aberto,** 2002.

PITOMBEIRA, J. B.; LIMA, P. F Pesquisa: O professor e a escolha do livro didático de 1ª a 4ª séries. Coordenação Recife, 2002. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007. 21

SCHUBRING, G. **Análise histórica do livro didático de matemática:** notas de aula. Tradução: Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados, 2003

CAPÍTULO 4

UMA ETAPA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA: ANÁLISE DAS ESCOLHAS DO SABER ENSINADO FEITAS POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA[6]

Vania de Moura Barbosa
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Quando consideramos Matemática essencial para o dia a dia do cidadão, deparamo-nos com a seguinte pergunta: qual matemática deve ser estudada hoje para que se adquira a cultura básica exigida pelo interesse social? Ou seja, qual matemática é necessário ensinar? É necessário ensinar "semelhança de figuras?", "resolução de equações?". E, também, o que devo ensinar primeiro, equações ou área e perímetro? Quando iniciar o estudo de números decimais? Quanto tempo dedicar a esse estudo?

Partindo desses questionamentos, observamos que, desde o ano de 1997, vem sendo desencadeado na Rede Pública Estadual de Ensino de Pernambuco um amplo processo de discussão em torno da organização da prática pedagógica dos

[6] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2006.

professores, tendo como eixo central os conteúdos que consolidam a Política de Ensino de Pernambuco. Dessas discussões surgiram propostas curriculares para as diferentes áreas de ensino, com vistas à reorientação do ensino, da aprendizagem e da avaliação no interior da prática pedagógica de cada professor. Paralelamente a esses documentos (Coleção Carlos Maciel, Coleção Paulo Freire), no ano de 1998, foram introduzidos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), elaborados no âmbito do Governo Federal, com o intuito de promover reflexões sobre a necessidade, imposta pela sociedade, de promover uma revisão dos currículos.

Segundo Coll (1994), o currículo proporciona informações sobre o que ensinar (os conteúdos), quando ensinar (maneira de ordenar e sequenciar os conteúdos), como ensinar (maneira de estruturar as atividades de ensino) e quando avaliar.

Em princípio, essa colocação de Coll (1994), sobre o entendimento do que é currículo, está próxima daquela defendida por Chevallard (2001), quando ele destaca que se tem, inicialmente, a elaboração do currículo como um problema de seleção de conteúdos, que apresenta estreita relação com a sequenciação dos mesmos, assim como a temporalização ou a distribuição deles ao longo do tempo. Essa elaboração de currículo, do ponto de vista de Chevallard (2001), está associada ao ato de ensinar.

Partindo desses pressupostos, temos que o professor é o encarregado do desenvolvimento do ato de ensinar, além de que, conforme destacado anteriormente por Coll (1994), é ele, o professor, o responsável direto pela execução do currículo. Ao ser atribuída essa responsabilidade ao professor, leva-se em consideração que ele tem a competência aceita dentro do sistema de ensino, para, a partir da existência de um currículo que lhe é apresentado, de alguma forma organizado, escolher os saberes a ensinar, bem como a sequenciação e o tempo que vai dedicar ao ensino desses saberes. Como vimos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destacam a questão dos conteúdos, porém evidenciam, também, a questão da autonomia do professor, ao ressaltarem que "é o professor, quem traduz os princípios elencados na prática pedagógica" (p.49). Nesse âmbito temos o professor na condição de "planejador do currículo".

Nessa visão, Sacristán (2000, p.298) salienta a relevância de se "pensar a adequação dos conteúdos", levando os professores a pensarem no valor que um conteúdo curricular tem para seus estudantes. Partindo desses enfoques, a idéia de currículo não é a de um esquema ou receituário de programação, mas de um estabelecimento das coordenadas (um norteador) para que os professores possam pensar e atuar na prática. Ou seja, o currículo apresenta os saberes a ensinar, e os professores, a partir dessa apresentação, fazem suas escolhas para, posteriormente, pensarem nos modos de organização dos conteúdos no ensino (a sequenciação e a temporalização).

Foi a partir desses aspectos, sequenciação e temporalização, que procuramos observar o nosso objeto de estudo: as escolhas dos saberes ensinados, feitas por professores de matemática, e que procuraremos expor na seção seguinte.

A transposição didática e os conteúdos de ensino

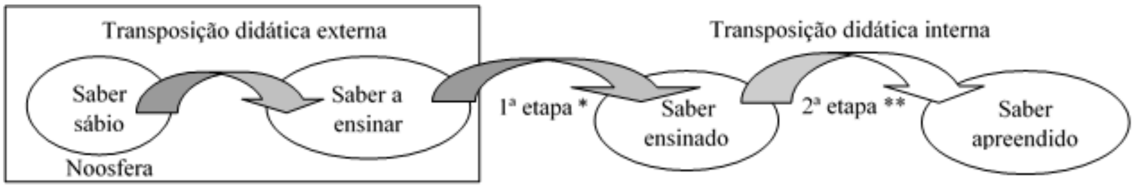
Na seção anterior, enfatizamos que não podemos pensar na prática pedagógica sem levar em consideração que é necessário estabelecer prioridades na condução dos procedimentos pedagógicos. Dentro dessas prioridades está a questão da seleção de conteúdos que constituem os programas escolares. Assim, primeiramente, parece-nos importante investigar quais os conteúdos que serão ensinados, para, posteriormente, determo-nos na questão de como ensiná-los.

Para tanto, nosso estudo se situa em um dos momentos do processo da Transposição Didática[7], de Yves Chevallard – a etapa das escolhas dos saberes ensinados pelos professores – ou seja, em um dos momentos do processo da Transposição Didática Interna, ocasião em que o professor seleciona e ordena os saberes que vai ensinar, tomando como referência os saberes designados pela noosfera[8] para serem ensinados, conforme detalharemos no tópico a seguir.

[7] Chevallard (1991) denomina transposição didática a passagem do saber acadêmico para o saber ensinado. Posteriormente iremos aprofundar esse conceito.

[8] Chevallard (2001) destaca esse aspecto alusivo à seleção de conteúdos quando trata da noosfera - esfera onde se pensa o funcionamento do sistema escolar, ou seja, o conjunto das fontes de influência na seleção de conteúdos.

Figura 1 – Etapas da transposição didática



Fonte: Barbosa (2006, p.37).

* escolha dos saberes a ensinar, no caso do Brasil.

** Produção do texto do saber

Na passagem do saber sábio (referência) ao saber a ensinar (aquele dos programas e manuais), que é realizado no espaço da noosfera[9], ocorre a transposição didática externa, a qual se passa no plano do currículo formal e/ou dos livros didáticos. Nessa etapa, a interferência do professor é menor. Enquanto isso, na passagem do saber a ensinar para o saber ensinado ocorre a transposição didática interna, na qual a participação do professor é decisiva, uma vez que ela ocorre em sala de aula, no momento em que o professor produz o seu texto do saber, isto é, no decorrer do currículo em ação (como veremos adiante).

Nessa perspectiva, percebe-se que é na passagem do saber a ensinar para o saber ensinado que o professor, no Brasil, faz as escolhas do saber a ensinar, para, posteriormente, poder organizar suas situações didáticas. Essa etapa da transposição didática se dá porque temos, em nosso país, Propostas Curriculares que deixam uma abertura para a seleção dos saberes a ensinar.

As escolas e os professores fazem as programações, ou planos, baseando-se no currículo oficial ou em orientações curriculares. Nesse contexto, segundo Sacristán (2000), temos o currículo organizado, o qual, quando colocado em prática (através das “tarefas de aprendizagem” apresentadas aos alunos), passa a ser o chamado currículo em ação, que, posteriormente, é avaliado por meio das avaliações internas (no âmbito da sala de aula) ou das avaliações externas (tais como as provas do SAEPE/ SAEB).

[9] Do qual fazem parte cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes que interferem no processo de ensino.

Esse último aspecto ressaltado por Sacristán (2000), o currículo em ação, remete-nos à questão da importância do registro na prática pedagógica, o que pode vir a ser um instrumento para a análise de um provável currículo.

Partindo desses pressupostos, o diário de classe passaria a ser visto como indispensável para o registro de atividades no processo de ensino-aprendizagem, tendo em vista que ele se constitui em um documento no qual são registradas as informações essenciais sobre frequência e desempenho dos alunos e, também, sobre os conteúdos ensinados. Ou seja, o diário de classe é um instrumento que pode vir a propiciar o *retrato* do currículo em ação, prejulgando-se que é nele que os professores registram o saber ensinado.

Neste momento, é interessante destacar que, na pesquisa, não tencionamos nos deter na transposição didática externa, e sim, na etapa da transposição didática interna, a qual está relacionada com as escolhas dos saberes ensinados pelos professores. Essa escolha decorre do fato de que é nessa etapa, como expresso anteriormente, que acontece o currículo em ação, no qual as escolhas dos saberes a ensinar se explicitam através do saber ensinado.

Ao tratarmos desse último (o saber ensinado), devemos levar em consideração que, no Brasil, apesar de existirem as propostas curriculares, tem-se, também, o livro didático como instrumento regulador, indicando os saberes a ensinar. E é o professor quem, em última instância, decide que conteúdos irá ensinar.

Nesse sentido, compreendemos que é o professor quem elenca o conjunto de conteúdos, ou o saber a ensinar, que ele julga importante para a formação de seus alunos. É, também, ele quem toma decisões sobre a ênfase que dará, no seu ensino, a esses conteúdos.

De certa forma, isso lhe dá autonomia, pois, ao mesmo tempo, essas escolhas refletem sua própria cultura, suas ponderações pessoais, suas atitudes para com o ensino; ou seja, as escolhas do saber a ensinar perpassam também pelas concepções dos professores (suas concepções de ensino).

Diante da relevância dos aspectos ressaltados, a questão da escolha, a autonomia dos professores e o currículo em ação, realizamos estudos e análises de informações contidas nos documentos (PCN, BCC-PE, Matriz de Avaliação-

SAEPE[10] e Relatório Estadual da Avaliação do SAEPE 2002), resgatando informações sobre o objeto desta pesquisa, buscando analisar a escolha dos saberes ensinados pelos professores de Matemática de escolas públicas jurisdicionadas à Gerência de Ensino da região sul da cidade do Recife.

O desenvolvimento da pesquisa e seus resultados

Inicialmente, ressaltamos que, ao analisarmos o Relatório Estadual dos Resultados da Avaliação do SAEPE 2002, que apresenta os rendimentos referentes às avaliações de Matemática, realizadas em novembro daquele ano, detivemo-nos na apreciação dos resultados apresentados pelos alunos, em matemática, mais especificamente os da 8ª série.

Chamou-nos a atenção, principalmente, o fato de que questões envolvendo a identificação de fração como representação, que pode estar associada a diferentes significados, obtiveram um percentual de acerto de 15,9%. Observamos, também, questões do bloco “Grandezas e Medidas”, em que apenas 40% dos alunos avaliados conseguiram determinar o perímetro de uma figura geométrica, em que tanto a figura como as suas dimensões estavam representadas (o que por si só já pode ser considerado insuficiente). O Relatório aponta que apenas 20% dos estudantes conseguem ter sucesso quando as medidas estão expressas no texto do problema, mesmo em situações de cálculo direto do perímetro.

Santaló (1996) destaca que, enquanto professores de matemática, não podemos perder de vista que estamos preparando os nossos alunos para a vida, o que nos propicia, nessa difícil tarefa de selecionar os conteúdos, a seguinte regra: é preferível saber pouco e bem, que muito e mal, e que é mais recomendável fazer cabeças “bem feitas” do que cabeças “bem cheias”. Essa questão de cabeças “bem feitas”, em lugar de cabeças “bem cheias”, perpassa pela concepção de ensino que adotamos, pois, se vemos o aluno como um balde[11] que precisa se encher de conhecimentos, teremos cabeças cheias. Porém, se vemos o aluno como um ser ativo, o qual, diante de uma situação-problema, mobiliza conhecimentos e ações para re-

[10] Sistema de Avaliação Estadual de Pernambuco
[11] Câmara dos Santos (2002), quando das reflexões que envolvem as concepções de ensino, discute as perspectivas em que o conhecimento é visto como “algo que se acumula num balde, que se enche”.

solvê-las, aí, sim, teremos cabeças “bem feitas”.

Assim, hoje, em vez da listagem tradicional de conteúdos, há consenso sobre o que os conteúdos de Matemática, para o ensino fundamental, devam contemplar: o estudo dos números e operações (no campo da Aritmética e da Álgebra); o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria); e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, da Geometria, além de outros campos de conhecimento); e tratamento de informação (contemplando conteúdos envolvendo dados estatísticos, tabelas e gráficos, idéias relativas à probabilidade e à combinatória).

Porém, o desafio que se apresenta é o de identificar quais conteúdos contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e a coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, para a habilidade de interpretar fatos e fenômenos. Nesse aspecto, mais uma vez, aproximamo-nos da questão das cabeças “bem feitas”, destacada por Santaló (1996).

Da mesma forma que os PCNs tratam da importância da seleção de conteúdos, temos, mais especificamente com relação à Rede Pública Estadual de Ensino de Pernambuco, a Base Curricular Comum (BCC-PE), que também destaca alguns aspectos referentes à escolha de conteúdos, conforme detalharemos a seguir.

O primeiro aspecto diz respeito à importância do estabelecimento de um mapeamento dos conteúdos matemáticos, o qual possibilite pensar num ensino da matemática que não os isole em blocos estanques e autossuficientes. Ainda de acordo com a BCC-PE, a aprendizagem somente se efetiva se considerarmos que os conceitos devem ser constantemente revisitados, durante todo o percurso escolar do aluno. Além desses aspectos, o documento destaca estudos que têm demonstrado que, para grande parte dos conceitos matemáticos trabalhados na escola, a aprendizagem não pode ser garantida em um espaço delimitado de tempo.

É exatamente esse ponto de vista que tem levado algumas instituições escolares à adoção de ciclos de aprendizagem, que remetem à ampliação do tempo de aprendizagem, permitindo, assim, que sejam respeitados os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos.

É importante ressaltar que a adoção dos ciclos, ou níveis de escolaridade (como é apresentado na BCC-PE), também nos leva à dualidade velho/novo, destacada por Chevallard (1991), na qual o objeto de ensino deve aparecer como algo novo, que traduz uma abertura das fronteiras do universo do conhecimento já explorado. Na BCC (2005, p. 99), o aspecto velho/novo é ressaltado quando se afirma que o professor deve ter bastante clareza acerca das aprendizagens realizadas anteriormente. Ou seja, o documento aborda a questão de o professor dedicar muito tempo a um conceito que já foi visto anteriormente pelo aluno, ou de não realizar chamadas a essas aprendizagens.

A partir da apresentação dos aspectos presentes nos documentos de referência[12], relacionados à seleção de conteúdos, reportemo-nos a um outro elemento, presente na sala de aula, que também explicita uma orientação sobre o saber a ser ensinado: o livro didático.

Para Sacristán (2000), o livro didático não é, por si só, o currículo, mas, sim, um elemento decisivo na concretização deste. Daí que sua escolha seja decisiva no começo de um curso ou de um ciclo de ensino. Partindo desse pressuposto, é importante destacar que o livro didático vem sendo objeto de análise promovida pelo MEC, no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Através do Guia do Livro Didático 2005 de 5ª a 8ª série, podemos verificar que o mesmo trata, dentre outras análises, da que diz respeito à seleção de conteúdos, procurando destacar se as coleções analisadas abordam, de forma satisfatória, os campos matemáticos do Ensino Fundamental – números, geometria, álgebra, grandezas, medidas e tratamento da informação, como, também, se existe uma articulação entre esses campos. A realização dessas análises, destacadas no guia, é fundamental para que os professores possam fazer as escolhas dos saberes a ensinar, levando em consideração que elas estão "atreladas" à questão da organização do conhecimento escolar.

Câmara dos Santos (1997) destaca que o processo de aparecimento do conhecimento é diferente na comunidade matemática e na comunidade escolar. Na comunidade matemática, a ordem de surgimento de novos objetos do conhecimento não está sujeita a uma distribuição no tempo, ou seja, os objetos do conhecimento

---

[12] Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, Matriz de Avaliação (SAEPE) e Base Curricular Comum-PE.

vão surgindo, geralmente, pela resolução de problemas, que farão surgir novos problemas e, assim, sucessivamente, sem que esteja sujeita a limitações temporais.

Por sua vez, na comunidade escolar, a ordem do aparecimento do conhecimento é pré- determinada pelo texto escolar: texto formado pelo conjunto dos objetos de conhecimento que "deverão" ser ensinados e que autoriza (exige) uma certa "programabilidade" na aquisição do conhecimento. O texto deve sustentar uma relação particular com o tempo, e o professor aparece como o representante oficial do texto escolar no sistema didático. Nesse contexto, o tempo dá o ritmo de funcionamento do sistema didático.

Diante das considerações levantadas, sobre escolha de saberes, sequenciação, temporalização, surgiu o interesse de investigar questões, como: Quais *os conceitos ou saberes* que estão sendo ensinados pelos professores? Quanto *tempo* eles dedicam à abordagem dos saberes escolhidos para ensinar? Qual a *sequenciação* dada por eles para a abordagem desses saberes? Também tivemos o interesse de analisar a relação entre os conteúdos ensinados e os explicitados em documentos, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), a BCC-PE e livros didáticos adotados pelos professores.

Ressaltamos que esta pesquisa foi direcionada para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), utilizando dados coletados em 12 escolas da rede pública estadual de Pernambuco, distribuídas em seis núcleos, localizados em áreas da Região Metropolitana do Recife. Para tanto, tivemos 43 turmas, sendo 22 de 5ª série e 21 de 6ª série, com um total de 35 professores[13] distribuídos nas respectivas séries. Partimos do levantamento dos registros dos saberes ensinados pelos professores, explicitados nos diários de classe, no componente referente às anotações ditas como "conteúdos trabalhados e situações didáticas"[14], nos quais os professores registram os conteúdos ensinados em cada aula, com o intuito de analisarmos de que maneira os saberes propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Ma-

[13] Tivemos o cuidado de escolher professores que faziam parte do quadro efetivo na escola há mais de dois anos, pois os professores cujos vínculos eram de contrato temporário, assim como os estagiários, não haviam participado das mudanças, promovidas pela Secretaria de Educação de Pernambuco com vistas à reorientação do ensino, da aprendizagem e da avaliação, que vêm sendo implementadas na Rede Estadual, desde 1992.

[14] O termo situação didática é um conceito amplo, implicando múltiplos elementos: interação social na classe, transposição didática e multimeios. No contexto do diário de classe da Rede Pública Estadual de Ensino de Pernambuco, este está voltado para a preparação do conteúdo a ser ensinado (PERNAMBUCO, 1998, p. 49).

temática, na Matriz de Avaliação (SAEPE) e na Base Curricular Comum estavam contemplados nas escolhas feitas pelos docentes.

Nessa análise, optamos por introduzir questões sobre a quantidade de aulas dadas e o percentual de sucesso dos alunos, explicitados no Relatório Estadual dos Resultados da Avaliação – SAEPE-2002. Nesta etapa do presente estudo, organizamos os saberes ensinados, registrados nos diários, nos blocos de conteúdos NO (Números e operações), EF (Espaço e forma), GM (Grandezas e medidas), AF (álgebra e função) e TI (Tratamento da informação), com o simples intuito de estruturar os dados resgatados dos registros. Ressaltamos que, com isso, não descartamos a questão da relevância da interligação entre os blocos, dando maior ênfase à etapa: "análises das sequências". Posteriormente a essa análise, fizemos uma comparação dos saberes ensinados pelo professor com os conteúdos do livro didático adotado por ele. Para essa etapa, limitamo-nos aos professores que aderiram ao uso do livro que tinha sido mais adotado nas escolas, o livro 2. Nosso intuito foi levantar indícios de uma possível relação entre as escolhas, propostas no livro, com aquelas realizadas pelos professores, para cada um dos saberes ensinados.

Por último, realizamos a análise referente à comparação da sequência dos saberes ensinados com a sequência apresentada pelo livro didático adotado pelo professor, buscando identificar se ele obedece a sequenciação dos conteúdos apresentados no livro ou se ele caminha por uma sequência diferente daquela proposta pela obra.

Apresentaremos, aqui, parte das análises, iniciando com uma tabela-síntese da comparação entre as médias, obtidas tanto com relação ao quantitativo do total de aulas dos registros dos professores, tabuladas de acordo com os blocos de conteúdos, como também da ênfase dada pelos documentos de referência e livros didáticos aos conteúdos de cada um dos blocos.

Tabela 1 – Comparação entre as médias

Blocos	Médias de aulas nos blocos para as séries		Médias de ênfase nos documentos de referência		Médias de páginas dos livros didáticos		Média de páginas do livro didático 2 nos blocos	
	5ª série	6ª série	Média	Média 3º ciclo	Média 5ª série	Média 6ª série	Média 5ª série	Média 6ª série
NO	97%	67%	82%	26%	69%	38%	69%	59%
EF	0%	2%	1%	23%	14%	10%	8%	2%
GM	1%	1%	1%	16%	11%	7%	19%	1%
AF	0%	28%	14%	20%		40%		36%
TI	2%	2%	2%	15%	6%	5%	4%	2%

Fonte: elaboração própria.

Conforme apresentado na Tabela 1, pudemos observar, nas nossas análises, que a ênfase das escolhas dos conteúdos foi para o bloco Números e Operações, apresentando 82% da média de aulas dedicadas a ele, em detrimento dos outros blocos, tanto para as 5ªs como para as 6ªs séries. Essa questão nos levou a perceber que existe uma relação, não somente com as escolhas, mas, também, com a questão do tempo gasto nas aulas para esse bloco. Nos documentos de referência para o 3° ciclo, por exemplo, 26% dos conteúdos sugeridos pertencem ao bloco Números e operações.

Ainda conforme destacamos na Tabela 1, o bloco NO teve maior ênfase, apresentando uma média de aulas de 97% para as 5ªs séries e 67% nas 6ªs séries. Estabelecendo uma comparação entre esses dados e a média de páginas dos livros adotados, observamos que a ênfase em se trabalhar com números é maior nas aulas do que aquela apresentada pelos livros. O mesmo não é verificado com relação ao bloco AF para as 6ªs séries, em que observamos uma média de aulas de 28%, enquanto a média de páginas nos livros é de 49%. Porém, esses dados foram analisados levando-se em consideração todos os professores sujeitos desta pesquisa, como, também, todos os livros didáticos adotados.

Contudo, ao nos determos em examinar o levantamento do livro didático adotado na escola, para o qual obtivemos um total de 5 livros, observamos que existe uma predominância de escolha, por parte dos professores, pelo livro didático 2, apresentando 67% de preferência, apesar de esse livro ser recomendado com ressalvas pelo PNLD. Partindo desse dado, resolvemos fazer a mesma análise comparativa entre a distribuição de conteúdos do livro, ou o tempo proposto pelo livro didático (a média de páginas), e a média de aulas (ou tempo trabalhado) que os professores, que adotaram o livro 2, dedicaram aos blocos, já com o intuito de verificarmos se, ao fazermos a análise dos dados apenas dos que adotaram o livro 2, haveria mudança no resultado apresentado. Os resultados não se distanciaram do apresentado anteriormente, quando consideramos todos os livros e todos os sujeitos da nossa amostra. A única diferença foi um aumento de 2% na média de aulas. Com isso, verificamos que existe uma forte relação entre o tempo proposto pelo livro para o trabalho dos conteúdos e o tempo empregado pelo professor.

Apesar de os documentos de referência darem, em média, uma ênfase de 16% e de 15% para os conteúdos dos blocos GM e TI, respectivamente, observamos, nos dados analisados, que apenas 1% da média de aulas é dedicado às grandezas e 2% à TI. Verificamos que as escolhas feitas pelos professores das 5as e 6as séries, para o bloco GM, foram voltadas para o conteúdo "*medidas de comprimento (transformação, mudança de unidades e leitura)",* quando temos, conforme sugestão dos documentos de referência, conteúdos como: medidas de massa; de capacidade; de superfície; de tempo e temperatura; de ângulo; dentre outros.

Apesar de as escolhas do bloco GM terem sido feitas, apenas, para as medidas de comprimento, temos, de acordo com o relatório do SAEPE, para o descritor D015 *"Resolver problemas utilizando relações entre unidades de medida"*, que os alunos obtêm, apenas, 20,7% de acertos nas questões que demandam esse descritor. Identificamos também que, nos registros, havia escolhas apenas de conteúdos tais como "construção de gráficos de barras e interpretação do significado das informações obtidas por gráficos de barras". Constatamos que essas escolhas são referentes ao bloco TI, voltadas apenas para os conteúdos "gráficos e tabelas", quando, em verdade, tem-se um "leque" de conteúdos ressaltados pelos documentos de referência, como, por exemplo, medidas estatísticas, noções elementares de probabilidade e representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias.

A ênfase na escolha dos conteúdos "gráficos e tabelas" pode ser explicitada a partir da observação feita na análise do livro didático 2, na qual verificamos que o bloco TI é sempre explorado no final de cada um dos capítulos.

O destaque dado pelos professores ao bloco TI, para *"Gráficos e tabelas",* nos leva a salientar que, no resultado apresentado no relatório do SAEPE 2002, tem-se que, em cada quatro alunos, menos de um obtém sucesso em questões de determinação de probabilidades, o que acentua a relevância de futuras pesquisas concernentes ao porquê da não ênfase nos conteúdos noções elementares de probabilidade e contagem, dentre outros.

Quanto ao bloco EF, dedica-se apenas 1% da média de aulas nas 5ª e 6ª séries, enquanto nos documentos de referência há, em média, um relevo de 23% para os conteúdos destinados a esse bloco. Nossa leitura sobre essas escolhas que os professores fizeram para as 6ªs séries, em relação ao bloco EF, aponta que elas são voltadas para o estudo de ângulos e coordenadas cartesianas, o que, de certa forma, condiz com a sugestão da BCC-PE, que preconiza que o estudo de ângulos pode ser ampliado na 2ª etapa da escolaridade, enquanto que a ideia de coordenadas cartesianas, articulada a outras áreas de conhecimento (plantas, mapas, coordenadas geográficas, etc), deve ser introduzida nessa etapa. Porém, quando relacionamos as escolhas de ângulo com os resultados do SAEPE 2002, observamos que, para o descritor E002 “reconhecer as diferentes interpretações do conceito de ângulo”, os alunos conseguem obter 56,6% de acertos em questões que demandam esse descritor, o que pode ser um indício de que o estudo de ângulos está sendo retomado no 4ª ciclo.

Conclusões

Para concluir, recordamos que, nessa análise, encontramos relações que envolvem não apenas as escolhas dos professores mas, também, o tempo de aula dedicado aos conteúdos dos diferentes blocos. Essa análise aponta para a necessidade de uma maior sensibilização quanto à relevância dos temas geometria, grandezas e medidas e tratamento de informação no ensino da matemática, bem como na formação continuada dos professores.

As análises em relação às escolhas indicam, também, que, pelo fato de não se priorizar, no momento das escolhas, os problemas, a geometria, as grandezas e medidas e o tratamento da informação, as propostas estão ainda tendo “dificuldade” de serem incorporadas na rede.

Um segundo resultado é com relação ao livro didático, que emerge como texto fundamental para a escolha dos saberes ensinados. Indícios apontados nas análises mostram que, para a maioria dos nossos sujeitos, as escolhas dos saberes ensinados estão atreladas aos conteúdos apresentados nos capítulos do livro. Evidenciamos esse fato quando fizemos a comparação entre os saberes ensinados e os conteúdos apresentados no livro didático, verificando que ele, o livro didático, é um direcionador da escolhas dos saberes ensinados, expressando os conteúdos a serem tomados como objeto de ensino.

Observamos também que existe uma forte relação entre o tempo proposto pelo livro para o trabalho dos conteúdos e o tempo empregado pelo professor, pois, no exame dos livros adotados, divisamos a existência de uma ênfase para o bloco NO, fazendo com que os professores passassem bem mais tempo trabalhando os conteúdos desse bloco, em detrimento dos demais.

Partindo dos resultados encontrados neste estudo, acreditamos ser necessária uma investigação mais aprofundada com relação à não prioridade nas escolhas para os blocos GM, AF, EF e TI, pois a escolha dos saberes a ensinar parece ser orientada pela relação existente entre o professor e o saber.

Referências

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇAO. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino fundamental** – Matemática. 5ª a 8ª série. MEC/ SEF, Brasília, 1998.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇAO. SECRETARIA DE EDUCACAO INFANTIL E FUNDAMENTAL. **Guia de Livros Didáticos 2005.** V. 3: Matemática/ Brasília: Ministério da Educação, 2005.

BIANCHI, J. J. P.. **A Educação e o Tempo**: três Ensaios sobre a História do Currículo Escolar. São Paulo: UNIMEP, 2001.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Algumas concepções sobre o ensino- aprendizagem de Matemática. In: **Educação Matemática em revista**. Ano 9, nº 12, Junho de 2002.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O professor e o tempo. **Tópicos Educacionais**, v. 15, nº 1 / 2, p.105-116, 1997.

CHEVALLARD. Y. **La Transposición Didáctica** –Del saber sabido al saber enseñado. Argentina: AIQUE, 1991.

CHEVALLARD. Y. **Estudar Matemáticas** – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

COLL. C.. **Psicologia e Currículo**. Série Fundamentos. São Paulo: Ática, 1994.

MARTINS, P. P. O. Conteúdos escolares: a quem compete a seleção e a organização? In: VEIGA, Ilma Passos Alencastro. **Repensando a didática**. Campinas: Papirus, 2004.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. Diretoria de Educação Escolar. **Política de Ensino de Escolarização** – Coleção Professor Paulo Freire. Recife, 1998.

PERNAMBUCO. **Relatório Estadual dos Resultados da Avaliação do SAEPE 2002** – Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco. Recife, 2002.

PERNAMBUCO; UNDIME. **Base Curricular Comum para o Estado de Pernambuco.** Recife, 2005.

SACRISTÁN, A. I. P. G. **Compreender e Transformar o Ensino**. 4ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecília & SAIZ, Irmã (Org). **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CAPÍTULO 5

INVESTIGANDO CONCEPÇÕES DE FRAÇÕES[15]

Adegundes Maciel da Silva
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Este estudo teve sua motivação em nosso trabalho junto a professores da Rede Municipal do Recife. Nas demandas por formações continuadas, de professores de todos os níveis de ensino, as frações aparecem como uma das ideias que mais apresentam dificuldades no processo de ensino-aprendizagem. Isso é confirmado quando observamos resultados do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE (PERNAMBUCO, 2003), que evidenciam o fraco desempenho dos alunos em itens envolvendo frações e números racionais.

Enquanto no Ensino Fundamental, as frações são trabalhadas como "objeto de estudo", no Ensino Médio elas aparecem como "ferramentas", ou seja, instrumentos para o trabalho com outros campos da Matemática, tais como razão, proporção, regra de três, juros, porcentagens, entre outros, na aritmética, na geometria, na trigonometria, na química, na física. Dessa forma, parece-nos preocupante que alunos do 3º ano do Ensino Médio apresentem resultados tão baixos na avaliação do SAEPE. Por exemplo, observamos que para o descritor D015 - *Resolver problema*

[15] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2006.

que envolva variação proporcional, direta ou inversa entre grandezas, apenas 27,4% dos alunos obtêm sucesso. No descritor D016 – *Resolver problema que envolva porcentagem*, apenas um a cada quatro alunos consegue resolver corretamente os itens associados ao descritor, isso após oito anos de instrução escolar e seis de estudo das *frações* na Matemática.

É nesta direção que a literatura, nesse campo, aponta resultados de estudos que tentam diagnosticar as dificuldades na aprendizagem do conceito de fração vivenciadas pelos nossos alunos.

Com as frações as aparências enganam. "Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; falam sobre frações coerentemente; resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba" (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Segundo os autores, é comum se apresentarem frações às crianças e mostrar-lhes todos divididos em partes, distinguindo muitas vezes o resto, e pintando algumas dessas partes. Em seguida, os estudantes são informados de que o número total de partes é o denominador, e que a quantidade de partes pintadas corresponde ao numerador. Esta introdução vem, em geral, junto com alguma instrução de regras para operar com as frações, permitindo que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações.

Considerando a dificuldade do conteúdo e outras prioridades curriculares, documentos oficiais têm diminuído a ênfase em frações nas séries iniciais. É o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), cujas orientações vão à direção de eliminar, das séries iniciais, as operações com números racionais na representação fracionária (BRASIL, 2001). A matriz de descritores do 6º Ano do SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (INEP, 2001) – também não inclui essas operações.

Apesar dos avanços em pesquisas na educação matemática, o ensino das frações continua se caracterizando como um exercício de regras e procedimentos, uma aprendizagem de algoritmos. Assim, fica caracterizado um desafio a ser alcançado pelos educadores matemáticos que procuram desenvolver saídas, como ferramentas inovadoras para uma real compreensão do conceito de fração e de equivalência das frações.

A partir desse quadro, buscamos investigar a concepção de frações de alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Para tanto, aplicamos um instrumento escrito, em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e nos anos do Ensino Médio, em duas escolas públicas de Pernambuco, contemplando as ideias de frações como modelo parte-todo, como quociente e como operador, em situações de quantidades discretas e contínuas.

Revisão da literatura

Observa-se que, na instrução escolar, as frações são definidas como $\frac{a}{b} \in Q, b \neq 0,$ ou seja, $\frac{a}{b}$ representa um número racional, com $b \neq 0$, sendo ***a*** chamado de numerador e ***b*** de denominador. No processo de *transposição didática*[16] do campo matemático para a esfera didático-pedagógica, esse novo número passa a ter um significado particular. A fração, neste caso, é entendida como uma *partição*, como a representação da conjugação de duas ações: dividir/ (tomar, comer ou pintar). Na escola, são mais usuais as pizzas, bolos, barras, ou figuras geométricas, limitando a ideia do conceito de *frações*.

Nesta direção, é percebido que entender frações como partições leva os alunos a uma série de dificuldades na compreensão do conceito. Por isso, Maia, Câmara e Câmara (1991) sugerem que a ideia de fracionamento indica implicitamente que cada uma dessas frações é uma porção menor (igual) que o todo inicial, ou seja, é uma fração do que foi o *todo* na sua origem. Logo, quando esse *todo* não está claramente definido, a ideia de unidade fica duvidosa e o fracionamento, mais difícil. É nesse sentido que o conceito de *frações* se torna incompreensível.

O início do trabalho com frações na escola, geralmente, é acompanhado de uma grande preocupação com os aspectos didáticos e metodológicos relativos ao

[16] Conjunto de transformações que sofre o saber científico antes de ser ensinado. Este processo vai desde a escolha do saber a ensinar à sua adaptação ao sistema didático, existindo todo um processo gerador de deformações, de estabelecimento de coerências até a criação de novos conhecimentos, ao saber escolar (CHEVALLARD, 1985).

conceito, pouco consideradas as questões psicológicas ligadas à aquisição dessas ideias.

A construção do conceito de número racional/fracionário é, sem dúvida, um processo complexo, seja do ponto de vista psicológico seja do epistemológico. As crianças enfrentam diversas dificuldades para compreenderem a necessidade da utilização deste "novo" conceito de número em suas tarefas escolares, como é documentado por alguns pesquisadores (MAIA; CÂMARA, M.; CÂMARA, P., 1991). Em Lima e Brito (2001), encontramos que, na escola, as crianças elaboram o conceito de fração como sendo um pedacinho de alguma coisa, uma parte específica de um todo, ou algo menor que um todo. É a primeira ideia de fração que a criança recebe.

De acordo com a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais, é no 4º ano que se inicia a construção do significado do número racional, nas suas diferentes representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social. Propõe-se, para este período, que as crianças sejam levadas a refletir sobre as limitações dos números naturais (nas situações em que é preciso representar quantidades menores que um inteiro) e a consequente importância dos racionais. Com o objetivo de favorecer a compreensão das crianças quanto à utilização dos números racionais na vida cotidiana, propõe-se que sejam explorados os seus diferentes significados (parte-todo, quociente e razão). (BRASIL, 1998).

Para Bertoni (2004), existe uma perda significativa do aprendizado das frações no Ensino Fundamental. A autora defende que o ensino das frações seja mais acentuado, já no 2º ano fundamental, inclusive em relação às operações fundamentais com as mesmas.

Diante deste quadro, pode-se perceber que a construção do número fracionário exige um razoável intervalo de tempo, tendo em vista que as crianças devem ter diferentes contatos com experiências que permitam a compreensão e a necessidade desse tipo de número em suas vidas. Ao mesmo tempo, encontramos poucos estudos que mostram como a aprendizagem desses conceitos se desenvolve ao longo do tempo.

Estudos têm mostrado que, desde muito cedo, as crianças possuem um conhecimento intuitivo das frações, antecedendo as atividades formais (na escola) com os números racionais, que são iniciadas no 4º Ano (PITKETHLY; HUNTING, 1996).

Esses conhecimentos intuitivos incluem imagens, experiências vividas e ferramentas do pensamento, formadas a partir de um grande número de situações específicas vivenciadas no dia a dia, e que servirão de base para a construção do conhecimento formal. Segundo esses autores, são os esquemas intuitivos que permitem que as crianças criem soluções para determinados problemas e elaborem o seu próprio conhecimento matemático.

Há um consenso, entre pesquisadores e professores, de que a fração não é um conceito fácil de se entender (BEZERRA, 2004). Muitas vezes os alunos reconhecem a forma a/b (a e b naturais, com b ≠ 0), dizem que é uma fração, mas não conseguem representá-la ou aplicá-la numa determinada situação, principalmente quando se apresenta mais de um inteiro, explícito nas representações com quantidades discretas.

Vergnaud (1982) defende que, do ponto vista psicológico e didático da formação de conceitos matemáticos, estes devem ser compreendidos como sendo um conjunto de invariantes que podem ser utilizados na ação, em meio às situações que constituem as diversas propriedades, e o conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações.

Para que um conceito (C) possa ser compreendido em seu desenvolvimento e funcionamento, é preciso considerar três subconjuntos de C = {S, IO, Y}: S é a referência, grupo formado de situações que dão consistência ao conceito; IO é o significado, grupo formado de invariantes operatórios, mecanismos utilizados pelo sujeito na resolução dos problemas, sobre os quais se apoiam a operacionalidade dos esquemas; e Y, o significante, conjunto de representações simbólicas, tanto para a apresentação quanto para a resolução do problema. Os três elementos atuam conjuntamente e, para desenvolver melhor a compreensão de um determinado conceito, faz-se necessário estudá-lo num conjunto de situações diversas.

Segundo Franchi (1999), a operacionalidade de um conceito compreende uma diversidade de situações e manifesta-se sobre uma variedade de ações e de esquemas. No plano do significado, os esquemas formam a articulação indispensável entre as situações de referência e os significantes (simbólicos), sendo formados de invariantes, predições, inferências e regras de ação.

Os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) permitem ao sujeito reconhecer quais são os elementos relativos a uma dada situação e apreender a informação sobre a situação a ser tratada. São eles que determinam as diferenças entre um esquema e outro, essenciais para a formação dos campos conceituais. A predição são esquemas que condicionam os sujeitos a poderem antecipar o objetivo a ser alcançado, os efeitos a serem considerados e as possíveis etapas intermediárias. *As regras de ação permitem gerar a sequência de ações pelo sujeito* (op. cit., p.166), são regras do tipo se..., então. As inferências capacitam aos cálculos, às regras e às antecipações de cada situação, com base nas disponibilidades das informações e do sistema de invariantes de cada sujeito.

Condições para existência de fração

Para Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), compreender frações requer, primeiramente, a noção de conservação de quantidade. O número de um conjunto, seja contínuo ou descontínuo, permanece invariável em relação a mudanças de aspectos como: forma, posição etc. Esta fase, na criança, acontece no estágio das operações concretas a partir de 7 ou 8 anos.

Os números fracionários apresentam particularidades nas relações entre a ação operatória e a representação perceptual (PIAGET; SZEMINSKA, 1975). A origem desses números depende de uma ação por abstração reflexiva[17] ou empírica. Segundo Boyer (1974), medições de terras influenciaram a criação do número fracionário. Muitos autores acreditam que a origem deles seja mais articulada com as questões espaciais do que com as questões ligadas à aritmética – mais perceptual que operatória. Logo, o número fracionário teria sua origem na experiência física do fracionamento de quantidades contínuas.

Os autores afirmam, ainda, que o conceito de fração envolve uma relação parte-parte (quantidades extensivas) e uma relação parte-todo (quantidades intensivas)[18]. A relação parte-parte assegura que um todo pode ser exaustivamente

[17] Ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem subsistir fora dessa totalidade.

[18] Quando quantidades se referem às relações em vez de à quantidade real elas são *intensivas*. Em contraste com quantidades extensivas que se referem à soma total (NUNES; BRYANT, 1997). As quantidades intensivas são relacionais, como: velocidade, taxa, probabilidades. Como às relações *parte-todo.* As extensivas como às *parte-parte.*

dividido em partes equivalentes. A relação parte-todo assegura a compreensão de que as partes estão sempre contidas no todo e que juntas o compõem.

Para esses autores, a compreensão de frações implica a construção de quatro invariantes na organização das ações do sujeito:

- A primeira seria *uma divisão equitativa das partes* – o todo precisa ser dividido em partes iguais para que cada parte seja considerada uma fração;
- A segunda, *o esgotamento do todo* – a impossibilidade da existência de remanescentes quando se completa o todo;
- A terceira, *a relação entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as partes* – para dividir um todo contínuo em três partes iguais serão necessários apenas dois cortes;
- E a quarta, *a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido* – quanto maior o número das partes, menor o tamanho de cada parte; •A soma de todas as partes constituídas a partir do todo é igual ao todo inicial 'princípio da invariância' – com a divisão do todo em partes, a unidade não é alterada.

Para Piaget e Szeminska (1975), a compreensão do número fracionário é possível diante de uma maturação biológica que segue desde o pensamento das operações concretas até as operações formais, concedendo fundamental importância ao papel formador do desenvolvimento cognitivo.

O "raciocínio proporcional", na criança, começa no estágio das "operações formais", último estágio do "desenvolvimento cognitivo". Por outro lado, diversas são as pesquisas pouco recentes que questionam a perspectiva piagetiana do raciocínio proporcional. Alguma delas são Hart, 1984; Karplus, 1979 apud Carraher, 1993 e Spinillo e Bryant (1991), que mostram resultados diferentes.

Portanto, a formação de um conceito não invoca apenas aspectos práticos, como também teóricos. O conhecimento emerge de problemas a serem resolvidos e de situações a serem dominadas. Assim, a instrução escolar deve oferecer aos alunos várias situações, nas quais eles possam descobrir diversas relações num mesmo conteúdo matemático (VERGNAUD, 1991). Tanto concepções como modelos ou teorias são formados a partir das situações às quais o sujeito é submetido.

Vergnaud (ibid.) afirma que concepções, como habilidades, desenvolvem-se com o decorrer da vida e indica que isso não ocorre apenas a partir de características gerais do pensamento. Nessa perspectiva, os conceitos de frações e razões possuem raízes em atividades que são significativas para os alunos pré-adolescentes, particularmente quando envolvem valores simples, tais como 1/2 ou 1/4.

Compreendendo que esse conceito é uma dificuldade para jovens e adultos, não podemos subestimar a lentidão do desenvolvimento de certo conceito, atribuindo-lhe apenas a razão "desenvolvimentista", defendida por Piaget. Para ser compreendida, uma situação necessita do concurso de vários conceitos e cada um, isoladamente, pode ser mobilizado para a compreensão de mais de uma situação. Tal consideração aparece na base do que Vergnaud (1982) denomina campos conceituais.

As frações no campo conceitual das estruturas multiplicativas

Segundo Vergnaud, o conceito de número racional é definido a partir do campo conceitual das estruturas multiplicativas – conjunto de problemas que necessitam de operações de multiplicação e divisão, apesar de serem dependentes das estruturas aditivas; é um campo específico, incluindo proporções simples e múltiplas.

Para o autor (VERGNAUD, 1988, p.141), o campo conceitual das estruturas multiplicativas *é caracterizado por todas as situações que envolvem problemas de proporção simples ou múltiplas, para as quais, geralmente, precisa-se multiplicar ou/e dividir simultaneamente*. Vários conceitos matemáticos participam deste campo conceitual como, por exemplo, fração, razão, taxa, número racional, multiplicação e divisão, funções lineares e não-lineares, espaço vetorial e análise dimensional.

As estruturas multiplicativas são formadas por relações quaternárias, portanto, *os mais simples problemas de multiplicação e divisão implicam na proporção simples de duas variáveis, uma em relação à outra* (VERGNAUD, 1995, p.14).

As frações em um campo maior – os números racionais

Ao estudarmos os números racionais, devemos admitir que, no contexto do dia a dia, aparecem com mais frequência os números decimais que os fracionários. Com o advento das calculadoras, possivelmente esta afirmação se tornou mais plausível, uma vez que a escrita das frações trazia mais dificuldades de ser expressa nas antigas máquinas de escrever, e as representações dos números com vírgulas se tornaram mais viáveis. Observe que é mais comum dizer: "passe-me 1/4 da pizza!" do que "passe-me 0,25 da pizza!" Portanto, dependendo da ocasião, torna-se mais prático e fácil de ser entendido utilizando-se a linguagem das frações.

Kieren (1976) acredita que os números racionais constituem a base para a educação matemática e científica. Entender frações impõe condições de incorporá-las dentro de um campo bem maior, o campo dos números racionais. A matemática define, como mostram os livros didáticos, que número racional (Q) é um par ordenado de números inteiros p e q representado da forma p/q, com $q \neq 0$. Neste sentido, os números racionais podem assumir a forma fracionária ou decimal.

O conceito de número racional possui diferentes subconstrutos, nos quais esses números podem ser interpretados como relação parte-todo, medida, quociente, razão e operador.

Segundo Kieren (1976, p. 102-103), os números racionais envolvem diferentes ideias:

> 1) abrangem frações com as quais podemos comparar, adicionar, subtrair, etc.; 2) são frações decimais, as quais são extensões dos números naturais (via nosso sistema de numeração); 3) são classes de equivalência; 4) são números da forma p/q os quais p e q são inteiros e $q \neq 0$, logo, os racionais expressam razões; 5) são operadores multiplicativos, como exemplo, 2/3 de 1/2; 6) são elementos de ordem infinita no campo dos quocientes. São números da forma $x=p/q$, onde x satisfaz a equação $qx = p$; 7) são medidas ou pontos numa reta numérica.

No significado *parte-todo*, a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por exemplo, uma pizza) ou um conjunto discreto (por exemplo, duas pessoas faltaram numa reunião com dez componentes). Aqui, o todo é repartido em partes de igual tamanho.

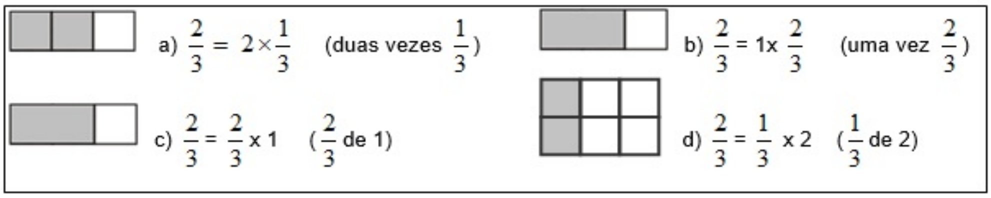
Como medida, envolve, por exemplo, medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não, de mesma área).

O significado *quociente* é percebido quando um número de objetos precisa ser dividido ou distribuído igualmente a certo número de grupos (a:b = a / b, a e b naturais com b ≠ 0). Ele se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão (por exemplo, 4/5 é o resultado em que quatro chocolates devem ser repartidos entre cinco pessoas).

O significado *razão* é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza (por exemplo, 2/3 pode representar a razão entre o número de estudantes e o número de passageiros que passam por uma catraca de ônibus, ou seja, a cada 2 estudantes que passam pela catraca, 3 passageiros já haviam passado). Por outro lado, se a razão é formada por grandezas diferentes e comparada multiplicativamente, a razão é chamada de taxa (por exemplo, um ônibus trafega a uma velocidade de 80 Km/h, isto é, a cada 80 quilômetros, o ônibus precisa de 1 hora para percorrê-los).

O significado *operador* já aparece no 6º Ano do Ensino Fundamental, no processo de transformação encolher ou esticar, reduzir ou ampliar. Ele define a estrutura multiplicativa de números racionais e é a mais algébrica das ideias básicas, determinando algo que atua sobre uma situação e a modifica (problemas como "que número deve multiplicar a 5 para que tenhamos 2?" têm características deste significado). Probabilidades, escalas e porcentagens são algumas aplicações que têm as frações como operadores. Como multiplicação, a X b, no qual "a" é o multiplicador e "b" é o multiplicando, 2/3 pode ser visto na figura abaixo:

Figura 1 – Representação gráfica de frações como operadores multiplicativos.



Fonte: elaboração própria.

Esses quatro subconstrutos têm propriedades matemáticas semelhantes e têm sido trabalhados com problemas diferentes de modo a se extrair, dos alunos, tipos diferentes de respostas.

Kieren (1988) recomenda que esses quatro subconstrutos estejam presentes em qualquer currículo bem projetado de matemática. Uma verdadeira compreensão de frações requer tanto uma compreensão desses subconstrutos quanto de suas inter-relações.

As diferentes aplicações de cada subconstruto descrito acima são função do contexto do problema. Entender números racionais é poder identificar as diferentes interpretações desses números, tanto quanto suas inter-relações.

Procedimentos Metodológicos

Com o objetivo de identificar a concepção de frações e de equivalência de frações de alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, foi realizado um teste diagnóstico, com 630 alunos de escolas públicas, sendo uma da Rede Municipal do Recife e outra da Rede Estadual de Pernambuco. O instrumento foi composto de dez questões, que foram tabuladas e graficamente analisadas, envolvendo frações como parte-todo, quociente e operador, além da influência de figuras nas questões, quantidades discretas e contínuas e equivalência das frações. O instrumento contemplou sete itens envolvendo quantidades contínuas e três envolvendo quantidades discretas.

Resultados e considerações

O objetivo deste trabalho foi verificar a concepção de frações que o aluno tem, de acordo com sua escolaridade. Especificamente, verificou-se em que medida as concepções sobre frações e equivalência de frações se modificam com o avanço da escolaridade do aluno. Além disso, foi possível observar prováveis diferenças entre as concepções de frações de quantidades contínuas e de quantidades discretas e identificar o comportamento dos alunos quando da mudança dos subconstrutos (quociente, parte-todo e operador), verificando a influência de figuras na composição das questões no percentual de acertos dos alunos.

Os resultados mostraram que, para grande parte dos alunos do Ensino Fundamental (52%), o conceito de fração como operador de uma quantidade discreta estaria fortemente associado ao denominador da fração. Por exemplo, para alunos dessa etapa, um terço de m elementos corresponderia a 3 elementos, independentemente dos elementos do conjunto. Já em relação aos alunos do Ensino Médio, observamos a tendência a identificar essa ideia a uma operação entre os membros da fração operadora. Dessa forma, para os alunos dessa etapa, um terço de m elementos corresponderia a quatro elementos, resultado da adição dos termos da fração (1+3). Tal concepção esteve presente, em média, em 49% dos sujeitos envolvidos em nosso trabalho.

Em relação ao complemento de uma fração, a ideia permanece a mesma, ou seja, os sujeitos apresentam certa disposição em operar entre os seus termos. É interessante observar que, para os sujeitos do Ensino Fundamental, aparece como predominante a ideia de somar os termos da fração, enquanto no Ensino Médio os sujeitos tendem, prioritariamente, a multiplicar esses termos.

Com 93% dos erros na 7º ano e 75% na média de todas as turmas, verificou-se que, se a fração de um total T é uma quantidade m, logo esse total é igual ao produto entre o denominador da fração e a parte correspondente m (se 1/3 de uma quantidade é 20, por exemplo, o total é correspondente ao produto 3x20); e com 32% dos erros no 6º ano, e 15% em média de todas as turmas, provocou-se a ideia de que, se a fração de um total T é uma quantidade m, logo esse total é igual ao denominador dessa fração (assim, por exemplo, se 1/3 de uma quantidade é 20, o total corresponde ao denominador 3).

Observamos como os alunos mobilizam a ideia de equivalência de frações em situações de comparação entre elas. Encontramos, em um a cada três de nossos sujeitos, duas concepções principais: a primeira consiste em identificar que, entre duas frações, quanto maiores os seus termos correspondentes, maior será a fração; na segunda concepção, os sujeitos estabelecem que, quanto maior o denominador, menor será a fração, em qualquer circunstância. Já em entre os estudantes do 6º ano, para dois entre cada três sujeitos que erraram esse tipo de item, a equivalência de frações está estritamente associada à igualdade entre seus termos correspondentes.

Em uma situação de reconhecimento de uma fração representada por uma figura, um número importante de sujeitos não estabelece que a igualdade das partes seja fundamental para a existência de uma fração. Os erros surgidos nesse tipo de questão alcançam índices que variam de 51% a 64%. Os dados mostram que, para muitos alunos, o fato de se apresentar uma figura dividida em partes, com algumas delas pintadas, garantiria a existência de uma fração, não sendo consideradas as relações entre as partes. Em cada três alunos, quase dois apresentaram a ideia de que, para determinar a fração correspondente numa figura de partes pintadas, não importa se as partes que foram divididas sejam iguais. Basta que a relação seja feita: parte pintada (acima do traço), sobre o total de partes em que foi dividida a figura (abaixo do traço).

Esta é uma das invariantes destacadas por Lima (1982) e Nunes e Bryant (1997) na organização das ações do sujeito para a compreensão do conceito de fração: o todo precisa ser dividido em partes iguais, para que cada parte seja considerada uma fração.

Três concepções puderam ser percebidas envolvendo a relação parte-todo. Na primeira, com 73% dos erros no 3º ano do Ensino Médio, 50% no 9º ano e 34% no 6º ano, a fração de uma figura dividida em partes iguais é igual à figura representada que corresponde ao seu complemento (por exemplo, pintar 2/3 de 3 elementos corresponderia a pintar apenas 1 elemento).

Na segunda concepção, que contribuiu com 55% dos erros no 6º ano e 35% dos erros no 2º ano do Ensino Médio, dois terços de uma figura dividida em três partes iguais seriam iguais a duas partes mais meia parte. Ou seja, parece-nos que os sujeitos tenderiam a buscar uma espécie de relação entre os dois termos da fração sem levar em consideração o todo apresentado.

Finalmente, na terceira concepção, que contribuiu com 90% dos erros no 7º ano e com 59% dos erros no 6º ano, os sujeitos identificam que dois terços de uma figura dividida em três partes iguais é igual às três partes (contagem única do denominador).

Vale ressaltar que as três concepções apresentadas acima aparecem quando o número de partes em que o todo foi dividido coincide com o denominador da fração apresentada. Quando isso não acontece, como, por exemplo, em uma situação em que o aluno deve representar 2/3 em uma figura formada por 9 quadradinhos, observa-se que 84% de todos os erros correspondentes consistem em pintar apenas duas unidades.

Maia, Câmara, M. e Câmara, P. (1991) afirmam que esse tipo de erro estaria associado à forma como é conduzido o ensino das frações nas escolas, que provém do modelo parte–todo tradicional, reforçando o entendimento de fração como conjugação de duas ações de dois números. Em seus estudos com alunos de 6º ano do Ensino Fundamental e de 2º ano do Ensino Médio, em Pernambuco, os autores diagnosticaram que a concepção de fração como conjugação de duas ações, “dividir e pintar”, tem como referencial o modelo parte-todo, comumente apresentado no momento de iniciar o trabalho escolar com as frações.

Em Nunes e Bryant (1997), encontramos que o limite do *meio* desempenha um papel importante na quantificação de relações parte-todo, assim como em relações parte-parte. Em nosso estudo, encontramos que a concepção de metade em figuras pintadas está condicionada à contiguidade dessas partes e à não importância da equidade entre as partes pintadas e não-pintadas. Em outras palavras, para os sujeitos do nosso trabalho, a condição para que uma figura represente *um meio* é que exista uma parte pintada contígua a uma parte não pintada, não importando a quantidade total de partes em que a figura foi dividida nem o número de partes consideradas.

Nas situações em que os sujeitos deveriam identificar a fração correspondente às partes pintadas de uma figura, encontramos três concepções errôneas predominantes.

A primeira situação estaria na relação •[parte-parte] com 58% dos erros no 6º ano e 46% em média geral. A fração correspondente a uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas é determinada pela relação (parte pintada) / (parte não-pintada). Por exemplo, uma figura dividida em cinco partes iguais com duas delas pintadas corresponderia à fração 2/3.

A segunda situação estaria na • [unidade fracionária pintada] com 30% dos erros no 3º ano do Ensino Médio e 12% na média geral. A fração correspondente de uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas é determinada pela relação inversa do número dessas partes pintadas. Por exemplo, se uma figura foi dividida em oito partes e pintadas duas, a fração correspondente seria de 1/2; se fossem pintadas três, a fração seria 1/3, e assim por diante;

E, na terceira situação, a • [fração inversa] com 31% dos erros no 8º ano e 16% na média geral. A fração correspondente a uma figura dividida em partes iguais com partes pintadas é determinada pela relação total de partes em que foi dividida a figura e o número de partes pintadas. Por exemplo, em uma figura dividida em cinco partes iguais, com três delas pintadas, os alunos identificam como uma fração 5/3.

Numa questão que mobilizava o construto quociente, não apresentando figuras e, possivelmente, influenciando em muitos resultados entre as crianças, a equivalência das frações é mantida com a mesma concepção encontrada na questão de quantidades discretas, ou seja, entre duas frações, quanto maiores os seus termos correspondentes, maior será a fração. No Ensino Fundamental, registraram-se 60% dos erros, contra 45% no Ensino Médio.

Em relação ao subconstruto quociente, encontramos o maior índice de acertos entre os alunos de 6º ano, decaindo em função do avanço na escolaridade dos sujeitos. Embora esta pesquisa não permita esclarecer as causas desse fenômeno, o fato de o item relacionado a esse subconstruto apresentar contexto fortemente associado ao cotidiano dos alunos poderia estar relacionado à performance melhor entre sujeitos de menor escolaridade.

Diante disso, notamos que os erros apresentados se concentram na identificação de frações que tenham os números apresentados no enunciado como termos da fração resultante. Por exemplo, em uma pizza, dividida em quatro pedaços, que deve ser servida a oito pessoas, os sujeitos tendem a identificar que cada uma das pessoas receberia “um quarto” ou “quatro quartos” da pizza. Questionamos a provável pregnância do modelo parte-todo, novamente, nas concepções dos alunos.

É notável que o modelo parte-todo aparece como aquele priorizado pela escola no trabalho com frações. De fato, por meio da nossa experiência em sala de aula, verificamos que outros subconstrutos são pouco explorados nas atividades de ensino, tais como operadores, quocientes, razões, etc. No caso da ideia de quociente, pode-se perceber a insuficiência do modelo parte-todo para identificar frações.

Podemos afirmar a importância do modelo quociente para explicar frações do tipo 5/3, 8/7 ou 3/2, que não poderiam ser bem compreendidas pelo modelo parte–

todo; uma criança dificilmente aceitaria a parte ser maior que o todo – em 5/3 (cinco terços), “5” é parte do todo “3”, por exemplo.

Retomamos as ideias de Vergnaud (1988), segundo o qual as competências e concepções desenvolvem-se ao longo do tempo, por meio de experiências envolvendo um grande número de situações, tanto no interior da escola quanto fora dela. Assim, o conhecimento dos estudantes tanto pode ser explícito, no sentido de que eles podem expressá-lo de forma simbólica, quanto implícito, no sentido de usá-lo em ação, escolhendo operações adequadas sem expressar as razões dessa adequação.

Contudo, é importante lembrar que nosso trabalho se caracterizou como um estudo essencialmente diagnóstico, em que buscamos identificar como certas concepções se manifestam em relação ao avanço da escolaridade dos alunos. Consideramo-nos professores em exercício, portanto, temos a convicção da necessidade de utilizar este e outros estudos em situações de ensino que promovam efetivas aprendizagens por parte dos alunos. Esse é nosso próximo desafio!

Referências

BERTONI, N. E. Um novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Soc. Brasil. Educ. Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BEZERRA, F. J. B. Construindo a representação da fração: abordagem tradicional versus abordagem conceitual. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** Recife: Soc. Brasil. Educ. Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série).** Brasília: MEC/SEF, 2001. 142p.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: EDGARD BLÜCHER Ltda,1974. 512p.

CARRAHER, D. **Lines of thought:** a ratio and operator model of rational number. Educational Studies in Mathematisc, Kwwer Eds., Holanda, v.25, 1993, p.281-305.

CHEVALARD, Y. **La transposition didactique:** Du savoir savant au savoir enseigné**.** Editions La Pensée sauvage, Grenoble: France, 1985. p.36-78.

CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de frações através de estimativas: um estudo exploratório.** 2003. 145f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Centro de Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

FRANCHI, A. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 155-195.

INEP – INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. **SAEB 2001:** Novas Perspectivas. Brasília, 2001. 166p.

KIEREN, T. E. On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In: R. Lesh (Eds.), **Number and meansurement**. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, 1976. p. 101-144.

KIEREN, T. E. Conhecimento pessoal de números racionais: Seu desenvolvimento intuitivo e formal. In: J. Hiebert; M. Behr (Eds.), **Números e conceitos e em operações do número nas classes dos middles.** New York: Lawrence Erlbaum Associates. 1988. p.162-181.

LIMA, M. Iniciação ao conceito de fração e desenvolvimento da conservação de quantidade. In: T. N. CARRAHER (org.): **Aprender pensando,** Petrópolis: Vozes, 1982, p.81-127.

LIMA, V. S.; BRITO, M. R. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. In: M.R. Brito (Org.), **Psicologia da educação matemática:** teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001, p.107-127.

MAIA, L.; CÂMARA, M.; CÂMARA, P. Repensando a aprendizagem de frações: uma experiência pedagógica. **Tópicos Educacionais**, UFPE, Recife, v. 9, n.1/2, p.75-82, 1991.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 244p.

PERNAMBUCO. Governo do Estado de. Secretaria de Educação. Diretoria de Política e Programas Educacionais. **Matrizes curriculares de referência para o Estado de Pernambuco.** Recife: SEDUC/DPPE, v.1, 2003.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **The Child's Conception of Geometry**. London: Routledge and Kegen Paul, 1960, p.40-127.

PIAGET, J; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 2. ed., Rio de Janeiro: Zahar, 1975. 332p.

PITKETHLY, A.; HUNTING, R. **A review of resent research in the area of initial fraction concepts. Educational Studies in Mathematics Education,** v.14, n. 5, p. 307-317, 1996.

VERGNAUD, G. Uma classificação de tarefas cognitivas e das operações do pensamento envolvidas além e dos problemas da subtração. In: CARPENTER, T., ROMBERG T.; MOSER, J. (Eds.), **Adição e subtração:** uma aproximação cognitiva. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1982, p.31-41.

VERGNAUD, G. Theorical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. **Proceedings of the International Congress on Mathematical Education**, Budapest, p. 39-41, 1988.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** Grenoble, La Pensée Sauvage, v. 10, n. 2-3, 1991, p.133-170.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1995, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 1995. 321p. p.223.

CAPÍTULO 6

INVESTIGANDO A TRANSIÇÃO DA LINGUAGEM NATURAL PARA A LINGUAGEM ALGÉBRICA À LUZ DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA[19]

Regina Celi de Melo André
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Há uma preocupação de educadores matemáticos ao perceberem que alunos apresentam grandes dificuldades para resolver certos tipos de problemas simples que envolvem álgebra, particularmente quando tratam de uma tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem matemática. Por exemplo, em problemas em que se pede aos alunos para ler uma sentença relacionando duas variáveis e, em seguida, escrever uma equação que expresse essa relação, com frequência eles não conseguem representar o que está sendo solicitado (CLEMENT *et al*, 1981, *apud* LOCHHEAD; MESTRE, 1988).

A passagem da linguagem natural para a linguagem matemática é um processo complexo para a criança quando esta é introduzida no campo da álgebra, pois

[19] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2007.

CAPÍTULO 6

um pequeno texto, contido em um problema, em
letras (LESSA, 1996). Em uma pesquisa
nstatou-se que os alunos envolvidos obtiveram
não terem sido capazes de traduzir corretamen-
juagem matemática.

olar, tradicionalmente, o ensino da álgebra tem
ando as letras são apresentadas como substitu-
momento antecede a introdução ao estudo de
e os autores de livros didáticos, de modo geral,
m a descoberta do valor de algo desconhecido.
letras para achar números desconhecidos, ou
nta traduzir em símbolos matemáticos ideias ou expressões como “o dobro de um número” que pode ser escrita na forma de 2x ou, “a soma de dois números é 27”, que pode ser representada por x + y = 27, por exemplo.

Observando essa trajetória escolar dos estudantes, a sensação que temos é a de que não se leva em consideração a questão da representação do objeto matemático em estudo no momento em que são introduzidos novos conceitos, ou quando são explorados conceitos já aprendidos. No caso das equações, especificamente, há uma tendência geral a enfatizar a manipulação algébrica, a resolução da equação propriamente dita, esquecendo-se de que é fundamental utilizar algum tipo de registro que sirva de suporte para comunicar ou representar os objetos matemáticos, que são de natureza abstrata, sobretudo quando nos referimos à passagem de enunciados de problemas para a linguagem matemática.

Segundo Da Rocha Falcão (1997), existe uma perspectiva parcial acerca da álgebra, que é veiculada com frequência nos manuais introdutórios (livros didáticos) e ganha reforço na sala de aula. Para esta perspectiva, a álgebra diz respeito a um conjunto de regras de manipulação que permitem passar da equação à solução. Isso significa que a álgebra seria considerada apenas um objeto matemático, abandonando-se seu caráter de ferramenta. A “colocação” do problema em equação enfatizada pelo autor, que está associada à formalização, é considerada importante, pois ela acontece antes da resolução. Como podemos perceber, dilemas significativos se apresentam no ensino da álgebra em nível elementar e, somente conhecendo-os a fundo, pode-se tentar evitar ou minimizar as concepções equivocadas. Entre elas, a forte tendência que os alunos têm para fazer uma associação com a ordem das palavras, da esquerda para a direita, quando são levados a traduzir palavras presentes em questões que são propostas nas atividades em sala de aula, em que eles terão que expressá-las em forma de equação (LOCHHEAD; MESTRE, 1995).

Parece-nos que, atualmente, mais do que nunca, quando os resultados de avaliações nacionais indicam a fragilidade dos conhecimentos em matemática do estudante brasileiro, nas diversas etapas de ensino, é urgente e necessária a investigação de fenômenos no lócus onde ocorre a construção e a transposição didática do conhecimento, ou seja, na sala de aula. Muitas vezes o estudante não consegue identificar a expressão algébrica associada a um problema em linguagem natural, seja ela uma equação ou outro, por exemplo. Diante dessa realidade, surgem a preocupação e o interesse em buscar investigar como se dá o processo de equacionamento de enunciados na transição entre a linguagem natural e a linguagem algébrica pelos estudantes matriculados nos anos finais do ensino fundamental, especificamente no oitavo ano/sétima série.

Segundo Damm (1999), o estudante consegue fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, entretanto não é capaz de realizar as conversões necessárias para apreensão deste mesmo objeto.

Objeto de estudo e objetivos da pesquisa

Diante das demandas de uma sociedade permeada de novas tecnologias de base científica e das constantes transformações no mundo do trabalho, o conhecimento matemático torna-se cada vez mais indispensável, a fim de atender às expectativas de todos aqueles que buscam diagnosticar, interpretar e contribuir para a intervenção sobre os inúmeros problemas e fenômenos que os cercam e surgem cotidianamente, seja durante a própria escolaridade, seja no campo do trabalho ou em outros contextos. Sendo assim, o presente trabalho de pesquisa tem a preocupação de investigar situações em que os alunos são levados a equacionar questões propostas (similares àquelas usualmente empregadas nos livros didáticos ou nas atividades realizadas em sala de aula) da linguagem natural para a linguagem algébrica, utilizando diferentes representações. Além disso, destacamos e acrescentamos também os seguintes objetivos específicos:

a) Investigar as produções escritas mobilizadas pelos sujeitos no processo de transição da linguagem natural para a linguagem simbólica, identificando as estratégias adotadas pelos mesmos, através dos instrumentos papel e lápis;
b) Mapear e classificar os registros de representação presentes e mais frequentes nas respostas dadas (observando-se os de maior ocorrência) à luz da teoria dos registros de representação semiótica;
c) Identificar os contextos e estruturas subjacentes às situações propostas que geram maiores ou menores dificuldades.

Assim, buscamos levantar algumas questões sobre a problemática do estudo:
1) Como os alunos realizam o equacionamento de situações propostas no processo de transição da linguagem natural para a linguagem algébrica antes de resolverem problemas que envolvem equações do 1º grau? Quais as estratégias adotadas no processo dessa transição?
2) Que registros de representação são mais frequentes na passagem dos enunciados das situações propostas? Quais dos registros utilizados pelos alunos apresentam maiores ou menores dificuldades na conversão entre as duas representações?
3) Quais os contextos e estruturas subjacentes às situações propostas que geram maior complexidade na representação?
4) Que tipo de situações ou problemas que podem ser representados pelo emprego de equações proporcionam melhor desempenho por parte dos alunos?

Referencial teórico

A linguagem desempenha um importante papel na constituição do conhecimento matemático. Freitas (1995) nos diz que, ao mesmo tempo em que a linguagem é um fator importante para o desenvolvimento mental da criança, exercendo uma função organizadora e planejadora do seu pensamento, ela tem também uma função social e comunicativa. Isto significa que, por meio da linguagem, a criança é exposta ao conhecimento humano e tem a possibilidade de construir conceitos acerca do mundo no qual está inserida.

Quanto ao corpo de conhecimento da matemática, este possui uma linguagem específica, carregada de conceitos e significados que, muitas vezes, são mal compreendidos ou empregados. Essa linguagem é parte integrante no processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos. Como a matemática é uma área do saber muito rica, é natural que apresente várias facetas; uma delas, exatamente, é possuir uma linguagem própria, que, em alguns casos e em certos momentos, confundiu-se com a própria matemática. A linguagem matemática desenvolveu-se com o intuito de facilitar a comunicação do conhecimento matemático entre as pessoas. No entanto, quando há abuso do uso simbólico e não há preocupação em trabalhar a compreensão dessa simbologia, procurando-se esclarecer o seu significado, obtém-se o efeito contrário, isto é, dificulta-se o processo de compreensão e aprendizagem da mesma.

Podemos caracterizar epistemologicamente a álgebra como "um conjunto de conceitos e procedimentos matemáticos (algoritmos) que permitem a representação prévia e a resolução de um determinado tipo de problema para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes" (DA ROCHA FALCÃO, 1993, p. 86).

Além de funcionar como ferramenta para modelos físicos, a álgebra serve igualmente para a transposição de informações da linguagem natural para a linguagem simbólico-formal matemática. Por exemplo, na resolução de alguns problemas, uma etapa fundamental do trabalho diz respeito à "colocação" do problema na forma de equação. Ou seja, é gerada uma equação a partir dos dados fornecidos em linguagem natural.

Considerando a complexidade deste campo conceitual da álgebra, a tarefa geral de resolução de um problema algébrico pode ser decomposta, para fins de análise, em quatro etapas (DA ROCHA FALCÃO, 1997, p. 91): mapeamento do problema; escrita algébrica; procedimento de resolução; e retomada do sentido. Dentre essas etapas, a segunda, particularmente, diz respeito ao estudo em questão, pois a escolhemos como foco de nossa pesquisa. Esse enfoque se dá pelo menos por dois fatores: O primeiro deles refere-se à representação, uma vez que, para representar simbolicamente uma situação-problema, o sujeito dispõe de um referencial semântico, ou seja, os símbolos e as notações possuem um significado, ao contrário da resolução de uma equação, em que se emprega um referencial sintático, com regras de manipulação. O segundo diz respeito à importância dessa etapa pelo fato de ser o momento que antecede a resolução propriamente dita. Normalmente, espera-se que, antes de resolver uma equação, o aluno relacione os dados contidos no enunciado de uma questão e os coloque na forma algébrica, na forma de equação.

Há muito tempo, a álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de matemática, representando para muitos alunos tanto a culminação de anos de estudo de aritmética como o início de mais anos de estudo de outros campos da matemática. Poucos contestam sua importância, embora muitos só tenham noções superficiais sobre seu significado e seu alcance.

A Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas, pois um dos seus aspectos importantes é a diversidade de formas de representação presentes em seu corpo de conhecimento, que desempenham papel central, não só para representar os conceitos, relações e procedimentos como também na própria formação desses conteúdos. Por exemplo, uma função pode ser representada por uma tabela, por um gráfico cartesiano ou, ainda, por símbolos algébricos.

Os Registros de Representação Semiótica – Raymond Duval

Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, portanto, para o seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Neste caso, não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado sem o auxílio de uma representação. Como acontece em relação a outros conceitos científicos, a conceitualização dos objetos matemáticos, que compreende os significados, os significantes e as situações, contribui para o processo de formação desses objetos em nossas mentes. Para melhor esclarecer, os objetos matemáticos são conceitos descontextualizados e formulados de maneira mais geral, reconhecidos socialmente (na comunidade científica), mas que se originaram nos instrumentos conceituais criados pelos matemáticos para a resolução de problemas específicos, segundo Douady (1986) apud Souza e Cordeiro (2002).

Dada a generalidade e a descontextualização dos objetos matemáticos, sua manipulação só é possível por meio da criação de sistemas simbólicos que os representem. Esses sistemas de representação expressam algumas propriedades dos objetos matemáticos. Essas representações são caracterizadas por Duval como semióticas, externas e conscientes aos indivíduos, constituídas pela utilização de signos. Alguns sistemas semióticos são considerados registros de representação e desempenham um papel fundamental nessa conceitualização dos objetos matemáticos.

Em se tratando de linguagens, tem-se constatado, em diversas pesquisas de educação matemática, a dificuldade que os estudantes encontram em realizar a passagem de um registro de representação a outro, impedindo, muitas vezes, que prossigam no processo de resolução de problemas que lhes são propostos em sala de aula, ou que surgem no seu cotidiano enquanto cidadão.

Para fundamentação e análise dos estudos relativos ao presente trabalho de pesquisa, recorremos à teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Muitas das dificuldades observadas na resolução de problemas em sala de aula, nos mais diversos temas e níveis de ensino de matemática, podem ser explicadas em termos de algumas noções relativas ao trânsito entre as mais diversas formas de representação de um mesmo objeto matemático, como também ao custo cognitivo (grau de dificuldade) desta operação. Esta teoria contribuiu para fundamentar o presente estudo, no que diz respeito aos registros de representação adotados durante a conversão de enunciados de situações de natureza algébrica que foram propostas a estudantes de sétima série/oitavo ano da rede pública, envolvendo equações lineares (do 1º grau).

Em seus trabalhos de pesquisa, Duval (2003) procura evidenciar a importância da análise do papel das representações, quando se considera um objeto matemático. Para ele, os registros de representação mais complexos são os que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural. Este se constitui um dos tipos de registro de representação que procuramos focalizar em nosso estudo. Para Raymond Duval, o trânsito entre as mais diversas representações possíveis de um mesmo objeto matemático em questão assume grande importância.

Um dos problemas na aprendizagem matemática refere-se ao fato de que não é possível ter acesso a um objeto matemático por meio de um instrumento ou, mesmo, pela percepção, em virtude de sua natureza abstrata. Duval (2003, p. 21) afirma que “o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas”. Entende-se por *sistema semiótico*, ou *registro de representação*, um sistema de signos que permite cumprir funções de comunicação, tratamento e objetivação, não fazendo referência apenas às notações convencionais que, por sua vez, não constituem um sistema. Além da língua natural, em Matemática podemos citar como exemplos de sistemas semióticos: o sistema numérico, o algébrico e o gráfico.

Duval designa os diferentes tipos de representações semióticas utilizadas em matemática como “registros de representação”. Para o autor, os registros de representação mais complexos são os que têm como ponto de partida o enunciado em língua natural ou texto. O autor propõe que as resoluções desses problemas dependem primeiramente da compreensão dos enunciados e da conversão das informações pertinentes. Em se tratando deste aspecto, em nosso estudo, constatamos inúmeras dificuldades na passagem da linguagem natural para a algébrica, em que os enunciados foram colocados para serem “traduzidos” de uma representação “A” para outra representação “B”.

Conforme o que assinala Duval, existem dois tipos de transformações de representações semióticas completamente diferentes: os tratamentos e as conversões. A coordenação entre dois registros quaisquer se dá através dessas duas operações.

No que diz respeito às conversões, o autor afirma: “a conversão é a mudança da representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada em um registro, em uma representação deste mesmo objeto, desta mesma situação ou da mesma informação em outro registro” (DUVAL, 2004, p. 45).

Ainda de acordo com Duval (2004), podemos considerar também que, numa perspectiva pedagógica, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender os conceitos matemáticos que estão sendo objeto de estudo. Acontece, ao que nos parece, quase sempre, que é unicamente o tratamento que é considerado, porque corresponde a procedimentos de justificação. Isto nos faz refletir sobre qual seria a melhor representação a ser trabalhada e apresentada aos alunos. Um aluno pode saber, por exemplo, que deve dividir 1 por 4 para obter a representação decimal do racional ¼. Mas pode ser que não reconheça 0,25 como outro representante do mesmo número racional.

Na pesquisa de Catto (2000) *apud* Maranhão e Igliori (2003), verificou-se que, em geral, as conversões são menos utilizadas que os tratamentos e, quando utilizadas, prioriza-se um dos sentidos apenas. Cabe ressaltar que as conversões são as mudanças de registro mais eficazes para a aquisição de um conceito.

O presente estudo pretende focalizar as atividades de conversão. Nele, portanto, buscamos, investigar atividades em que os alunos são levados a realizarem a mudança entre duas linguagens, a natural e a algébrica, observando os registros de representação que são mobilizados durante esse processo, em que é necessário transformar o enunciado de um problema em uma equação. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Exemplificando melhor, um aluno pode não identificar qual a equação que melhor representa uma situação-problema; pode não perceber que 0,5 e 5/10 representam o mesmo número, apesar de o primeiro estar na forma decimal e o segundo na forma fracionária. Ele parece não perceber que, apesar de estarem representados de modos distintos, ambos se referem ao mesmo objeto matemático.

Duval afirma que a originalidade da atividade matemática reside na mobilização de, ao menos, dois registros de representação ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. A maior parte das dificuldades com problemas elementares de aplicação, como os problemas aditivos, por exemplo, ou aqueles de "colocar" em forma de equação, pode ser explicada pelo caráter congruente ou não da conversão de um enunciado em uma escrita que permita efetuar os cálculos, de acordo com o teórico (DUVAL, 2002, p. 19).

O segundo tipo de fenômeno descrito por Duval é o da importância do sentido da conversão. Isto significa que nem sempre a conversão se realiza quando se invertem os registros de partida e de chegada. Isso pode levar a uma disparidade de resultados em relação ao acerto, quando se inverte o sentido de conversão.

Percurso Metodológico

Para investigar como se dá o equacionamento de enunciados de problemas na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica, envolvendo equações polinomiais do 1º grau, o presente estudo foi desenvolvido de acordo com as etapas a seguir:

Etapa I – Análise preliminar de livros didáticos de Matemática para mapeamento dos tipos de questões utilizados e elaboração da lista proposta aos alunos, aplicada durante as intervenções realizadas em sala de aula;

Etapa II – Intervenção em sala de aula para aplicação da atividade proposta. Esta intervenção se deu em sessões únicas, cuja duração foi, em média, de duas aulas consecutivas, o que corresponde a cerca de duas horas;

Etapa III – Análise dos dados coletados – Esta análise se deu em vários momentos e foi desmembrada, em virtude dos aspectos observados: análise por questão, análise por contexto, análise por estrutura, comparação e discussão dos resultados entre questões de mesmo contexto e estrutura, discussão dos resultados quanto ao desempenho geral dos alunos.

Sujeitos:

O estudo envolveu 343 estudantes do oitavo ano (7ª série) do Ensino Fundamental, matriculados em escolas da rede pública estadual de Pernambuco, situadas na cidade do Recife. A pesquisa foi realizada em 6 (seis) escolas da rede pública estadual, perfazendo um total de 13 turmas. Em sua maioria, os estudantes encontravam-se dentro da faixa etária esperada, ou seja, apresentavam idades entre 12 e 13 anos.

Instrumentos de coleta:

No desenvolvimento da nossa pesquisa, foi utilizado como instrumento para a coleta de dados um teste, que consistia numa lista de situações ou problemas rotineiros frequentes, adaptados ou extraídos de livros didáticos, a partir de uma análise preliminar dos mesmos. Por meio deste instrumento, houve a intenção de investigar as estratégias utilizadas pelos alunos a partir dos registros feitos durante a passagem de uma linguagem para outra. O teste foi aplicado em sessão única em cada turma, utilizando-se três tipos de protocolo, compostos de 14 questões cada um. Essas questões correspondem a situações-contexto que obedecem a um comando geral: *Escreva uma equação para representar cada uma das situações seguintes.* Cada questão apresentava uma estrutura e um contexto diferentes das demais.

A partir dos registros coletados através da atividade aplicada, pretendeu-se realizar uma análise, verificando-se as estratégias e registros mobilizados pelos alunos na transição da linguagem natural para a linguagem algébrica. Para isto, selecionamos algumas categorias e subcategorias que serviram para o trabalho de análise das respostas obtidas pelos alunos. As categorias foram definidas de acordo com alguns tipos de erros e concepções detectados cujas causas foram discutidas em pesquisas anteriores (LOCHHEAD; MESTRE, 1995) e criadas a partir da análise de problemas propostos em livros didáticos brasileiros. Utilizamos as seguintes categorias: Rendimento, Tipos de Resposta, Tipos de Registro, Estrutura representada nas respostas, Contextos e Estruturas. Em relação à categoria rendimento, houve as seguintes subcategorias: erros, acertos e não respondeu. Quanto à categoria tipos de respostas produzidas pelos sujeitos, consideramos 6 subcategorias, classificadas por: R-1 (resposta 1), R-2 (resposta 2), R-3 (resposta 3), R-4 (resposta 4), R-5 (resposta 5),“ outros”. As subcategorias relativas ao tipo de estrutura representada presente nas respostas mais frequentes foram: aditivas, multiplicativas e mistas.

Em seguida, elencamos as subcategorias associadas à categoria *registro* que foram selecionadas: simbólico-algébrica - Exemplo: $(x + 6) + x = 22$. Por sua vez, esta subcategoria pode ser expressa de duas formas: *na forma de equação* e *na forma de expressão*; simbólico-numérica; língua natural; outros**.**

Os contextos explorados nas situações propostas foram definidos com base na análise preliminar realizada em livros didáticos de matemática para o oitavo ano (7ª série), observando-se alguns tipos de questões ou problemas mais frequentes. Elaboramos a terminologia empregada de acordo com o contexto presente nas questões para facilitar a identificação e a análise das respostas obtidas. Diante disto, selecionamos os seguintes contextos: contexto *idade,* contexto *partilha,* contexto *relação entre grandezas,* contexto *sucessão de números,* contexto *duas grandezas,* contexto *escolar.*

Para cada estrutura algébrica, foram selecionados dois contextos diferentes de situações (por exemplo, idade e partilha). Vale ressaltar que as estruturas algébricas em questão foram identificadas a partir do mapeamento e da análise de enunciados de situações e/ou problemas explorados em livros didáticos, como também baseadas em algumas estruturas algébricas classificadas no estudo de Lessa (1996).

Etapas da análise dos dados

A análise dos dados foi realizada basicamente em três momentos. Inicialmente, observou-se a ocorrência de registros de diversas naturezas. A partir de uma tabulação, em que foram apurados os dados brutos, houve condições de introduzir o processo de categorização dos mesmos, com objetivo de fazer um refinamento maior, considerando a enorme variedade de registros feitos pelos alunos. A partir daí, surgiram as subcategorias associadas à categoria *registro*, *estrutura e contexto*. Além destas, as outras categorias também necessárias são: *rendimento, tipos de resposta, tipos de registro e estrutura representada.*

O tratamento dos resultados consistiu na descrição das categorias, feita também por apresentação de tabelas e quadros com indicação das distribuições de frequência. No primeiro momento, a análise foi feita por questão. Logo após, verificou-se a categoria *rendimento* envolvendo todos os sujeitos da pesquisa.

Quanto à categoria *tipos de respostas* produzidas pelos sujeitos, consideramos 6 subcategorias, em que cinco das quais foram classificadas por R 1 (resposta 1), R 2 (resposta 2), R 3 (resposta 3), R 4 (resposta 4) e R 5 (resposta 5). Optamos por usar essa terminologia em função da enorme variedade de respostas elaboradas, tanto pelos alunos de uma mesma turma quanto por diferentes alunos dentre as turmas envolvidas. Acrescentamos uma sexta subcategoria, que denominamos de "*outros*", e que, por sua vez, refere-se a outros tipos de respostas, muito diferentes entre si, sem características comuns ou semelhanças com as demais classes de respostas identificadas. Esses tipos de respostas eram muito pontuais, atingindo percentuais inferiores a 1% de frequência, quando usamos como referência o universo de sujeitos investigados.

Elaborou-se um quadro da categoria referente aos *tipos de registros*, identificados com base nas respostas produzidas pelos alunos, assim como do registro presente nas questões propostas, à luz da teoria de Duval, os quais foram classificados da seguinte forma: Registro simbólico-numérico; Registro simbólico-algébrico – escrito na forma de equação; Registro simbólico-algébrico – escrito na forma de expressão; Outros. Os três registros mencionados são considerados *registros de chegada* (em que termina a conversão).

Em relação ao segundo momento, reunimos as duas questões de cada contexto de todos os protocolos coletados, nos quais foram observados os números de acertos, de erros, e quantos sujeitos não responderam.

Em um terceiro momento, partiu-se para análise por estrutura, também observando os mesmos aspectos: acertos, erros e quantos não responderam.

Em seguida, enfocaremos as diversas etapas da análise realizada, fazendo o recorte pela análise de duas questões propostas na atividade aplicada.

Inicialmente, em relação à primeira questão, presente em todos os protocolos, a resposta esperada era $x + (x + 6) = 22$. Esperava-se também que os alunos escrevessem os dados pertinentes no enunciado, representando-os da seguinte forma: a idade de Sara por x, (ou escolher outra incógnita) e a idade de Cristiane por $x + 6$, por exemplo, fazendo as relações necessárias para, depois, chegar à equação correspondente.

No que diz respeito ao rendimento (ver Tabela 1), constatamos que, do total de 343 alunos, 18% não responderam à questão. No entanto, dos 281 que responderam, houve apenas 2% de acerto, ou seja, 06 alunos chegaram à resposta esperada da seguinte forma: $(x + 6) + x = 22$. Com isto, observamos que houve 80% de erro.

Tabela 1 – Rendimento - Questão 1

	Frequência	%
Acertos	06	2
Erros	275	80
Não Respondeu	62	18
Total	343	100

Fonte: autoria própria

No entanto, em uma análise preliminar, na tentativa de prever o que os sujeitos envolvidos na pesquisa responderiam, confirmamos a nossa hipótese de que uma boa parte deles, ou até mesmo a maioria, daria como resposta: $x + y = 22$ ou $C + S = 22$ (usando outras variáveis). Como previsto, a grande maioria somou os dados presentes no enunciado, sem perceber a relação entre eles. Isto parece estar atrelado ao fato de que, conforme o contrato didático, os alunos supõem que, como sempre, a solução do problema será o resultado de algumas operações aritméticas simples, a partir dos dados do enunciado.

A segunda resposta mais frequente foi x + 6 = 22, com 7% de ocorrência. Podemos observar o resumo das respostas mais frequentes na Tabela 2, a seguir:

Tabela 2 – Tipos de Respostas - Questão 1

Respostas	Tipo de Resposta	Frequência	%
R-1	x + y = 22	59	21
R-2	x + 6 = 22	19	7
R-3	x + 6x = 22	13	5
R-4	C = 6S	06	2
R-5	6x + y = 22	06	2
	Outros	178	63
Total		281	100

Fonte: autoria própria.

Ressaltamos que, na primeira questão, o percentual relativo à categoria “outros” foi superior à metade dos alunos que responderam, ou seja, 63% das respostas.

Ao analisar a tabela 2, constatamos que 35% das respostas que apresentam erro estão associadas à ideia de uma soma que dá 22 como resultado. Isto pode estar relacionado à sequência de dados que aparecem no enunciado “a soma das idades de Cristiane e Sara é 22 anos”. Uma hipótese que levantamos é de que os alunos consideraram apenas a primeira parte da questão, por se tratar de um comando que envolve a tradução de alguns termos referentes a uma operação simples de adição, “a soma das idades”; isso ocorre muitas vezes mantendo-se a variável x e alterando-se o segundo termo. Por exemplo, quando se escreve x + y = 22 ou x + 6 = 22 ou ainda x + 6x = 22, sempre se conserva o “x” no primeiro termo, ao qual se adicionam outros termos, acompanhados ou não de outro “x”. Além disso, como já verificou a literatura, há uma forte tendência dos alunos em fazer a tradução mecânica das palavras-chave de uma questão ou problema em símbolos algébricos correspondentes. Parece que são os automatismos que predominam muitas vezes e estão presentes nas tarefas dos alunos.

Ainda quanto aos tipos de registros, verificou-se que 43% dos alunos representaram os dados da questão na forma de equação, sempre relacionando os dados do enunciado de alguma forma e fazendo uso da igualdade. Neste caso, o tipo de registro de representação mais utilizado foi o registro simbólico-algébrico, escrito pelos alunos na forma de equação do 1º grau. O segundo tipo de registro constatado, que se refere a 5%, também está inserido nesse tipo identificado. Observou-se também que o registro do tipo numérico obteve um percentual, em relação aos anteriores, que correspondeu a 13%.

No que diz respeito à estrutura representada nas respostas dadas pelos alunos, constatamos que 80% delas correspondem ao tipo de estrutura aditiva, enquanto 6% das respostas apresentaram o tipo de estrutura multiplicativa. Já em relação ao tipo de estrutura mista, observamos que houve 18% de ocorrência (vide Tabela 3).

Tabela 3 – Estrutura representada

Tipo de estrutura	Frequência	%
Aditiva	78	76
Multiplicativa	06	6
Mista	19	18
Total	103	100

Fonte: autoria própria.

De modo geral, observamos nesta questão que realizar a passagem do enunciado em língua natural para a representação na forma de equação não foi tarefa simples, tendo em vista o baixo percentual de respostas corretas. Acreditamos que parte dessa situação decorre do fato de os alunos apresentarem dificuldade quanto à seleção e à organização dos dados pertinentes que estavam presentes no enunciado da situação proposta, necessárias à conversão do texto (enunciado) em representação no registro simbólico algébrico. Entretanto, isso não ocorreu na maioria das respostas produzidas. A correspondência entre o registro de representação de partida e o registro de representação de chegada não se estabeleceu de forma direta, natural. Além disso, o conhecimento das regras de correspondência entre os dois registros envolvidos pode não ter sido suficiente para que os estudantes pudessem mobilizá-los e utilizá-los simultaneamente (MARANHÃO; IGLIORI, 2003). Os alunos não identificaram a equação mais adequada para a situação.

Outra questão cujas respostas obtidas nos chamaram a atenção foi a seguinte: Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 100 selos, de modo que Pedro receba três selos a mais que Paulo e Plínio receba cinco selos a menos que Paulo.

Nesta questão, a equação esperada é $x + (x + 3) + (x - 5) = 100$ ou suas equivalentes, $3x - 2 = 100$ ou $x + x + 3 + x - 5 = 100$. O contexto e a estrutura correspondentes são, respectivamente, "*partilha*" e *"$x + (x + b) + (x - c) = d$"*.

Observamos que houve apenas 1% de acerto. Enquanto isso, 46% não responderam à questão.

Tabela 5 - Rendimento – Questão 7

	Freqüência	%
Acertos	03	1
Erros	181	53
Não respondeu	159	46
Total	343	100

Fonte: autoria própria.

A representação utilizada pelos três alunos que conseguiram escrever a equação esperada foi a seguinte: *X + 3 + X + X – 5 = 100*. Eles parecem ter usado *"x + 3"* para indicar a quantidade de selos de Pedro, *"x – 5"* para indicar a quantidade de selos de Plínio e "*x"* para indicar o número de selos de Paulo, assim como se esperava. Observamos que não fizeram uso de parênteses, escrevendo os termos e operações diretamente. O baixo índice de desempenho na referida questão revela o grau de congruência na conversão do registro de representação em língua natural para o registro de representação simbólico-algébrico. Dito de outro modo, os alunos em sua maioria tiveram muita dificuldade em passar do texto do enunciado para a equação mais adequada. O nível de não-congruência presente não favoreceu a coordenação entre os dois registros utilizados pelos alunos. A maneira como se colocam os dados no enunciado não permite ao aluno perceber claramente a relação entre eles. Talvez a dificuldade maior esteja nas expressões (unidades pertinentes) "três selos a mais" e "cinco selos a menos". O aluno pode não ter compreendido como transformar esses conjuntos de palavras em termos de uma equação relacionando-os entre si. Este tipo de tarefa parece muito difícil. Ora eles fazem uma leitura direta, acompanhando a sequência de palavras até o final da primeira parte da questão (Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 100 selos), ora eles usam os dados na forma de produto entre números e variáveis. O tipo de resposta mais frequente foi z + x + y = 100, com 8% de ocorrência.

Verificamos que a primeira representação *(Z + X + Y = 100)* sugere que os alunos podem ter usado cada uma das variáveis para representar cada um dos três "personagens" do enunciado (Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 100 selos) que constituem uma das unidades significantes, no caso, a primeira delas, somando-os e igualando a 100. Eles não levaram em consideração as demais unidades significantes. A ideia de partilha pode também ter reforçado a escrita deste tipo de representação. Voltando à quarta resposta produzida, da mesma forma, observamos que cinco alunos parecem ter considerado apenas os dados iniciais do enunciado, ou seja, “Pedro, Paulo e Plínio vão repartir 100 selos”, quando escreveram 100 ÷ 3 = x. Neste caso, supomos que eles inverteram os dados, iniciando a tradução pelo final da unidade significativa. Dito de outro modo, eles iniciam a representação pelo dado numérico 100 e em seguida o dividem por 3 igualando a incógnita x. Consideraram, desse modo, apenas a unidade significante inicial.

Selecionamos dois exemplos de respostas dadas pelos alunos que consideramos extremamente relevantes, apresentando a transcrição a seguir:

Exemplo 1

Pe, Pa, Pli = repartir 100 Pe + 3 que Pa,

Pli – 5 q Pe

100 + 3 – 5 = x

Exemplo 2

PE + 3 + PA + PLI = PEPLI = PG

PA + PE + PLI = PAELI

PLI + 5 + PE + PA = - PLI + PA = QG

Os registros acima transcritos parecem revelar certo “grau de confusão” na mente do estudante, quando tenta escrever algum tipo de representação que esteja associado aos dados contidos no enunciado da questão. Percebemos que, aparentemente, há uma tentativa dos estudantes de escrever algo seguindo literalmente o texto do enunciado, pois eles utilizam as iniciais dos nomes dos personagens (*Pe, Pa, Pli*), além dos símbolos e sinais associados às operações em questão. Apesar de os exemplos em questão parecerem desconexos, sem sentido para o leitor, há claramente uma inclinação do aluno em fazer a leitura linear do enunciado, particularmente no primeiro exemplo.

Em relação aos tipos de registro empregados pelos alunos, observou-se que 57%, ou seja, a maioria dos alunos, evidenciam o uso do registro simbólico-algébrico na forma de equação. Além disso, também houve registro simbólico-algébrico na forma de expressão, manifestado no percentual de 15%. Observando os dois primeiros registros mais utilizados, verificamos que realmente houve uma predominância dos registros de representação que envolvem a simbologia algébrica, que correspondem a 72% do total de respostas dadas. Embora os alunos tenham respondido de duas formas, escrevendo uma equação ou uma expressão, houve um alto índice de emprego do tipo de registro simbólico-algébrico, durante a conversão de uma linguagem para outra. Quanto ao registro de representação simbólico-numérico, houve um índice de apenas 9% sobre o total de respondentes.

Na categoria "estrutura representada", 63% das cinco primeiras respostas obtidas evidenciam o tipo de estrutura aditiva, em que se apresenta uma soma. Já a estrutura multiplicativa apareceu em 17% das respostas. O tipo de estrutura "mista" apresentou 20% do recorte de respostas selecionadas.

Tabela 6 – Estrutura representada

Tipo de estrutura	Freqüência	%
Aditiva	19	63
Multiplicativa	05	17
Mista	06	20
Total	30	100

Fonte: autoria própria

Considerações Finais

Por meio da análise dos resultados, fizemos o "mapeamento" e a categorização dos tipos mais frequentes de respostas dos estudantes, assim como dos registros mais utilizados. Também identificamos as estruturas e os contextos correspondentes que causaram mais ou menos dificuldade. Nessa perspectiva, constatamos que a questão em que os estudantes apresentaram melhor desempenho corresponde ao contexto idade e apresenta estrutura do tipo mista, envolvendo adição e multiplicação ao mesmo tempo.

Em relação aos registros de representação mais frequentes nas respostas produzidas, constatamos que, em cerca de 78,5% das questões propostas, houve a predominância do registro de representação simbólico-algébrico na forma de equação, como já se esperava. Por outro lado, em relação ao tipo de questão que apresentou o maior emprego de equações, identificamos as questões 4 ("O quádruplo da minha idade menos 16 anos dá a idade da minha avó, que é de 72 anos") e

12 (“O dobro do sucessor de um número é igual a este número menos 3”) que apresentaram o maior percentual, pois ambas atingiram 76% de uso, embora os contextos e estruturas sejam diferentes. Verificamos que a questão 05 (“João é cinco vezes mais velho que seu filho Pedro”) apresentou o maior número de registros de representação simbólico-algébrico na *forma de expressão,* com 36% do total. Quanto ao registro do tipo *simbólico-numérico*, a questão na qual apareceu a maior ocorrência foi a questão 03 (“Um reservatório já está com 200 litros de água. Se for aberta uma torneira que despeja 25 litros de água por minuto, depois de certo tempo, o reservatório atingirá 950 litros de água”) utilizada por 21% dos alunos. Em particular, nesta questão, os alunos recorreram a registros de representações exclusivamente aritméticos, envolvendo a soma dos dados do enunciado como, por exemplo, $200 + 25 = 950$. Percebe-se, neste caso, a forte tendência em associar a ordem em que as palavras aparecem no texto para representar os dados presentes no enunciado; ou seja, os alunos usualmente fazem a leitura linear do enunciado do problema. Enquanto isso, o menor índice de ocorrência referente ao registro de representação *simbólico-numérico* foi verificado na questão 06 (“Em uma escola, há quinze vezes mais alunos do que professores”) cuja equação apresenta estrutura do tipo multiplicativa.

Quanto aos tipos de estrutura subjacentes às questões propostas aos alunos, identificamos que a estrutura aditiva foi a predominante, atingindo 96% na questão 08. Destacamos que esta questão foi a única que não apresentou a estrutura do tipo mista. A partir daí, supomos que a forte ocorrência desse tipo de estrutura pode estar associada a uma leitura linear realizada pelos alunos, em que eles traduzem mecanicamente os dados sequencialmente apresentados no enunciado da questão. A estrutura do tipo mista mostrou-se predominante em 91% das respostas relativas à questão 12. Ainda em relação à categoria estrutura, observamos que a estrutura $ax – b = c$, subjacente à questão 4, suscitou o maior rendimento por parte dos alunos, seguida da estrutura $ax = y$, que obteve o segundo melhor nível de desempenho. Concluindo, pode-se observar que as questões cuja estrutura são $ax - b = c$ e $ax = c$ obtiveram os melhores desempenhos por parte dos alunos com menor nível de dificuldade.

Em relação à categoria contexto, dentre as questões propostas, a que apresentou o maior percentual de acerto foi o que chamamos de contexto “idade”, particularmente nas questões 4 e 5. O contexto “partilha” apresenta resultados de desempenho um pouco melhores, que variam entre 1% e 2% de índice de acerto. O contexto “idade” parece gerar menos dificuldade na passagem de uma linguagem para outra, dependendo da situação.

A análise permitiu, também, verificar quais as questões que apresentaram maior ou menor grau de congruência semântica, segundo a teoria de Duval. Nesse sentido, percebemos que a questão 4 apresentou esse fenômeno, em que os alunos transitaram mais naturalmente entre os dois registros de representação envolvidos.

Constatamos, de modo geral, que os alunos participantes não conseguiram representar as diversas situações por meio de equações lineares (de 1º grau), demonstrando muitas dificuldades no que diz respeito à interpretação dos dados presentes nos enunciados. Mesmo nas situações consideradas mais simples, do ponto de vista da estrutura algébrica, poucos conseguiram fazer o equacionamento de forma adequada. Além disso, constatou-se também o automatismo das respostas dadas por alguns estudantes. Por outro lado, mesmo que de forma desconexa, as respostas obtidas envolviam, em sua maioria, os dados presentes nos enunciados das situações propostas. Segundo Duval, as resoluções desses problemas dependem primeiramente da compreensão dos enunciados e da conversão das informações pertinentes. Essa etapa, que antecede a resolução propriamente dita, parece não ser considerada em sala de aula ou é menos enfatizada que a manipulação algébrica.

Percebeu-se, por meio da atividade proposta, que há uma complexidade que envolve a conversão entre dois tipos de representação. Outra constatação foi a de que nem sempre parece fácil, para os estudantes, perceber a relação subjacente entre os elementos (dados) presentes em uma determinada situação. Parece ser difícil, para eles, conseguir colocar em símbolos algébricos situações-problema do mundo real. Por outro lado, como se tem verificado em diversos estudos, eles podem até apresentar certa fluência ou facilidade na manipulação de equações mas, ainda assim, não demonstram a capacidade de equacionar adequadamente enunciados de problemas, como foi constatado em nosso estudo. Isso nos revela uma questão preocupante: como poderão fazer uso dessa ferramenta, que é a álgebra, para modelar fenômenos que ocorrem no dia a dia, por exemplo? Como utilizar a linguagem algébrica para representar situações que se tornariam “mais fáceis” ou “mais práticas” de serem encaradas diante de atividades exigidas, seja no âmbito escolar, seja nas atividades ligadas ao mundo do trabalho ou ao cotidiano dos cidadãos? Nessa perspectiva, as evidências de nosso estudo nos levam a concordar com Duval (2003), quando afirma que a diversidade dos registros de representações tem um papel central na compreensão, que, por sua vez, requer a coordenação dos diferentes registros. A situação torna-se mais complexa quando um dos registros é um registro plurifuncional, como é o caso da língua natural. Nesse sentido, os sujeitos investigados em nossa pesquisa expressaram muitas dificuldades em fazer a passagem de um registro a outro. Eles demonstraram não ter habilidade em fazer a coordenação necessária entre os dois registros de representação utilizados na conversão língua natural → equação.

A análise dos dados permitiu evidenciar, também, que a maior parte das dificuldades com problemas elementares, que se espera colocar em forma de equação, por exemplo, pode ser explicada pelo caráter congruente, ou não, da conversão de um enunciado em uma escrita (Duval, 2003). As respostas dadas pelos alunos podem indicar que, muitas vezes, as conversões parecem ser feitas de modo automático, sem nenhuma reflexão sobre o que se está fazendo, como se um registro de representação fosse totalmente análogo ao outro.

Diante dos fenômenos que emergiram em nosso estudo, observamos que, em algumas questões, os estudantes não utilizaram um terceiro registro que permitisse uma representação intermediária, pois a passagem que se dá entre dois registros não pode ser feita diretamente, como afirma o próprio Duval. De um modo ou de outro, percebemos que a dificuldade na passagem de um registro a outro pode estar relacionada à forma como os alunos compreendem o enunciado da questão, ou como eles relacionam os dados pertinentes entre si. É possível, ainda, que tal dificuldade esteja atrelada à maneira como o texto do enunciado é redigido, de modo a não favorecer a compreensão e, consequentemente, a conversão.

Pensamos que uma das maneiras de tentar aprimorar os resultados revelados pelos sujeitos de nossa pesquisa seria focalizar na elaboração de situações didáticas que possam instigar e conduzir o aluno a perceber, experimentar e superar as concepções que provocam muitas dessas dificuldades evidenciadas, a fim de desinstalá-las. Sendo assim, o estudo da álgebra no ensino fundamental pode ter outro enfoque, diferente do que é visto, geralmente, tanto nos livros didáticos, quanto no âmbito da sala de aula.

Identificamos, também, através de nossos estudos, que quanto maior a variedade de registros de representação, maior a possibilidade de haver mudança entre eles; essas trocas, por sua vez, poderão ser mais econômicas e potencializadas. Dito de outra forma, se o estudante tiver acesso a um número maior de registros, haverá um aumento potencial de possibilidades de trocas e, consequentemente, haverá uma ampliação também na escolha mais econômica feita por eles. Atividades que favoreçam o surgimento dessas possibilidades de troca de registro serão sempre bem-vindas e necessitam ser estimuladas, planejadas, elaboradas e aplicadas em sala de aula.

Partindo dessa reflexão, talvez seja interessante explorar atividades em que os alunos possam fazer relações, interpretar e traduzir os elementos presentes no enunciado de problemas, antes de se dedicarem à busca de uma solução. É importante rever a prática docente, refletindo sobre quais os caminhos que poderiam ser percorridos a fim de amenizar os casos identificados, até mesmo redirecionando questões de ordem metodológica.

Referências

BRITO LIMA, A. P. P; DA ROCHA FALCÃO, J. T. Desenvolvimento da representação algébrica em crianças de 1ª a 6ª série do 1º grau. In: **Anais do VI ENEM – SBEM**. São Leopoldo-RS: Editora da Unisinos, 1998.

CÂMARA, M. **Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática**. In: Educação Matemática em Revista, nº 12, Ano 9. SBEM – SP, 2002.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. As idéias da Álgebra (tradução de Hygino Dominngues). **The National Council of Teachers of Mathematics**. São Paulo: Atual Editora, 1995.

DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In: MACHADO, Sílvia D. Alcântara et al. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

DUVAL, R. **Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Sílvia D. Alcântara. Aprendizagem em Matemática - Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano – Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.** (Peter Lang). Tradução: Myrian Vega Restrepo (1999). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

FREIRE, R. S. *et al*. Estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos. In: **Anais do VIII ENEM - SBEM**. Recife, 2004.

KIERAN, C. **Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra**. In: COXFORD, Arthur F e SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. São PAULO; Atual, 1995.

KIERAN, C. **The Learning and Teaching of school algebra.**Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning, 1992.

MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Papirus, 2003.

MARANHÃO, M. C. S. A.; IGLIORI, S. B. C. **Registros de Representação e Números Racionais**. In MACHADO, Sílvia D. Alcântara. Aprendizagem em Matemática: Registros de RepresentaçãoSemiótica**.** Papirus, 2003.

MEIRA, L**. O que são representações?** In: Pernambuco, Governo do Estado e Educação Matemática. Proporções: problemas de compreensão e de representação. Recife: SEE, 1996.

MEIRA, L**. Atividade algébrica e produção de significados em matemática: um estudo de caso**. In: Tópicos em Psicologia Cognitiva. Recife, PE Editora Universitária, 2005.

MACHADO, S. D. A. *et al*. **Educação Matemática: uma introdução**. EDUC, 1999.

MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. In: Contrapontos. Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí. Itajaí. Ano 2 –n. 6, set./dez., 2002.

OLIVEIRA, A. T. C. C**. Reflexões sobre aprendizagem da álgebra**. In: Educação Matemática em Revista nº 12, Ano 9 - SBEM – SP, 2002.

TELES, R. A. M. **A relação entre a aritmética e álgebra na Matemática escolar:** um estudo sobre a influência da compreensão das propriedades da igualdade e do conceito de operações inversas com números racionais, na resolução de equações polinomiais do 1º grau. Recife, 2002. 202 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco.

USISKIN, Z**. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. São Paulo. Atual, 1995.

SIMON, M. A.; STIMPSON, V. C. **Desenvolvimento da representação algébrica através de diagramas.**In: COXFORD, Artur F. e SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

SOUZA,R. N.S.**;** CORDEIRO**,** M. H.**. Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito de função linear.** In: Contrapontos - Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí. Ano 2 – n. 6. Itajaí: Univali, 2002.

CAPÍTULO 7

AS DIFERENTES CONCEPÇÕES DOS ALUNOS MOBILIZADAS SOBRE O SIGNIFICADO DO SÍMBOLO "=" EM CONTEXTOS ARITMÉTICOS E ALGÉBRICOS[20]

José Dilson Beserra Cavalcanti
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

É difícil olharmos para o símbolo "=" e não pensarmos imediatamente em igualdade. De fato, boa parte das situações que dão sentido a esse símbolo são aquelas em que o utilizamos para afirmar que uma coisa *é igual* à outra. No entanto, nos diversos contextos nos quais esse símbolo aparece, nem sempre denota, *stricto sensu*, a ideia de igualdade.

Esclarecemos que vamos utilizar o termo significado do símbolo "=" como algo correspondente às características particulares da utilização desse símbolo, a depender do contexto no qual ele aparece, e, consequentemente, do conceito matemático que a expressão representa. Partindo dessa premissa, entendemos que o significado do símbolo "=" não se confunde, necessariamente, com as concepções dos alunos.

[20] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2008. Uma versão desse trabalho foi apresentada como comunicação científica no IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - IV SIPEM, Brasília-DF, 2009.

CAPÍTULO 7

e o símbolo "=" possa ser interpretado de manei-
do os alunos mobilizam, em outros contextos, o
ao contexto das operações aritméticas, em que
a ser executada, (símbolo operacional), é possí-
rever expressões inaceitáveis (4 + 3 = 7 x 3 = 21)
crever a solução de um problema contendo duas
= 40) sobre uma única linha (23 + 31 = 54 – 14 =
RE-ARTIGUE, 1987); colocar 12 ou 17 na □ refe-
FALKNER, LEVI e CARPENTER, 1999), etc. Em
do símbolo "=" podemos encontrar, nas últimas
três décadas, diversos estudos que investigaram as concepções dos alunos sobre o significado do referido símbolo, tanto no campo da aritmética quanto no da álgebra.

Analisando alguns aspectos destes estudos, é possível distinguirmos dois focos. Um referente ao estudo das concepções dos alunos sobre o *significado do símbolo* "=" como objeto de estudo central (e.g. BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980; KIERAN, 1981; BAROODY e GINSBURG, 1983; SAENZ-LUDLOW e WALGAMUTH, 1998; KNUTH *et. al*., 2006; FREIMAN e LEE, 2004; THEIS, 2003; MOLINA, 2006; CAVALCANTI, 2008), e outro referente a estudos diversos (concepções de equações, transição aritmética-álgebra, dificuldades da Álgebra Inicial (Early Álgebra), desenvolvimento do pensamento relacional, etc.) que fazem referência à necessidade da compreensão adequada do significado do símbolo "=" (eg. FALKNER, LEVI e CARPENTER, 1999; MEDINA, 1999; BRITO LIMA, 1996).

Apesar da variedade dos estudos já realizados, observamos algumas limitações e questões que ainda não foram exploradas. Por exemplo, a maioria dos estudos que abordaram a relação entre os significados do símbolo "=" e a compreensão destes significados pelos alunos, reconhece, apenas, duas concepções básicas: uma operacional e outra relacional (entendida de maneira ampla, incluindo o conceito de equivalência).

Estas duas concepções também são muito utilizadas para discutir aspectos de ruptura entre Aritmética e Álgebra, sendo comum considerar a concepção operacional ligada ao pensamento aritmético e a concepção relacional ao pensamento algébrico. É importante elucidar que a hipótese subjacente ao nosso estudo é a de que os significados do símbolo “=” dependem do contexto no qual está inserido. Isso implica ir além do que observamos na maior parte da literatura, quando apenas evidenciam-se dois significados do símbolo “=” polarizados como uma dicotomia entre aritmética e álgebra.

Aspectos Metodológicos

Considerando que é possível encontrarmos uma variedade de contextos nos quais encontramos o símbolo “=”, resolvemos delimitar nossa investigação em quatro contextos que consideramos fundamentais na Educação Básica: operações aritméticas (ex.: 3 + 4 =); igualdades aritméticas (ex.: 3 + 4 = 7; 7 = 3 + 4; 3 + 4 = 5 + 2); equações (ex.: 3x + 10 = 25) e funções (ex.: y = 3x + 5), sendo os dois primeiros contextos aritméticos e os dois últimos, algébricos. Participaram da pesquisa 205 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de cinco escolas da rede pública estadual de Recife-PE. Optamos em escolher esses sujeitos por que, em tese, já teriam estudado esses quatro contextos.

Concepções definidas a priori

A utilização do símbolo “=” nas expressões que representam cada contexto é caracterizada, por sua vez, por diferentes atributos. Com base nessas características e em outros aspectos evidenciados na revisão da literatura, optamos por definir a priori algumas concepções a partir do significado do símbolo “=” em diferentes contextos, o que foi fundamental na elaboração dos instrumentos de investigação e na análise dos dados.

- *Concepção operacional*. O “=” é utilizado como símbolo que indica uma ação a ser realizada, ou como o local onde se coloca o resultado. Essa utilização é comum no cálculo de operações aritméticas. Por exemplo, na operação aritmética 3 + 4 =, o “=” indica, ao mesmo tempo, que a soma deve ser realizada e o local onde se deve colocar a resposta. A utilização do “=” em operações aritméticas não sugere, necessariamente, uma igualdade, pois, um lado é dado e o outro deve ser preenchido, como explica Freudenthal (1983). Outra possível característica das operações aritméticas que reforça este significado é a frequente utilização dos sinais operatórios *antes* do símbolo “=” (3 x 4 =; 5 + 9 + 8 +10 =; etc.).

- *Concepção igualdade relacional*. Diferentemente da operação aritmética 3 + 4 =, o símbolo "=" na igualdade aritmética 3 + 4 = 7, não é assimétrico, pois os dois lados são dados, e também não indica que se deve efetuar um cálculo. Em linhas gerais, podemos dizer que o "=" está representando uma relação de igualdade estabelecida entre os lados, esquerdo e direito, de uma igualdade aritmética. Vergnaud (1994) explica que uma relação de igualdade representa, ao mesmo tempo, uma identidade única de significado e uma equivalência dos diferentes significantes; em outras palavras, ela se interpreta a esses dois níveis. Do ponto de vista dos alunos, Behr, Erlwanger e Nichols (1980) apontam que o símbolo "=" seria considerado um símbolo relacional se fosse compreendido como indicando uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. Em nossa opinião, estas duas posições não são incompatíveis, e englobam a ideia de que os dois lados da igualdade têm o mesmo valor, ainda que os símbolos sejam diferentes.

- *Concepção equivalência em igualdade condicional*. O símbolo "=", nesta concepção, refere-se a uma relação de equivalência em uma igualdade condicional, comumente denominada de equação. Uma relação de equivalência apresenta as propriedades simétrica, transitiva e reflexiva, e, conforme Gattegno (1974), esta relação permite que, para certos propósitos, um item possa ser substituído por outro. A compreensão do significado de equivalência é particularmente imprescindível na resolução das equações, pois permite manipular as expressões de um lado e de outro do símbolo "=" sem que a igualdade seja modificada. A distinção básica que realizamos entre a concepção anterior e a concepção equivalência em igualdade condicional é que essa última é vinculada especificamente ao conceito de equivalência no contexto algébrico.

- *Concepção funcional*. Por sua vez, faz referência ao significado do símbolo "=" em expressões que representam o conceito de função. A ideia principal é que o significado do símbolo "=", numa função como "$y = 3x + 5$", não é o mesmo que em "$3 + 4 =$", "$3 + 4 = 7$", "$x + 5 = 12$", respectivamente, operação aritmética, igualdade aritmética e equação. De fato, o principal atributo do símbolo "=" numa função como y = 3x + 5 é indicar uma relação causal de dependência entre uma variável dependente (no caso, y) e uma variável independente (no caso, x).

- *Concepção relacional nome-símbolo.* Esta quinta concepção, diferentemente das demais, não faz referência ao significado do símbolo “=” no contexto no qual ele está inserido. Na verdade, observamos que alguns estudos (ex. KNUTH *et. al.,* 2006; McNEIL; ALIBALI, 2005) verificaram que parte dos alunos escrevia tipos de respostas para o significado do símbolo “=” que não permitiam identificar qual concepção (operacional ou relacional) estava sendo expressa. Tais respostas corresponderam, por exemplo, a certas traduções diretas da expressão (ex. *3 + 4 = 7* → significa “três mais quatro *igual a* sete”), e afirmações de que o significado do símbolo “=” em tal expressão significa, apenas, “igual”, “igualdade”. Knuth *et. al.* (2006) classificaram tais respostas como *outras*, enquanto que McNeil e Alibali (2005) classificaram-nas como uma *visão “não especificada” do “sinal de igualdade”*.

Na presente pesquisa, também optamos em não classificar tais respostas como outras. No entanto, também não iremos utilizar a denominação de McNeil e Alibali (ibid.), pois consideramos que, ao responderem que o significado do símbolo “=” é “igual”, “igualdade”, os estudantes podem estar, na verdade, especificando sua visão sobre este símbolo. Entendemos que esses tipos de respostas podem corresponder a um tipo de relação que estamos chamando, neste momento, de *nome-símbolo*. Dessa maneira, a relação nome-símbolo refere-se, particularmente, à relação estabelecida entre o símbolo “=” e seu nome convencional, igualdade.

Na verdade, em nossa opinião, é difícil olharmos para o símbolo “=” e não pensarmos imediatamente em igualdade. Consequentemente, é provável que este tipo de reação espontânea ao significado do símbolo “=”, em vez de não permitir que identifiquemos a concepção dos alunos, possa na verdade apontar um outro tipo de concepção. Este outro tipo de concepção seria diferente daquelas descritas anteriormente, uma vez que necessitam que seja identificada, nas respostas dos alunos, uma especificação da relação entre o significado do “=” e o contexto no qual ele aparece. Podemos dizer que esta concepção, que denominamos de *relacional nome-símbolo*, diferencia-se das demais concepções porque, ao contrário delas, não se apoia em aspectos semânticos, no que diz respeito ao reconhecimento do significado do símbolo “=” em razão do contexto no qual está inserido. Entendemos, assim, que estes tipos de respostas, que estamos discutindo na quinta categoria, correspondem, particularmente, ao processo de relacionar espontaneamente o nome igualdade ao símbolo “=”, seja qual for o contexto no qual ele esteja inserido.

Instrumentos de investigação

Para a coleta de dados foi utilizado um instrumento de investigação constituído por quatro expressões. As expressões, por sua vez, foram todas estabelecidas na estrutura (sinal de operação antes do “=”) além de cada uma estar representando um contexto, conforme podemos observar abaixo.

Figura 01: Contexto das operações aritméticas

d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão?

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão?

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 114)

Figura 02 - Contexto das igualdades aritméticas

d) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão?

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão?

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 112)

Figura 03 – Contexto das equações

b) 15 + 9 = x

1) Como você explica essa expressão?

2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão?

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 112)

Figura 04 – Contexto das funções

c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão?______________________________

____

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?______________________

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 113)

A finalidade de cada item foi identificar as concepções dos alunos sobre o significado do símbolo "=" em diferentes contextos da aritmética (operações e igualdades) e da álgebra (equações e funções) com expressões na estrutura (sinal de operação antes do símbolo "=").

Análise e Discussão dos Resultados

Numa primeira investigação, utilizamos, como referência para a organização dos dados provenientes da parte empírica, as cinco concepções supracitadas como categorias de análise. Contudo, após refletirmos bastante sobre a dificuldade de associarmos boa parte das respostas a estas categorias, percebemos que elas não seriam suficientes para representar as concepções dos alunos sobre o símbolo "=", pois ficava evidente a existência de outras concepções.

As concepções definidas a priori, com exceção da concepção relacional nome-símbolo, são associadas às características do símbolo "=" em um contexto particular. No entanto, várias das respostas dos alunos indicavam outras concepções que não se associavam, exclusivamente, às características do símbolo "=" em um contexto particular, nem se enquadravam como concepção relacional nome-símbolo. Nesse sentido, após uma revisão das respostas dos alunos que não correspondiam às concepções definidas a priori, pudemos avançar e distinguir mais duas concepções que denominamos de: *Concepção Símbolo Separador e Concepção Operacional Sintático*.

A concepção símbolo separador surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o significado do "=" como sinal de separar. Em linhas gerais, caracterizamos esta concepção como a interpretação do símbolo "=" em termos de separar ou unir, por exemplo: a incógnita e seu valor (ex.: x = 2); o primeiro membro e o segundo membro de uma equação (ex.: $2x + 2 = 10 + 8$); em uma igualdade, a operação e seu resultado (ex.: $5 + 7 = 12$); em uma função, a variável dependente, da variável independente (ex.: $y = ax + b$).

Poderíamos cogitar também que, em casos mais particulares, tais como na redução de uma expressão algébrica, na resolução de uma equação, no cálculo da derivada de uma função, esta concepção poderia incluir a ideia correspondente à interpretação do símbolo “=” apenas como um link entre os passos destes processos, assim como foi demonstrado nos estudos de Clement (1980), Freudenthal (1983), e Kieran (1981).

A concepção que denominamos de operacional sintático surgiu quando os alunos escreveram respostas que identificavam o “=” como um símbolo para mostrar o resultado de uma incógnita ou para dar o valor de x, por exemplo. Esclarecemos que o nome operacional sintático é baseado na ideia de operacional, porque sugere ação e implica a ideia de resultado, e sintático, pela razão de que o resultado da incógnita, produto final da resolução de uma equação, envolve a utilização de regras sintáticas associadas à manipulação de incógnitas e determinação de seus valores. Por último, destacamos que as respostas correspondentes a esta concepção apareceram exclusivamente associadas aos contextos algébricos (equação e função).

Dessa maneira, as respostas dos alunos serão categorizadas em sete concepções, sendo que cinco foram definidas a priori e duas, a posteriori, conforme discutimos acima. As respostas não enquadradas nessas concepções foram classificadas como *não identificadas*. Para ilustrar as concepções dos alunos, apresentaremos alguns protocolos da pesquisa empírica.

A tabela abaixo apresenta a síntese dos resultados obtidos com a aplicação do instrumento de investigação. A discussão dos resultados será realizada em ordem decrescente.

Tabela 1 - Concepções referentes aos contextos das operações e igualdades aritméticas, equações e funções na estrutura (símbolo de operação antes do símbolo "=")

Concepções	%
Operacional	45,6%
Relacional nome-símbolo	27,9%
Igualdade relacional	8,4%
Operacional sintático	6,9%
Símbolo separador	2,9%
Equivalência em igualdade condicional	0,7%
Funcional	0%
Não identificada e não respondida	7,6%
Total	**100**

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 193)

Concepção Operacional

A concepção operacional foi a concepção predominante dos alunos, 45,6%, sendo também a mais identificada em todos os contextos, com 63,7% no contexto das operações aritméticas; 51,% no contexto das igualdades aritméticas; 30,4% no contexto das equações e 37,3% no contexto das funções.

Conforme as concepções que definimos a priori, a concepção operacional corresponde ao significado do símbolo "=" no contexto das operações aritméticas. Nesse sentido, o item referente ao contexto das operações aritméticas foi representado pela expressão "10 + 5 =". Nesta expressão, apenas no lado esquerdo do símbolo "=" aparece a soma 10 + 5. Conforme Freudenthal (1983) o símbolo "=", nesse caso, tem um caráter assimétrico, pois enquanto um lado é dado, subtende-se que o outro lado deve ser preenchido.

Consideramos como uma concepção operacional do símbolo "=" quando as respostas se relacionam com as ideias de mostrar o resultado, ou que se deve calcular, resolver, dar o resultado do cálculo, etc. O protocolo **instrumento1/26** ilustra a ideia de *resultado* referente à concepção operacional.

Figura 05 - Protocolo (instrumento1/26d)

d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? nesta expressão, o resul-tado não está explícito, portanto deixa vago a resposta

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? neste caso o símbolo ficou dando a idéia de resultado final e não de igualdade

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 125)

Podemos observar que, no protocolo **instrumento1/26d**, o aluno deixou claro que não interpretava o símbolo "=" em termos de igualdade, mas sim em termos de resultado final. A ideia de finalizar sugere a obtenção de um resultado, que, por sua vez, decorre do cálculo da operação. Esta interpretação do significado do símbolo "=" demonstra, assim, uma concepção operacional.

Como já foi mencionado, anteriormente, embora a concepção operacional tenha sido definida a priori em relação ao contexto das operações aritméticas, ela não se restringiu a esse contexto, sendo identificada como principal concepção nos demais contextos (igualdades aritméticas, equações e funções). Apresentamos, em seguida, três protocolos ilustrando a concepção operacional em cada um desses contextos.

Figura 06 – Protocolo (instrumento1/36a)

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? ESSA EXPRESSÃO É UMA EXPRESSÃO SIMPLES.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? ESTE SIMBOLO SIGNIFICA QUE DEPOIS DESSE SIMBULO VEM O RESULTADO DAS QUESTÕES.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 141)

Figura 07 – Protocolo (instrumento1/13b)

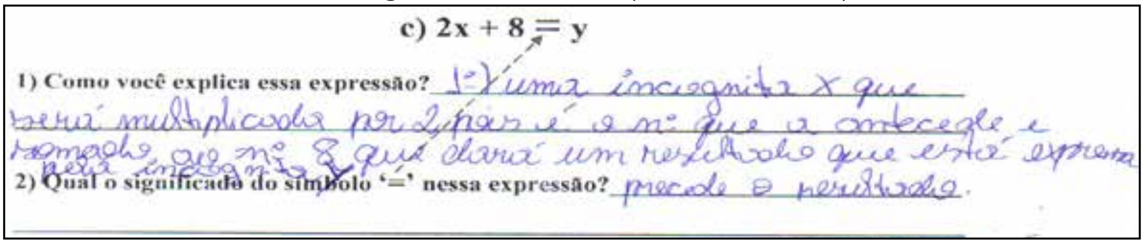
b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? um expressão muito complicada porque é representada por x na adição

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? para dar a resposta final da conta.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 162)

Figura 08 – Protocolo (instrumento1/86c)


c) $2x + 8 = y$

1) Como você explica essa expressão? 1º) uma incognita x que será multiplicada por 2 para é o nº que a antecede e somada ao nº 8 que dará um resultado que está expressa pela incognita y

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? mecade o resultado.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 178)

Nos protocolos acima, podemos perceber que todas as respostas dos alunos referentes ao significado do símbolo "=", mesmo em expressões diferentes, convergiram para as ideias de resultado, resposta e final da conta, conferindo ao "=" um status de símbolo operacional e não relacional, conforme podemos encontrar na literatura (KIERAN, 1981; BEHR, ERLWANGER e NICHOLS, 1980).

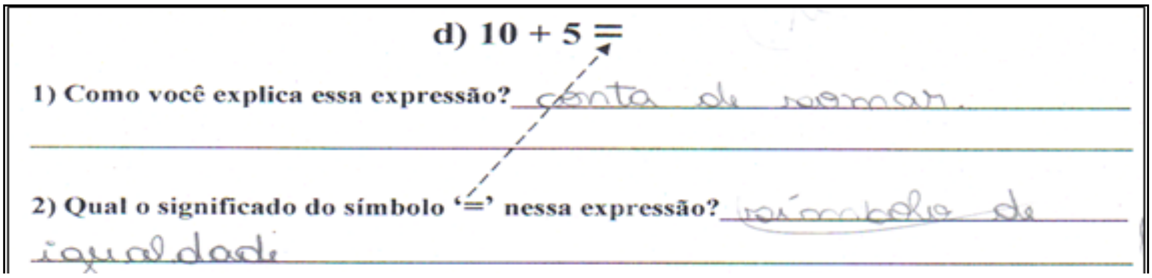
Concepção relacional nome-símbolo

Nessa concepção, a relação considerada é aquela estabelecida entre o símbolo "=" e o seu nome, "igualdade", em contraste às demais concepções definidas a priori que levam em consideração a relação entre o significado do símbolo "=" e o contexto no qual ele está inserido.

Como pudemos observar na tabela 01, mais de um quarto dos alunos escreveram respostas que foram classificadas como concepção relacional nome-símbolo sendo, assim, a segunda maior concepção identificada. Embora essa concepção não seja associada a nenhum contexto em particular, verificamos que ela foi identificada em todos os contextos, tal como a concepção operacional.

No contexto das operações aritméticas, o percentual foi de 23,5%. Já no contexto das igualdades aritméticas, o percentual foi de 30,4%. No contexto das equações, o percentual foi de 29,4% e, por fim, no contexto das funções, foi de 28,4%. Para exemplificar, apresentamos quatro protocolos que foram classificados como concepção relacional nome-símbolo.

Figura 09 – Protocolo (instrumento1/60d)

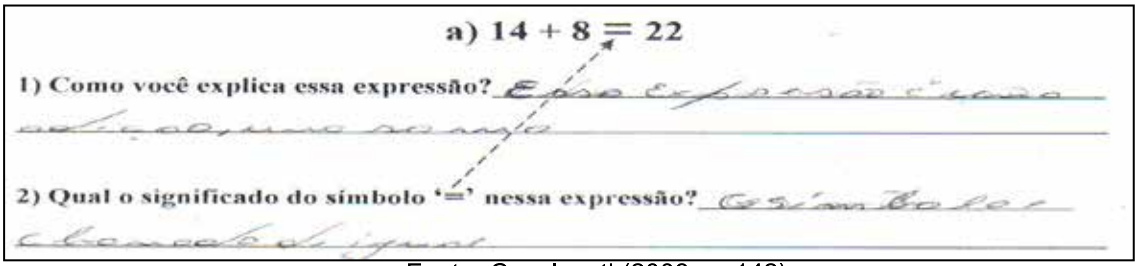

d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? conta de somar.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? símbolo de igualdade

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 128)

Figura 10 – Protocolo (instrumento1/54a)

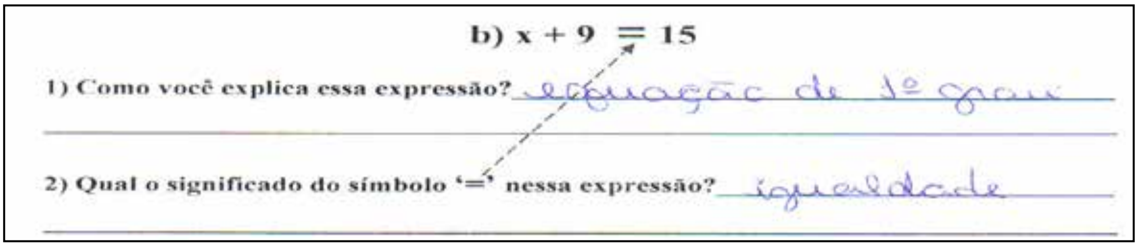

a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? [illegible]

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? [illegible]

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 142)

Figura 11 – Protocolo (instrumento1/57b)

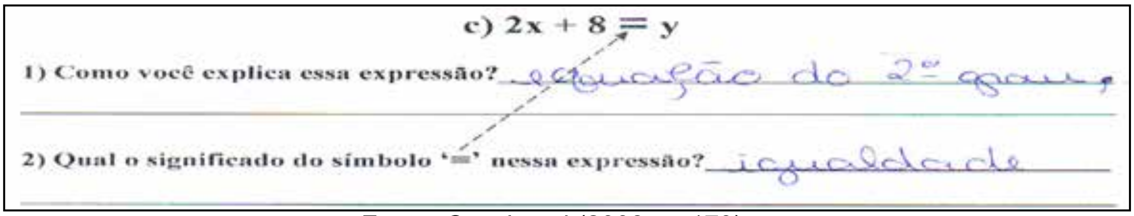

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? equação de 1º grau

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 161)

Figura 12 – Protocolo (instrumento1/57c)


c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? equação do 2º grau,

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? igualdade

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 179)

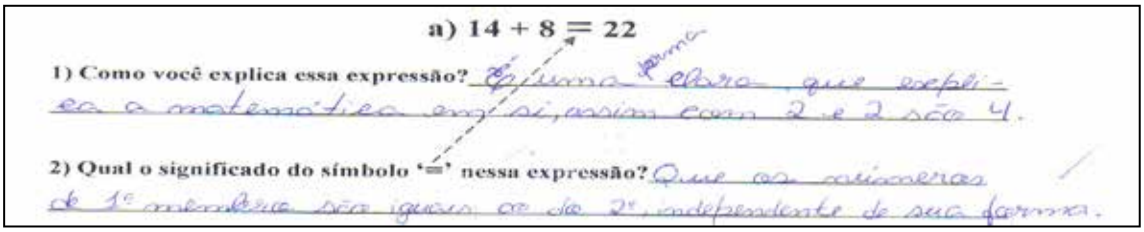
Embora apareçam, nos quatro protocolos acima, os termos igual/igualdade, em relação ao significado do símbolo "=", não é possível afirmar que os alunos estão reconhecendo o "=" como uma relação de igualdade estabelecida entre os dois membros da expressão. Por outro lado, entendemos tais respostas como uma maneira de relacionar espontaneamente o nome "igualdade" ao símbolo "=" sem que seja levada em consideração a relação entre o símbolo e o contexto no qual ele está inserido.

Concepção Igualdade Relacional

Conforme verificamos na tabela 01, apenas 8,4% dos alunos apresentaram a concepção igualdade relacional, porém, assim como a operacional e a relacional nome-símbolo, ela foi identificada em todos os contextos. A concepção igualdade relacional foi definida a priori com a finalidade de considerar a concepção compatível com o significado do símbolo “=” no contexto das igualdades aritméticas. No instrumento de investigação, a expressão que utilizamos para esse contexto foi “14 + 8 = 22”. O percentual obtido nesse contexto foi de 15,6%.

O protocolo **instrumento1/39a** ilustra a concepção igualdade relacional no contexto das igualdades aritméticas.

Figura 13 – Protocolo (instrumento1/39a)


a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? É uma forma clara que explica a matemática em si, assim com 2 e 2 são 4.

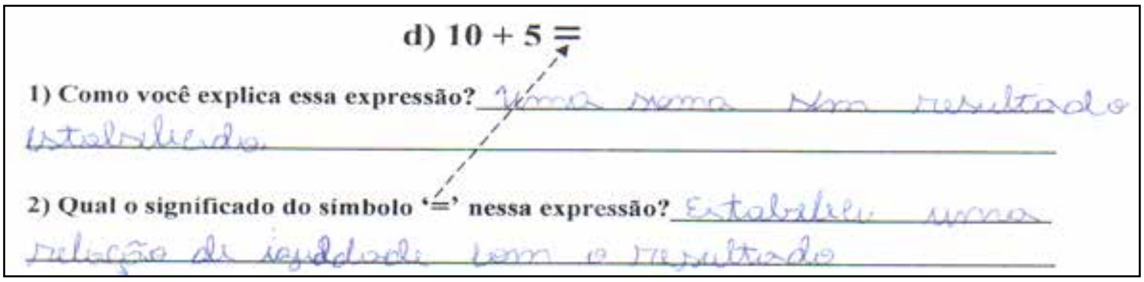
2) Qual o significado do símbolo ‘=’ nessa expressão? Que os números do 1º membro são iguais ao do 2º, independente de sua forma.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 144)

Entendemos como concepção igualdade relacional as respostas nas quais o significado do símbolo “=” permite evidenciá-lo como um símbolo relacional indicando uma comparação entre os dois membros de uma igualdade. A resposta do aluno no protocolo **instrumento1/39a** demonstra que, embora os números ou valores expressos nos dois lados do “=” sejam diferentes, o que é invariante é a relação estabelecida entre esses dois lados por meio do “=”, que corresponde, neste caso, a uma relação de igualdade.

Em relação aos resultados obtidos nos demais contextos, tivemos um percentual de 2,0% no contexto das operações aritméticas, enquanto que, nos contextos das equações e funções, os percentuais foram de 5,9% e 9,8%, respectivamente.

Figura 14 – Protocolo (instrumento1/98d)



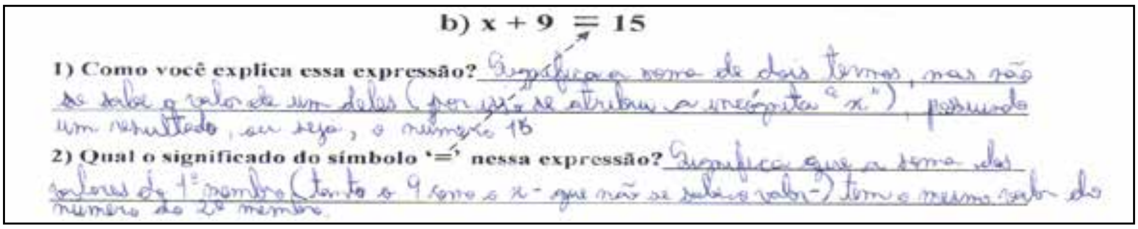
d) 10 + 5 =

1) Como você explica essa expressão? Uma soma sem resultado estabelecido.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade com o resultado.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 129)

Figura 15 – Protocolo (instrumento1/67b)



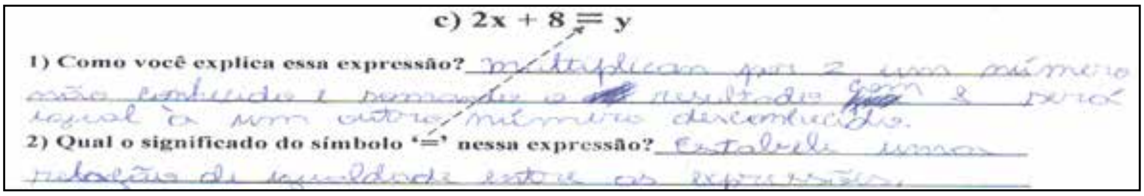
b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? Significa a soma de dois termos, mas não se sabe o valor de um deles (por isso se atribui a incógnita "x"), possuindo um resultado, ou seja, o número 15

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Significa que a soma dos valores do 1º membro (tanto o 9 como o x - que não se sabe o valor) tem o mesmo valor do número do 2º membro.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 158)

Figura 16 – Protocolo (instrumento1/98c)



c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? Multiplicar por 2 um número não conhecido e somando-se o resultado com 8 será igual a um outro número desconhecido.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Estabelece uma relação de igualdade entre as expressões.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 180)

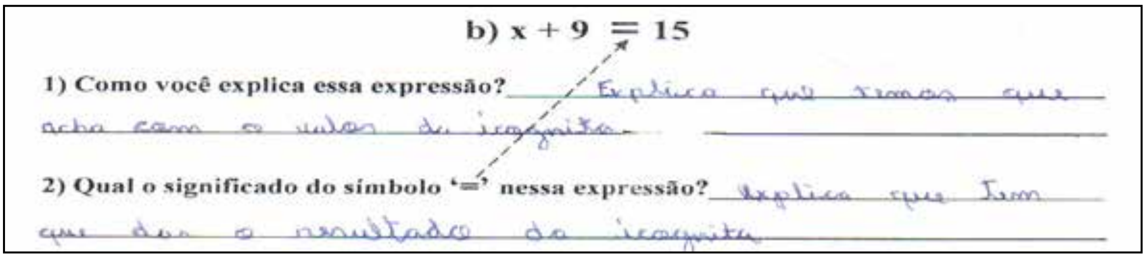
No protocolo **instrumento1/98d**, figura 10, entendemos que mesmo o aluno admitindo que a expressão esteja sem resultado, ele escreve que o significado do símbolo "=" é estabelecer uma relação de igualdade com o resultado. Podemos argumentar que, nesse caso, quando se fala em resultado, não se está remetendo, necessariamente, a uma concepção operacional. A utilização do termo resultado para referir-se a um dos lados da igualdade que estabelece relação com o outro, não implica a ideia de que o "=" mostra ou leva ao resultado. Ressaltamos que este aluno também escreveu respostas relacionando os dois lados da igualdade em todos os itens do instrumento 1, ratificando nossa interpretação de sua resposta como concepção igualdade relacional.

Semelhantemente, observamos que a resposta do aluno representada no protocolo **instrumento1/98c**, figura 12, considera a ideia de relação de igualdade que se estabelece entre os dois lados do símbolo "=". Por último, observamos no protocolo **instrumento1/67b** que o aluno interpreta o “=” como um símbolo que estabelece uma comparação entre o primeiro e o segundo membro, em termos de mesmo valor. Nessa interpretação, emerge a ideia do “=” enquanto símbolo relacional, que reconhecemos como associada à concepção igualdade relacional.

Concepção operacional sintático

A concepção operacional sintático foi identificada em 6,9% dos protocolos analisados. Em razão da sua própria natureza, surgiu apenas nos contextos algébricos das equações e funções, conforme ilustramos nos dois protocolos seguintes.

Figura 17 – Protocolo (instrumento1/1b)

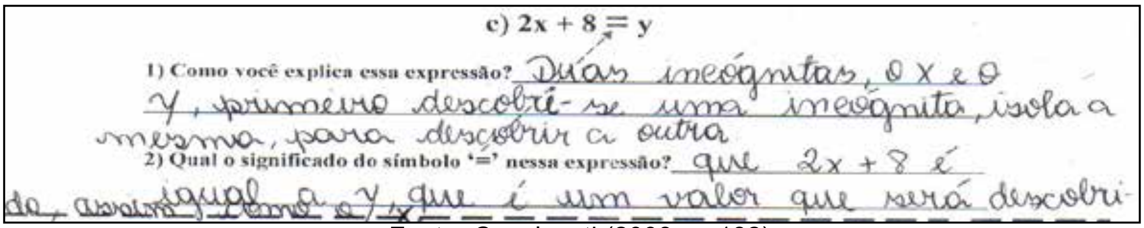

b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? Explica que temos que acha com o valor da incógnita.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Explica que tem que dar o resultado da incógnita

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 164)

Figura 18 – Protocolo (instrumento1/75c)


c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? Duas incógnitas, o x e o y, primeiro descobre-se uma incógnita, isola a mesma, para descobrir a outra

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? que 2x + 8 é igual a y, que é um valor que será descobri-

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 182)

Nos protocolos **instrumento1/1b** e **instrumento1/75c**, está evidente que a ideia de resultado não se confunde com a ideia de resultado da concepção operacional. Quando o aluno escreve, no protocolo do contexto das equações, a palavra *resultado*, não está se referindo à soma “x + 9” mas, sim, apenas à incógnita “x”. No protocolo referente ao contexto das funções podemos perceber que o aluno está considerando a expressão 2x + 8 = y como algo que deve ser resolvido, achando-se o valor das incógnitas x e y. Percebemos que este aluno, quando fala do símbolo “=”, refere-se, num primeiro momento, ao y como valor a ser encontrado. Apenas esta informação poderia ser confusa, pois o y também corresponde, numa concepção operacional, ao resultado da expressão 2x + 8. Contudo, o aluno complementa expondo a ideia de que o valor de y é um valor que será encontrado assim como o de x.

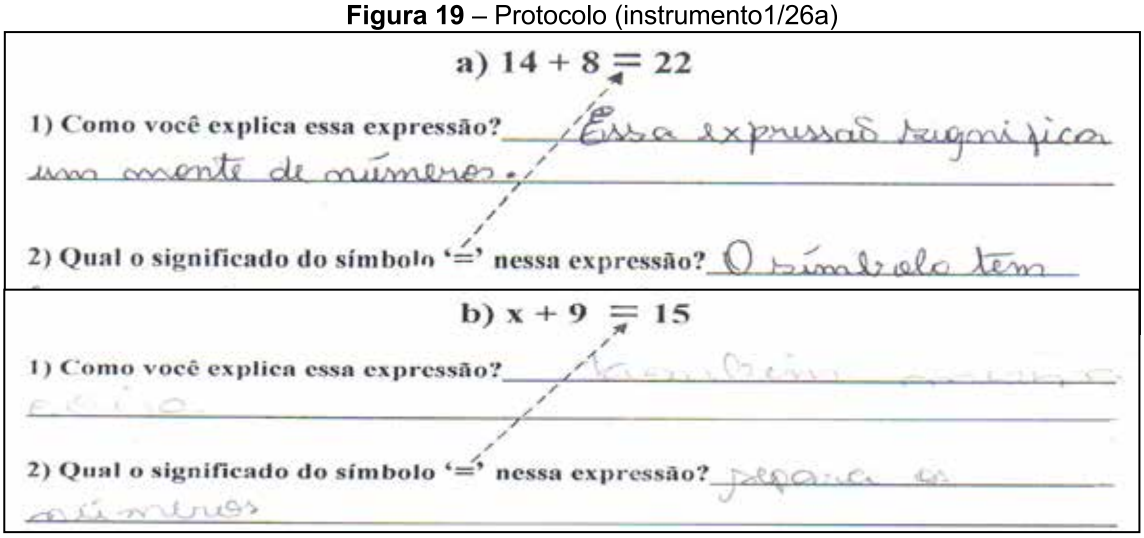
Aprofundando um pouco mais sobre a distinção entre concepção operacional e concepção operacional sintático, levantamos o seguinte questionamento: se o resultado, na expressão x + 9 = 15, está sendo representado pelo número 15 por ele estar após o "=", o que poderíamos dizer do número encontrado após um processo de resolução da equação x + 9 = 15 no qual se determina a condição de x para que esta equação seja uma igualdade? Entendemos, assim, que a ideia de resultado quando referente ao cálculo da operação que vem antes do "=" é, especificamente, de natureza aritmética.

Conforme Freudenthal (1983), numa expressão como 5 + __ = 12 o resultado correspondente não seria o 12, mas sim 7. Entendemos que este exemplo pode ser estendido para a equação x + 9 = 15. Consequentemente, a ideia de resultado correspondente ao valor de "x", e não ao cálculo ou valor de "x + 9", é, especificamente, de natureza algébrica.

Concepção símbolo separador

Essa concepção foi definida a posteriori, tal como a concepção operacional sintático, tendo sido identificada em 2,9% dos protocolos analisados. Apresentamos, a seguir, três protocolos com a finalidade de exemplificar as noções correspondentes à concepção símbolo separador.

Figura 19 – Protocolo (instrumento1/26a)


a) 14 + 8 = 22

1) Como você explica essa expressão? Essa expressaõ significa um monte de números.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? O símbolo tem

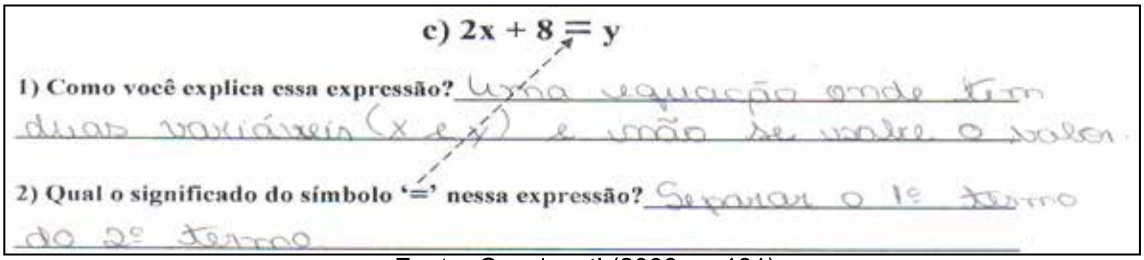
b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão? [illegible]

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? separa os números

Fonte: Cavalcanti, 2008, p. 160

Figura 21 – Protocolo (instrumento1/66c)



c) 2x + 8 = y

1) Como você explica essa expressão? Uma equação onde tem duas variáveis (x e y) e não se sabe o valor.

2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão? Separar o 1º termo do 2º termo

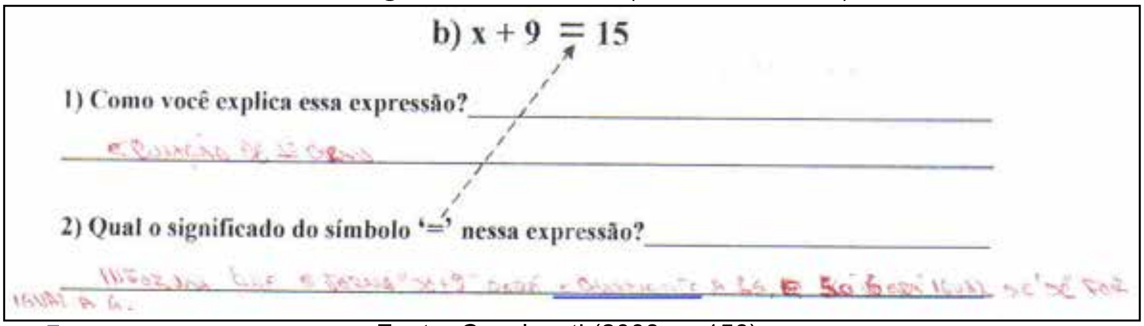
Fonte: Cavalcanti (2008, p. 181)

Como podemos observar, nos dois primeiros protocolos fica clara a ideia de separar os números. Já no terceiro protocolo, no contexto das funções, a ideia de separar leva em consideração o 1º e o 2 º termos da expressão "2x + 8 = y", tornando evidente a qualidade do "=" como símbolo separador.

Concepção equivalência em igualdade condicional

Embora essa concepção tenha sido uma das definidas a priori, sendo particularmente associada ao contexto das equações, ela foi identificada apenas em 0,7% dos protocolos. A característica principal corresponde ao reconhecimento da ideia de equivalência no contexto algébrico, conforme ilustramos nos dois protocolos abaixo.

Figura 22 – Protocolo (instrumento1/82b)



b) x + 9 = 15

1) Como você explica essa expressão?

Equação de 1º grau

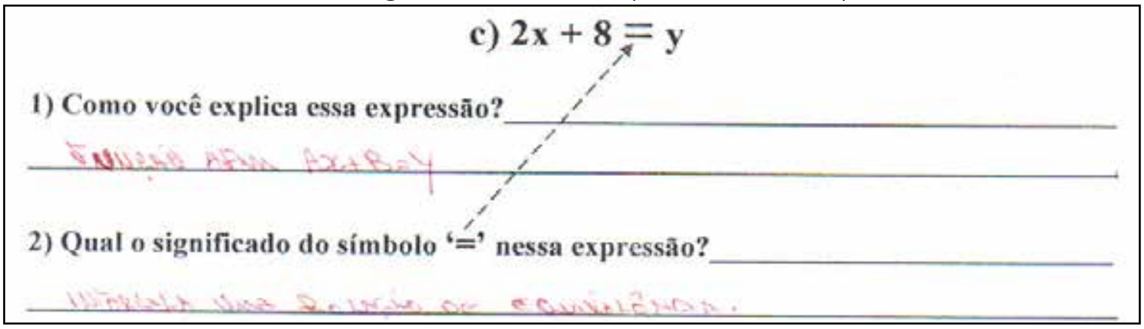
2) Qual o significado do símbolo '=' nessa expressão?

Informa que a forma "x+9" será equivalente a 15, e só será igual se "x" for igual a 6.

Fonte: Cavalcanti (2008, p. 156)

"Informa que a forma "x + 9" será equivalente a 15, e só será igual se "x" for igual a 6"

Figura 23 – Protocolo (instrumento1/82c)



Fonte: Cavalcanti (2008, p. 183)

"Intercala uma relação de equivalência"

Nos dois protocolos acima, o aluno utiliza, especificamente, o termo equivalência e relação de equivalência para expressar sua interpretação sobre o significado do símbolo "=". Portanto, entendemos tal resposta como associada à concepção equivalência em igualdade condicional.

Concepção funcional

A concepção funcional, definida a priori a partir do significado do símbolo "=" no contexto das funções, foi a única não identificada nos protocolos analisados. Uma hipótese seria o fato de a maior parte dos alunos não terem reconhecido a expressão 2x + 8 = y como uma função. Contudo, como podemos observar no protocolo **instrumento1/82c**, figura 19, apresentado anteriormente, o aluno reconhece essa expressão como uma função afim do tipo "ax + b = y", porém, não reconhece no significado do símbolo "=" a relação de dependência entre x e y.

Considerações finais

Partimos do pressuposto de que o significado do símbolo "=" depende do contexto no qual ele está inserido. Argumentamos que esse símbolo compreende diferentes significados, não se restringindo, portanto, a denotar apenas igualdade. A principal hipótese era de que as concepções dos alunos fossem guiadas pelo significado do "=" em cada contexto particular e, por essa razão, definimos as concepções *a priori*.

De fato, foi possível evidenciar diferentes concepções dos alunos sobre o significado do símbolo “=”. Das cinco concepções (operacional, igualdade relacional, equivalência em igualdade condicional, funcional e relacional nome-símbolo) que definimos a priori, apenas a funcional não foi identificada. Entretanto, foi possível definirmos, *a posteriori.* mais duas concepções (símbolo separador e operacional sintático)

Embora tenhamos identificado seis concepções diferentes sobre o significado do símbolo “=”, os resultados que obtivemos permitiram concluir que a maior parte dos alunos não demonstrou concepções compatíveis com o significado do símbolo “=” em cada contexto. Evidenciamos, dessa maneira, um fenômeno que vamos definir como *desencontro entre as concepções dos alunos e o significado do símbolo “=” no contexto no qual estava inserido*. Reconhecemos que os dados não permitem inferir sobre a natureza desse fenômeno, contudo, acreditamos que possam remeter a aspectos de natureza didática e/ou epistemológica. Apontamos, ainda, que o estudo da natureza desse fenômeno pode ser uma boa problemática para realização de novas pesquisas.

Como podemos observar na Tabela 01, quase metade dos estudantes apresentou a concepção operacional. Dessa maneira, nossos resultados ratificam a forte tendência já documentada na maior parte da literatura sobre concepções do símbolo “=”, que se refere à compreensão do “=” como símbolo operacional, em vez de símbolo relacional.

Nossos dados também ratificam as conclusões de Kieran (1981), quando aponta que a concepção operacional, embora de natureza aritmética, não se restringe aos alunos das séries iniciais. Segundo Kieran (ibid.) a concepção do “=” como símbolo operacional, ou sinal de fazer algo (BEHR; ERLWANGER; NICHOLS, 1980) persiste por outras séries da segunda etapa do ensino fundamental (KIERAN, 1981). Nosso estudo permite ampliar tal constatação, uma vez que evidenciou a concepção operacional como principal concepção dos alunos do 3º ano do Ensino Médio, mesmo o símbolo “=” estando inserido em diferentes contextos.

Por fim, consideramos pertinente argumentar que a estrutura (sinal de operação antes do “=”) parece ter sido uma variável importante que favoreceu, em especial, a interpretação do significado do símbolo “=” como símbolo operacional.

Referências

BAROODY, A.; GINSBURG, H. The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. **The Elementary School Journal,** 84, 1983. (pp. 199-212).

BEHR, M.; ERLWANGER, S.; NICHOLS, E. How children view the equals sign. **Mathematics Teaching***, 92*, 1980. (pp. 13-15).

BRITO LIMA, A. P. **O desenvolvimento da representação de igualdades**. Dissertação de Mestrado não publicada. Mestrado em Psicologia – UFPE, Recife, 1996.

BROUSSEAU, G. ; ANTIBI, A. La dé-transposition des connaissances scolaires. In: **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 20/1 La pensée sauvage, 2000. (pp. 7-40).

CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções dos alunos do 3º ano do ensino médio acerca dos significados do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, UFRPE, Recife, 2008.

CLEMENT, J. **Algebra Word problem solutions**: Analisis of a common misconception'. Paper presented at annual meeting of American Educational Research Association, Boston, 1980.

FALKNER, K. P.; LEVI, L.; CARPENTER, T. P. Children's understanding of equality: a foundation for algebra. **Teaching Children Mathematics***, 6*(4), 1999. (pp. 232-236).

FREIMAN, V., e LEE, L. Tracking primary student's understanding of the equal sign. In: M. Johnsen e A. Berit (Eds), **Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2***.* Bergen University College. Bergen, Noruega, 2004. (pp. 415-422).

FREUDENTHAL, H. **Didatical phenomenology of mathematical structures**. Mathematics education Library. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1983.

GATTEGNO, C. **The Common Sense of Teaching Mathematics**. Educational Solutions, New York, 1974.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, *12*, 1981. (pp. 317-326).

KNUTH, E. J.; STEPHENS, A. C.; McNEIL, N. M.,; ALIBALI, M. W. Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. **Journal for Research in Mathematics Education**, *37*, 2006. (pp. 297-312).

McNEIL, N. M.; ALIBALI, M. W. Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. Journal of Cognition & Development, *6*, 2005. (pp. 285-306).

MEDINA, M. M. P. **La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años**. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna, Espanha, 1999.

MOLINA, M. **Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria**. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Espanha, 2006.

RECORDE, R. **The whetstone of witte** *[...]*. By I. Kyngston, London,1557.

SÁENZ-LUDLOW, A.; WALGAMUTH, C. Third Graders' Interpretation of Equality and the Equal Symbol. **Educational Studies in Mathematics**, *35*(2), 1998. (pp. 153-187).

THEIS, L. **Étude du développement de la compréhension du signe = chez des enfants de première année du primaire**. Thèse pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph. D.). Université de Sherbrooke, Canadá, 2003.

VERGNAUD, G.; CORTES, A.; FAVRE-ARTIGUE, P. Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistemologiques et didactiques. Em: **Didactique et acquisitions des connaisances scientifiques**: Actes du Colloque de Sèvres. La Pensé Sauvage, Sèvres, France, 1987.

CAPÍTULO 8

AVALIAÇÃO EM LARGA ESCALA: UM ESTUDO SOBRE ERROS DOS ALUNOS NO TRABALHO COM OS NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES[21]

Maria José Ferreira França
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

No Brasil, na década de 1990 foi criado o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB. Trata-se de uma avaliação nacional em larga escala realizada e coordenada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais – INEP, realizada por amostra de escolas, destinada a fornecer informações sobre a qualidade, a equidade e a eficiência da educação básica brasileira, visando ao aperfeiçoamento das políticas e dos sistemas de ensino básico.

A partir de 2005, o SAEB passou a ser composto por duas avaliações: Avaliação Nacional da Educação Básica, – ANEB, que manteve os mesmos objetivos, características e os procedimentos adotados da avaliação realizada até aquele momento, e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – ANRESC, conhecida como Prova Brasil, criada com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino ministrado nas escolas das redes públicas.

[21] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2008.

CAPÍTULO 8

2001, feito por meio de uma única escala de de-
izado em Matemática na educação básica está
co mais de 20% dos estudantes se localizam no
penho, e demonstram apenas capacidade de re-
ões de pequenas quantidades em dinheiro. Este
rítico.
acional com avaliação em larga escala fez surgir
da Educação Básica.
ntado, no ano de 2000, mediante acordo de cooperação técnica com a UNESCO e o MEC/ INEP, e em regime de colaboração com os municípios, por meio da União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação, UNDIME/PE, o Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco, SAEPE. Desde então, o SAEPE avalia, de forma censitária, a eficiência e o desempenho de alunos das redes de ensino estadual e municipal de 2º, 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e do 3º Ano do Ensino Médio, nos componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática, com o objetivo de avaliar a qualidade do ensino e o desempenho das escolas, bem como de subsidiar políticas de melhoria da qualidade da educação oferecida pelas escolas públicas.

No SAEPE 2000, não houve a adesão da totalidade dos 184 municípios, só atingida em 2002, e mantida em 2005. O SAEPE trouxe avanços para o sistema de avaliação, por realizar em parceria com os municípios uma avaliação conjunta. De certa forma, isso contribuiu para desenvolver uma cultura de avaliação no Estado de Pernambuco.

Em 2002, foram avaliados 438.734 alunos, sendo 387.008 do Ensino Fundamental e 51.726 do Ensino Médio, distribuídos em 6.098 escolas, das quais 949 foram da rede Estadual e 5.149 das redes Municipais. Esses dados representam o universo das escolas. Registra-se, assim, um avanço significativo em termos de adesão dos 184 municípios, diferentemente do que ocorreu em 2000, quando não houve total adesão.

Em 2005, Pernambuco realizou o SAEPE em parceria com a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar – ANRESC, denominada de Prova Brasil. Participaram da ANRESC 209 escolas de 64 municípios, 331 turmas e 10.641 estudantes do 5º e do

8º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas, estaduais e municipais, situadas na zona urbana e com 30 estudantes ou mais nas referidas séries. Nos demais municípios, escolas e turmas, foi aplicada a avaliação do SAEPE.

Os resultados do SAEPE refletem as dificuldades enfrentadas por uma boa parte dos estudantes na aprendizagem inicial de conceitos matemáticos. Tais resultados mostram que 13% dos estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental não demonstraram, na resolução dos testes, competências necessárias para resolver problemas com números naturais, seja de multiplicação ou de divisão ou mesmo de soma e de subtração. Isso revela que, nos quatro anos da escolarização básica, os estudantes não construíram competências básicas necessárias para o cotidiano e para prosseguimento na segunda etapa do ensino fundamental.

Se, por um lado, nas explicações tradicionais do fracasso escolar, a culpa recai sobre o estudante, sem que se leve em conta o papel da escola e das demais condições de vida do mesmo, por outro, existem evidências sólidas de que os estudantes que "*fracassam*" na escola não são, de modo algum, incapazes de raciocinar e aprender, (SCHLIEMANN; CARRAHER, 1989).

Considerando a análise dos erros como foco do estudo, questões sobre números e operações foram levantadas nesta pesquisa: Que tipo de erro é mais recorrente nas respostas dos estudantes? O que esses estudantes sabem e o que ainda não sabem a respeito das operações com os números naturais? Quais as estratégias utilizadas por esses estudantes para responderem às questões das provas do SAEPE referentes aos conteúdos números e suas operações? Estas inquietações nos motivaram a realizar este estudo, que teve como objetivo investigar os erros dos estudantes de 5º Ano do Ensino Fundamental nas avaliações de Matemática SAEPE 2002 e 2005, e contribuir para aprofundar o conhecimento acerca dos acertos e erros, bem como de seus desdobramentos na aprendizagem.

Analisar erros em matemática é uma tarefa complexa, pois existe um consenso de que só se pode avaliar se houver aplicação de provas ou testes em que o estudante "*produza*" uma resposta, cópia fiel do que lhe foi "*passado*" pelo professor a partir dos conteúdos apresentados. Assim, discutir erros e objetivos da avaliação poderá ajudar o professor a perceber, por meio dos erros dos estudantes, suas próprias inabilidades para ensinar.

Entendemos que um estudo dos erros nas avaliações em larga escala, SAEPE 2002 e 2005, poderá permitir a identificação das estratégias utilizadas pelos estudantes, na resolução do cálculo das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e, também, nas questões que envolvem problemas com os diferentes significados dessas operações.

Por isso, a análise dos erros dos estudantes nestas avaliações poderá possibilitar ao professor organizar com maior eficiência o seu processo didático em sala de aula, na perspectiva de criar situações apropriadas para o estudante superar tais erros, e apropriar-se dos conhecimentos necessários ao exercício de sua cidadania, frente às exigências contemporâneas.

Este artigo está organizado em três partes. Na primeira, apresentamos os contextos em que foram implantados os sistemas nacional e estadual de avaliação, além dos objetivos da pesquisa. Na segunda, expomos os fundamentos teóricos referentes à evolução do conceito de avaliação e o erro enquanto alternativa de aprendizagem em Matemática. Na terceira parte, apresentamos os procedimentos metodológicos do estudo, a análise e os resultados.

A evolução do conceito de avaliação

Ao longo do século passado, o conceito de avaliação foi progressivamente ampliado, em razão de necessidades sociais e políticas, a ponto de se chegar a compreender, no campo educacional, que avaliar não é medir, mas confrontar aspectos em um processo de negociação. Medir consiste em produzir um "descritivo organizado" da realidade que se encerra numa "cadeia quantitativa". Enquanto que avaliar consiste em "quebrar a continuidade dessa cadeia".

Câmara (2000), afirma enfaticamente que o conhecimento matemático de um sujeito não pode ser medido. É nesse sentido que a avaliação em larga escala apresenta particularidades, pois repousa sobre a operacionalização de uma instrumentação específica, por tratar-se da realização de exame no qual se utilizam provas e outros instrumentos, com o objetivo de produzir informação sobre os quais se baseará o julgamento.

Dessa maneira, a avaliação educacional não tem interesse circunscrito apenas ao estudante e ao seu rendimento, ao desenvolvimento de atitudes e interesses, que constituem o produto do processo institucional que ocorre na escola, mas se amplia, do âmbito da microavaliação para o campo da macroavaliação.

Nessa perspectiva, a avaliação educacional em larga escala deve envolver, no mínimo, três modalidades: a avaliação que ocorre ao nível das propostas políticas do sistema; a avaliação da escola enquanto instância que operacionaliza as proposições do sistema, e a avaliação do aluno na escola. A inter-relação entre estas três modalidades possibilita a avaliação do sistema educacional na sua totalidade, adquirindo um importante papel na crítica para a transformação da escola, de seus currículos e programas.

O erro como alternativa de aprendizagem em matemática

Historicamente, as pesquisas acerca dos erros cometidos pelos estudantes em disciplinas matemáticas tiveram início em trabalhos desenvolvidos na metade do século XX, e conforme a teoria educacional vigente. Cury (2004) apresenta três fases pelas quais passaram essas pesquisas. Na primeira fase, a preocupação centrava-se nos aspectos técnicos dos erros, sob a influência de teorias behavioristas de ensino ou de aprendizagem. Na segunda fase, influenciada pelo enfoque da teoria psicogenética, como forma de acompanhar o processo de construção do conhecimento, a preocupação estava na forma de pensar do estudante. A terceira fase, influenciada pelo construtivismo, considera que os erros são ferramentas de aprendizagens.

Nos anos 1950, ocorreu a segunda fase na análise de erros, com enfoque no processamento da informação. É dessa etapa que surge o interesse por protocolos verbais, com a solicitação para que o estudante pensasse em voz alta para que fosse possível detectar a sua forma de pensar. Porém, há muito tempo utilizava-se, para a análise de erros, a escuta ao estudante ou a anotação das suas verbalizações.

A terceira fase das pesquisas teve início na década de 1970, quando a influência do construtivismo fez com que o erro passasse a ser visto como ferramenta para a aprendizagem ou construtor do conhecimento.

Nas décadas de 1980 e 1990, uma nova abordagem começou a ser empregada na análise de erros sob a influência do paradigma construtivista. As ideias de Piaget, Vygotsky, Kuhn, Lakatos, Papert e outros passaram a influenciar autores que fugiam de certas limitações do behaviorismo e do processamento da informação, usando os erros para explorar o funcionamento da mente, aproveitando-os como elementos fundamentais para o desenvolvimento e a compreensão dos próprios conteúdos estudados.

Borasi (1987 *apud* CURY, 2004) considera que os erros podem ser utilizados, entre outras coisas, como ponto inicial para exploração Matemática. Esta autora apresenta seis formas diferentes de utilização dos erros no processo de ensino e aprendizagem. Estas seis formas diferentes são agrupadas em duas categorias, conforme o intuito da utilização do erro:

a) diagnóstico e remediação: nesta categoria, o foco da utilização dos erros reside sobre o diagnóstico das causas que levam ao erro e sobre os mecanismos que possam levar à superação dos mesmos, de forma que tais causas possam ser evitadas, futuramente, com outros alunos.

b) investigação: nesta categoria, os erros são utilizados como mecanismos motivacionais para a investigação sobre o conteúdo matemático relacionado ao erro, a natureza da Matemática, e o próprio processo de ensino e de aprendizagem.

Se os erros forem considerados como elementos que podem naturalmente aparecer durante o processo de construção do conhecimento matemático, é preciso que, durante esse processo, tais erros sejam detectados, diagnosticados e superados por meio de atividades que promovam o exercício crítico do aluno sobre suas próprias produções. Contudo, para que isso ocorra, é preciso que se perceba o potencial educacional dos erros. Borasi (1987 *apud* CURY, 2004) afirma que os erros têm se mostrado estimulantes, mesmo nos casos em que se duvida do seu potencial no momento em que se inicia o trabalho com os mesmos.

O trabalho com os erros pode ser dificultado por alguns obstáculos. Um desses obstáculos a se considerar está associado ao fato de que os professores e estudantes possuem concepções pré-existentes de erro, de Matemática, de conhecimento e de aprendizagem. Para que tais concepções não interfiram nos resultados dos trabalhos com os erros, não se pode desconsiderar sua existência.

Fazer com que os estudantes se tornem cientes de suas crenças é o principal passo para uma possível modificação delas.

A perspectiva teórica da autora busca a compreensão do novo sentido do erro, a partir dos estudos da teoria psicogenética, de origem piagetiana. Essa teoria considera que os estudantes constroem, por si mesmos, os conhecimentos e o sentido desses conhecimentos. Além disso, nessa construção, tanto o acerto quanto o erro são elementos que integram no processo de aprendizagem. Concordamos com essa perspectiva teórica, por entender que o erro não deve ser considerado como uma sentença, que exclui o aluno durante o seu processo de construção do conhecimento.

Compreender o raciocínio do estudante é um dos principais objetivos de uma avaliação, em uma perspectiva construtivista. Sendo assim, dois aspectos podem ser considerados como essenciais para alcançar esse objetivo: interpretar os erros dos estudantes e fornecer um retorno cognitivo acerca dos processos de raciocínio adotados. Muitos dos erros apresentados pelos alunos são, na realidade, indicadores de hipóteses que eles estão construindo sobre determinados conteúdos.

Por esta razão, acertos e erros precisam ser interpretados pelo professor para que a avaliação faça sentido dentro do processo de ensino e de aprendizagem. É importante mencionar que interpretar as respostas dos alunos em termos da natureza dos erros contribui para planejar intervenções.

Dessa forma, o conhecimento advindo desse estudo, acerca da avaliação e dos erros, torna-se indispensável para compreender o processo avaliativo nos diferentes contextos, seja por meio da avaliação em larga escala ou da avaliação da aprendizagem.

Procedimento metodológico do estudo

O presente estudo foi feito a partir dos resultados das Avaliações de Matemática realizadas pelo SAEPE em 2002 e em 2005 com estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental das redes públicas, estadual e municipais, do Estado de Pernambuco.

Nas Matrizes de Referência de Matemática, selecionamos quatro descritores, e nos cadernos de provas, quatorze itens. Os quatro descritores selecionados referem-se ao Bloco de Conteúdos Números e Operações, dispostos da seguinte forma:

o primeiro solicita como desempenho o cálculo da adição e da subtração de números naturais; o segundo, o cálculo da multiplicação ou divisão com números naturais; o terceiro, a resolução de problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou da subtração; e, finalmente, o quarto descritor solicita, como desempenho, a resolução de problemas com números naturais, envolvendo os diferentes significados da multiplicação ou da divisão.

Nos cadernos das provas do SAEPE 2002 e 2005 foram realizadas as análises dos itens visando extrair deles as questões relativas aos conteúdos Número e Operações. Analisamos os dois cadernos das provas do SAEPE 2002, compostos por trinta e quatro questões cada um. As questões envolvem todo o conteúdo Matemático: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Fração e Tratamento da Informação.

A prova de Matemática da quarta série ANRESC/SAEPE 2005 consta de quatro blocos, sendo dois blocos com questões de Língua Portuguesa e dois com questões de Matemática. Cada bloco de Matemática contém dez questões, contemplando os conteúdos acima mencionados, recomendados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). As provas do SAEPE 2002 e de 2005 foram aplicadas em um único dia, sendo a do SAEPE 2002 aplicada em dois horários: uma pela manhã e outra, à tarde.

No relatório da estatística dos itens, identificamos o item e suas respostas com os percentuais de acertos e erros dos estudantes, considerando também o Coeficiente Bisserial e o índice de dificuldade.

Finalmente realizamos a análise das respostas/resultados dos estudantes verificando o nível e a estrutura dos problemas, confrontando com o referencial teórico O quadro 1 apresenta os itens analisados e sua correspondência com os descritores.

Quadro 1 - Correspondência item / descritor utilizados nas avaliações SAEPE 2002 - 2005.

ITEM/ ANO	DESCRITOR	CORRESPONDE	TOTAL
01 – 2002	D01-Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais.	Não	04
02 – 2002		Não	
03 – 2005			
04 – 2005		Não	
05 – 2002	D02-Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais	Não	02
06 – 2005		Não	

07 – 2002	D03-Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou da subtração.		04
08 – 2002			
09 – 2002			
10 – 2005			
11 – 2002	D04-Resolver problemas com números naturais, envolvendo os diferentes significados da multiplicação ou da divisão.		04
12 – 2005			
13 – 2005			
14 – 2005			
TOTAL		09	14

Fonte: Matriz de Referência do SAEPE 2002 2005

Observa-se que, em 2002, dentre os itens referentes ao cálculo das operações, três não correspondem ao descritor; em 2005, dois itens também não correspondem. Quando se trata da resolução de problemas, os itens de 2002 e os de 2005 correspondem ao descritor.

Análises e resultados

As informações obtidas foram organizadas em quadros que contêm o levantamento dos resultados, as respostas dos estudantes e a descrição desses resultados, seguida de um breve comentário. O objetivo desses comentários foi o de destacar algumas informações.

A seguir, apresentamos o descritor, alguns elementos para a contextualização do item estudado e, também, os quadros com percentuais de erros e acertos, acompanhados dos respectivos comentários. Convém esclarecer que as quantidades expressas nos quadros dizem respeito às respostas que encontramos, do estudante, e que, muitas vezes, as somas dessas quantidades nem sempre equivalem ao total expresso pela soma das questões certas, erradas, não assinaladas e com mais de uma alternativa assinalada.

Descritor 1 - Calcular o resultado de uma adição ou subtração de números naturais
Item 01 - SAEPE 2002.

O item traz um problema sobre uma criança que gosta de ler. Informa que a criança, durante 2 meses, leu 4 livros, cada um com uma quantidade de páginas diferente. O primeiro livro que leu tinha 48 páginas; o segundo, 52 páginas; o terceiro, 85 páginas; o quarto livro lido pela criança tinha 105 páginas. Considerando que se tratava de um problema, o questionamento apresentado foi o de indicar o número de páginas que a criança leu durante esses dois meses.

O quadro mostra os resultados do item.

Quadro 2 - Resultado do Item 01 SAEPE – 2002

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2002	01	A	170 páginas	10%
		B	290 páginas	61%
		C	1.560 páginas	11%
		D	1.955 páginas	15%

Fonte: Secretaria de Educação de Pernambuco Relatório do resultado do SAEPE 2002

O objetivo desse item é que o estudante demonstre ser capaz de resolver problema, portanto o item não corresponde ao descritor.

Para a resposta correta, o estudante teria que demonstrar ser capaz de realizar a análise do problema para, depois, efetivar o cálculo de adição, envolvendo a relação aditiva de composição.

Observamos que 61% dos estudantes responderam corretamente. Pode-se considerar o item fácil. Quanto aos erros, verificamos que 36% responderam de forma incorreta. Essas respostas foram bem distribuídas; não houve distrator que chamasse a atenção para as respostas incorretas.

Merece destaque o enunciado do item na indicação dos meses (2) e dos livros lidos (4), no qual foram empregados os números, em vez da forma escrita por extenso. Esse tipo de enunciado poderá levar o estudante a considerar os números, (2) e (4), como dados do problema para serem utilizados na resolução. As expectativas tanto do estudante, quanto do professor, no processo de ensino e aprendizagem em matemática, são que os números de um problema devem ser operados para dar uma solução, uma resposta ao problema.

O estudo de Zunino (1995), com crianças de 1ª série, mostrou que as crianças têm ideias próprias sobre quais são os aspectos das operações que devem ser representados graficamente, como, por exemplo, se representam exclusivamente o resultado do problema ou os dados incluídos no enunciado. Revelou também que nenhuma criança utiliza, de forma exclusiva, a representação convencional, observando-se na mesma criança formas de representação originais e convencionais.

Item 03 - SAEPE 2005.

O item foi apresentado de forma direta. Inicialmente, foi solicitado ao estudante o resultado da adição; depois, dentro de um retângulo, foram apresentados os números juntamente com o sinal de adição.

O quadro apresenta os resultados do item.

Quadro 3 – Resultados do Item 03 SAEPE – 2005

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2005	03	A	1076	3%
		B	1086	9%
		C	1176	7%
		D	1186	78%

Fonte: Secretaria de Educação de Pernambuco: Resultado do SAEPE 2005

O objetivo desse item é que o aluno demonstre ser capaz de efetuar o cálculo de uma operação de adição com reserva com números naturais. O item está plenamente de acordo com o descritor.

O índice de acertos corresponde a 78%. Podemos dizer que algumas variáveis contribuíram para esse resultado, dentre as quais destacamos duas. A primeira se refere ao cálculo mental, como um conjunto de procedimentos utilizado pelos estudantes, adquiridos por meio das experiências vivenciadas em seu cotidiano, construídas nas interações sociais, com o uso de estratégias que fazem parte do seu repertório pessoal. Geralmente, esse tipo de cálculo não é estimulado na escola, porque a reforma trazida pela matemática moderna provocou o esquecimento, a desconsideração pelo cálculo mental, priorizando o cálculo escrito e o domínio de regras.

A segunda variável diz respeito à forma como é ensinada a Matemática. Frequentemente, o ensino de Matemática é associado a fazer conta. O uso do algoritmo, por sua vez, tem a vantagem de poder aplicar-se mecanicamente sem a necessidade de refletir a cada passo. Talvez, o índice elevado de acertos, 78%, ocorra pela própria experiência dos alunos ao efetuarem a conta por meio do cálculo mental.

Descritor 2 - Calcular o resultado de uma multiplicação ou divisão de números naturais.
Item 05 - SAEPE 2002

O item apresenta um problema e traz, como contexto, a situação do mobiliário de uma escola onde determinada criança estuda. Essa escola tem sete salas de aula, cada uma com espaço suficiente para trinta e cinco bancas. Para finalizar o problema, foi feita a seguinte pergunta: Quantas bancas existem na escola em que a criança estuda?

O quadro mostra os resultados dos acertos e erros

Quadro 4 – Resultados do Item 05 SAEPE – 2002

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2002	05	A	137	16%
		B	215	13%
		C	245	53%
		D	425	15%

Fonte: Secretaria de Educação de Pernambuco resultado do SAEPE 2002

O desempenho solicitado no item foi verificar se o estudante é capaz de resolver problema de multiplicação com números naturais. No entanto, o descritor solicita apenas que ele efetue o cálculo da operação de multiplicação ou divisão de números naturais. Portanto, o item não corresponde ao descritor.

Observamos que 53% dos estudantes assinalaram a resposta correta. Mas, se considerarmos os erros, verificamos que 44% dos estudantes assinalaram respostas incorretas. Isso nos mostra um índice elevado de erros. Porém, se observarmos detalhadamente, os resultados 13%,15% e 16%, respectivamente, estão bem distribuídos, demonstrando equilíbrio entre os distratores. Essa distribuição equilibrada dos erros poderá ter ocorrido pela forma como os distratores foram apresentados no item: todos apresentavam três algarismos para cada uma das respostas.

O índice de 53% de acertos no item pode significar que os estudantes sabem efetuar a operação de multiplicação, enquanto os outros, 44%, responderam de forma aleatória. Mesmo considerando que o descritor solicita um desempenho e o item solicita outro, o resultado acima de 50% revela que os estudantes, em sua maioria, sabem realizar a operação de multiplicação e, ainda, conseguem interpretar um problema simples.

Item 06 - SAEPE 2005

O item traz a situação de um passeio de ônibus que será realizado a um parque ecológico. Para realizar esse passeio, será disponibilizado um desconhecido número de ônibus com capacidade para 45 passageiros. A pergunta feita é a seguinte: para transportar os 320 passageiros que irão ao passeio, quantos ônibus serão necessários?

O quadro a seguir mostra os resultados dessa questão.

Quadro 5 - Resultados do Item 06 SAEPE – 2005

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2005	06	A	5 ônibus	17%
		B	6 ônibus	18%
		C	7 ônibus	25%
		D	8 ônibus	35%

Fonte**:** Secretaria de Educação de Pernambuco resultado do SAEPE 2005

A habilidade solicitada no item é resolver problema envolvendo a operação de divisão com resto. O descritor solicita que o estudante demonstre ser capaz de calcular uma divisão com números naturais. Portanto, o item também não corresponde ao descritor. Além disso, também apresenta certo grau de dificuldade, pois se trata de um problema de divisão com resto. A resposta correta apresentou índice de 35%. Esse resultado nos remete a refletir sobre a forma como os problemas são trabalhados em sala de aula.

Pesquisas realizadas por Magina *et al.* (2001), mostram como os professores costumam ensinar as estruturas aditivas nas duas primeiras séries do Ensino Fundamental: o trabalho resume-se a apresentar problemas para o aluno, considerado pela teoria dos campos conceituais como protótipos aditivos.

Na maioria das vezes, nos 3º e 5º Anos, o professor tende a ampliar o valor dos números envolvidos nos problemas, em detrimento da ampliação de outros tipos de situações pertencentes a essa estrutura, acrescentando um pouco de operações com as estruturas multiplicativas, limitando-se a efetuar contas de multiplicação e divisão. Geralmente, quando os problemas são trabalhados em sala de aula, têm como função a fixação dos conteúdos que acabam de ser estudados.

Merece destaque a resposta errada com índice de 25%. Esse resultado indica que os alunos realizaram a operação de divisão sem considerar o resto. Talvez, o erro do aluno seja uma consequência do modelo de ensino adotado pela escola, que cria procedimentos padronizados para serem utilizados na resolução de problemas semelhantes, não contribuindo, dessa forma, para melhorar o aproveitamento dessa atividade considerada importante para o desenvolvimento da Matemática na sala de aula.

Descritor 3 - Resolver problemas com números naturais, envolvendo diferentes significados da adição ou da subtração.
Item 07 - SAEPE 2002

O Item apresenta um problema, envolvendo duas pessoas, em que a primeira pessoa possui 19 pares de brincos, e a segunda possui 30, uma quantidade, portanto, maior de pares de brinco do que a primeira pessoa. A pergunta é: quantos pares de brinco a segunda pessoa tem a mais do que a primeira?

O quadro a seguir mostra os resultados do item.

Quadro 6 - Resultados do Item 07 SAEPE – 2002

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2002	07	A	11	53%
		B	12	10%
		C	29	12%
		D	49	23%

Fonte: Secretaria de Educação de Pernambuco resultado do SAEPE 2002

O objetivo do item é saber se o estudante é capaz de resolver problemas de estrutura aditiva de comparação, envolvendo os diferentes significados da operação de subtração. O item está de acordo com o que é solicitado pelo descritor. Nos resultados, observamos que 53% dos estudantes assinalaram corretamente.

No entanto, 23% assinalaram a resposta errada 49. Esses estudantes efetuaram a adição (19 + 30) = 49, ao invés de efetuarem a subtração. Eles demonstraram que ainda não conseguem analisar e compreender um problema de estrutura aditiva de comparação envolvendo a ideia de subtração.

Magina *et al*. (2001), ao discutir resultados obtidos num estudo diagnóstico constituído de problemas no Campo Conceitual Aditivo, aplicado em 248 crianças com esse nível de escolarização, concluem que a dificuldade dos problemas depende da relação entre a situação descrita e os esquemas de ação que a criança pode utilizar para resolver o problema. Os autores defendem que quanto mais direta for essa relação, mais fácil se torna o entendimento do problema. Da mesma forma, quanto maior for o número de operações mentais necessárias para se encontrar um caminho para a solução, mais alto será o nível de dificuldade do problema.

Observa-se que, nos problemas que contêm as palavras-chave “a mais” e “a menos”, geralmente os estudantes são levados a cometerem este tipo de erro: as operações podem ser confundidas simplesmente com contas que resolvem os problemas de “mais” e de “menos”.

Nas aulas de Matemática, geralmente o estudante faz a pergunta: “professora, a conta é de mais ou de menos?” Esse tipo de pergunta demonstra que o ensino focado apenas no algoritmo torna-se uma atividade mecânica, estática e que não faz relações; portanto, não é priorizado o processo de construção de sentido e significado.

Destacamos ainda que, se juntarmos a resposta correta, com a resposta (D), 23%, percebemos que 76% dos estudantes efetuaram corretamente a adição (19+30=49) e a subtração (30 - 19 = 11). Isso mostra que 76% dos estudantes operam corretamente, sabem fazer conta de adição e subtração. Inferimos que, talvez, eles não saibam compreender o significado da operação e o tipo de problema que é solicitado. As respostas erradas talvez tenham ocorrido pela linguagem utilizada no enunciado do problema e pela dificuldade de compreensão do texto, em que o estudante não consegue estabelecer relações.

Descritor 4 - Resolver problemas com números naturais, envolvendo os diferentes significados da multiplicação ou da divisão.

Item 12 – SAEPE 2005

O item apresenta a situação de um ônibus que faz o transporte de uma cidade para outra. A passagem desse transporte custa 13 reais. Durante uma viagem, o trocador vendeu 15 passagens. A pergunta que se faz ao respondente é: Quanto o trocador recebeu?

Quadro 7 - Resultados do Item 12 SAEPE – 2005

ANO	ITEM	GAB	DISTRATOR	%
2005	12	A	28 reais	32%
		B	60 reais	17%
		C	185 reais	15%
		D	195 reais	33%

Fonte: Secretaria de Educação de Pernambuco resultado do SAEPE 2005

No item, é solicitado que o aluno seja capaz de resolver problema envolvendo os diferentes significados da operação de multiplicação. Portanto, o item corresponde ao descritor, que é resolver problemas com números naturais, envolvendo os diferentes significados da multiplicação ou da divisão. Nesse caso uma multiplicação com o significado de proporcionalidade: 1 é 13; 15 é x.

Verificamos que 33% dos alunos assinalaram a resposta correta. Esses alunos efetuaram a multiplicação de forma direta, 13 x 15 = 195. O resultado indica que os alunos souberam analisar o enunciado, extrair as informações pertinentes e definir o cálculo que deveriam efetuar para solucionar o problema.

Contudo, 32% dos estudantes foram atraídos pela resposta errada 28. Eles efetuaram a adição dos dois valores do enunciado conforme mostramos a seguir 13 + 15 = 28. Para esses estudantes, a resolução do problema gira em torno dos números a serem operados, não importando em que situação e com que significado. Geralmente, no Ensino Fundamental, o ensino da soma percorre uma sequência: primeiramente, o estudante aprende a fazer a conta; depois, pratica-a repetidas vezes; finalmente, uma vez dominados os procedimentos, começa a aplicá-los na resolução de problemas.

No distrator que apresenta um índice de 15% de erros, os estudantes assinalaram a resposta 185. Vejamos como eles procederam.

Título: Análise de Resultados de Item Caderno de provado 5º Ano do Ensino Fundamental do SAEPE 2005

	1	3
X	1	5
	5	5
1	3	
1	8	5

Fonte: Caderno de prova 5º Ano Ensino Fundamental SAEPE 2005

Na resolução do cálculo, os estudantes realizaram a multiplicação, mas erraram na reserva. Se somarmos esses resultados, temos 15% + 33% = 48%.

Considerando que 97% dos estudantes responderam ao item, podemos dizer que os estudantes reconhecem a multiplicação. Diante desses resultados, apresentamos alguns questionamentos: se esses estudantes trabalhassem mais o cálculo mental, o resultado seria 48%? E se o valor monetário aparecesse de forma explícita (R$), o resultado também seria o mesmo (48%)? Essas e outras questões poderão ser aprofundadas em novas pesquisas.

NOTAS

1. A disciplina Ciências foi avaliada em 2000 tendo sido retirada nas versões do SAEPE de 2002 e 2005.
2. A estrutura aditiva abrange vários conceitos, tais como, contagem, sistema de numeração decimal, adição, subtração, idéia de transformação, comparação, composição, entre outros.

Referências

CÂMARA, M. S; ARAÚJO, A. J; SILVA, N.K.B.N. Avaliar com os Pés no Chão da escola**.** *In*: **Reconstruindo a prática pedagógica no ensino fundamental.** Recife: Editora Universitária da UFPE, 2000. p.119 - 47.

CURY, H. N. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N.; MÜLLER, T. J. Análise de erros em matemática em uma visão interdisciplinar. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL**,** 27., 2004. Porto Alegre. **Anais** [...]. Porto Alegre; SBAMC, 2004.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: ARTEMED, 2001.

MAGINA, S. *et al.* **Repensando Adição e Subtração:** Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: Ed. PROEM Ltda, 2001.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. **Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco:** SAEPE: relatório 2002. Recife: Secretaria de Educação, 2003.

PILATI, O. Sistema nacional de avaliação da educação básica (SAEB): **Ensaio Avaliação das políticas Públicas Educacionais,** [*S. l.*], v. 2, p. 11-30, 1994.

PINTO, N. B. **O Erro como Estratégia Didática:** Estudo do erro no ensino da matemática elementar**.** Campinas, SP: Papirus, 2000.

SCHLIEMANN, A. L.; CARRAHER, D. (org.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** Ensino e Pesquisa, Perspectivas em Educação Matemática**.** Campinas, SP: Papirus, 1989.

SOUZA, J. C. A. **Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliação institucional em larga escala de redes públicas do estado de Pernambuco.** 2004. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2004.

VIANA, H. M. **Avaliações nacionais em larga escala**: análise e propostas. São Paulo: Fundação Carlos Chagas, 2003.

VIANA, H. M. **Avaliações em Debate**: SAEB, ENEM, PROVÃO, Brasília: Plano Editora, 2003.

VIANA, H. M. **Fundamentos de um programa de avaliação Educacional**, Brasília: Líber Editora, 2005.

ZUNINO, D. L. Problemas e contas: desafios diferentes. *In*: ZUNINO, D. L. (org.).

A matemática na escola: aqui e agora. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. p. 28-69.

CAPÍTULO 9

EFEITOS DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NA CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE PERÍMETRO[22]

Monica Maria Campelo de Melo
Marcelo Câmara dos Santos

Sobre a sequência didática

A sequência didática aqui tratada, de autoria de Câmara (1999), é constituída por seis módulos dispostos no seguinte formato: perímetros sem utilização das unidades usuais; áreas sem a utilização das unidades usuais; síntese dos dois conceitos, perímetros com medidas usuais; áreas com medidas usuais e síntese dos dois conceitos. Fizemos um recorte trabalhando apenas o conceito de perímetro sem a utilização das unidades usuais. A proposta limitou-se a investigar os efeitos desta sequência didática na construção, pelo aluno, do conceito de perímetro enquanto grandeza comprimento. O estudo foi realizado em duas turmas do II Ciclo do Ensino Fundamental das Séries Iniciais, sendo uma turma de 4º ano e outra de 5º ano, de uma escola pública estadual situada no município de Camaragibe, Região Metropolitana do Recife, estado de Pernambuco.

A vivência da sequência didática teve início com a aplicação de um pré-teste, que tinha a função de identificar concepções prévias dos sujeitos, relativas a comprimento e perímetro. Em seguida, foram aplicadas seis sessões de atividades. Com

[22] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2009.

CAPÍTULO 9

; e fatos descritos pelos observadores, pudemos ıobilizadas pelos sujeitos, na superação dos con- ocorrido entre suas concepções prévias e as É importante salientar que, durante a resolução ınos tiveram como apoio uma caixa de ferramen- guintes itens: pedaços de barbante e de fio de ıdos de plástico, lastex e régua de plástico não- rramentas funcionaram, em diversas situações, plicação do pós-teste, comparamos os resultados e verificamos em que medida o trabalho permitiu modificar as concepções iniciais dos sujeitos, ou seja, que efeitos a sequência didática provocou nos alunos, no decorrer e após o processo de construção do conceito de perímetro enquanto grandeza comprimento.

Entre os resultados obtidos na aplicação da sequência didática, neste artigo apresentaremos apenas os relacionados à primeira e à quarta sessões, por se tratar de sessões imprescindíveis para a construção do conceito de perímetro, enquanto grandeza comprimento.

Fundamentação teórica

A elaboração da sequência didática fundamentou-se em quatro dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos, relacionadas ao bloco das grandezas e medidas, elencadas nos estudos de Câmara (1999).

A primeira dificuldade refere-se à confusão entre os conceitos de perímetro e área, assim como os de contorno e superfície, trabalhados quase sempre ao mesmo tempo em sala de aula. Câmara (1999) verificou que a dificuldade é potencializada pela associação da operação de adição para determinação de medida de perímetro e de multiplicação para a medida de área, e intensifica-se ainda pelo tipo de objeto geométrico, bem como a forma com que os professores apresentam esses conceitos.

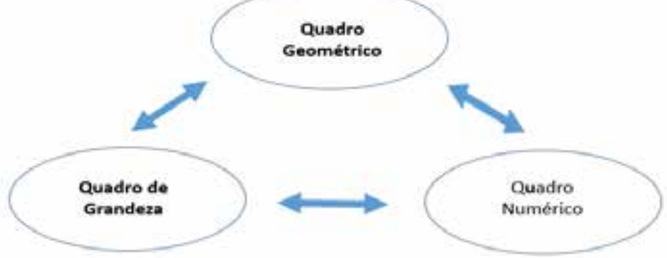
Outra dificuldade que fundamentou a construção da sequência é o amálgama entre a grandeza e sua medida. O autor conjectura que é normal que, na falta de números, o aluno estabeleça que não existem grandezas, o que os induz à concepção errônea de que o único modo de comparar grandezas é comparar números.

A terceira dificuldade elencada é que somente os segmentos de reta possuem comprimento, que “somente os polígonos têm perímetro, e que a única maneira de determiná-lo é apoiando-se nos vértices para medir os lados” (CÂMARA, 1999, p. 4). O autor faz uma advertência sobre o uso da régua como ferramenta privilegiada na medição de comprimentos em sala de aula, advertindo que essa medida pode gerar um obstáculo de aprendizagem, induzindo o aluno a perceber apenas a utilidade dos vértices e lados das figuras geométricas, sem trabalhar os outros elementos presentes nas figuras. Câmara (1999) afirma, ainda, que é necessário oferecer aos alunos outras situações de aprendizagens em sala de aula, para que ocorram aprendizagens significativas.

A quarta dificuldade elencada pelo autor é o uso, quase que exclusivo, de figuras prototípicas na aprendizagem da geometria, que incita a ideia de que apenas polígonos particulares têm área e perímetro.

Outra referência relevante, tanto na elaboração como na análise da sequência didática, foi o modelo de Douady e Perrin-Glorian (1989), que trata de articulação e diferenciação entre o quadro geométrico, o das grandezas e o numérico, presentes nas situações didáticas por meio das variáveis didáticas estabelecidas durante o processo de elaboração da sequência. Essas pesquisadoras utilizaram-se da seguinte modelização para relacionar as grandezas geométricas apresentadas por Silva (2004, p.33).

Figura 1 – Esquema que representa a modelização proposta por Perrin-Glorian para sistematizar as situações de ensino relacionadas com a noção de grandeza.

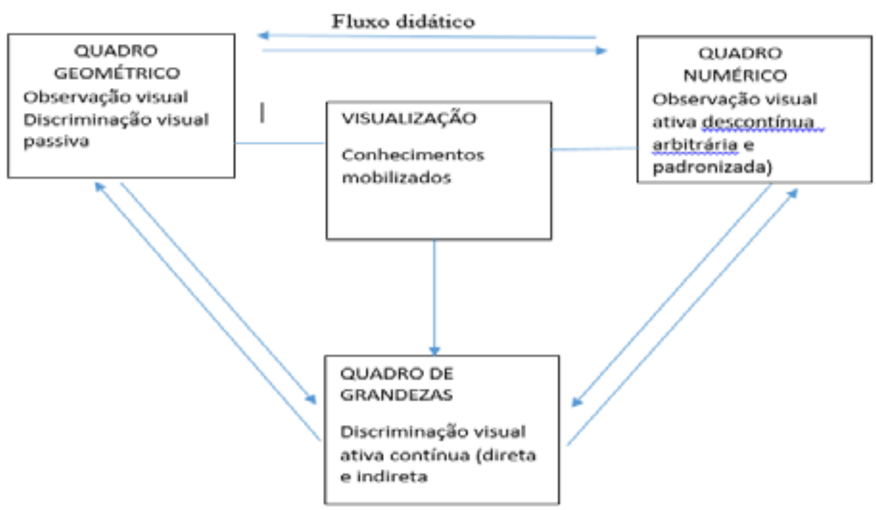


Fonte: Adaptado de Silva (2004, p. 33)

Segundo Câmara (1999) o modelo apresentado pelas pesquisadoras infere que “o processo de aprendizagem de Grandezas deveria propiciar a construção dos conceitos de área e perímetro como grandezas, ao invés de restringir ao simples cálculo de números”.

Para Barbosa (2007), essa inferência contribui para impulsionar a influência da numerização diante dos outros conhecimentos. Este autor afirma que, decerto, a grande contribuição do Modelo de Douady & Perrin-Glorian seja o resgate do conceito de grandeza. Barbosa propõe outra modelização para o quadro acima, acrescentando o aspecto da visualização. Esse aspecto representa para o autor uma manifestação que assegura a afinidade dos quadros por meio de um viés cognitivo. Vejamos a figura abaixo:

Figura 2: Modelização para os quadros numérico, geométrico e de grandeza.



Fonte: Barbosa (2002, p. 104)

Essa conexão entre os quadros é viabilizada pelo viés cognitivo que considera aspectos como os momentos da “observação”, da “representação” e, principalmente, o da “comparação”.

Para Barbosa (2007), essa relação recíproca entre os quadros geométrico e numérico corrobora para o surgimento de um “atalho epistemológico”, originado pela influência que os números têm sobre os outros conhecimentos matemáticos. Essa influência também induz à existência de um “atalho didático”, realizado no momento da “transposição didática interna”, que ocorre na sala de aula entre o professor, o conhecimento e o aluno e que, por sua vez, acarreta total desconsideração dos quadros das grandezas.

Noção de grandeza geométrica

Utilizamos como referência, para a noção de grandeza, os estudos de Barbosa (2007), que concebe que os conceitos geométricos foram criados baseados em experimentações humanas nos campos da percepção, representação e classificação. O autor afirma que tais conceitos tiveram sua gênese devido à capacidade do homem de reconhecer configurações físicas e de estabelecer comparação entre formas e tamanho. Assim, as descobertas das relações geométricas impulsionaram, em um estágio superior, as relações de grandeza.

É interessante destacar, ainda, que relevamos algumas divergências que permeiam o ponto de vista da matemática e que, de certa forma, ampliam nosso olhar. Para Bellemain e Lima, esse conceito perpassa pela confluência de muitos domínios conceituais.

> Qualquer abordagem do conceito de grandeza conduz necessariamente à consideração de outras noções tais como quantidade, medição, unidade, medida, entre outros. É natural, portanto, que esses termos apareçam nas questões básicas sobre grandeza (BELLEMAIN; LIMA, 2002, p. 8).

Conceito de perímetro

É relevante percebermos que o conceito intuitivo de perímetro, que pode ser sistematizado em sala de aula, permeia a vida prática das pessoas em diversas situações, como, por exemplo, ao se identificar quantos metros de fio são necessários para se construir um cercado para o plantio de macaxeira.

Na escola, nos deparamos frequentemente com dificuldades dos alunos para resolver problemas que abordam esse conceito, pertencentes ao bloco de conteúdos Grandezas e Medidas, estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e prescrito pela BNCC, na competência específica 2, habilidade EM13MAT201. Estas dificuldades, expostas nas avaliações externas, impulsionam diversas pesquisas na área da Didática da Matemática.

Na sala de aula, o uso do conceito de perímetro predominante é a soma das medidas dos lados de um polígono, que legitima a ideia errônea, por ser limitada, de que não podemos calcular o perímetro de figuras curvas. A respeito disso, Barbosa (2002, p. 38) discorre que é *“pertinente considerar o conceito de perímetro num con-*

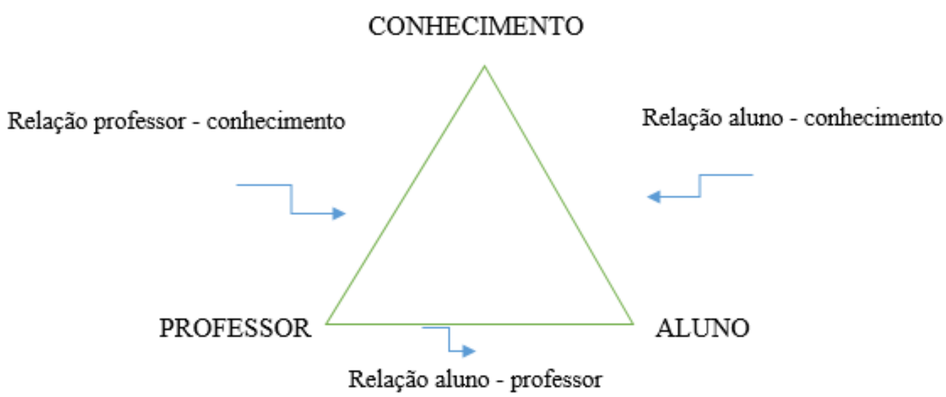
tinuum de contexto, que vai das situações do mundo físico, essencialmente empírico, às elaborações abstratas, de características formais, no contexto da Matemática". O autor cita algumas definições registradas em sala de aula, em que utiliza como contexto a própria Matemática: o *"perímetro de uma curva fechada é o seu comprimento"*, além disso, *"no caso de uma curva fechada, que é o contorno de uma região plana, diremos que o perímetro desse contorno é o perímetro da região"*; quando temos a expressão *"perímetro de uma figura geométrica plana, pode ser tomada como comprimento da linha ou como o comprimento do contorno da região plana definida pela linha"* (BARBOSA, 2002, p. 44).

Como referência, utilizamos também outro estudo de Barbosa (2007), que trata perímetro como grandeza comprimento, diferenciando-a do objeto geométrico em si, que o concebe como uma linha fechada. A referência se deu exatamente pelo fato de enfatizarmos os efeitos da sequência didática na construção do conceito de perímetro, enquanto grandeza comprimento.

Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas, de autoria de Guy Brousseau, ancorou nosso estudo por ser referência em pesquisas que tratam os fenômenos didáticos nos estudos de Educação Matemática. A teoria sugere um sistema didático representado por um triângulo cujos vértices abrigam três polos: o **professor**, o **aluno** e o **saber**, e seus lados exprimem três importantes relações: a **aluno-professor**, a **aluno-conhecimento** e a **professor-conhecimento**, como sugere a figura abaixo.

Figura 3 – Triângulo das Situações Didáticas



Fonte: Câmara (1997, p. 107)

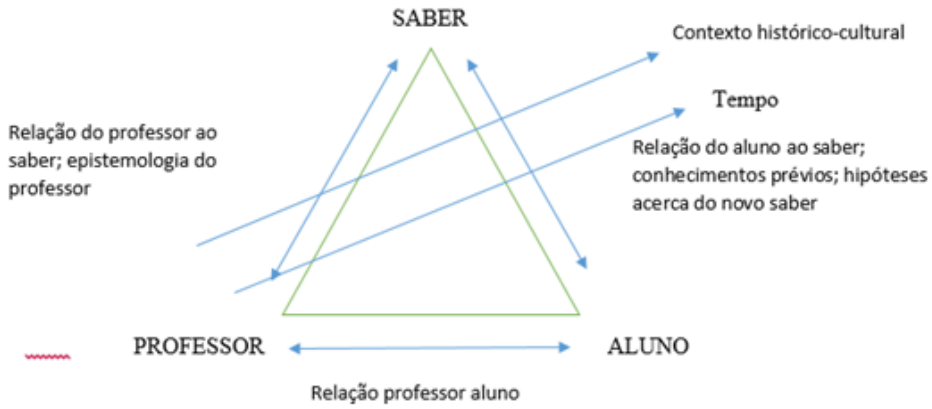
É imprescindível salientar que, apesar de a figura apresentar-se visualmente como um triângulo equilátero, a teoria sugere que a distância entre os vértices normalmente varia devido a conflitos constitutivos do processo de ensino-aprendizagem. Câmara (1997) elucida o funcionamento do esquema:

> De fato, se cada um de seus lados representa uma relação – relações conflituais de equilíbrio instável -, a natureza de cada 'triângulo didático' seria dependente das características próprias a cada uma das relações próprias e cada uma dessas relações; um 'triângulo equilátero' seria, dessa maneira, a representação do que poderia considerar uma 'situação didática ideal'. Além disso, não se pode esquecer que dois dos polos desse sistema, o professor e o aluno, mesmo sendo considerados objetos de estudo, apresentam-se como seres humanos, sujeitos assim, às manifestações de sua própria subjetividade (CÂMARA, 1997, p. 107).

Pais (2002) alerta sobre os limites que cerceiam esse modelo, no que se refere à explicação da complexidade dos fenômenos didáticos que perpassam na sala de aula da matemática, chamando, assim, a necessidade de outros elementos do sistema didático, como a transposição didática e o contrato didático. O autor atenta para a natureza do saber matemático que trespassa as relações pedagógicas pactuadas pelo contrato entre o professor e o aluno. Outros autores, inclusive Pais (2006), alertam para a imprescindibilidade de o contexto do problema matemático ser significativo para o aluno, para que não se perca a dimensão dos processos educativos.

Brito Menezes (2006) segue a mesma linha de pensamento, sugerindo que quando se estabelece a relação triangular, composta por dois elementos humanos (o **aluno** e o **professor**) e outro não humano e dinâmico (o **saber**), um sistema didático emerge de forma dialética, gerando um sistema mais completo da situação didática:

Figura 4: Triângulo das Situações didáticas



Fonte: Brito Menezes (1996, p. 2-3)

A postura dos autores supracitados nos faz refletir sobre a maneira como o conteúdo é apresentado ao aluno. O saber matemático estaria vinculado a uma determinada situação didática constituída de dois fatores: a forma didática, que é como o conteúdo é repassado para o aluno; e o envolvimento do aluno na atividade de aprendizagem. Nesse meio instaurado será determinante definir como será a visualização do problema pelo aluno, assim como será sua tomada de decisão para a elaboração de estratégias de resolução.

A construção de uma situação didática se apresenta como um jogo dinâmico, que exige do professor a elaboração e a definição de suas estratégias de atuação, no qual o contrato didático será a regra. É imprescindível e curioso perceber que a evolução da situação didática pode modificar o contrato estabelecido. Dessa forma, o contrato didático está estreitamente atrelado aos conhecimentos em jogo.

Ao propor uma situação problema, o professor deve fornecer ao aluno os meios que viabilizem a construção da solução. Brousseau (1996) ressalta que o meio seria um sistema antagonista do sistema ensinado, ou previamente ensinado.

Em nossa pesquisa, disponibilizamos uma caixa de ferramentas não usuais como meio que viabilizou a resolução da sequência didática. É importante salientar que o professor não deu sugestões para a resolução das atividades, porque nosso foco foram a observação e o registro dos efeitos gerados pela vivência da sequência didática. Os instrumentos que compuseram a caixa de ferramentas transformaram-se, em nossa proposta, em variáveis didáticas. Essas variáveis didáticas estiveram presentes, tanto como ferramentas, como na própria situação problema.

Realcemos aqui a necessidade da compreensão da noção de variável pelos professores, para que possam elaborar boas situações de aprendizagem, pois elas os ajudarão a refletir sobre aspectos do cenário escolhido, sobre as renovações necessárias a uma questão, e, principalmente, nas previsões de atividades do aluno. O professor deve estar também atento para não desprezar as razões teóricas relativas ao uso de variáveis para que o problema tenha pertinência ao conhecimento que deseja adquirir.

Ao focar nossa análise à luz da Teoria das Situações Didáticas, optamos pela proposta de Brousseau (1996), que ressalta quatro tipos de situações, estreitamente interligadas a cada atividade aqui proposta:

i. Situação de ação: envolve a resolução de problemas por parte do aluno;
ii. Situação de formulação: seria a explicitação, pelo aluno, das estratégias formuladas, regidas pela lei da comunicação;
iii. Situação de validação: seria o processo de produção de provas que validem as hipóteses formuladas pelos estudantes. É importante atentar que, se a hipótese for falsa, deverá ser refutada;
iv. Situação de institucionalização: o novo conhecimento particular, construído e validado, passa ser um patrimônio do grupo de alunos da sala de aula, e a passagem desse conhecimento para que tenha referência universal fica a cargo do professor.

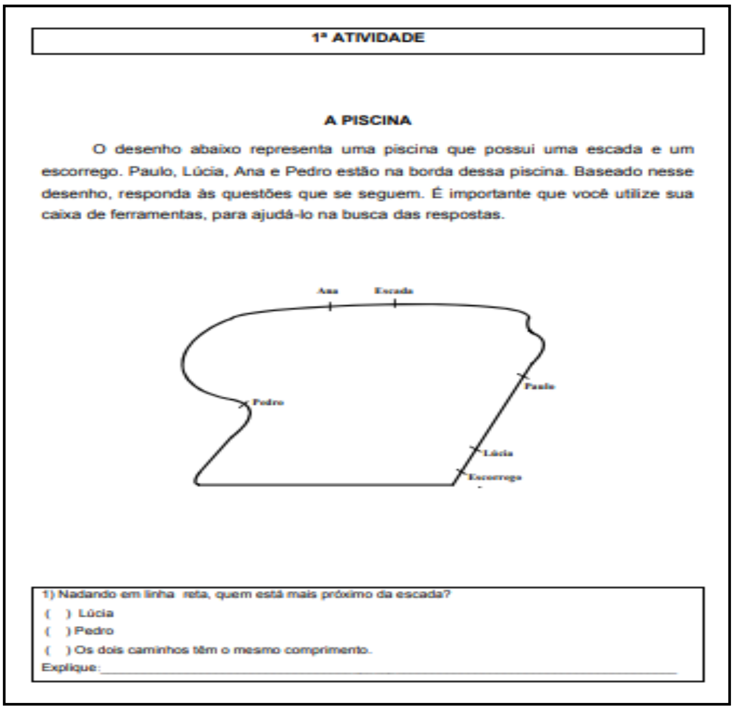
Os argumentos supracitados formam a estrutura teórica que associamos à experimentação das situações de aprendizagem, e são a base proposta para o alcance do nosso objetivo, a construção do conceito de perímetro, enquanto grandeza comprimento.

Resultados

Designada como **a piscina**, a primeira sessão teve como objetivos a comparação de comprimentos de segmentos de retas e de linhas curvas, levando o aluno a perceber que linhas curvas também podem ser medidas, assim como os segmentos de reta; e a superação do amálgama entre a grandeza e a medida dessa grandeza, que os induz à concepção errônea de que o único modo de comparar grandezas é comparar números, desconstruindo a passagem “precoce” do quadro de grandezas, pelo aluno, para o quadro numérico, como pressupunham Douady e Perrin-Glorian(1989) e Barbosa (2007).

A primeira atividade desta sessão traz a representação de uma piscina, com seis pontos marcados (escada, escorrego, Ana, Paulo, Lúcia e Pedro) conforme figura abaixo:

Figura 5 – Atividade 1: A piscina.



1ª ATIVIDADE

A PISCINA

O desenho abaixo representa uma piscina que possui uma escada e um escorrego. Paulo, Lúcia, Ana e Pedro estão na borda dessa piscina. Baseado nesse desenho, responda às questões que se seguem. É importante que você utilize sua caixa de ferramentas, para ajudá-lo na busca das respostas.

1) Nadando em linha reta, quem está mais próximo da escada?
( ) Lúcia
( ) Pedro
( ) Os dois caminhos têm o mesmo comprimento.
Explique:________________________________

Fonte: Adaptação de Melo (2009, p. 51).

Nessa atividade, os alunos compararam distâncias entre pontos marcados da piscina, cujas trajetórias apresentavam segmentos de retas ou curvas, conforme solicitação. As variáveis didáticas previstas na sessão foram comparar segmentos de reta a partir de um referencial, comparar linhas curvas a partir de um referencial, comparar curvas a partir de dois referenciais, comparar segmentos de reta e linhas curvas, medir segmentos e compará-los com instrumentos não convencionais (sem graduações). Registramos, como resultados, alguns efeitos relativos à superação de algumas dificuldades de aprendizagem elencadas em nosso aporte teórico.

Na atividade, portanto, foi dada ao aluno a oportunidade de comparar segmentos de reta em uma situação não muito convencional. O objeto oferecido ao aluno foi uma figura não poligonal, representada pela piscina. Como objetivo da atividade, o aluno teria que determinar a menor distância (medida) entre dois pontos dados, em duas situações e, por fim, comparar os resultados. A proposição seria medir por dentro da piscina, considerando que o percurso fosse feito nadando-se nela, e não pela linha de contorno, como é comum.

Em outras sessões, os alunos foram levados a medir curvas e a comparar distâncias determinadas por referenciais fixos (escorrego e escada) e móveis (pessoas), cujas trajetórias eram representadas ora como segmentos de retas, ora como de curvas. Para tal, deveriam realizar escolhas de ferramentas adequadas a cada contexto, viabilizadas por variáveis didáticas projetadas a priori.

Entre os resultados observados, verificamos uma ruptura em relação à ideia, reforçada pelo privilégio da utilização da régua nas salas de aulas de Matemática, de que apenas os segmentos de reta podem ser medidos. Constatamos a preferência pela régua, mesmo sem graduação, para medir segmentos de reta, e pelo barbante para medir curvas. Observamos a falta de familiaridade com o ato de medir, pelo aluno, como algo comum na rotina da sala de aula de Matemática, o que corrobora com a hipótese de omissão da vivência de conteúdos de geometria, principalmente no que concerne ao exercício de medição. Almouloud (2004), Câmara (1999), Passos (2000) e Pavanello (2001) discorrem sobre suas preocupações, relativas às dificuldades teóricas e metodológicas dos professores, bem como sobre a falta de condições materiais de preparação de aula, etc.

Ainda com relação à escolha das ferramentas, observamos que a prática dos alunos perpassa por uma incontestável influência dos seus conhecimentos prévios. No caso da turma do 5º ano, registramos a escolha da régua, para um evento de medição de curvas, logo abandonada devido à não sobreposição à trajetória. Essa reprodução, provavelmente, está vinculada a procedimentos, presentes no cotidiano da sala de aula, impregnados da ideia errônea de que, para se medir, usa-se régua.

Outro ponto registrado foi o fato de a maioria dos estudantes, com exceção de um grupo, não ter sentido falta da graduação da régua. Entendemos que isso se deveu à falta de utilização, da vivência de situações-problema com contextos de medição viabilizados com a utilização desse instrumento, na sala de aula.

Para medir as distâncias, em geral, os alunos recorreram à sobreposição de ferramentas à figura da piscina. A forma de medir hegemônica caracterizou-se pela sobreposição da régua ou do barbante ao contorno e a posterior medição. Percebemos, nesse caso, o surgimento de estratégias pouco convencionais para a resolução do problema.

Observamos, também, que a grande influência da visualização nos processos de medição e comparação, nitidamente, ocorreu com maior frequência sobre os alunos de menor idade, sobretudo no início da aplicação da sessão. Essa influência foi responsável por alguns erros ocorridos, tais como a consideração de uma trajetória em forma de segmento de reta para expressão da medida de uma trajetória, formada por linhas de comprimento e posterior comparação. A visualização também influenciou a escolha de ferramentas em todo o decorrer das atividades como, por exemplo, as medições adequadas aos formatos das trajetórias.

Houve uma evolução gradual dos estudantes em relação ao uso das ferramentas, consequência da situação proposta. Eles perceberam que, em alguns momentos, a visualização, sem ajuda das ferramentas, compromete os resultados.

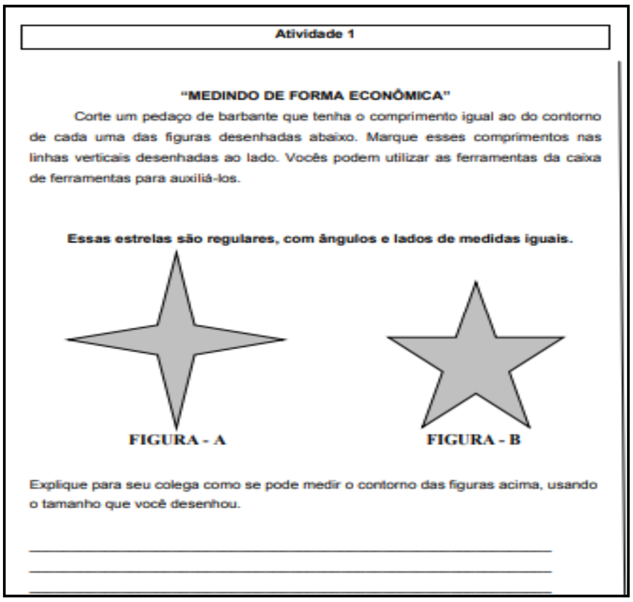
Embora faça parte do senso comum a ideia de que “para ser matemática é necessária a presença dos números”, poucos alunos questionaram tal ausência durante a resolução da sessão, uma vez que apenas um grupo do 5º ano verbalizou a ausência da graduação das réguas. Os alunos criaram algumas alternativas de resposta, tais como estabelecer unidades de medidas diversas a partir das ferramentas existentes na caixa de ferramentas, graduar réguas com medidas por eles estabelecidas, cortar pedaços de barbante, canudinho de plástico e outros materiais, com a finalidade de resolver as situações propostas ou, até mesmo, utilizar seus dedos, lápis e outros materiais não previstos em nossa análise anterior, já que não tinham à sua disposição o campo numérico. Perceberam, dessa forma, que mobilizando-se conhecimentos extramatemáticos, é possível utilizar unidades de medida não convencionais.

Notamos também a incorporação de novos termos matemáticos ao vocabulário dos alunos, tais como comprimento, medida, contorno, curto, longo, entre outras, principalmente dos alunos mais novos.

Intitulada “Medindo de forma econômica”, a quarta sessão teve por objetivo fazer o aluno perceber a possibilidade de medir o contorno de uma figura sem a necessidade de se efetuar medições de todos os lados, observando que existem medidas que se repetem. Para alcançarmos o objetivo, estabelecemos um jogo de variáveis que levou à adoção, pela maioria dos alunos, de estratégias econômicas.

Na primeira atividade, apresentamos uma situação didática em que os alunos deveriam medir os perímetros de duas figuras regulares (estrelas com mesmo perímetro) de pontas e lados de diferentes dimensões com o auxílio de retas suporte dadas. Essa atividade apresenta maior complexidade devido a presença de três variáveis perceptíveis: a forma, o comprimento do contorno e a existência de medidas diferentes que se repetem.

Figura 6 – Atividade 1: Medindo de forma econômica


Atividade 1

"MEDINDO DE FORMA ECONÔMICA"

Corte um pedaço de barbante que tenha o comprimento igual ao do contorno de cada uma das figuras desenhadas abaixo. Marque esses comprimentos nas linhas verticais desenhadas ao lado. Vocês podem utilizar as ferramentas da caixa de ferramentas para auxiliá-los.

Essas estrelas são regulares, com ângulos e lados de medidas iguais.

Explique para seu colega como se pode medir o contorno das figuras acima, usando o tamanho que você desenhou.

Fonte: Adaptação Melo (2009, p. 105).

Nessa questão, solicitamos que o aluno escrevesse de que maneira poderia explicar ao seu colega como marcar na reta suporte uma medida que os auxiliasse a medir o contorno das figuras. Dessa forma, os alunos foram colocados inicialmente diante de uma figura com formato simples, em que é facilmente possível contar pontas ou lados e dizer quantas vezes se repetem ou, ainda, medir todo o contorno e registrar na reta suporte, que tem a mesma medida do perímetro das duas figuras.

Salientamos que a medição de comprimentos base leva à observação de que o mesmo se repete; logo, a medida do perímetro pode ser obtida aplicando-se estratégias econômicas. Outro fator que é importante é registrar que as figuras apresentadas nas atividades não são figuras prototípicas, que costumam levar os alunos a pensar que só polígonos particulares têm área e perímetro. Câmara (1999) ainda argumenta que "nesse momento parece intervir um obstáculo em que os alunos verbalizam não ser possível multiplicar comprimentos", apenas números (p.8), o que poderia inviabilizar o uso de estratégias econômicas.

Esperávamos, entre os resultados obtidos nessa sessão, a percepção da existência de medidas que se repetem (as pontas das estrelas ou os lados das pontas), e que a medida do contorno seria obtida utilizando-se essas medidas. No início da atividade os alunos foram inteirados do significado do que seria um polígono regular, o que inspirou a elaboração da estratégia econômica, proposta nesta sessão.

Verificamos que os alunos do 4º ano, em sua maioria, tiveram dificuldade, devido aos seus conhecimentos prévios relativos à colagem do barbante ao contorno, que levou a renegociação do contrato estabelecido na aplicação da sequência; outro agente complicador para a turma, este previsto, foi a presença de vértices nas figuras. Para esses alunos, a apresentação da ideia de que figuras regulares são aquelas que apresentam lados com medidas do mesmo comprimento ficou comprometida, porque estavam preocupados com o procedimento de medir os contornos das estrelas. Apenas uma dupla utilizou uma estratégia econômica, servindo-se da ideia de polígono regular. O mesmo não ocorreu com os alunos do 5º ano, em que a compreensão da ideia de polígono regular e do que seria uma estratégia econômica facilitou a elaboração dessas estratégias, perfazendo um total de 71,4% de utilização de estratégias econômicas pelos alunos dessa turma. Apenas duas duplas do 5º ano optaram por medir o contorno completo.

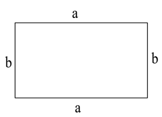
Nosso olhar sobre os protocolos dos alunos das duas turmas contabilizou quatro tipos de estratégias diferentes para a resolução da atividade. A estratégia não econômica de medir o contorno completo foi utilizada por 85,7% dos alunos do 4º ano e 28,6% dos alunos do 5º ano; no 4º ano, observamos apenas uma estratégia econômica, utilizada por uma dupla de alunos (14,3% dos alunos), que se baseou na divisão do perímetro em duas partes; já os alunos do 5º ano elaboraram dois tipos de estratégias econômicas: o primeiro, utilizado por 57,1% dos alunos, que calcularam o perímetro em função da quantidade de lados, e o segundo tipo de estratégia, utilizado por 14,3% dos alunos, consistia no cálculo do perímetro em função da quantidade de pontas.

Em relação às ferramentas utilizadas, não houve surpresa. A turma do 4º ano optou pelo barbante, embora em menor grau tenhamos registrado, como suporte, o uso de dedo, linha elástica e canudinhos plásticos; a turma do 5º ano, optou preferencialmente pela régua, embora tivessem manuseado outras ferramentas como, por exemplo, o canudinho e o barbante como garantia da resposta.

No que diz respeito ao uso da linguagem matemática, registramos falas e escritos que expressaram a experimentação das ações de medir e comparar medidas como “longe”, “mais longe”, “eu medi”, “perto”, “mais perto”, “mais curto”, “mesma medida”, etc. É importante salientar que as respostas que prevalecem sobre como os alunos podem explicar ao colega como medir o contorno são do tipo pragmáticas, evidenciando uma simples constatação do que foi realizado na atividade.

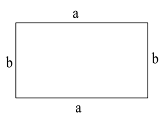
No início das atividades, os alunos foram instigados a perceberem que existem medidas que se repetem algumas vezes, como as pontas das estrelas, o lado das pontas das estrelas, ou ainda um agrupamento de pontas ou lados, e que a medida do contorno pode ser obtida usando-se as medidas repetidas. Para viabilizar essa perspectiva, os alunos também foram, mais uma vez, informados sobre o significado de polígono regular. Um exemplo anterior à resolução de uso da estratégia econômica foi, em vez de efetuarmos quatro medições para determinar o perímetro, medirmos apenas duas de suas dimensões, dobrando essas medidas, como mostrado no esquema das medições a seguir:

a) Estratégia não econômica



Perímetro: $\boxed{a + a + b + b}$

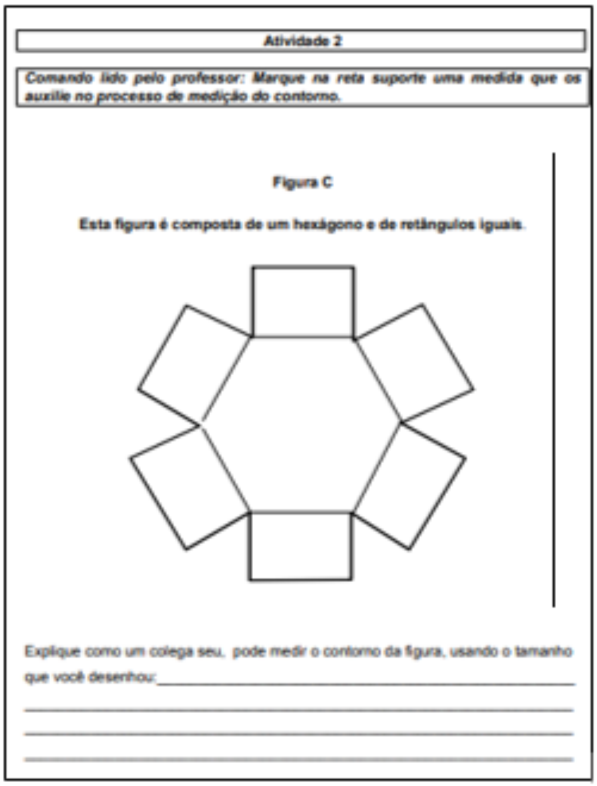
b) Estratégia econômica



Perímetro: $\boxed{2 \times a + 2 \times b}$

A segunda atividade trouxe um aumento da complexidade da figura, em relação à primeira, formada por um hexágono regular e seis retângulos, e o fato de o perímetro da figura ser maior do que a medida da reta suporte. Nesse caso, além de a figura ter sido formada por duas medidas diferentes que se repetem (comprimentos e larguras dos retângulos), o seu perímetro não cabe na reta suporte, levando os alunos a rejeitarem, aos poucos, a ação de medir o contorno inteiro. Essas variáveis colaboraram para o surgimento de novos conflitos cognitivos, que desestabilizaram e levaram os alunos à busca de soluções adequadas às situações propostas.

Figura 7 – Atividade 2: Medindo de forma econômica



Fonte: Adaptada de Melo (2009, p. 112).

Entre os resultados dessa 2ª atividade, observamos que os alunos do 4º ano tiveram bastante dificuldade para medir o contorno da figura, exatamente 71,4%. Os motivos detectados foram a complexidade da forma, a existência de duas medidas diferentes e o comprimento de seu contorno. A presença dos vértices na figura foi outro agente complicador, devido a praticamente todas as duplas terem utilizado o barbante como ferramenta. Só duas (25%) das sete duplas do 4º ano utilizaram estratégias econômicas. Em geral, as duplas mediram todo o contorno com um único pedaço de barbante, mesmo observando que a figura possuía "dentes" com dimensões diferentes, e que o barbante medido era maior que a reta suporte. Nossa hipótese, nesse caso, recai sobre a falta de experiência escolar dos alunos em elaborar algumas generalizações.

Os alunos do 5º ano conseguiram elaborar estratégias econômicas conforme esperávamos. No 5º ano, 57,1% dos estudantes utilizaram a estratégia de medir comprimento e largura do retângulo e citar a quantidades de vezes que cada uma delas aparece no contorno. A segunda estratégia registrada foi utilizada por 28,6%

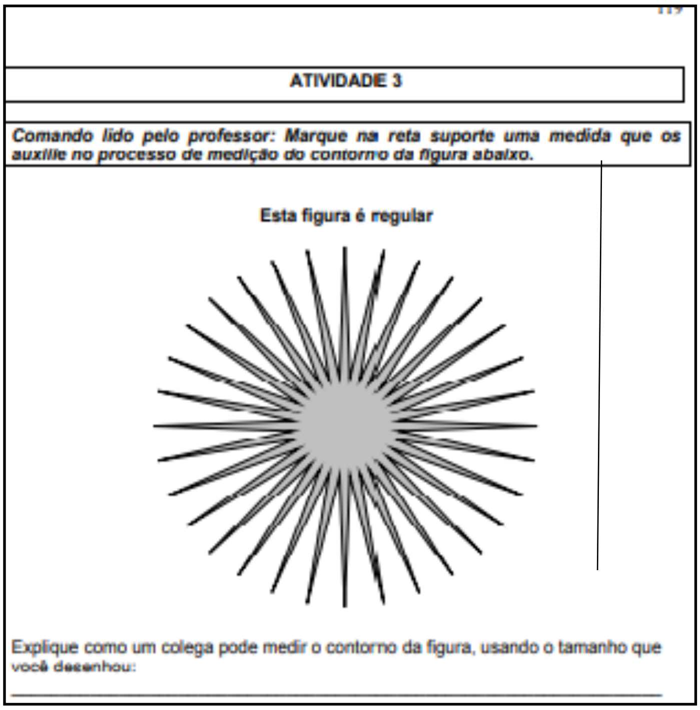
dos alunos: medir cada dente (duas larguras e um comprimento) e multiplicar essa medida pelo número de dentes. A terceira estratégia nessa turma, usada por 14,3% dos alunos, foi a utilização da medida da reta suporte como unidade de medida para se medir o contorno. Notadamente, verificamos que os alunos compreenderam a lógica estabelecida, respondendo adequadamente ao jogo de variáveis proposto na sessão.

Registramos evoluções, no que se refere à linguagem, na segunda sessão. Em algumas explicações, embora tenham indicado o procedimento de medir, mesmo sem citar detalhes sobre de onde se iniciaram as medidas, ou mesmo às ferramentas utilizadas, registramos uma articulação entre a explicação e a estratégia econômica utilizadas. Percebemos que a existência de pontas não desestabilizou os alunos, conforme pensávamos que ainda aconteceria.

Queremos destacar que, no debate do 4º ano, houve uma polêmica relacionada ao fato de a medida da reta suporte ser menor que a medida do contorno. Dessa forma, organizamos a apresentação dos trabalhos com as duplas que mediram o contorno completo, se apresentando primeiro, seguidas pelas duplas que socializaram as suas estratégias econômicas. Essa dinâmica viabilizou a compreensão do objetivo da atividade por todos os alunos da turma.

Na terceira atividade, os alunos voltaram a trabalhar com pontas, entretanto um número relativamente alto de pontas. Foi colocada diante deles uma figura com 32 pontas, ou seja, 64 lados da mesma medida. Outra variável que assumiu papel importante foi a medida do perímetro da figura, de aproximadamente oito vezes a medida da reta suporte, que apoia essa situação. Essas duas variáveis, conjugadas, foram responsáveis por fechar a lógica do jogo de variáveis presentes nessa sessão. Nossa hipótese, nessa atividade, era de que, ao medir o contorno com barbante, o aluno passasse a adotar uma estratégia econômica qualquer, pois o perímetro da figura era aproximadamente oito vezes maior que a medida da reta suporte.

Figura 8 – Atividade 3: Medindo de forma econômica.


ATIVIDADE 3

Comando lido pelo professor: Marque na reta suporte uma medida que os auxilie no processo de medição do contorno da figura abaixo.

Esta figura é regular

Explique como um colega pode medir o contorno da figura, usando o tamanho que você desenhou:

Fonte: Melo (2009, p. 119).

Como resultado, tivemos que aproximadamente 57,1% dos alunos do 4º ano, e 85,7% dos alunos do 5º ano utilizaram estratégias econômicas. É importante verificar que todos os alunos que não utilizaram essas estratégias também mediram os lados da figura, embora não tivessem conseguido avançar para o nível mais elaborado, a construção de estratégia econômica.

As estratégias mobilizadas pelos alunos na terceira atividade foram em número reduzido, apenas duas estratégias "econômicas" e uma "não econômica".

Verificamos que a preferência pela estratégia econômica, em que os alunos colocaram o perímetro em função do número de pontas, ocorreu devido ao fato de a quantidade de pontas ser menor do que a quantidade de lados, além de, visivelmente, ser mais fácil de distinguir. Devido à grande quantidade de lados (64 lados), os alunos que escolheram contar o número de lados atrapalharam-se muito, tendo que repetir algumas vezes a contagem.

Observamos também que a escolha das estratégias levou os alunos, implicitamente, a utilizarem as expressões "*n x m*", ou **"***n x (2x l)"***,** em que *n* é número de pontas, *m* é a medida da ponta e *l* é a medida do lado da estrela; isso fica claro nas explicações dadas nos protocolos.

O fato de a quarta sessão estar montada numa sequência lógica de dificuldades estimulou a paulatina adoção de estratégias econômicas que, de fato, aconteceu com mais ênfase no 5º ano do que no 4º ano. As variáveis didáticas presentes nas atividades foram imprescindíveis para a utilização das estratégias econômicas.

O objetivo de fazer o aluno perceber a possibilidade de medir o contorno de uma figura sem a necessidade de efetuar medições de todos os lados ocorreu de forma gradativa. Algumas duplas não conseguiram elaborar estratégias que atendessem ao nosso objetivo. Entretanto, as estratégias que surgiram em sala foram socializadas no momento do debate. Esperávamos, durante toda a sessão, a larga utilização da régua, no momento de medir os segmentos de reta que compunham as figuras, já que se tratava de um polígono, e isso ocorreu de forma muito racional, principalmente na turma do 5º ano.

Observamos, também, que houve um avanço considerável dos alunos do 5º ano em relação às sessões anteriores, pelo fato de terem conseguido discernir contextos diferenciados e soluções adequadas. O fato ocorreu de forma mais discreta com os alunos do 4º ano, que ficaram muito presos à ferramenta barbante, o que, de certa forma, limitou seu avanço.

Verificamos, ainda, que, quando os alunos utilizaram as estratégias econômicas no trabalho do desenvolvimento do conceito da grandeza perímetro, a partir da ideia da medida do contorno, houve implicitamente a necessidade de um número que externasse essa medida, explícito nas explicações registradas pelos alunos. Desta forma, percebe-se um esforço rumo à articulação dos quadros geométrico, numérico e de grandezas por parte dos alunos envolvidos em nossa pesquisa.

Conclusão

Neste estudo, investigamos os efeitos da sequência didática para a construção do conceito de perímetro, a partir de um estudo comparativo entre duas turmas do Ensino Fundamental com perfis diferenciados. A ideia era verificar que efeitos seriam encontrados em alunos que nunca tiveram acesso ao conceito, e compará-los a outros efeitos ocorridos numa sala em que os alunos já haviam trabalhado o conceito de perímetro.

De forma geral, percebemos que as dificuldades discutidas em nosso aporte teórico se manifestaram de forma diferenciada nas turmas. As concepções observadas na turma do 4º ano estavam associadas, normalmente, a conhecimentos prévios e extramatemáticos, enquanto, nos alunos da turma do 5º ano, estavam associadas a ideias com base na sua experiência da matemática escolar.

Constatamos que a maioria dos alunos desenvolveu a noção de que linhas curvas também podem ser medidas, superando a ideia de que só segmentos de retas podem ser medidos (CÂMARA, 1999). As estratégias mobilizadas para a realização de medições e comparações giraram em torno da discriminação visual ativa (sobreposição de ferramentas) e passiva (sem ajuda de ferramentas), com forte influência desta última, etapa que entendemos como mais rudimentar nos processos de discriminação visual.

A ausência de número nas atividades de comparação induziu os alunos a trabalharem com a ideia de medida; essa conduta viabilizou a passagem do aluno pelo quadro de grandezas, desconsiderando a ocorrência dos atalhos epistemológico e didático (BARBOSA, 2009). Para Câmara (1999), essa dificuldade "leva os alunos à ideia errônea de que o único meio de comparar grandezas é comparar números"

Referências

ALMOULOUD, S. A; SILVA, M.J.F.;CAMPOS, T.M.M. A geometria na escola básica: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. In: **Revista Brasileira de educação**, n.27, 2004 (p. 94-108).

BARBOSA, P. R. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação. UFPE, 2002.

BARBOSA, P. R. **Efeitos de visualização em atividades de comparação de comprimentos de linhas abertas.** Tese de Doutorado em Educação. UFPE, 2007.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRITO MENEZES, A.P. A. **Contrato Didático e Transposição Didática:** Inter-relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado não publicada, UFPE. Recife – PE. 2006.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental.** Natal: Editora da SBHMat, 2002. v. 1. 134p.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**.** In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas:** Coleção Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget, 1996 (p. 35-111).

CÂMARA, Marcelo. Efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de perímetro no 2º ciclo do Ensino Fundamental. In: **Anais da 22º Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPED).** ANPED, Caxambu: setembro, 1999.

MELO, Monica. **Efeitos de uma sequência didática na contrução do conceito de Perímetro**. 2009. Dissertação de Mestrado, UFPE. Recife, 2009.

DOUADY, R. ; PRRIN-GLORIAN, M. J,. Un processus d'Apprentissage du Concept d'Aire de Surface Plane. In **Educational Estudies in Mathematics**. v.20, 1989.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e práticas pedagógicas:** a geometria na sala de aula. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PAVANELLO, M. R.. Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. In: **Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática**. Curitiba, 2001, p.172-183.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco** - Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife – PE. 2012.

SILVA, Marithiça Flaviana Florentino da. **Frações e grandezas geométricas**: um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. Dissertação de mestrado – UF.

CAPÍTULO 10

ANÁLISE DOS EFEITOS DIDÁTICOS EMERGENTES DE UMA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES ACERCA DO SIGNIFICADO PARTE-TODO DO NÚMERO RACIONAL[23]

Luciana Silva dos Santos Souza
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

A formação matemática do professor que ensina nos anos iniciais do Ensino Fundamental é permeada por lacunas de ordem epistemológica e didática que os processos formativos (inicial e continuado) negligenciaram ou não foram capazes de resolver. As pesquisas têm indicado que este tipo de lacuna torna as relações instituídas entre o professor e os saberes matemáticos muito instáveis. Esta é uma condição que norteia não apenas o planejamento, mas também a gestão das ações didáticas na classe de matemática (CURI, 2005; NACARATO, 2013; SOUZA, 2017).

A pesquisa exploratória realizada por Souza (2017), por exemplo, revela que os profissionais que atuam nesta etapa da escolarização brasileira têm consciência da influência da própria relação com o saber matemático na construção das relações dos seus estudantes com os saberes. Nesse sentido, a autora supracitada afirma que a tomada de consciência gera desconforto entre os professores a ponto de mo-

---

[23] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado da primeira autora, sob a orientação do segundo, defendida em 2010.

bilizá-los na busca pelas condições necessárias à realização do ensino da matemática.

Assim, as proposições (atividades, situações didáticas, experimentações, recursos e orientações), contidas no livro didático de matemática (LDM), têm sido reconhecidas pelos professores como ferramentas essenciais ao ensino da matemática escolar em sala de aula. Gerard e Roegiers (1993) reforçam o argumento ao afirmarem que o livro didático figura como diretriz do plano de ação do(a) professor(a) de matemática ao longo do ano letivo. Além disso, este recurso é um fator que influencia a gestão dos tempos didático, de aprendizagem e do professor (CÂMARA DOS SANTOS, 1995); assim como funciona como referencial das decisões didáticas e avaliativas do(a) professor(a).

As análises das informações trazidas nos manuais de utilização desses livros permitem-nos perceber que estas extrapolam as discussões acerca da sistematização das unidades temáticas, das vias metodológicas para a implementação da proposta pedagógica ou ainda acerca dos diferentes procedimentos de cálculo que possibilitam a resolução dos problemas ou exercícios associados a este ou àquele objeto de saber matemático. Ao indicarem os recursos didáticos (disponíveis no próprio manual, em sites e aplicativos em plataformas digitais), os projetos (que poderão ser desenvolvidos ao longo do ano letivo), as estratégias formativas, de pesquisa e autoformação, os LD assumem uma função complementar à formação continuada dos professores utilizadores. A pretexto da existência de uma identificação pessoal para com o *layout*, com as sequências didáticas, com os encaminhamentos didáticos e avaliativos presentes no LDM, os(as) professores(as) que adotam exclusivamente uma única proposta se expõem aos princípios filosóficos, teóricos e metodológicos que fundamentam a proposta pedagógica da obra. Assim como se assujeitam às concepções de ensino e aprendizagem defendidas pelos autores. Uma decisão dessa natureza eventualmente será benéfica à gestão dos processos de ensino e aprendizagem, uma vez que existe a possibilidade de estabelecer limites às organizações didáticas e matemáticas do(a) professor(a) e da criatividade dos(as) estudantes na elaboração de estratégias de resolução de problemas, devido à homogeneização das ações.

argumento anterior ao afirmar que "a importância
edade faz com que ele acabe determinando con-
de ensino, marcando de forma decisiva o que se
e ensina." Romanatto (2004), por sua vez, reco-
as, questiona a sua qualidade e o fato de os
propostas pedagógicas fundamentalmente frag-

s conduzem a algumas reflexões: (i) se, por um
s da ação docente e discente, o(a) professor(a)
poderá deixar de investir na implementação dos organizadores curriculares da rede de ensino porque o livro se torna o próprio currículo de matemática; (ii) se estas obras são instrumentos potencialmente limitantes das estratégias didáticas e de aprendizagem, a depender do modo como os(as) professores(as) e estudantes os utilizam para ensinar e aprender Matemática, eles poderão assumir para si (mesmo que inconscientemente) o risco de prejudicar o estabelecimento e a evolução das suas relações ao saber; (iii) a utilização *ipsis litteris* do LDM certamente ditará as regras do contrato didático estabelecido em sala de aula entre o(a) professor(a) e os(as) estudantes; desse modo, a possibilidade da emergência de efeitos didáticos indesejáveis à aprendizagem, torna-se plausível. Ou seja, a estrita utilização das propostas didáticas do LDM, de modo acrítico e desarticulado com outras fontes de referência, poderá ser danosa para ambas as partes.

A nossa experiência (entre 2005 e 2013) na condução do processo de formação continuada de professores que ensinavam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, constatou que, em virtude das suas relações ao saber, estes profissionais não se sentiam à vontade para promover adaptações qualitativas e críticas nas propostas ofertadas pelo LDM adotado pela rede de ensino. Amparadas pelo argumento de que a formação no curso de pedagogia não lhes fornecia as ferramentas conceituais, procedimentais e didáticas para o completo domínio dos saberes matemáticos a ensinar, as professoras seguiam integralmente o roteiro proposto no LDM para garantir que os conteúdos programáticos fossem contemplados em prol das aprendizagens dos(as) estudantes.

Além da falta de confiança na própria formação matemática, as professoras participantes dos encontros formativos ofertados pela secretaria de educação, compartilhavam os desafios da atuação no 5º ano do Ensino Fundamental, dentre os quais o receio de abordar aspectos concernentes aos números racionais, suas representações e significados. Portanto, a motivação inicial para desenvolver a pesquisa no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) da Universidade Federal Rural de Pernambuco (entre 2008 e 2010), decorre do incômodo causado por algumas constatações a que chegamos ao atuarmos como professora de matemática e formadora de professores, em uma rede municipal de ensino. A atuação em ambas as funções nos fez perceber que: (i) os estudantes chegavam ao 6º ano do Ensino Fundamental com inúmeras dificuldades de compreensão associadas aos significados do número racional, às representações ou operacionalização envolvendo esse tipo de número; (ii) o livro didático era a única fonte de informação para realização do investimento didático dos(as) professores(as) que ensinavam matemática nos primeiros anos da escolaridade; (iii) o trabalho desenvolvido pelos(as) professores(as) dos anos iniciais acerca dos números racionais era regido por sequências didáticas que pouco contribuíam para a produção de conhecimento, por parte dos(as) estudantes.

As inquietações que mencionamos acerca da condução do ensino e da mediação das aprendizagens matemáticas orientadas exclusivamente por meio do LDM, bem como acerca das consequências dessa decisão didática nos fizeram eleger como problemática de pesquisa *os efeitos didáticos emergentes na utilização de uma sequência de atividades acerca do significado parte-todo do número racional.* Nesse sentido, as hipóteses iniciais acerca da utilização integral (textos, exemplos, problemas, técnicas e estratégias de resolução sugeridas), das ferramentas de ensino e de interação dos(as) estudantes com o objeto de saber (a sequência didática que extraímos do LDM), referiam-se a:

(1) O fato de seguir (do início ao final do capítulo) o roteiro estabelecido no LDM não ofereceria garantias da aprendizagem pretendida, em virtude da mera repetição de definições, técnicas e estratégias apresentada aos estudantes para a construção do significado parte-todo do número racional.

(2) O surgimento dos efeitos didáticos estaria muito mais relacionado à comunicação didática (entre a professora e os estudantes durante a vivência da SD em sala de aula), do que em razão da escassez de vínculos na relação com o objeto de saber (números racionais).

Para tentar verificar a validade das hipóteses que lançamos antecipadamente, selecionamos uma das sequências didáticas sobre o significado parte-todo do número racional no LDM do 5º ano do ensino fundamental, adotado na rede municipal de ensino onde mediávamos os encontros formativos. Posteriormente, apresentamos nossas intenções de pesquisa ao grupo de professoras participantes e, nessa ocasião, convidamos uma das professoras que se voluntariaram para aplicar a sequência didática com os(as) estudantes por ela atendidos(as) na escola.

A modelização das situações didáticas no livro de matemática acerca dos números racionais

O objetivo fundamental da didática da matemática consiste em "averiguar como funcionam as situações didáticas" (GÁLVEZ, 1996, p. 29). Portanto, as características das diferentes situações propostas, em sala de aula, pelo professor de matemática se constituem como fatores determinantes quanto à evolução dos comportamentos e à ampliação do repertório de conhecimentos dos estudantes na atividade matemática. De acordo com a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996a, p. 49), a situação didática é definida como:

> [...] Um conjunto de situações estabelecidas explicita e/ou explicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor) com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em vias de constituição.

Portanto, as situações didáticas carregam em si a intencionalidade do professor, que se mobiliza para o ensino dos objetos de saber matemático. Assim sendo, as relações didáticas serão regidas pelo estabelecimento de regras, acordos ou negociações, resultando no que Brousseau denominou como contrato didático. O referido contrato possui, dentre os elementos que influenciam o funcionamento das situações didáticas, muito mais elementos implícitos do que explícitos.

Ao realizar estudos experimentais, Brousseau (1996b; 2010) modelizou situações didáticas distintas, dentre as quais as situações de ação, formulação, validação e institucionalização. Essas situações têm finalidades diferentes, dentre as quais: o estímulo à interação e à tomada de decisões do estudante com relação ao meio didático; o fomento à comunicação entre os estudantes em atividade matemática; a promoção da argumentação para validar as informações produzidas por meio de provas e demonstrações, sendo a institucionalização uma atribuição exclusiva do professor, que é o responsável por conferir o status de saber aos conteúdos que ensina.

O estudo das situações didáticas implica a identificação das condições (variáveis didáticas) que impulsionam a construção do conhecimento necessário à solução do problema proposto por parte do(a) estudante. Em uma situação didática, as variáveis de comando, por exemplo, podem ser manipuladas pelo(a) professor ou pelo(s) autores(as) do livro didático de matemática (LDM), para promover a evolução do comportamento do(a) estudante, identificada na eficácia do conhecimento aplicado à referida situação.

Na pesquisa que realizamos, o LDM e a professora regente, juntos, correspondem ao sistema educativo, enquanto a sequência didática (constituída pelas situações de ação, formulação e validação) representa o meio didático em que os estudantes do 5º ano do ensino fundamental acionaram os conhecimentos acerca dos números racionais. Para alcançar os objetivos da pesquisa, ocupamo-nos da análise das situações didáticas que compõem a referida sequência didática (extraída do LDM para a abordagem do significado parte-todo do número racional). A investigação acerca das variáveis didáticas é muito relevante em função do impacto no *design*, no controle e no funcionamento das situações didáticas, possibilitando a identificação das marcas da aprendizagem mas, também, dos fatores que as tornam ineficientes ao ensino dos objetos de saber. A análise de uma situação didática passa por sua comparação com outras provenientes da transformação da situação original. De acordo como Gálvez (1996, p. 31):

> [...] Postula-se que entre estas situações existe uma, designada como fundamental, que é capaz de gerar todas as demais, através da distribuição de diferentes estágios de variação ou escalas de valores particulares às variáveis que a caracterizam. Uma situação é fundamental quanto ao conhecimento que interessa ser ensinado, quando é possível, por meio do jogo das variáveis, nela presentes, fazê-la coincidir com qualquer situação na qual intervenha esse conhecimento.

Diante do exposto, o ensino da matemática será mais eficiente à medida que as situações didáticas suscitarem o trabalho intelectual do(a) estudante para fazer evoluir a própria relação ao saber. E a evolução da relação epistêmica exige que ele "aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que lhes são úteis" (BROUSSEAU, 1996a, p. 38). Afinal:

> [...] Saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados; sabemos perfeitamente que fazer matemática implica resolver problemas mas, por vezes, esquece-se que resolver problemas é apenas uma parte do trabalho; encontrar boas questões é tão importante como encontrar boas soluções para elas." (*Ibid.*, p, 37-38)

Portanto, a ênfase está na interação dos(as) estudantes com as situações que lhes são apresentadas na aula de matemática, de modo que eles(as) mesmos(as) possam organizar suas atividades/ações para resolver os problemas, por meio da elaboração e da verificação da eficácia das estratégias pessoais que constroem nesse processo. Isto poderá ser fomentado em função da manipulação de variáveis presentes nas situações. Nesse sentido, Gálvez (1996, p. 33) afirma que: "a manipulação das variáveis de comando permitem modificar as situações didáticas bloqueando o uso de algumas estratégias e gerando condições para o surgimento e estabelecimento de outras (subjacentes ao conhecimento que se quer ensinar).” Ou seja, a significação, atribuída pelo(a) estudante para o conhecimento, advém da conversão desse conhecimento em ferramenta de controle dos resultados da própria atividade matemática.

Todavia, a manipulação das variáveis didáticas pelo professor (ou por autores do livro didático), também poderá ocasionar efeitos danosos à aprendizagem, em razão da perda de sentido ou do fracasso da situação na relação didática. De acordo com Brousseau (1996b), as variáveis didáticas ditarão diferentes comportamentos do estudante, assim como têm potencial para influenciar as estratégias por ele mobilizadas. Nesse sentido, investigações acerca da origem e análises acerca dos efeitos didáticos pressupõem o estudo das variáveis didáticas. Para Brousseau (*Ibid.*, p. 41), a identificação desse tipo de fenômeno “significa construir um modelo acerca dos protagonistas em presença, das relações e dos constrangimentos que os ligam uns aos outros, e mostrar que o jogo desses constrangimentos produz sem dúvida efeitos e o desenvolvimento observados.”

Os efeitos indesejáveis à consolidação das aprendizagens estão associados ao contrato didático estabelecido entre o professor e os estudantes em relação ao saber (ALMEIDA; LIMA, 2011; SANTOS, 2010). Contudo, a ocorrência desse tipo de efeito é episódica e não significa o fracasso das ações educativas. Pais (2002, p.89) ratifica esse argumento ao afirmar que “não há garantia de que, tendo ocorrido tal situação, o aluno esteja impossibilitado de aprender, pois a aprendizagem é um fenômeno não redutível a uma única dimensão.” Na Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1996) descreve alguns efeitos que podem emergir na vigência do contrato didático, a saber:

a) Efeito Topázio – neste caso, o professor tenta evitar o fracasso da situação didática tomando para si um papel que é do estudante, que consiste em encontrar a resposta para o problema que lhe foi proposto. As respostas a serem apresentadas pelo estudante são determinadas previamente pelo professor, assim como as questões a que estas respostas devem ser dadas. Para evocar o surgimento da resposta correta, o professor lançará mão do seu repertório de dicas, sugestões e questionamentos mais fáceis para alcançar o significado máximo para o máximo de estudantes (BROUSSEAU, 1996, p. 42).

b) Efeito Jourdain, também denominado como mal entendido fundamental, é uma forma de efeito Topázio, pois é uma tentativa do professor de evitar o debate acerca do conhecimento (com o estudante) e a constatação do fracasso por meio do reconhecimento de indícios do conhecimento nas respostas e comportamentos do estudante, mesmo tendo consciência da inconsistência e fragilidade das mesmas (uma vez que estas respostas são motivadas por causas e significações banais) (*Ibid.*, p.43).

c) Deslize metacognitivo – ocorre quando a situação de ensino fracassa, e o professor substitui o estudo do verdadeiro conhecimento matemático por suas explicações e meios heurísticos. "O professor então substitui o discurso cientifico por um discurso fundamentalmente ligado ao senso comum. Promove, assim, um deslize, uma ruptura e um deslocamento do objeto de saber." (ALMEIDA; LIMA, 2011). "Nesse processo quanto mais comentários e convenções produz a atividade de ensino, menos os estudantes conseguem controlar as situações que lhes são propostas." (BROUSSEAU, 1996, p.43).

Além dos efeitos supracitados, outro, bastante mencionado na literatura científica, foi identificado e descrito nas pesquisas de Stela Baruk (IREM – Grenoble in Henry, 2006), como sendo o efeito Idade do Capitão. Em resposta ao problema irresolúvel ("Em um barco existem 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão"?), 78% dos 97 estudantes franceses calcularam a idade do capitão operando com os dados do enunciado.

Os pressupostos iniciais colocam em xeque a lógica da aprendizagem pautada apenas na reprodução dos modelos estabelecidos por sistemas educativos estruturados com base na fragmentação dos objetos de ensino relacionados nos organizadores curriculares; na delimitação do tempo didático e em sequências didática que pouco contribuem para a significação do conhecimento do(a) estudante.

No que se refere aos números racionais, a construção do significado parte-todo tem início no 1º ano do ensino fundamental; nos anos subsequentes, as ideias são ampliadas para serem consolidadas ao final do primeiro ciclo de aprendizagens, portanto no 5º ano, conforme orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 1996) e da Base Nacional Comum Curricular (MEC, 2017). Ao analisar 10 coleções de livros didáticos de matemática, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2007), para a utilização no 5º ano do Ensino Fundamental, Santos (2010) constatou que, em 90% dos casos, as situações didáticas que serviam como ponto de partida para abordagens relacionadas ao número racional privilegiavam unicamente o significado parte-todo.

Segundo Santos (2010), o significado parte-todo do número racional é apresentado, no Livro Didático de Matemática (LDM), por meio da notação fracionária

($\boxed{\frac{a}{b}, \text{sendo } a \text{ o numerador e } b \text{ o denominador}, com\ b\ \neq 0}$) correspondente à porção tomada do inteiro (contínuo ou discreto), representado a priori por uma região poligonal (quadrados, retângulos, hexágonos, etc.) ou por coleções de objetos. Por conseguinte, os autores definiam a fração como resultante da divisão do inteiro em partes “iguais”, para que os estudantes atendam aos comandos das atividades.

Nesse caso, a ideia de fração como uma relação entre a(s) parte(s) tomada e o total de partes em que o inteiro (majoritariamente, de natureza contínua) foi dividido, era exaustivamente utilizada como contexto das sequências didáticas (SD) apresentadas nas obras, sem que fosse identificado qualquer elemento articulador do significado parte-todo para com os demais significados (quociente, porcentagem, medida, operador multiplicativo, razão, etc.) do número racional. Essa opção dos autores, ao trabalharem na composição das propostas pedagógicas acerca dos números racionais, tem como finalidade conferir autonomia ao(à) professor(a) para que promova outras situações didáticas que favoreçam a conexão entre os capítulos do LD (fração, frações centesimais, números decimais e porcentagem, por exemplo). Entretanto, não há garantias de que este tipo de decisão didática será tomada por todos(as) os(as) professores(as), pois, conforme mencionamos anteriormente, as instabilidades da relação ao saber (SANTOS, 2017) repercutirão nessa decisão.

Por outro lado, faz-se necessário que o(a) professor(a) tenha clareza de que os vínculos entre os capítulos poderão favorecer o desenvolvimento de outras habilidades matemáticas como, por exemplo, a realização de tratamentos e conversões entre os diferentes registros de representação do número racional (figural, fracionário, decimal, percentual, gráfica ou algébrica). Para tanto, é condição essencial que este profissional receba as informações e as indicações sobre as possíveis articulações entre os conteúdos, seja por meio dos manuais de orientação pedagógica contidos no LDM, ou nos momentos formativos (inicial, continuado e/ou em serviço).

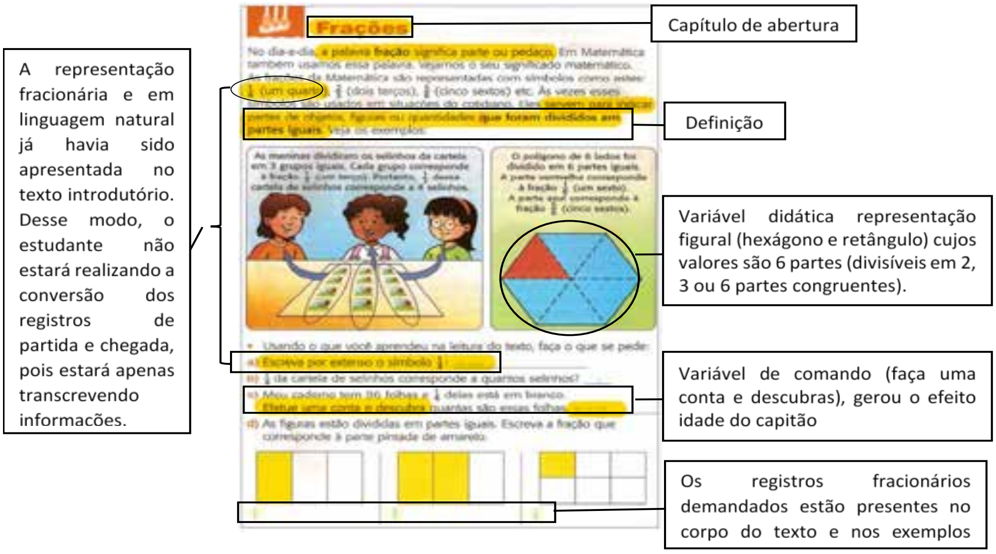
Afinal, as possíveis lacunas epistemológicas, técnicas e didáticas da formação profissional dos(as) professores(as) se refletem na seleção e na transposição didática dos conteúdos a ensinar, bem como na própria organização didática e matemática em sala de aula. Tais aspectos poderão comprometer a mediação dos processos que culminam no estabelecimento de relações entre os significados do número racional pelo estudante.

Ainda de acordo com a autora supracitada, a partir da definição de fração, os autores do LDM (de onde a sequência didática foi extraída para ser vivenciada com os estudantes), recorreram não apenas à manipulação das variáveis didáticas mas, também, à utilização de estratégias e subterfúgios (indicação de estratégias que permitiam a resolução das atividades e problemas propostos, por meio de dicas, esquemas e outros elementos presentes nos textos, enunciados ou ilustrações suporte) que maximizaram o percentual de acertos em algumas situações, por indução à resposta esperada, mesmo sem que as crianças tivessem a devida compreensão do comando. Na Figura 1, apresentamos um exemplo desse tipo de situação.

Na ilustração (Figura 1), uma cartela contendo 12 selos foi subdividida entre três meninas, cabendo a cada uma delas 4 unidades (por meio do uso de setas, os autores indicam a quantidade de selos que cada criança receberá). Neste exemplo, percebemos a estratégia persuasiva dos autores quando propõem o fracionamento do inteiro discreto (12 unidades) em três grupos iguais, circulando cada grupo. Então, no item *b* da atividade eles questionam: ¼ da cartela corresponde a quantos selos? O apelo visual e indutivo da estratégia apresentada na imagem suporte, para Santos (2017), funciona como um subterfúgio que mascara a dificuldade de resolução do item, direciona a ação do(a) estudante e reduz o esforço cognitivo quanto à produção de estratégias pessoais que conduzam à solução do problema.

Nesse sentido, Santos (2017) afirma, ainda, que esta é uma característica bastante comum entre as atividades que constituem os dispositivos de ensino analisados em sua pesquisa; assim como alerta que tais mecanismos podem levar os(as) professores(as) e os(as) estudantes à falsa sensação de que, de fato, houve aprendizagem acerca dos números racionais em função do alto índice de respostas corretas resultantes da utilização mecânica das ferramentas ofertadas no LDM.

Figura 1 - Texto introdutório e atividades de partida (Situação Didática 2/1ª sessão)



Fonte: Santos e Souza (2020) (Adaptação de Imenes *et al*., 2006, p. 130)[24].

Essa problemática é pertinente pois, de acordo com Brousseau (1996), as variáveis didáticas ditarão diferentes comportamentos do(a) estudante diante do potencial para influenciar as estratégias por ele(a) mobilizadas. Nesse sentido, as investigações acerca da origem e as análises dos efeitos didáticos pressupõem o estudo das variáveis didáticas. Para Brousseau (*Ibid.*, p. 41) a identificação desse tipo de fenômeno "significa construir um modelo acerca dos protagonistas em presença, das relações e dos constrangimentos que os ligam uns aos outros, e mostrar que o jogo desses constrangimentos produz sem dúvida efeitos e o desenvolvimento observados." Os efeitos indesejáveis à consolidação das aprendizagens estão associados ao contrato didático estabelecido entre o professor e os estudante em relação ao saber (SANTOS, 2010; ALMEIDA; LIMA, 2011).

Por exemplo, em sala de aula, geralmente, os professores criam altas expectativas em relação ao desempenho de estudantes com potencial para alcançá-las. Os estudantes eleitos em meio aos demais recebem mais estímulos e condições de aprendizagem diferenciadas em decorrência dos investimentos didáticos do professor. Esse efeito didático, denominado como Pigmaleão, (investigado pelos psicólogos Robert Rosenthal e Lenor Jacobson, 1965) não é considerado como per-

[24] A SD foi extraída de IMENES, L. M.; LELLIS, M.; MILANI, C., **Coleção Matemática Paratodos** – 5º Ano. São Paulo: Editora Scipione, 2006. A mesma sequência foi utilizada em outras coleções desses autores, sem a promoção de ajustes, possibilitando o surgimento dos efeitos discutidos nesse texto.

verso (ALMEIDA; LIMA, *Ibid.*); entretanto, esse tipo de postura do professor poderá ocasionar frustração e desinteresse, com relação aos objetos de ensino, por parte dos(as) estudantes que não se encaixam no hall das expectativas do(a) professor(a).

As análises de algumas situações da SD analisada na pesquisa de Santos (2010), apontam que o efeito didático mencionado emergiu em vários momentos da resolução de problemas envolvendo o cálculo de frações do inteiro de natureza discreta. Para além dos efeitos de contrato didático, o trabalho com os números racionais a partir do significado parte-todo requer a realização de tratamentos e conversões entre os registros de representação. Nesse sentido, as crianças dos anos iniciais do ensino fundamental podem sentir muita dificuldade quanto à percepção, interpretação, utilização e passagem de um registro de representação a outro, em virtude dos fenômenos das transformações desses registros. De acordo com as contribuições de Duval (2005, p. 14), a originalidade da atividade matemática reside na mobilização de, ao menos, dois registros de representação. Isso significa que o estudante demonstra sua aprendizagem quando transita entre um registro e outro, superando os fenômenos da não-congruência ou da heterogeneidade do sentido da conversão no que tange ao objeto a ser representado. Nesse sentido, definimos e exemplificamos na Tabela 1 as principais atividades cognitivas

Tabela 1 - Atividades cognitivas fundamentais constitutivas do registro de representação semiótica

Atividade	***Descrição***	***Exemplo***
Representação identificável	Enunciado em uma frase (língua materna), o desenho de uma figura geométrica, construção de esquema, escrita de uma fórmula, etc.	*a.* *Três quartos* *b.* $F(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$
Tratamento	É a transformação de uma representação no interior do mesmo registro em que foi formada. Nos exemplos a e b, tanto o registro de partida como o de chegada é numérico fracionário e o tratamento realizada no item *b*, por exemplo, foi a simplificação das frações.	*a.* $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$ *b.* $\frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
Conversão	É a transformação de um registro de representação em outro conservando o mesmo objeto denotados. No item *a* sentido da conversão (F →NF) é congruente, pois não há um registro intermediário para que a transformação seja efetivada. Enquanto a conversão no item *b* (ND→P) é não-congruente.	*a.*  $\rightarrow \frac{3}{4}$ *b.* $0{,}75 \rightarrow \frac{75}{100} \rightarrow 75\%$

Legenda: *F – registro figural, NF – numérico fracionário, ND – numérico decimal, P - percentual*

Fonte: Souza e Santos (2020)

Portanto, a construção do significado parte-todo do número racional envolve uma série de aspectos epistemológicos, didáticos (o contrato, a transposição didática, a manipulação de variáveis) e cognitivos, que podem fazer emergir efeitos didáticos indesejáveis à aprendizagem. A seguir, apresentamos o percurso metodológico norteador da pesquisa de Santos (2010), com a finalidade de esclarecer os mecanismos adotados para possibilitar as análises das situações e atividades constitutivas da sequência didática ofertada no LDM e, dos efeitos decorrentes da sua utilização em duas situações didáticas distintas, uma de aprendizagem e outra de avaliação. Entretanto, neste capítulo, apresentaremos recortes das análises a priori e a posteriori que foram produzidas na dissertação.

Percurso metodológico da pesquisa

A pesquisa realizada no âmbito do PPGEC/UFRPE pode ser caracterizada como sendo um estudo de caso sobre os efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades acerca do significado parte-todo do número racional. O cenário dessa investigação foi uma escola pública municipal da Região Metropolitana do Recife. Nessa escola, uma professora do 5º ano do Ensino Fundamental aplicou a sequência didática (extraída do livro didático de matemática adotado na rede municipal de ensino) com os seus 46 estudantes.

A referida sequência didática é composta por 20 atividades e foi fragmentada em três sessões distintas (Tabela 2), de aproximadamente 2 horas e 30 minutos de duração, para favorecer o processo de aplicação. As sessões de atividades foram analisadas com base na modelização proposta por Brousseau (1996) e o conjunto de situações didáticas foi classificado (Tabela 1) e denominado por Souza (2010) como situação de aprendizagem.

Tabela 2 - Situação de aprendizagem – organização das sessões

Sessão/ Duração	*Capítulo*	*Atividade(s)*	*Página(s)*	*Tipo de situação didática*
1ª / 2h30min	Dividindo coisas inteiras	[1] , [2] e [3]	130	*Situação de ação e formulação*
	Frações	[4]	131	*Situação de formulação e validação*
2ª / 2h00	Ação: Explorando frações de um círculo	[1] a [7]	132 - 133	*Situação de ação, formulação e validação*
3ª /2h00	*Reconhecendo frações*	*[1] a [8]*	*134 - 135*	*Situação de formulação e validação*

Fonte: Santos (2010)

Cada sessão seguiu a lógica e as orientações do manual do professor, contidas no LDM, de acordo com as etapas descritas a seguir:

1ª Etapa: Seleção e análise a priori das atividades constituintes da sequência didática acerca do significado parte-todo do número racional.

2ª Etapa: Aplicação da sequência didática com os estudantes organizados em grupos (10 equipes com 4 componentes e 2 equipes com 3 componentes cada uma). Esses momentos foram registrados em vídeo, para que fosse possível analisar as interações dialógicas entre os(as) estudantes, e entre eles(as) e a professora da turma durante a vivência das diferentes situações didáticas, objetivando a identificação dos efeitos didáticos. Nas aulas subsequentes a cada sessão, a professora fez a correção coletiva das atividades, realizando intervenções didáticas para favorecer a aprendizagem (situação de institucionalização).

3ª Etapa: Análise a posteriori das situações videografadas e dos protocolos dos estudantes, para validar ou refutar as hipóteses iniciais.

4ª Etapa: Elaboração de atividades e problemas para compor o instrumento avaliativo, utilizando como referência as variáveis didáticas da sequência didática original. A estruturação dos 10 itens teve como critérios de elaboração o alto índice de eficácia (acima de 80%) e de fracasso (abaixo de 50%) dos estudantes ao responderem as atividades e problemas propostos na situação de aprendizagem.

5ª Etapa: Aplicação do instrumento avaliativo, com a finalidade de comparar os desempenhos dos estudantes em função das atividades matemáticas realizadas coletivamente e individualmente, bem como para verificar se os obstáculos à aprendizagem foram superados. Nesta etapa, apenas 37 dos 46 estudantes participaram da avaliação.

6ª Etapa: Realização de entrevistas de explicitação com alguns estudantes participantes da pesquisa, a fim de obter informações acerca das estratégias adotadas e dos erros apresentados no processo de resolução das atividades e problemas.

A conclusão das etapas supracitadas culminou em um amplo espectro de resultados, que torna inviável a condensação em um único artigo. Portanto, apresentaremos a seguir um recorte das análises das situações de aprendizagem e avaliação, contidas na dissertação de Santos (2010), a partir de atividades constitutivas da sequência didática e do instrumento avaliativo.

Discussão e resultados

A conclusão do processo de aplicação da SD (situação de aprendizagem) se deu na correção coletiva das atividades. Ao final de cada sessão de atividades, a professora revisou os conteúdos (relação parte-todo, os tratamentos e as conversões entre os registros de representação) relacionados ao número racional, institucionalizando os aspectos concernentes ao objeto de saber a ensinar. As situações de institucionalização foram promovidas não apenas com a finalidade de encerrar as situações de aprendizagem da sequência didática mas, também, com o propósito de dar início ao processo de verificação da aprendizagem das crianças.

Os estudantes vivenciaram (individualmente), o momento denominado por Santos (*Ibid.)* como situação de avaliação, com base em um instrumento que foi organizado com situações similares às que foram exploradas na situação de aprendizagem em função da manutenção das variáveis didáticas manipuladas pelos autores do LDM. O propósito desta ação consistia na criação de condições de comparação dos desempenhos das crianças nas duas situações, assim como a emergência dos efeitos didáticos de contrato didático e dos efeitos resultantes das atividades cognitivas que eram necessárias à realização das tarefas, como, por exemplo, do tipo de transformação (tratamento ou conversão) nos registros de representação; ou, ainda, daqueles provenientes da influência das variáveis didáticas manipuladas pelos autores na estruturação das tarefas, os quais relacionamos na Tabela 3.

Em ambas as situações cumpre destacar que o efeito Pigmaleão foi o que mais apareceu, com o estabelecimento das expectativas de desempenho da professora regente para com determinadas crianças. Essas crianças receberam mais estímulos didáticos e orientações mais precisas, nos momentos em que estavam em interação com a SD e com o instrumento avaliativo. As observações dos diários de campo e os registros videográficos demonstram que, na composição dos grupos de estudantes (na situação de aprendizagem), em vez de formar grupos mistos, a professora definiu como critérios: duplas com alto potencial de sucesso na realização das atividades; duplas com menor potencial para o êxito; duplas com alto potencial para o fracasso com relação às respostas esperadas. Desse modo, ela rompeu com a orientação dos autores do LDM, segundo o qual as crianças deveriam trabalhar individualmente com a leitura de cada situação em voz alta pela docente (cumpre ressaltar que esta orientação foi acatada na situação de avaliação).

Nesse sentido, as análises produzidas na dissertação possuem um caráter qualitativo em momentos distintos. No primeiro, denominado como análise a priori em referência , investimos na antecipação dos efeitos que poderiam emergir de cada situação, considerando as variáveis didáticas e os seus respectivos valores, que foram manipuladas pelos autores do livro didático na elaboração da sequência didática, antes que colocássemos à prova com os estudantes. Posteriormente, as hipóteses iniciais e as previsões acerca dos efeitos didáticos, os comportamentos observados na interação dos(as) estudantes com os dispositivos de ensino e a professora foram correlacionados para analisar os efeitos decorrentes da manipulação das variáveis (pelos autores) e do contrato didático. A seguir, apresentamos exemplos dos efeitos observados.

Tabela 3 – Efeitos didáticos emergentes nas situações de aprendizagem e avaliação

Capítulo	***Atividade***		***Atividade/ Transformação***	***Sentido da conversão***	***Efeito didático identificado***	
					Situação de aprendizagem	***Situação de avaliação***
Dividindo coisas inteiras	1	*a, b*	Tratamento	F → F	Topázio	*Divisão em partes desproporcionais*
		c	Conversão	F → F	Topázio	*Transcrição de parte do enunciado*
	2	*a, b, c*	Conversão	F → LN	Topázio	*Transcrição de parte do enunciado*
Frações	4	*a*	Conversão	NF →LN	Topázio	*O jogo de cores da figura suporte induziu à resposta correta*
		b	Tratamento	NF → N	Jourdain Idade do capitão	*Idade do capitão*
		c	Fração de quantidade discreta	NF → N	*Idade do capitão*	
		d	Conversão	F → NF	*Equívoco na relação entre as porções pintadas e o total de partes do inteiro.*	
Ação: Explorando frações de um círculo	5	*a, b, c, d*	Comparação	-	Deslize metacognitivo	*Considerar o valor absoluto do denominador*
	6	*a, b, c, d*	Equivalência	-	Jourdain	*Multiplicar apenas o numerador por 2, 3, 4,...*
Reconhecendo frações	1	*a, b, c, d*	Conversão	(F → F) → LN	Topázio	*Inversão dos termos da fração*
	3	*a, b c*	Conversão	NF → F	Jourdain /Topázio	*Sentido da conversão*
	4	-	Conversão	F → NF	*Distorção da percepção da forma geométrica ou representam a fração do inteiro tendo o numerador como a parte não colorida da figura e o denominador como sendo o total de partes coloridas.*	
	7	*a, b*	Tratamento	-	Topázio	*O jogo de cores da figura suporte induziu à resposta correta*
		c, d	Conversão	F → NF	Topázio	
		e	Fração de quantidade discreta	NF → N	Jourdain Idade do capitão	*Idade do capitão Sentido da conversão*
	8	a. b, c	Conversão	F → NF	*Não reconhece a representação figural e a fracionária como sendo do mesmo número.*	
Legenda: *F – registro figural, NF – numérico fracionário, LN – linguagem natural*						

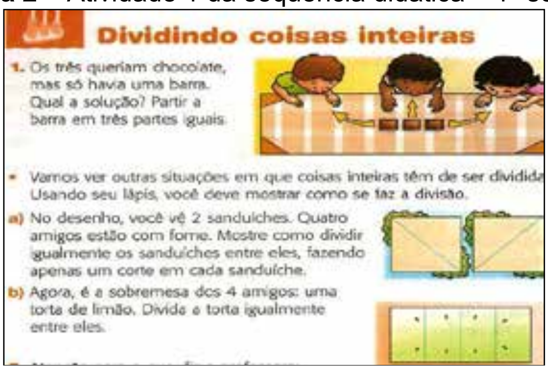
Fonte: Souza (2020), com base nos resultados apresentados em Santos (2010)

1ª Sessão: Dividindo coisas inteiras (Atividades 1, 2 e 3)

Nesta atividade, os autores utilizam um texto introdutório associado a uma ilustração, em que uma única barra de chocolate foi "igualmente" dividida entre três amigos, com o objetivo de introduzir o significado parte/todo do número racional a partir do esgotamento do inteiro contínuo (barra de chocolate, sanduíches e torta). Portanto, a atividade foi organizada com base no contexto da semirrealidade, para que o estudante perceba a existência de uma totalidade divisível em partes "iguais", por meio da manipulação da variável: representação do inteiro por meio de formas planas (quadrado e retângulo) com o valor atribuído às frações unitárias ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$), conforme a Figura 2.

A priori, a familiaridade das crianças com as formas e as referidas frações favoreceria o estabelecimento da relação entre as partes resultantes do corte e o total de partes do inteiro. Tanto no item *a* como no item *b*, havia a expectativa pela manutenção da congruência entre as áreas resultantes da divisão independentemente do corte (diagonal, vertical ou horizontal) dos quadrados (sanduíches) e do retângulo (torta). A análise dos protocolos (tanto na situação de aprendizagem como na de avaliação) revelou que as crianças tendem a dividir os quadriláteros unindo os pontos médios dos segmentos de reta correspondentes aos lados opostos das figuras. Entretanto, cumpre ressaltar que, embora os estudantes tenham sido bem sucedidos na tarefa (inclusive apresentando mais de uma solução para o problema), as respostas esperadas pelos autores do LDM (Figura 2), só aparecem por intervenção da professora durante o processo de aplicação da sequência didática (gesticulando, a professora acabou indicando para algumas crianças o sentido do corte que elas deveriam fazer para obter as frações dos inteiros).

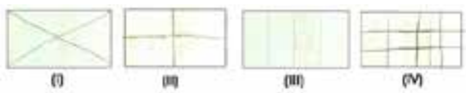
Figura 2 – Atividade 1 da sequência didática – 1ª sessão



Fonte : Imenes et al (2007, p.130)

A influência do código didático utilizado modificou a estratégia de ação dos estudantes (que discutiam a possibilidade de apresentar mais de uma resposta), evidenciada no ato de apagar do protocolo as outras respostas encontradas ou o registro anterior (conforme é possível observar na Tabela 4). Entre os erros mais recorrentes, destacam-se a divisão desproporcional entre as porções do inteiro e a utilização de mais de um corte na divisão dos sanduíches (no item *a*).

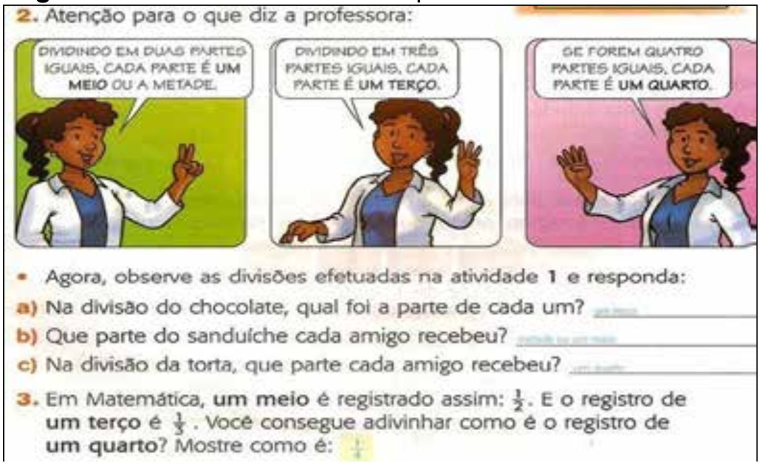
Tabela 4 – Soluções apresentadas na Atividade 1

Item *a*	Item *b*
	
Figura 32: Extratos dos protocolos n.º 08 e 24	Figura 34: Extratos dos protocolos n.º 36, 04, 08 e 22

Fonte: Santos (2010, p. 164-165)

A atividade 2 da SD (Figura 4) está associada à Atividade 1 e demanda dos(as) estudantes o registro, em linguagem natural, das frações resultantes do seccionamento do inteiro contínuo. Entretanto, o monólogo presente e a representação dos dedos da personagem já sugestionaram a resposta dos estudantes (índice médio de acerto foi de 97%) para os itens a, b e c. Além disso, a variável didática de comando presente nos três itens: “*qual a parte/que parte?*” induziu ao erro 3% dos estudantes, que, em vez de nominarem as frações demandadas, escreveram como resposta os termos: *parte*, *fatia* ou *pedaço*. Já na atividade 3, os autores propõem a padronização da notação das frações unitárias, sendo que a variável didática, a sequenciação dos registros fracionários um meio e um terço (modelizadas no enunciado da atividade 2), induz à resposta esperada (um quarto) em 94% dos casos (34 dos 36 estudantes).

Figura 3 – Atividades 2 e 3 da sequência didática – 1ª sessão



Fonte: Imenes et al (2007, p.130)

A variável de comando “*mostre como é...*” repercutiu no erro de 2 estudantes, que, em vez de apresentarem a resposta esperada em linguagem natural, realizaram o registro figural correspondente à fração solicitada, como podemos observar na Figura 4.

Figura 4 – Respostas apresentadas no item *c*/Atividade 3 – 1ª sessão

Fonte: Santos (2010, p. 166)

A emergência dos efeitos didáticos Jourdain e Topázio, na primeira sessão de aplicação da sequência didática, resultou da comunicação didática entre a professora regente e os estudantes. Na interação entre eles, percebemos o afã da professora, que, para não testemunhar o fracasso das situações, acaba induzindo a ação dos alunos por meio da utilização de códigos didáticos e da tentativa de tornar cada vez mais simples o desafio de interpretação das variáveis de comando, que haviam sido definidas pelos autores do LDM. No fragmento dos diálogos relativos à 1ª sessão, que transcrevemos a seguir, exemplificamos esse tipo de ocorrência.

Professora (P) [...] Atividade n.º 3: Em matemática, um meio é registrado assim: [Aponta a fração na ficha de atividades.] Vejam: o número um é o numerador. E, o número que fica embaixo do tracinho se chama...

Aluna (C): Dois!

(P)) [Expressão de insatisfação com a resposta.] ((Os alunos sorriem mas, ela continua:)) Quem lembra? O número de cima é o numerador. E, o de baixo é o ... **denoooo**... [Fala enfaticamente o préfixo da palavra.]

(Alunos.) Respondem: **dor!!!!**

(P) Isso mesmo! Numerador é o número que fica em cima e denominador é o que fica em baixo do tracinho. [Continua a leitura] E, o registro de um terço é assim. Estão vendo como é que faz um terço? O número 1 é o numerador e o 3 é o denominador. Você consegue adivinhar como é o registro de um quarto? Mostre como é!

Fonte: Santos (2010, p.167)

Na situação de avaliação, a professora regente não fez as mesmas intervenções relatadas nas situações de aprendizagem, mas usou outro código didático para que as crianças refletissem sobre as estratégias e respostas apresentadas na atividade avaliativa, questionando-as: "*tem certeza que é assim?, você já tentou de outra forma?, já pensou que poderia ser outra resposta*?". Essa postura docente impactou negativamente a apresentação das respostas dos(as) estudantes, elevando o percentual de insucesso na realização das atividades, uma vez que apagaram a solução inicial e efetuaram outros registros em função do tipo de questionamento mencionado.

2ª Sessão: Frações (Atividade 4)

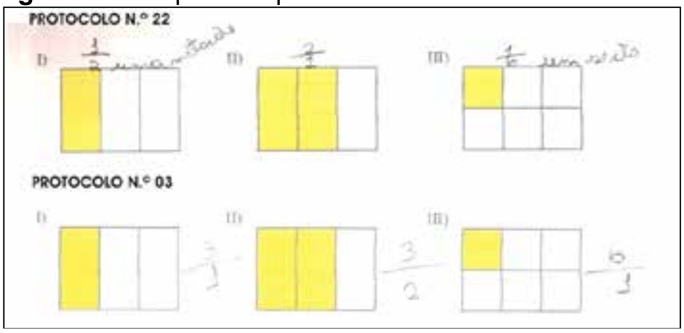
A variável de comando do item *a*, na atividade 4 (apresentada na Figura 1), solicitava o registro em linguagem simbólica fracionária da fração um quarto. O percentual de sucesso, nesse item, alcançou 100% (na situação de aprendizagem). Uma vez que os registros numérico e em linguagem natural já estavam expressos nos enunciados das atividades 1 e 2, há indícios de que os estudantes transcreveram o registro (na entrevista de explicitação muitos registraram a fração invertendo os termos).

No item *b*, as crianças deveriam determinar uma fração ¼ de uma quantidade discreta (12 selos). As que tiveram sucesso nessa atividade foram influenciadas pela estratégia de dividir o total em 4 grupos de 3, circulando a ilustração suporte da atividade, aspecto que demonstra a influência da variável didática na realização da tarefa, pelo estudante. Entretanto, na situação de avaliação, a efetividade no item *a* cai para 84% (o erro mais recorrente foi o registro da fração 4/3 (4 ovos – numerador e 3 bolos – denominador); enquanto no item *b*, todos apresentaram a fração ¾ (três bolos – numerador e 4 ovos – denominador). Ao que tudo indica, os erros ocorreram por indução da disposição dos elementos da ilustração.

No item *c* (*Na dispensa de Maria há 96 ovos e ¼ deles será utilizado para fazer bolos. Efetue a conta e descubra quantos ovos serão utilizados na preparação dos bolos.*), a solicitação da variável de comando "**efetue uma conta"**, levou as crianças a operarem (somar, subtrair, multiplicar) com os dados do enunciado perdendo de vista a ideia que foi exaustivamente explorada nas situações de aprendizagem (divisão do inteiro em partes iguais). Esse efeito didático emergente é denominado como Idade do Capitão. Na sequência didática ofertada no livro de matemática, as atividades que sugerem a determinação de frações de quantidades discretas são pouco frequentes, o que dificulta a familiaridade dos estudantes com esse tipo de problema.

Tal aspecto é evidente, uma vez que apenas duas duplas (4%) apresentaram a solução esperada (96 : 4 = 12) na situação de aprendizagem, enquanto na situação de avaliação o percentual de respostas corretas foi de 13% (5 dos 37 estudantes). Muito embora 33% dos estudantes (12 das 37 crianças que participaram da avaliação) tenham apresentado a divisão em resposta ao item (96 : 3 = 32; 96 : 2 = 48; 96 : 12 = 8 ou 12 : 3 = 4), elas satisfazem à demanda por considerarem como divisor alguns elementos referenciais da figura suporte (2 – quantidade de crianças, 12 – dúzia de ovos na embalagem, 3 – quantidade de bolos, etc.). No item *d* da atividade 4, a variável de comando exige o registro numérico fracionário de porções de um retângulo; assim, o sentido da conversão (a atividade cognitiva) tem a figura como registro de partida e a notação fracionária como registro de chegada (atividade exaustivamente trabalhada nas aulas de matemática desde os primeiros anos do ensino fundamental). Todavia, o percentual de êxito nos momentos de aprendizagem e avaliação correspondem a 37% e 55%, respectivamente. O êxito dos estudantes na realização da tarefa fornece indícios da aprendizagem ao realizarem os registros simultâneos das frações em linguagem natural e fracionário (como exemplificado no item *iii* do protocolo 22 da Figura 5), pois, de acordo com Duval (2005, p. 14), "a originalidade da atividade matemática está na mobilização de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação.” Neste caso, os erros mais frequentes consistem na inversão dos termos da fração (denominador/numerador) e na relação entre as partes pintadas (numerador) e não pintadas (denominador), conforme os extratos dos protocolos na Figura 5.

Figura 5 – Respostas apresentadas no item *d* /Atividade 4



Fonte: Santos (2010, p. 235)

3ª Sessão: Reconhecendo frações (Atividades 5 e 6)

O exemplo acima sugere que 46% das crianças participantes da pesquisa estavam familiarizadas com frações do inteiro de natureza contínua representado por meio de uma região retangular, na posição prototípica. Contudo, os autores diversificam esta variável didática com a representação do inteiro contínuo como sendo uma região circular ou por meio de outros polígonos (pentágono, hexágono e octógono), dispostos ou divididos de modo pouco convencional.

Nesse caso, o efeito didático advém da distorção quanto à percepção da figura; ou seja, decorre da variável manipulada e se reflete nas respostas, tal como ocorreu no item *c* da atividade 6 (tanto na situação de aprendizagem como na situação de avaliação), em que 22% dos estudantes interpretaram a forma plana como sendo espacial. Desse modo, a conversão entre os registros fracassou diante da tentativa de planificação, conforme os extratos apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 - Soluções apresentadas na Atividade 1

Sentido da conversão NF → F	Tentativa de conversão em resposta ao item *c*
	
Figura 25: Atividade 7 da 3ª sessão da SD (Santos, 2010, p. 150)	Figura 69: Respostas - situação de avaliação (Santos, 2010, p. 244)

Fonte: Santos (2010, p. 235)

Os resultados sugerem que as crianças têm mais dificuldade para realizar a conversão quando o registro de partida é fracionário e o de chegada é figural, apesar do constante treinamento no sentido contrário (na situação de avaliação, por exemplo, atividades que demandam esse tipo de conversão correspondem a 30% das respostas equivocadas). O percentual de êxito na realização das atividades da 2ª e da 3ª sessão (explorando frações do círculo e reconhecendo frações), mais precisamente no que tange às atividades 6 e 7, foi satisfatório, oscilando entre 65% e 78%, quando a conversão demandada tem o registro de partida figural e o de chegada numérico fracionário. Porém, no que tange à comparação e à construção de classes de equivalência, tendo como base as frações do círculo, o êxito advém da interpretação dos códigos didáticos da professora (gesticula com a mão direita para indicar > maior que e com a mão esquerda para indicar < menor que; ou fornece dicas e faz esquemas no quadro para orientar a resposta adequada).

Considerações Finais

A passagem do conjunto dos números naturais aos racionais exige esforço conceitual e a ruptura com o que as crianças já sabem até esse momento. O ensino e a aprendizagem do número racional, suas representações e significados ainda é um problema na Educação Básica. Nesse cenário, o livro didático de matemática é, em muitos casos, a única ferramenta do professor para a fomentar a construção de significado, pelo estudante. Entretanto, as investigações acerca da sua utilização desse recurso ainda são escassas. Por esta razão, Santos (2010) pesquisou sobre os efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades acerca do significado parte-todo do número racional. As análises realizadas com base em elementos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996) e dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2005), nos permitem confirmar as hipóteses iniciais e, por conseguinte, concluir que:

a) O cumprimento do roteiro (sequência de atividades) estabelecido no LDM não oferece garantias da efetiva aprendizagem do significado parte-todo do número racional, uma vez que os estudantes repetem de modo autômato as definições, as técnicas e estratégias sugeridas nos suportes (imagens, jogo de cores, etc.) das atividades ou problemas.
b) Os efeitos didáticos Topázio, Jourdain e Idade do Capitão, foram os mais recorrentes nas situações de aprendizagem. A emergência desses efeitos está muito mais relacionada à comunicação didática (estabelecida entre a professora e os estudantes em atividade matemática), do que à escassez de vínculos na relação com o objeto de saber (número racional/significado parte-todo); ou ainda, em função da influência das variáveis didáticas manipuladas pelos autores do LDM. Em contrapartida os efeitos que surgiram na situação de avaliação, por sua vez, podem ser associados diretamente à manipulação das variáveis didáticas na construção dos enunciados, suportes e/ou comandos do problema/atividade.
c) Entre as transformações dos registros de representação (figural, fracionário, linguagem natural), as conversões são mais privilegiadas que os tratamentos (sendo que o exercício mais recorrente tem o registro de partida figural e o de chegada numérico fracionário). Essa constatação denota o desequilíbrio na composição da sequência didática, que parece não favorecer a aprendizagem, uma vez que os efeitos didáticos identificados na situação de aprendizagem voltam a emergir na situação de avaliação.

Em síntese, ressaltamos a necessidade de desenvolvemos outros estudos acerca dos temas que abordamos nesse capítulo. Todavia, os resultados da nossa investigação se revelaram extremamente úteis, tanto para o professor que ensina matemática como para os formadores de professores, ao evidenciar os problemas decorrentes da comunicação didática e da manipulação de variáveis constitutivas dos problemas/atividades propostas em situações de aprendizagem ou avaliativas envolvendo o significado parte-todo do número racional.

Referências

ALMEIDA, F. E. L.; LIMA, A. P. A. B. **Os efeitos de contrato didático na sala de aula de matemática**. XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA-IACME, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: file:///C:/Users/pc/Downloads/contrato%20didatico%20e%20pesquisa%20(1).pdf. Acesso em: maio de 2020.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. *In:* **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes Pedagógicos. Brun, J. (org.). Lisboa: Instituto Piaget, 1996a, p. 35 – 85.

BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógicas. PARRA, Cecília. (Org.). Porto Alegre: Editora Artmed, 1996b. p.65 – 66.

CÂMARA DOS SANTOS, M. **Le rapport au savoir de l'enseignant de mathématiques em situation didactique.** Une approche par l'analyse de son discours. Tese de doutorado, Université Paris-X. Paris, 1995.

CURI, E. A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras. **Revista Iberoamericana de Educación**. Volume 37, p.1-5, 2005.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org) **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. São Paulo: EDUC, 2005.

GALVEZ, Grécia. A didática da matemática. IN: PARRA, C. (org.). *et.al*. **Didática da matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GÉRARD, F.; ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Porto: Porto, 1998.

HENRY, M. Analyse Theorique de situations Didactiques. In: **Anais do Simpósio Internacional de Educação Matemática**. Recife: UFPE, 2006. p.15.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, jan./mar. 1996.

NACARATO, A. **O professor que ensina matemática:** desafios e possibilidades no atual contexto. v. 20, n. 1, Passo Fundo, p. 11-32, jan./jun. 2013 | Disponível em www.upf.br/seer/index.php/rep. Acesso em: 22 mar. 2019.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

ROMANATTO, M. **O livro didático:** alcances e limites. São Paulo, 2004. Disponível em http:// www.sbempaulista.org.br/cpem/anai/mesas-redondasmr19-mauro.doc. Acesso em: 19 jan. 2020.

SANTOS, L. S. **Análise dos efeitos didáticos emergentes de uma sequência de atividades na aprendizagem do significado parte/todo do número racional**. 2010. 268f. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciências e Matemática), Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2010.

SOUZA, L. S. S. **Relação ao saber matemático de professores que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental**: Estudo exploratório no município de Cabo de Santo Agostinho. 2017. 380 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Departamento de Educação, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017 em cotutela com a Université Lumière – Lyon 2**.** 2017.

CAPÍTULO 11

ANÁLISE COMPARATIVA DE DUAS QUESTÕES DE ÁLGEBRA DO ENSINO FUNDAMENTAL[25]

Rinaldo Cesar de Holanda Beltrão
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Parece evidente que, ao realizar uma pesquisa *stricto sensu*, o professor tem a possibilidade de passar por uma experiência de mudança, deixando de ser apenas o mediador entre o estudante e o conhecimento, mero usuário do produto do conhecimento científico (PONTUSCHKA, 2007), tornando-se um investigador crítico de sua prática docente e das inúmeras ações que ocorrem no ambiente da sala de aula.

Isso nem sempre é vivenciado com entusiasmo pois, ao sair do ambiente acadêmico e encontrar-se novamente com um cotidiano de muito trabalho e pouco tempo disponível, nem sempre é possível, ao professor, dispor de parte desse tempo para a reflexão, a sistematização e a análise correta de suas inquietações, em busca de respostas para os fenômenos e da construção de uma ação docente que possa produzir melhores resultados na aprendizagem.

Neste artigo tenho a oportunidade de dar um passo para além da pesquisa que realizei em 2011, ao poder, em meio a muito trabalho e pouco tempo, graças à

[25] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2011.

chegada da tecnologia na educação pública, voltar a refletir sobre a aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental ao comparar resultados coletados em 2008, 2011 e 2017.

Os primeiros dados que utilizamos remontam aos resultados do exame do SAEPE de 2008. O SAEPE é uma avaliação educacional censitária e anual realizada pelo Governo do Estado de Pernambuco, similar ao Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), criado em 1997 pelo Governo Federal.

O SAEPE tem como finalidade monitorar a qualidade do ensino nas escolas, como também apoiar as iniciativas de promoção da igualdade de oportunidades educacionais. Esse sistema avalia as competências e habilidades, em Língua Portuguesa e Matemática, dos estudantes das redes públicas estadual e municipal que estão matriculados nos 3º, 5° e 9° anos do Ensino Fundamental e do 3° ano do Ensino Médio, e também daqueles que fazem parte dos projetos de correção do fluxo escolar.

A avaliação do SAEPE é realizada no formato de múltipla escolha, quando são apresentadas quatro ou cinco respostas para que o estudante indique a alternativa correta.

A partir dos dados coletados referentes aos itens de álgebra da avaliação do SAEPE de 2008, realizadas com estudantes que estavam concluindo o Ensino Fundamental, desenvolvemos uma pesquisa, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, apresentada em 2011, sob orientação do professor Marcelo Câmara dos Santos, intitulada *Exame do Saepe: Um estudo das estratégias mobilizadas pelos estudantes para resolver problemas algébricos* (BELTRAO, 2011).

Nessa pesquisa, foi proposta uma atividade a 468 (quatrocentos e sessenta e oito) estudantes de 11 (onze) escolas públicas da região metropolitana do Recife, composta de 7 (sete) itens de álgebra que fizeram parte do exame do SAEPE de 2008.

Na atividade de 2011, o modelo adotado foi de avaliação aberta, quando o estudante precisa produzir sua própria resposta. Na pesquisa, apresentamos uma análise comparativa das respostas dadas pelos estudantes no exame do SAEPE de 2008 (avaliação em modelo múltipla escolha) com a atividade proposta em 2011 (modelo avaliação aberta).

CAPÍTULO 11

m projeto educacional promovido pela Secretaria dade do Recife, denominado Preparatório para odalidade de Educação a Distância, por meio da ncia (UniRec), utilizando um ambiente virtual de dle. O projeto teve como objetivo disponibilizar, eferida rede municipal, um espaço de aprendiza- cluintes do Ensino Fundamental para processos m o acesso a cursos técnicos das Escolas Técni- E) e do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE).

Foram organizadas e disponibilizadas atividades, videoaulas e simulados, que reproduziam o modelo das provas do processo seletivo das Escolas Técnicas Estaduais, que são eletrônicas.

No curso Preparatório para Exames Seletivos, foram oferecidos aos estudantes 26 (vinte e seis) atividades de Língua Portuguesa e Matemática, cada uma delas com 20 (vinte) itens de múltipla escolha.

Entre as atividades de Matemática propostas, introduzimos os itens de álgebra que fizeram parte da avaliação do SAEPE em 2008 e da pesquisa *stricto sensu* de 2011 para futuras análises. Este artigo apresenta algumas reflexões sobre as respostas dadas, nesse período, a dois desses itens.

A importância da análise da produção dos estudantes no Ensino da Matemática.

O ensino da Matemática nas escolas normalmente é caracterizado pela exatidão e mecanização de seus processos, em que professores iniciam apresentando um conjunto de passos e fórmulas, depois demonstram alguns exemplos de atividades e esperam que os estudantes sejam capazes de resolver uma infinidade de exercícios bem parecidos e, muitas vezes, desconectados com a realidade.

Temos visto que o desenvolvimento tecnológico, cada vez mais, atrai os estudantes fora da escola, disponibilizando a eles uma infinidade de equipamentos como os computadores e smartphones, com inúmeros recursos, repletos de conceitos matemáticos simples e sofisticados, que eles manipulam com habilidade e competência. Enquanto isso, no ambiente escolar, em reuniões pedagógicas e afins, os professores de Matemática ainda discutem calorosamente a necessidade ou não de se utilizar a calculadora em sala de aula.

Como consequência disso, temos a Matemática como um dos componentes curriculares em que os estudantes apresentam mais dificuldade para aprender, assim como o que mais reprova, apresenta-se como causa de insucesso e indutor do abandono escolar (PINTO, 2004, p. 119).

É fato que os professores, sobretudo os das escolas públicas, precisam superar muitas dificuldades para poder exercer a docência. A maioria delas está ligadas às características das próprias redes de ensino, que, na maioria dos casos, disponibilizam espaços de aprendizagem que apresentam diversos problemas estruturais, aliados a políticas públicas muitas vezes equivocadas e a uma histórica desvalorização do trabalho do professor.

Entretanto, com relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática (e por certo de outras áreas do saber), existem algumas práticas que podem ser realizadas, com vistas à superação dessas dificuldades. Entre elas está a utilização de tecnologias de informação e comunicação (TIC); nesse contexto, especificamente, uma possibilidade, sem dúvida, é a modalidade de Educação a Distância - EaD.

De acordo com Decreto nº 5.622, de 19 de dezembro de 2005 (BRASIL, 2005), a Educação a Distância é uma modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e de aprendizagem ocorrem com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos.

Essa modalidade permite que estudantes e professores, no processo de ensino-aprendizagem, sejam gestores de suas rotinas, sempre responsáveis pelos cumprimentos das tarefas estabelecidas, no tempo e horário que melhor lhes aprouver. Segundo Moore e Kearsley (2010, p. 2), a educação a distância é o aprendizado planejado que ocorre normalmente em um lugar diferente do local do ensino, exigindo técnicas especiais de criação do curso e de instrução, comunicação, por meio de várias tecnologias e disposições organizacionais e administrativas especiais.

O estudante chega à escola com a expectativa de que vai aprender coisas novas e traz consigo uma grande bagagem de informações, que são fruto das situações vividas em seu cotidiano. Nas aulas de Matemática, espera-se uma interação entre a realidade e a Matemática, levando-se à descoberta da finalidade e do papel dessa área do conhecimento na sociedade.

Porém quando o estudante inicia sua atividade escolar, acaba se deparando com um modelo estritamente conteudista, baseado em resolução de exercícios matemáticos descontextualizados, em que o professor espera que ele apresente um determinado resultado como resposta. Quando isso não acontece, o professor muitas vezes desconsidera a produção do estudante e afirma que ele errou a questão.

Em outras situações, o professor parte do princípio de que, ao entrarem em contato com um novo conhecimento matemático, os estudantes têm suas cabeças apresentadas como se fossem um balde vazio, que será "enchido" por meio da transmissão de novos conhecimentos. Para verificar se houve a aprendizagem basta observar se o balde está completamente cheio. Isso se traduz na afirmativa do professor, em relação ao estudante, de que ele "aprendeu tudo".

No caso do balde ainda não completamente cheio, é como se houvesse uma graduação em termos percentuais, ou seja, 40%, 60% ou 80%, que corresponderia às notas 4, 6, e 8, respectivamente. Dessa maneira, as notas dos estudantes são geradas de acordo com o percentual de enchimento de seu balde (CÂMARA, 2002).

Spinillo (2005) afirma que há uma predominância de três concepções do professor sobre o conhecimento extraescolar dos estudantes: a primeira refere-se ao fato de o professor acreditar que a escola é o local onde, pela primeira vez, o raciocínio matemático tomará lugar na mente da criança; a segunda concepção consiste em uma desvalorização do conhecimento extraescolar, que é considerado desnecessário e inadequado para a aprendizagem escolar; a terceira supervaloriza o conhecimento extraescolar do estudante, por meio de ideias que defendem que os conteúdos escolares devem satisfazer as necessidades cotidianas, de fora da escola, e preparam o estudante para a aquisição do conhecimento escolar.

A autora defende, ainda, uma quarta concepção em que tanto a interferência positiva como a negativa da Matemática extraescolar sobre a Matemática escolar precisam ser consideradas nas situações de ensino, sem que haja uma supervalorização nem uma rejeição a esse saber. Essa concepção considera o conhecimento extraescolar fundamental para a construção de novos conhecimentos, mas só como primeiro passo dessa construção, não como obstáculo a ser superado.

Nesse sentido, a aprendizagem é entendida como fator de desenvolvimento, ampliando os limites do raciocínio, ajudando a superar dificuldades e a mudar concepções inadequadas.

Dentro dessa perspectiva, é preciso que o professor compreenda que, para o estudante chegar a um determinado resultado considerado errado, ele fez conjecturas, relacionou os conhecimentos que possui e, ainda, que todo entendimento a respeito do que lhe foi passado está representado no processo que conduziu à sua produção. O que se chama normalmente de erro, na verdade, é um conhecimento que o estudante possui, construído por ele; por isso, é necessário que o professor intervenha de forma a desestabilizar suas certezas, levando o estudante a questionar sua resposta (CURY, 2007, p. 80). Daí a importância de efetuarmos o que chamamos aqui de análise de erros.

Na pesquisa realizada em 2011, os erros foram caracterizados como resultado dos processos de resolução de problemas estabelecidos pelos estudantes, construídos a partir de todo o processo de aprendizagem. Por ser o resultado da produção dos estudantes, o erro se caracteriza como sendo a parte observável e, portanto, tangível à análise de um observador externo (o próprio pesquisador no caso de uma pesquisa acadêmica como essa). Na análise dos dados de 2017, procuramos verificar se houve alguma mudança na aprendizagem dos estudantes.

Logo, entendemos que não há contradição entre identificar o erro e se realizar uma leitura positiva sobre ele, que faça-nos perceber o estudante sem caracterizá-lo pela falta mas, sim, por tudo aquilo que ele construiu como resultado de um longo processo de ensino-aprendizagem e que ele externou por meio da sua produção.

Assim, as produções são úteis como gênese das nossas investigações, uma vez que qualquer produção tem características que permitem detectar não apenas as formas pelas quais o estudante utilizou suas habilidades, mas também as influências que ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Dessa maneira, analisar as produções é uma atividade que fornece, ao professor e aos estudantes, a possibilidade de compreender, mais de perto, como se dá a construção do conhecimento pelos estudantes. (CURY, 2007).

Pinto (2000) afirma que, no processo de ensino-aprendizagem, o erro pode contribuir de forma bastante satisfatória; para que isso ocorra, é necessário que se mude a atitude de condenação do estudante, como se ele fosse o único culpado pelos erros cometidos.

Ao efetuar um erro, o estudante demonstra aquilo que aprendeu e as lacunas que ainda possui. Isso oferece ao professor uma oportunidade de ajudá-lo a construir o que lhe falta, por meio do entendimento do que errou. Na análise das respostas dos estudantes, portanto, o importante não é o acerto ou o erro em si, mas as formas de se apropriar do conhecimento, que são externadas na produção escrita e podem evidenciar as dificuldades de aprendizagem (CURY, 2007).

Dessa forma, podemos perceber que é fundamental que o professor procure, nas produções escritas dos estudantes, os erros que demonstram as dificuldades de aprendizagem; logo, é preciso que o professor de Matemática insista para que os estudantes externem os procedimentos que foram adotados e que procurem explicar suas respostas.

Buriasco (2004), ao analisar os recursos e estratégias que os estudantes utilizam para resolverem problemas de Matemática, aponta que a mesma toma caráter investigativo e, como tal, ajuda o professor a definir suas estratégias pedagógicas, seu planejamento e a avaliação da sua prática.

Cury (2007) também afirma que, ao perceber de forma precisa o que seus estudantes estão construindo, o professor pode, além de tomar decisões assertivas em relação a sua prática, perceber e posicionar seus estudantes como interlocutores na compreensão dos caminhos por eles percorridos na busca da resolução de problemas matemáticos; essa visão contribui para o avanço da aprendizagem, na medida em que colabora com a continuidade dela e com a autonomia do estudante.

Baseados na proposição de Cury (2007) chegamos à conclusão de que o erro é uma representação do conhecimento que os estudantes possuem, estabelecido com base nas experiências pregressas que estes estudantes tiveram e que precisa ser desestabilizado, por meio de procedimentos didáticos que induzam os estudantes a apresentarem suas ideias, organizar seus pensamentos, suas hipóteses e a descobrirem que alguns problemas matemáticos podem ser resolvidos de maneiras diferentes.

Análise de dados

A pesquisa realizada em 2011 dividiu os itens em dois blocos. No primeiro, ficaram os itens sobre conversão, que são aqueles em que o estudante precisa fazer a transformação da escrita natural para a escrita algébrica. No segundo bloco, ficaram os itens sobre resolução de problemas, em que o estudante, usando a álgebra como ferramenta, precisa encontrar a resposta para determinada situação.

Neste estudo, analisamos um item sobre conversão e um item sobre resolução de problemas.

No item sobre conversão, discutimos os índices de acerto e de erro, as produções dos estudantes, que além de fazer a conversão, também manipulam a expressão em busca de um resultado numérico, as estratégias erradas e o percentual de estudantes que não responderam aos itens.

No item sobre resolução de problemas, discutimos as estratégias dos estudantes que chegaram à resposta correta e fazemos algumas reflexões sobre as estratégias erradas e o percentual de estudantes que não responderam aos itens.

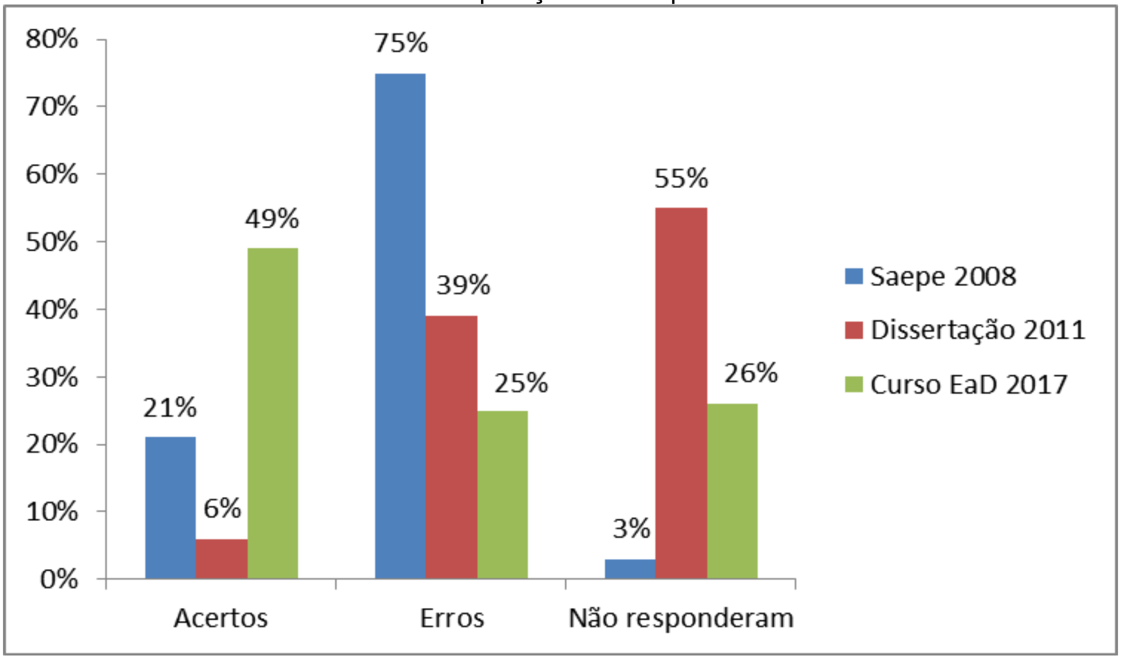
ITEM 1

"Um número é maior do que outro 4 unidades e a soma desses dois números é 192. Se x é o menor desses números, escreva uma equação que permite calcular o valor de x."

Resposta esperada: $x + (x + 4) = 192$

O gráfico a seguir apresenta os resultados referentes ao ITEM 1 nas três pesquisas:

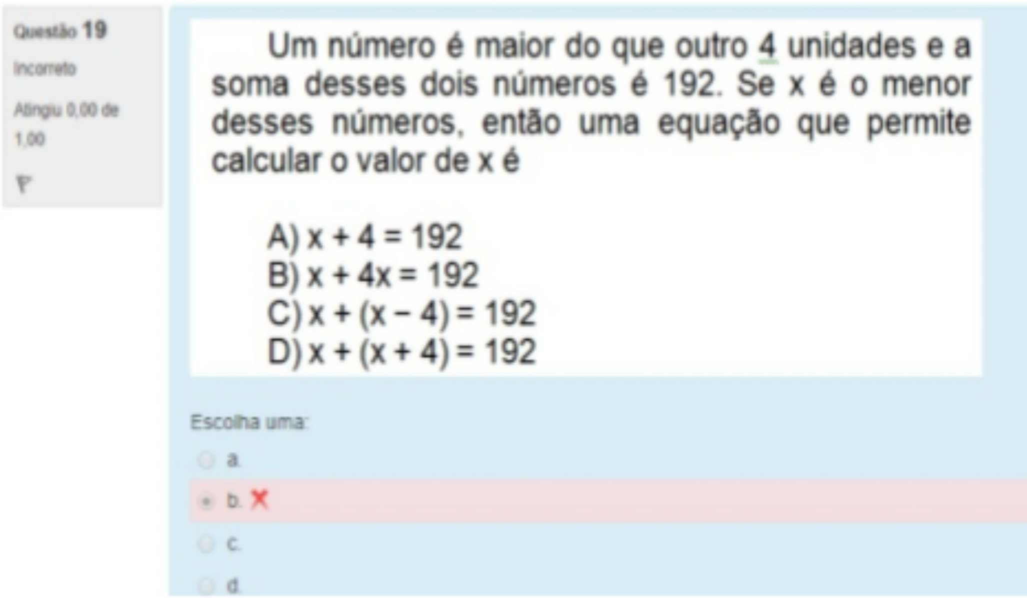
Gráfico 1 – Comparação das respostas ITEM 1



Fonte: Elaboração própria.

A figura a seguir apresenta como o ITEM 1foi apresentado no curso Preparatório para Exames Seletivos.

Figura 1 – Apresentação do ITEM 1 no formato EaD



Fonte: UNIREC - Prefeitura da Cidade do Recife.

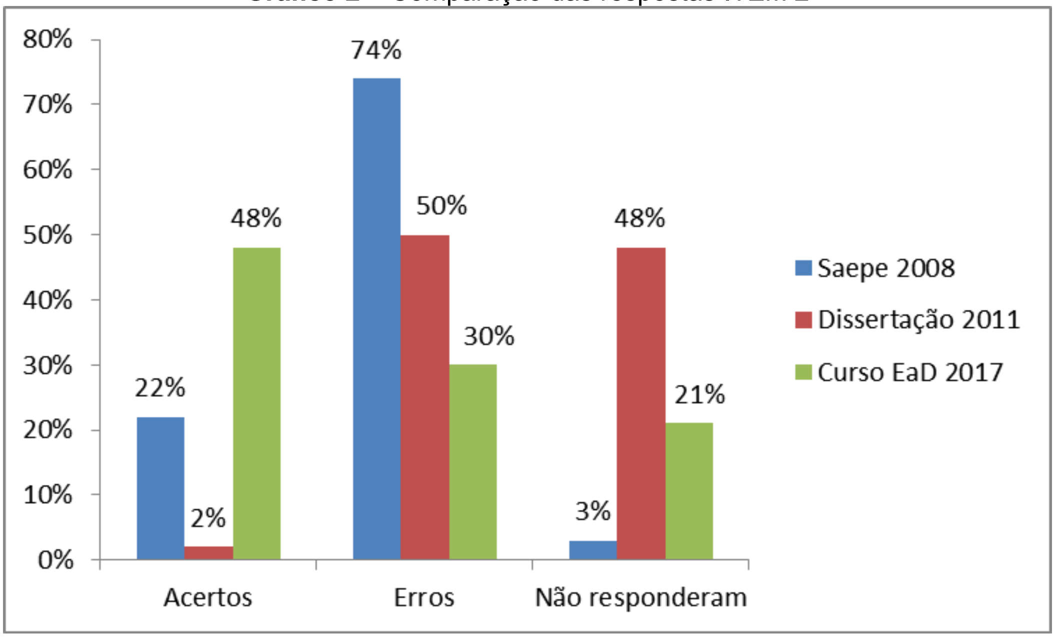
ITEM 2

“Para calcular o custo de sua produção (C), em milhares de reais, em função do número de máquinas utilizadas (X), uma indústria utiliza a expressão $C(x) = x^2 - x + 10$. Se determinado custo de produção foi de 52 mil reais, quantas máquinas foram utilizadas?”

Resposta esperada: o estudante deve construir e desenvolver uma equação do 2º grau que forneça o valor de “x”, que representa a quantidade de máquinas: 7.

O gráfico a seguir apresenta os resultados referentes ao ITEM 2 nas três pesquisas.

Gráfico 2 – Comparação das respostas ITEM 2



Fonte: Elaboração própria.

A figura a seguir apresenta como o ITEM 2 foi apresentado no curso Preparatório para Exames Seletivos:

Figura 2 – Apresentação do ITEM 2 no formato EaD

Fonte: UNIREC - Prefeitura da Cidade do Recife.

Os resultados apresentados nos dois itens, nas três verificações, são bem semelhantes. Para resolver o ITEM 1, o estudante precisaria fazer a conversão de registros da língua natural (o enunciado do problema) para a linguagem algébrica (resposta esperada).

Para resolver o ITEM 2, existem duas estratégias que podem ser usadas pelos estudantes para que cheguem à resposta considerada correta: a primeira seria algébrica, substituindo-se, na expressão algébrica do enunciado, o custo da produção pelo valor numérico que está sendo atribuído a ele. A segunda estratégia seria aritmética, atribuindo-se valores a x, em busca do resultado final.

Com relação à pesquisa anterior, realizada em 2011, verificamos um número elevado de estudantes que não registraram nenhuma resposta para os dois itens: no ITEM 1, 55% não responderam e, no ITEM 2, 48% não responderam. Isso pode ser atribuído ao fato de que, na pesquisa de 2011, os estudantes foram submetidos a uma atividade com modelo de resposta aberta, e, ainda, ao fato de os itens, sobretudo o ITEM 1, apresentarem o enunciado distanciado de um problema do cotidiano, além da dificuldade encontrada nos estudantes com relação a itens de álgebra.

Esse dado também chama a atenção no Curso Preparatório de 2017, pois, apesar de a atividade ter sido apresentada no formato de múltipla escolha, 26% dos estudantes que participaram da atividade não responderam o ITEM 1 e 21% não responderam o ITEM 2.

Na avaliação do SAEPE de 2008, que também apresenta itens de múltipla escolha, o percentual de estudantes que não responderam foi de apenas 3%, nos dois itens. Essa diferença pode ser atribuída à natureza das atividades: enquanto que o Curso Preparatório de 2017 consistia em uma preparação para os estudantes prestarem um exame vestibular, a prova do SAEPE 2008 é um exame de verificação de aprendizagem, o que provoca os estudantes a arriscarem uma resposta, mesmo sem saber se a mesma está correta.

Entre os estudantes que responderam ao teste em 2011, apenas 6% acertaram o ITEM 1, e 2% acertaram o ITEM 2. Na avaliação do SAEPE, o percentual de acertos foi de 21% no ITEM 1 e 22% no ITEM 2. Já no curso preparatório, o número de acertos sobe para 49% no ITEM 1 e 48%, no ITEM 2.

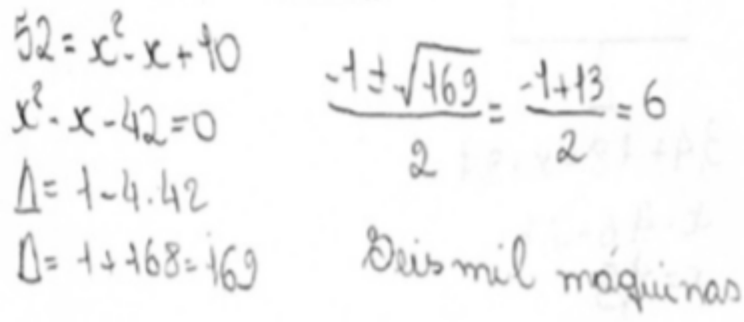
Esse dado é animador, uma vez que mostra um aumento importante no número de acertos, quando comparamos as duas avaliações de múltipla escolha (SAEPE 2008 e Preparatório 2017). Esse cenário indica que podem estar surtindo efeito as pesquisas em Educação Matemática que chamam a atenção para uma necessidade de se buscar caminhos para avançar no ensino da Matemática, em geral, e da álgebra, em particular, e apontam para uma aprendizagem com significados, aproximando essa área do conhecimento da realidade dos estudantes. Nessa perspectiva, o erro passa a ser visto como norteador na identificação de níveis de dificuldade da aprendizagem, na avaliação e na orientação do processo ensino-aprendizagem.

Podemos ter um exemplo dessa tendência de mudança na aprendizagem da Matemática ao observar um aspecto relacionado ao ITEM 2, no que se refere ao conteúdo equações do 2º grau.

A Base Curricular Comum de Matemática para as redes públicas de ensino de Pernambuco afirma que a abordagem da equação do 2º grau, quando efetuada pela aplicação direta da fórmula de Bhaskara, algo comum nas escolas brasileiras, pode provocar dificuldades posteriores, uma vez que os estudantes acabam tomando-a como método único e, aí, quando “esquecem a fórmula”, não são capazes de resolver o problema.

O recorte abaixo é referente à produção de um estudante que participou da pesquisa em 2011. Ele identificou que o problema seria resolvido por meio de uma equação de 2º grau e usou a fórmula de Bhaskara. Um pequeno equívoco na aplicação da fórmula levou ao erro no resultado final.

Figura 3 – recorte de uma atividade da pesquisa de 2011



Fonte: Beltrão (2011)

Assim, é recomendável que os estudantes sejam incentivados a resolverem equações de 2º grau utilizando a fatoração e o processo de completar quadrados, que, além de serem métodos eficazes, podem dar significado à fórmula de Bhaskara. (PERNAMBUCO, 2008. p.99).

Essa proposta foi apresentada, por meio de videoaulas, aos estudantes do Curso Preparatório para Exames seletivos de 2017, o que pode ter contribuído para um percentual maior de acertos.

Conclusão

Os resultados de avaliação externas, tanto estaduais (SAEPE e outros), como federais (SAEB) ou internacionais (PISA), indicam que a aprendizagem da Matemática no Brasil ainda tem um longo caminho a percorrer, e muito precisa ser feito.

Entretanto, já é possível observar que existe um avanço em curso. Lento, é verdade, mas que tem se mostrado constante. Isso pode ser observado, por exemplo, na média nacional em Matemática dos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Desde que se iniciou a avaliação do SAEB, a nota cresce, saindo de 177,08 em 2005 para 218,59 em 2017.

Podemos verificar essa melhoria, também, quando avaliamos o nível de proficiência dos estudantes: na avaliação de 2017, 44% dos estudantes do 5º ano foram considerados proficientes em Matemática. Na avaliação de 2015, a proficiência foi de 39% e, em 2013 foi de 35%. No 9º ano do Ensino Fundamental, a aprendizagem revela-se menor, mas o crescimento é constante, embora seja bastante lento para as necessidades da nossa sociedade.

Esse crescimento também foi visto em nossa investigação. Isso demonstra que talvez tenhamos encontrado um caminho para a melhoria da aprendizagem em Matemática. Talvez precisemos acelerar mais nossa entrada e permanência nele.

Referências

BRASIL. Decreto 5.622, de 19 de dezembro de 2005. Regulamenta o artigo 80 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF, 20 dez. 2005.

BURIASCO, L. Análise da Produção Escrita: a busca do conhecimento escondido. **Conhecimento local e conhecimento universal**: a aula e os campos do conhecimento, volume 3, ENDIPE, 2004, p. 243 a 251.

CÂMARA, M. Algumas Concepções sobre o Ensino – aprendizagem de

Matemática. In. **Educação Matemática em Revista**, nº 12, São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2002. p. 11 – 15.

CURY, H. **Análise de Erros**: o que podemos aprender com as respostas

dos estudantes. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

MOORE, M.; KEARSLEY, G. **Educação a distância**: uma visão integrada. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino de Pernambuco:** matemática / Secretaria de Educação. Recife: SE. 2008.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática:** estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

PINTO, N. B. Avaliação da aprendizagem como prática investigativa. In: **Conhecimento local e conhecimento universal** – Vol. 3. Curitiba: Champagnat, 2004.

PONTUSCHKA, N.; PAGANELI, T.; CACETE, N. **Para ensinar e aprender geografia**. São Paulo: Cortez, 2007.

CAPÍTULO 12

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS NO EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS[26]

Marcelo Leonardo Leôncio da Silva

Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

A base de dados deste trabalho foi coletada em outra pesquisa, concluída em 2010, que envolvia a investigação da conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau. Embora tenhamos utilizado os mesmos protocolos obtidos na pesquisa anterior, o presente trabalho difere do anterior no que se refere à categorização realizada e à análise dos resultados.

Neste trabalho buscamos analisar em que medida a estrutura de problemas baseados em fatores da congruência podem conduzir os alunos a determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica. Na categorização de nossa pesquisa, em um primeiro momento, utilizamos os registros como algébricos e não algébricos; em seguida, foi realizado o tratamento com o *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* (*CHIC*). No

[26] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2011.

momento seguinte, classificamos os registros algébricos em registros algébricos com conversão total, com conversão parcial e com conversão incompatível.

Para a pesquisa, utilizamos como fundamentação teórica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, na qual são focadas as diversas formas de registros de representações semióticas. Essa teoria permite a verificação do funcionamento cognitivo do estudante, por meio da diversidade e da mudança desses registros semióticos.

No trabalho, os alunos foram convidados a resolverem problemas de partilha, segundo a categorização de Marchand e Bednarz (1999). Os problemas propostos eram em número de 8 e combinavam a conservação ou não das condições de existência da congruência entre dois registros, a correspondência semântica das unidades de significado, a univocidade semântica terminal e a ordem das unidades de significado, baseadas na teoria de registros e representação semiótica.

Inicialmente, realizamos a revisão de todos os protocolos adotados na pesquisa anterior e reorganizamos os dados em primeiro momento como registros algébricos e não algébricos e, posteriormente, em registros algébricos com conversão total, conversão parcial e conversão incompatível. Em seguida, efetuamos o tratamento dos dados com o auxílio do *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive* (*CHIC*), no intuito de promover o cruzamento entre as repostas categorizadas (as variáveis) e os sujeitos participantes da pesquisa.

Adotamos como problema de pesquisa investigar em que medida os fatores de congruência e não congruência, entre os registros de partida e de chegada, interferem na utilização dos registros algébricos utilizados pelos alunos na resolução de problemas de equacionamento do primeiro grau.

Resolução de problemas

Pesquisas como as de André (2007) e Costa (2010) reforçam a importância, na aprendizagem em matemática, da adoção de resolução de problemas para a apropriação de alguns conceitos. A resolução de um problema não conhecido pelo aluno, ou seja, nunca resolvido, leva a descobertas e proporciona que, na busca da solução, o educando formule e valide, ou não, suas hipóteses.

CAPÍTULO 12

eensão de enunciados, na resolução de proble-
ébrica, há certo tempo deixou de ser apenas a
s na linguagem natural. A resolução de proble-
registros de representação semiótica, como o
ico, o pictórico, por parte do aluno, pode permitir
tos.
e estudos em diversos países apontem algumas
no contexto da leitura e da escrita em matemáti-
os em que medida a estrutura de problemas
cia pode conduzir os alunos a mobilizarem determinados registros na transformação de registros da linguagem natural em linguagem algébrica.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, constitui um referencial teórico amplamente aplicado em pesquisas na Didática da Matemática.

Duval (2009) considera que *semiosis* é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, enquanto *noesis* são os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Para o autor, a representação do objeto interioriza ou constrói a representação semiótica, enquanto que a representação do próprio objeto está estruturada na atitude cognitiva que o conceitua como objeto. São a semiose e a noésis.

Ainda na perspectiva de Duval (2009), a diversidade, não só da articulação entre os registros de representação semiótica, mas também a sua diversificação, a diferenciação entre representante e representado e a coordenação entre os diferentes registros são de fundamental importância e constituem três fenômenos estreitamente ligados.

Nesse contexto, a resolução de problemas, com o emprego e a articulação de vários registros de representação semiótica, tais como o registro algébrico, o registro numérico e o registro pictórico, permitem uma melhor apropriação dos conceitos.

Um registro de representação é considerado semiótico quando neste observamos três atividades cognitivas: representação identificável, tratamento e conversão.

Uma representação é identificável quando é possível reconhecer a qual objeto matemático se relaciona por meio de um sistema de signos, desde que seja socialmente reconhecido.

Quando há a ocorrência de mudança de registro de representação da linguagem natural para a linguagem algébrica, como as utilizadas na resolução de problemas, temos o tratamento.

Já a conversão, é a transformação de uma representação semiótica em outra, em sistemas diferentes, como por exemplo, passar da representação algébrica de uma equação à sua representação gráfica. Na conversão existem dois fenômenos relacionados: o da congruência e o da não-congruência, associados ao registro de saída e ao registro de chegada. Em nosso trabalho, analisaremos a passagem do registro em linguagem natural, o registro de saída, para o registro em linguagem algébrica (a simbólica), o registro de chegada (a equação).

Para que haja congruência entre os dois registros, faz-se necessária a admissão de três condições:

a) A conservação da correspondência semântica das unidades de significado;
b) A conservação da univocidade semântica terminal;
c) A conservação da ordem das unidades de significado.

A atividade de conversão corresponde a procedimentos de objetivação, ou seja, às mudanças de registro de representação, visando uma maior eficiência na construção conceitual (aquisição de conceitos).

É de extrema importância que haja a distinção entre transformações de tratamento e de conversão na análise de resoluções de problemas, por ser necessário coordenar em pelo menos dois registros distintos e, ainda, pelo fato de estas serem radicalmente diferentes (DUVAL, 2005, p. 15).

O software *CHIC*

Para a análise dos dados coletados, foi utilizado o software *CHIC*, desenvolvido no início dos anos 1990 no Institut de Recherche Mathématique de Rennes (*IRMAR*) na França. Esse software permite estabelecer, por exemplo, relações entre categorias (atributos) e sujeitos, por meio de similaridades e implicações. Ou seja, o *CHIC* permite verificar se os sujeitos e os atributos estabelecem relações, ou não, e qual o grau de importância dessas relações.

Para Almouloud (2005), a análise de similaridade permite fracionar em partes um dado conjunto de variáveis estatísticas. Este fracionamento permite interpretar se há ou não semelhanças, construindo estruturas implicativas estruturais, as árvores. Na análise de similaridade (semelhança ou não entre as variáveis), é possível verificar se os atributos e os indivíduos pesquisados são ou não dependentes entre si.

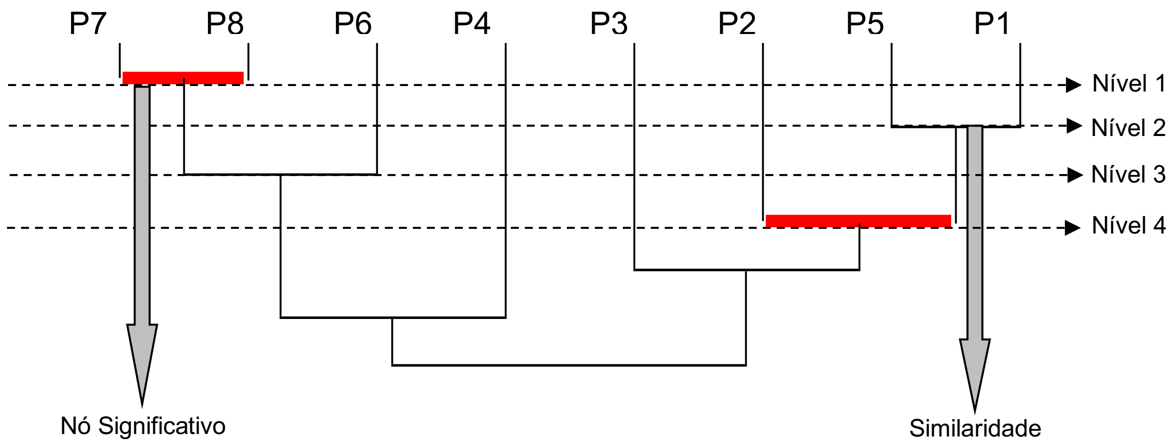
No tratamento dos dados para a similaridade, o *CHIC* indica, por meio de uma árvore (de similaridade), a probabilidade maior ou menor de ocorrências entre as categorias. Através da análise conjunta da árvore e do índice de similaridade, é possível indicar os grupos de categorias similares que apareçam com maior ou menor proximidade uma da outra, ou seja, é possível saber qual categoria possui maior ou menor semelhança estatística entre as variáveis.

Desse modo, a similaridade pode ser interpretada como a intersecção das variáveis utilizadas e os sujeitos participantes da pesquisa. Em outras palavras, é possível verificar se, em relação a cada tipo de variável dada, há semelhanças ou não. A interpretação dos dados por classes de variáveis é apresentada em forma de árvores (níveis de similaridade), ou seja, quando duas variáveis (duas respostas de sujeitos distintos) são agrupadas por critério de similaridade, podemos afirmar que os dois sujeitos apresentam comportamentos similares.

Os níveis de similaridade podem ser identificados por segmentos de reta unindo duas categorias no diagrama de árvore.

Quando há uma forte tendência de similaridade entre categorias, podemos afirmar que há um nó significativo, ou seja, existe uma maior compatibilidade em relação aos resultados obtidos para as similaridades. Esse nó pode ser caracterizado na árvore quando há um destaque na união dessa categoria, por meio de uma marcação mais acentuada. A Figura 1 ilustra essas situações.

Figura 1 - Nó significativo e similaridade.



Fonte: Silva e Câmara (2011, p. 43).

No diagrama, destacamos dois níveis de relação de similaridade, sendo o nível 1 (P7 P8) o mais importante, seguido do nível 2, etc. O segmento ligando P5 e P1 mostra que existe uma relação entre os sujeitos que utilizam o mesmo tipo de registro no problema 5 e aqueles que utilizam registro algébrico no problema 1.

É importante ressaltar, entretanto, que o software *CHIC* apenas realiza determinados tratamentos dos dados inseridos. A análise desses dados cabe ao pesquisador, que seleciona, em função de seus objetivos, os tratamentos considerados mais adequados e, a partir das informações fornecidas pelo software, infere sobre elas.

Procedimentos metodológicos

Os dados analisados em nossa pesquisa foram obtidos a partir de testes que foram adotados em outra pesquisa, Costa (2010). Esses testes foram aplicados, pelos dois pesquisadores, a 217 estudantes de duas escolas privadas da Região Metropolitana do Recife, matriculados no 8º ano do ensino fundamental.

Cada teste constava de oito questões, e sua aplicação ocorreu em seções com tempo médio de 100 minutos, sendo permitido o uso de lápis, borracha e caneta, sem consulta a qualquer tipo de material, a colega ou ao professor que procedeu à aplicação.

Em cada um dos problemas, buscamos variar a ocorrência das três condições necessárias para que haja a congruência entre dois registros, a correspondência semântica, a univocidade semântica terminal e a conservação da ordem do significado, como podemos notar no quadro1.

Quadro 1 - Variáveis adotadas**.**

Número do problema	**Correspondência semântica das unidades de significado**	**Univocidade semântica terminal**	**Ordem das unidades de significado**
01	Conserva	Conserva	Conserva
02	Não Conserva	Não Conserva	Não Conserva
03	Conserva	Não Conserva	Conserva
04	Conserva	Conserva	Não Conserva
05	Conserva	Não Conserva	Não Conserva
06	Não Conserva	Conserva	Conserva
07	Não Conserva	Conserva	Não Conserva
08	Não Conserva	Não Conserva	Conserva

Fonte: Costa (2010, p.34)

Em nosso trabalho, os registros foram, inicialmente, caracterizados em dois grupos: os algébricos (com conversão total, parcial e incompatível) e não algébricos (registros numéricos e outros registros). Em “outros registros”, incluímos os registros pictóricos e os não caracterizados.

Após categorização dos protocolos em algébricos e não algébricos, submetemos os dados ao software *CHIC*, com o objetivo de verificar se havia ou não havia relação entre os fatores de congruência e o uso de registros algébricos em conversões.

Essa relação foi analisada por meio da similaridade, com a intersecção dos dados obtidos pelas variáveis utilizadas para o emprego ou não dos registros algébricos para os problemas, verificando quantos destes apresentam comportamentos similares, ou seja, se utilizavam o mesmo registro para o problema indicado.

Uma segunda análise foi efetuada, com o intuito de investigar como os fatores de congruência interferem na conversão dos registros, focando apenas nos três tipos de registros algébricos: aquele em que o aluno acerta completamente (RACT); o que ocorre quando o aluno acerta parcialmente (RACP); e os casos em que o aluno não tem sucesso na conversão (RACI). Essa etapa buscou verificar em que medida a presença ou a ausência das condições necessárias à congruência entre dois registros poderiam levar o aluno a efetuar o registro algébrico completo, parcial ou incompatível.

As análises efetuadas nas duas etapas mencionadas levaram em consideração os percentuais de incidência dos registros relacionados a cada um dos problemas do teste, as representações gráficas dos dados, as árvores, que nos indicam se há uma maior incidência de determinados registros, e seus respectivos índices por similaridades e coesão. Os percentuais, as árvores e seus índices foram obtidos a partir da compilação das planilhas pelo software, que relacionam as variáveis (categorias) com os sujeitos (estudantes).

As Características dos problemas aplicados

Os problemas analisados em nossa pesquisa permitiram analisar os fatores que interferem na congruência da conversão de registros indicadas por Duval (2004). Os testes foram construídos com a categorização de partilha para os problemas algébricos por Marchand e Bednarz (1999). Para as autoras, os problemas algébricos podem, ainda, ser caracterizados como problemas de transformação e problemas de taxa.

Nos problemas de partilha, nos quais a quantidade total passa a ser repartida em outras partes desconhecidas, podemos variar o número de relações entre as partes, a natureza dessas relações e o tipo de encadeamento entre elas.

O teste aplicado apresentou oito problemas estruturados de modo que fosse possível verificar em qual(is) do(s) problema(s) proposto(s) a(s) conversão(ões) das representações da linguagem natural para a linguagem algébrica pudessem interferir em maior ou menor grau.

Para isso, consideramos as três condições necessárias à congruência entre dois registros: a correspondência semântica entre suas unidades significantes, a univocidade semântica terminal e a mesma ordem dessas unidades em suas representações, como podemos notar no quadro 1, supracitado. Nosso trabalho buscou, portanto, identificar como a conservação ou não das condições necessárias à congruência entre dois registros podem interferir nos tipos de registros de representação mobilizados pelos estudantes, por meio do tratamento dos dados submetidos ao software de Análise Implicativa, o *CHIC*, que, como mencionamos, permite organizar, construir e explicar os fenômenos associados aos dados.

Análise e discussões dos resultados

Em nosso trabalho investigamos em que medida a conservação ou não dos fatores de congruência interferem na conversão de registros em linguagem natural para a linguagem algébrica. Dessa forma, não levamos em consideração os acertos ou erros na resolução das questões, mas, tão somente, o tipo de registro utilizado pelo sujeito no trato com as questões.

A Tabela 1 mostra os dados tratados com o software *CHIC*. Nela, temos os percentuais relacionados aos registros algébricos em função de cada problema, considerando todo e qualquer tipo de registro algébrico, seja ele totalmente correto (RACT), parcialmente correto (RACP) ou totalmente incorreto (RACI).

Tabela 1 - Registros algébricos.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
Registros Algébricos	53%	41%	44%	46%	33%	40%	36%	35%	41%

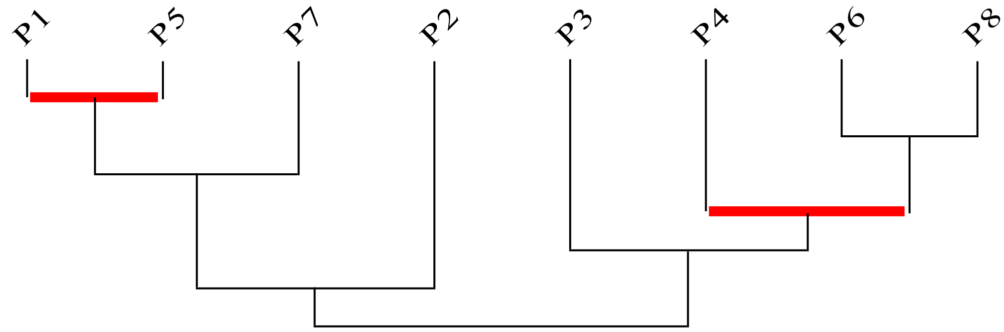
Fonte: Silva e Câmara, (2011, p. 60).

De modo geral, podemos perceber que, em média, 59% dos estudantes não fizeram uso de registros algébricos, o que é indicativo de dificuldades na conversão dos registros da linguagem natural para a linguagem algébrica, confirmando pesquisas já realizadas, como as de André (2007) e Costa (2010).

Os dados ainda mostram que parece existir uma certa estabilidade na utilização de registros algébricos por parte dos estudantes, havendo pouca variação em função dos fatores de congruência observados. Parece-nos interessante ressaltar que o maior percentual de utilização de registros algébricos corresponde ao primeiro problema (P1), em que todos os fatores são conservados, ou seja, trata-se de um problema que apresenta congruência na conversão.

A árvore de similaridade 1 (ASI 1), apresentada a seguir, é a representação gráfica do tratamento dos dados pelo software *CHIC* para os registros algébricos e não algébricos (Tabela 1).

Figura 2 - Árvore de Similaridade 1 (ASI 1)



Fonte: Silva e Câmara (2011, p. 62).

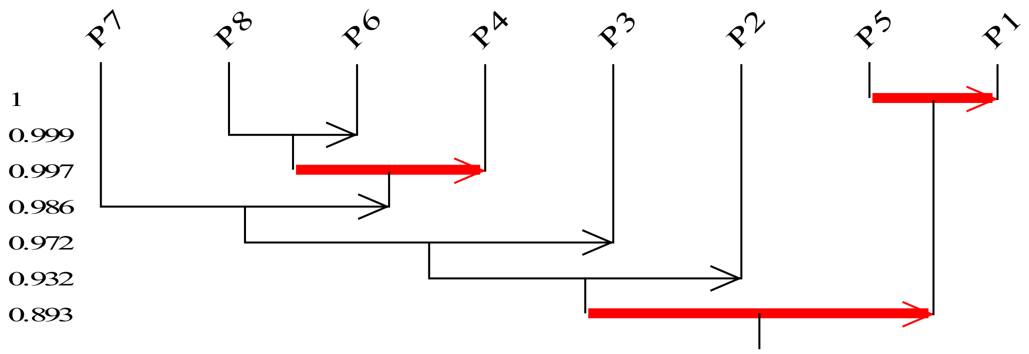
A árvore nos mostra dois nós significativos nos níveis 1 (P1,P5) e 4 (P4(P6,P8)). Desse modo, entendemos que, no nível 1, os alunos que efetuarem o registro algébrico no problema 1 apresentam maior probabilidade de também repetirem o mesmo tipo de registro no problema 5. Quando verificamos as características dos dois problemas, percebemos que guardam em comum, exclusivamente, a conservação da correspondência das unidades de significado, por onde podemos notar que há chances de essa característica interferir no emprego do registro algébrico para o problema.

No nível 2 (P6,P8), observamos, sem tanta significatividade, que há a possibilidade de realização do registro algébrico. Esses dois problemas apresentam, em comum, a conservação da ordem das unidades de significado; ou seja, a conversão dos registros ocorre no mesmo sentido de sua leitura. Outra característica notada nos dois problemas é a não conservação da correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro de representação na linguagem natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem algébrica.

Desse modo, não podemos afirmar se é a conservação da ordem ou a não conservação da correspondência semântica, ou simultaneamente as duas características, que podem indicar esta similaridade sem a presença de um nó significativo.

Entendemos, desse modo, que há relação entre as características mencionadas, e submetemos os mesmos dados ao *CHIC* para efetuarmos uma análise coesitiva, em que encontramos a árvore coesitiva 2 (AC2).

Figura 3 - Árvore Coesitiva 2 (AC2)



Fonte: Silva e Câmara (2011, p. 64).

Na análise da AC2, há o indicativo da existência de um nó significativo no nível 1, o que indica que quem mobilizar o registro algébrico para o problema 5 provavelmente também o repetirá para o o problema 1, já que, além de esse nó estar no menor nível, ele ainda nos dá uma coesão elevada, 1, o que indica que há um ótimo agrupamento entre as variáveis observadas, pois o índice de coesão pode apresentar seu valor entre 0 (zero) e 1 (um).

Como já foi mostrado anteriormente, os problemas 5 e 1 apresentam, em comum, a conservação da correspondência semântica das unidades de significado. Ou seja, os números de signos do registro são os mesmos, tanto para a representação na linguagem natural quanto para a representação na linguagem algébrica, o que pode ser um indicativo de que há influência dessa característica no que se refere ao emprego do registro algébrico na conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Desse modo, o único fator que parece interferir no emprego do registro algébrico na conversão dos problemas propostos é a correspondência semântica das unidades de significado, ou seja, o número de signos do registro de representação na linguagem natural é o mesmo para o registro de representação na linguagem algébrica.

Passamos então a tratar os dados no software utilizando apenas os registros algébricos com conversão total (RACT), os registros algébricos com conversão parcial (RACP) e os registros algébricos com conversão incompatível (RACI). Para os demais registros (os registros numéricos, pictóricos), indicamos que não ocorreu nenhum dos registros anteriores. Esse tratamento nos forneceu a Tabela 2.

Tabela 2 - Percentuais de incidência de registros algébricos com conversão total, parcial e incompatível

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Média
RACT	21%	13%	15%	19%	12%	18%	17%	14%	16%
RACP	29%	26%	26%	23%	19%	21%	18%	19%	23%
RACI	04%	03%	03%	04%	02%	01%	01%	01%	02%

Fonte: Silva e Santos (2011, p. 67).

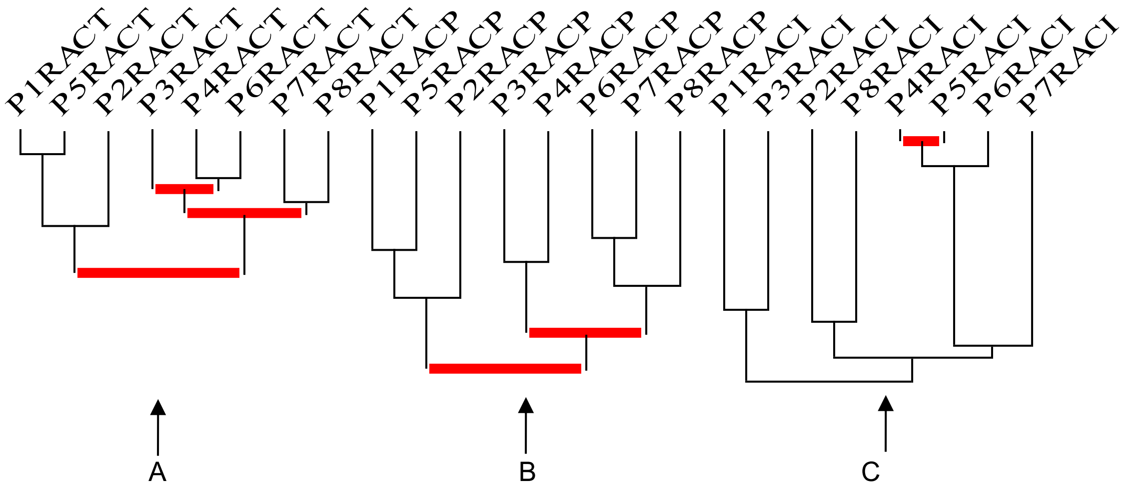
A tabela apresentada nos mostra que ocorre, com média de 23%, uma incidência maior para os registros algébricos com conversão parcial, que são aqueles em que o estudante consegue efetuar as relações entre as partes envolvidas no problema, porém não consegue montar a equação. Em segundo lugar, 16%, temos os registros algébricos com conversão total, caracterizados pelo emprego bem sucedido de signos algébricos na construção da equação.

A conservação da correspondência semântica das unidades de significado pode ser o fator que, quando conservado, leva o aluno que recorrer ao emprego do registro algébrico no problema 5 a apresentar probabilidade de realizar o mesmo registro no problema 1 (AC1). Portanto, confirma que, se há o mesmo número de signos no registro da representação da linguagem natural e da linguagem algébrica, o registro algébrico tende a ser o mais utilizado. No nosso caso, isso ocorre com uma incidência maior para o registro algébrico com conversão parcial, 19%.

É importante também observar que, de modo geral, o primeiro problema apresenta uma maior incidência entre os registros algébricos, 21% para os problemas algébricos com conversão total e 29% para os de conversão parcial, o que pode indicar que o problema 1, que apresenta a conservação dos três fatores, conduz um número expressivo de alunos a fazer a opção por utilizá-lo para a conversão de registro da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Esses dados tratados pelo software nos forneceram a árvore de similaridade 2 (AS2), abaixo:

Figura 4 - Árvore de Similaridade 2 (AS2)



Fonte: Silva e Santos (2011, p. 68).

Nessa árvore, o P1RACT indica o problema 1 com registro com conversão total. Já no P1RACP, temos a indicação do problema 1 com o registro com conversão parcial e o P1RACI é a representação do problema 1 com o registro com conversão incompatível. Desse modo, todos os problemas são representados para os registros com conversão total, parcial e incompatível respectivamente.

Inicialmente, percebemos a formação de três classes, A, B e C. Podemos notar, na classe A, o indicativo de que o estudante que efetuar o registro algébrico com conversão total para um dos problemas tende a repetir o mesmo registro para os demais. O mesmo ocorre para o registro algébrico com conversão parcial, representado na classe B e, com conversão incompatível, na C. Isso nos leva a entender que ocorre certa estabilidade na representação dos registros, ou seja, o indivíduo que usou um determinado tipo de registro tende a repetir o mesmo registro nos demais problemas. Dessa forma, as classes A, B e C, por não apresentarem vínculos (nós), indica que o estudante que realizar um determinado tipo de registro apresenta tendência a repetir o mesmo registro nos demais problemas, já que nesse sentido há oposição entre as classes, ou seja, não observamos ligações entre eles.

Na classe C, encontramos o nível 1 (P4RACI, P5RACI) com similaridade 1. Ali temos um nó significativo, em que há grande probabilidade de o estudante que efetuar o registro algébrico com conversão incompatível no problema 4 também repetir no problema 5, o que não nos fornece garantia de que a conservação da correspondência semântica das unidades de significado exerça interferência sobre a utilização dos registros algébricos na conversão total, ou se é a não conservação da ordem das unidades de significado que pode indicar a tendência desse tipo de registro. Outra hipótese que merece mais investigação é sobre se a conservação do primeiro e a não conservação do segundo fator, ao mesmo tempo, induz ao uso deste tipo de registro.

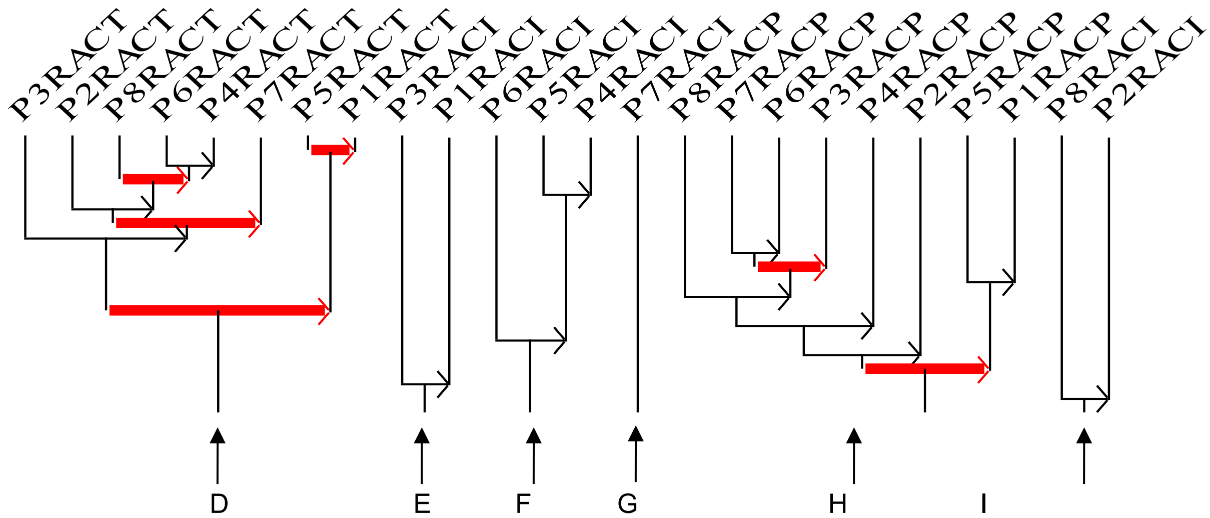
A classe A, no nível 2 (P1RACT, P5RACT) e de similaridade 1, aponta para a tendência em efetuar o registro de conversão total para os problemas 1 e 5, porém sem apresentar a forte probabilidade observada no nível anterior, já que não temos a presença de um nó significativo. Essa tendência conduz a uma possibilidade, anteriormente levantada, de que a conservação da correspondência semântica das unidades de significado pode conduzir o estudante a efetuar o registro algébrico.

Podemos também perceber, na classe B, o nível 10 (P1RACP, P5RACP), em que existe a mesma tendência notada anteriormente, não na mesma intensidade. Isso pode ser o indicativo de que realmente há esta tendência em realizar registros algébricos, seja com o emprego do registro algébrico com conversão total ou parcial, sempre quando esta característica é mantida.

Desse modo, entendemos que a análise da AS2 não foi suficiente para concluirmos se há ou não interferência da característica do problema sobre o modo de representação da conversão dos registros da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Em busca de uma maior clareza sobre a possível influência das características dos problemas propostos em relação à conversão dos registros da linguagem natural para a algébrica, submetemos os dados que apresentavam os registros algébricos com conversão total (RACT), com conversão parcial e com conversão incompatível (RACI) ao software *CHIC*, que forneceu a árvore coesitiva 3 (AC3) seguinte:

Figura 5. Árvore coesitiva (AC3)



Fonte: Silva e Câmara (2011, p. 73).

Numa análise geral, podemos notar que há certa estabilidade nos tipos de registros, sendo formadas seis classes D, E, F, G, H e I, que são independentes, ou seja, não apresentam qualquer vínculo. Na classe D, notamos a concentração dos registros algébricos com conversão total (RACT).

Por outro lado, quando observamos os percentuais de conversão parcialmente correta, notamos que eles correspondem às questões que conservam a ordem das unidades de significado, ou seja, aquelas em que a incógnita associada à fonte do problema aparece no segundo membro da expressão em linguagem simbólica. Isso indica que, quando esse fator de conversão está presente, os estudantes mostram dificuldades em estabelecer a expressão algébrica correspondente.

Considerações finais

Em nosso trabalho, investigamos em que medida a conservação (ou não) dos fatores de congruência interferem na conversão de registros em linguagem natural para a linguagem algébrica.

No primeiro momento da análise, buscamos identificar como a mobilização de registros algébricos pelo aluno, no processo de resolução dos problemas, relacionava-se com a presença ou não dos três fatores de congruência. No segundo momento, investigamos como esses fatores influenciam, ou não, na mobilização de registros algébricos, numéricos ou outros tipos de registros. Finalmente, em um terceiro momento, nossa preocupação foi de analisar como os três fatores de congruência influenciam na mobilização de registros algébricos corretos, parcialmente corretos ou incorretos.

Em uma dimensão mais ampla, percebemos que nossas escolhas metodológicas foram limitadas para que pudéssemos analisar registros não algébricos. Com isso, parece-nos importante avançar em outras pesquisas, com outros dispositivos metodológicos, para aprofundarmos os registros não algébricos.

A conservação da univocidade semântica terminal foi um dos fatores de congruência cuja conservação ou não, entre os registros de partida e de chegada, parece ter influenciado na mobilização de registros algébricos pelo aluno. Entretanto, a mobilização desse tipo de registro aparece de maneira mais importante quando as duas relações presentes no problema são multiplicativas. Quando uma das relações envolve a divisão, o que em linguagem algébrica seria representado por uma fração, esse comportamento fica alterado.

É preciso ressaltar que, para não conservar a univocidade semântica, é necessário que as relações envolvam operações diferentes, como multiplicação e divisão.

Ainda em relação à univocidade semântica terminal, foi possível observar que, em problemas que conservam a univocidade e as duas relações são multiplicativas, existe maior tendência dos sujeitos em utilizar registros algébricos na resolução do problema.

Outro resultado que nos parece importante, e que confirma os dados presentes na literatura, diz respeito à não conservação das ordens de significado, que ocorre quando, ao realizar a conversão, a representação no registro de chegada não é feita na mesma ordem que no registro de saída.

Podemos indicar que a análise das dificuldades na conversão de registros apresentadas pelo estudante é de extrema importância. Para minimizar essas dificuldades, faz-se necessário que o professor analise situações que permitam explorar as condições que interferem na congruência existente entre dois registros de representação.

Por fim, destacamos que o emprego do *CHIC* foi de fundamental importância para o nosso trabalho, particularmente pelo número de variáveis que surgiram no desenvolvimento da investigação. Esse software nos permitiu promover o “cruzamento” dos dados analisados de modo a entender o comportamento do grupo de alunos investigados. Acreditamos que o *CHIC* constitui um importante instrumento nas pesquisas em Educação Matemática.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **L´Analyse Statistitique de Données Multidimensionnelles**: outil révélateur des conceptions d´enseignants en formation. In: Troisièmes Rencontres Internationales – Terzo Convegno Internazionale - Third International Conference A.S.I. Analyse Statistique Implicative – Analisi Statistica Implicativa – Implicative Statistic Analysis. Palermo. Italy. Oct. 2005. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/asi/suppl_quad_15_2.htm>. Acesso em: 20 de nov 2010.

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica:** o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

COSTA, W. R. **Investigando a Conversão da Escrita Natural para Registros em Escrita Algébrica em Problemas envolvendo Equações de Primeiro Grau**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Peter Lang). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2. ed. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. 2. ed. Campinas: Papirus, 2005.

DUVAL, R. Semósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MARCHAND, B.; BEDNARZ, N. L’enseignement de l’ algebra au secondaire: une analyse des problèms présentés aux élèves. **Bulletin AMQ**, v. XXXIX, n. 4, p. 30-42, décembre. 1999.

SILVA, M. L. L.; SANTOS, M. C. **Investigando Estratégias Mobilizadas pelos Alunos no Equacionamento de Problemas de Primeiro Grau.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

CAPÍTULO 13

PROBLEMAS PROPOSTOS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA[27]

Jadilson Ramos de Almeida
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

A matemática sempre foi considerada de difícil compreensão. Em alguns casos, a matemática era, e talvez ainda seja, determinante no futuro escolar de algumas crianças. Avaliações externas de larga escala no Brasil, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) no nível nacional, e o SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco), no nível estadual, revelam baixos índices no rendimento dos estudantes no que se refere à matemática. Mais especificamente com relação à álgebra, essas mesmas avaliações mostram que as dificuldades dos estudantes nesse campo de conhecimento matemático são ainda maiores.

Pesquisas como as de André (2007), Câmara (2010), Costa (2010), Lochhead e Mestre (1995) entre outras, destacam a fragilidade no processo de ensino e aprendizagem da álgebra. Quando se trata da resolução, por parte dos estudantes, de problemas de estrutura algébrica, essas dificuldades aumentam ainda mais.

[27] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2011.Uma primeira versão deste texto foi publicada no Boletim Gepem, n. 64 de 2014.

Bernard e Cohen (1995) apontam para o fato de a aprendizagem sobre a resolução de equações se tornar mais significativa e eficaz por meio da resolução de problemas envolvendo esse conceito matemático, em contrapartida ao ensino de técnicas desprovidas de sentido. Booth (1995) e Kieran (1995) relatam possíveis fatores que originam erros dos alunos investigados na resolução de equações, como o desconhecimento dos significados das letras, as concepções de equivalência, dentre outros.

Diante desse cenário, surgiu o interesse em investigar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos livros didáticos (LD) de matemática do 7º ano do ensino fundamental, aprovados no PNLD-2011. Acreditamos que os problemas propostos aos estudantes podem favorecer (ou não) a compreensão da necessidade do recurso às equações como ferramenta para a sua resolução.

Problemas de estrutura algébrica

Da Rocha Falcão (1997) indica que problemas de estrutura algébrica são aqueles para os quais os procedimentos aritméticos mostram-se cansativos, enfadonhos, pouco econômicos ou insuficientes. Gama (2003) avança ao apontar que os problemas algébricos são aqueles que contêm relações entre seus elementos. Seguindo essa lógica, Marchand e Bednarz (1999) dizem que, em um problema de estrutura algébrica, faz-se necessária a construção de relações entre os dados (as informações) do enunciado para construir uma equação equivalente ao problema. É essa caracterização que adotamos nesse texto como problema de estrutura algébrica.

Para Marchand e Bednarz (1999), o que diferencia um problema de estrutura algébrica de um problema aritmético é que, nesse último, o estudante parte de valores conhecidos para chegar ao valor desconhecido, como no exemplo a seguir:

> *“João tem 12 figurinhas, Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?”*

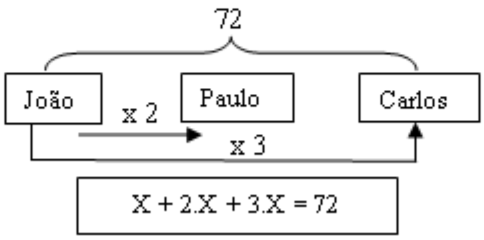
resentado a partir de duas operações de multipli-
a estrutura a seguir: “12 + 2.12 + 3.12 = 12 + 24 +

ta por ter um valor conhecido, o número de figuri-
s outros elementos da situação.
tura algébrica, o estudante parte de “relações pa-
em um processo inverso ao problema do tipo
Podemos verificar essa situação no problema a

“João, Paulo e Carlos têm, juntos, 72 figurinhas. Paulo tem o dobro de figurinhas de João e Carlos tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas tem cada um?”

Em uma situação desse tipo, o estudante não pode partir de um valor conhecido, mas deve estabelecer relações entre os elementos do problema. A estrutura desse problema está na Figura 1.

Figura 1 – Esquema de um problema de estrutura algébrica



Fonte: os autores.

Nesse caso, “os valores desconhecidos (incógnitas) não mais poderiam (ou deveriam) ser obtidos por uma sequência de operações aritméticas, sendo necessário (ou menos custoso) estabelecer uma equação que expresse as relações” (CÂMARA, 2010, p. 3).

Os problemas de estrutura algébrica foram classificados por Marchand e Bednarz (1999), em uma pesquisa realizada em duas coleções de LD de matemática canadenses, em três grandes classes: os “*problemas de transformação*”; os “*problemas de taxa*” e os “*problemas de partilha*”. Dentre esses problemas, dois têm relação com equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, os de transformação e os de partilha.

Em um problema de partilha, temos uma quantidade total conhecida, a qual é repartida em partes desiguais e desconhecidas, como no exemplo citado anteriormente, do problema das figurinhas. Como mostram os estudos em história da matemática, os problemas de partilha estão intimamente associados às origens da álgebra tal como a conhecemos hoje, a partir da necessidade de repartir heranças e resolver situações do cotidiano.

Já os problemas de transformação se caracterizam pelas transformações que os valores sofrem. Nesse caso, tanto os valores iniciais como os valores finais são desconhecidos. É possível visualizar um problema desse tipo no exemplo a seguir:

> *"Ao ser perguntado sobre sua idade, Paulo respondeu: o dobro da minha idade quatro anos atrás é igual a minha idade daqui a dezoito anos. Qual a idade atual de Paulo?"*

Nesse caso, a idade de Paulo é o valor inicial e desconhecido. Nesse valor inicial foram realizadas três transformações, sendo duas aditivas, que são representadas por "*quatro anos atrás*" e "*daqui a dezoito anos*" e uma multiplicativa, representada pela expressão "*dobro*".

Identificamos em nossas análises um tipo de problema que não se enquadrou em nenhuma das categorias formuladas por Marchand e Bednarz (1999). Nesse sentido, construímos outra categoria de problemas de estrutura algébrica que tem relação com as equações polinomiais do 1 grau com uma incógnita, que chamamos de problemas de "Lilavati", por acreditarmos que tenham sido inspirados nessa personagem famosa da história da matemática. Podemos observar um problema dessa natureza no exemplo a seguir:

> *"Partiu-se um colar durante um jogo amoroso. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto ficou no leito, um sexto foi achado pelo homem; seis pérolas ficaram no fio: Diz-me: de quantas pérolas se compunha o colar?"* (MORI; ONAGA, 2009, p. 177)

Em um problema desse tipo, temos um valor total desconhecido (o total de pérolas) que é repartido em partes também desconhecidas e em uma parte conhecida (no caso do exemplo, seis pérolas). Acreditamos que esse problema seja de estrutura algébrica, uma vez que é necessário estabelecer relações entre o total e as partes. No exemplo acima, temos como resultado, após a conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica, a seguinte equação: “X/3 + X/5 + X/6 + X/6 + 6 = X”.

Marchand e Bednarz (1999) identificaram um tipo de problema que, apesar de ser representado matematicamente por uma equação, não é considerado por essas pesquisadoras como um problema de estrutura algébrica, e, por conta disso, chamaram de “falsos problemas”. Nesse tipo de problema, no momento da conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica é necessário apenas uma leitura direta para estabelecer a equação correspondente, caracterizando o que Duval (2003) chama de simples codificação, uma vez que o caráter de “congruência”[28] é praticamente total. Ou seja, a representação de chegada, em linguagem algébrica, transparece na representação de saída, em linguagem natural, não demandando o estabelecimento de relações entre os dados. O exemplo a seguir ilustra esse tipo de problema, que pode ser representado pela equação “2X + 20 = 50”.

“Duas vezes um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?”

Também identificamos, em nossa análise, um tipo de problema de estrutura algébrica, mas que não envolve, necessariamente, equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, mas um sistema de duas equações. Por conta disso, classificamo-los como “problema de sistema”. No exemplo a seguir temos um problema desse tipo.

[28] Congruência é um termo desenvolvido por Duval (2003). Para esse teórico, quando, em um problema, “a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma simples codificação – diz-se então que há congruência –, ou ela não transparece absolutamente e se dirá que ocorre a não-congruência” (p. 19).

“Em um estacionamento há carros e motos que, no total, somam 38 veículos e 136 rodas. Quantas motos e quantos carros há nesse estacionamento?” (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 147)

Esse problema até pode ser resolvido por meio de uma equação polinomial do 1º grau com uma incógnita, entretanto, acreditamos que a solução se torna mais fácil e econômica por meio do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} X + Y = 38 \\ 2X + 4Y = 136 \end{cases}$$

Método

Nosso trabalho buscou identificar os tipos de problemas propostos nos LD de matemática do 7º ano para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita.

Nesse sentido, nossa análise foi realizada nas dez coleções aprovadas no PNLD-2011. Resolvemos analisar os LD do 7º ano em razão de ser nesse período escolar que, tradicionalmente, o estudo formal da álgebra escolar é iniciado no currículo de matemática da educação básica brasileira.

Nossa análise foi realizada nos capítulos dos LD cujo objeto de ensino são as equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Nossa pretensão foi de analisar os problemas que estavam relacionados com esse tipo de equação quando ela era tida como objeto de ensino.

No quadro a seguir estão listados os livros que foram analisados neste estudo.

Quadro 1 – Livros didáticos analisados

Livro	Título	Autores
LD1	A Conquista da Matemática – Edição renovada – 7º ano	José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci
LD2	Aplicando a Matemática – 7º ano	Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis
LD3	Matemática: Imenes e Lellis – 7º ano	Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis
LD4	Matemática – 7º ano	Edwaldo Bianchini
LD5	Matemática e realidade – 7º ano	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado
LD6	Matemática na medida certa – 7º	Marília Ramos Centurión e José Jakubovic

	ano	
LD7	Matemática: ideias e desafios – 7º ano	Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga
LD8	Projeto Radix – Matemática – 7º ano	Jackson da Silva Ribeiro
LD9	Tudo é Matemática – 7º ano	Luiz Roberto Dante
LD10	Vontade de saber Matemática – 7º ano	Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro

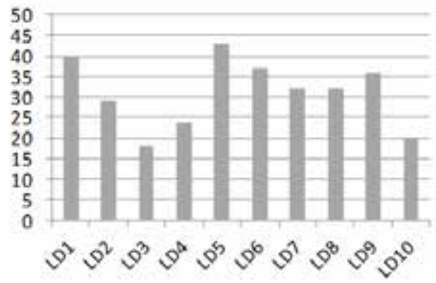
Fonte: os autores.

Tomamos como categorias de análise as propostas por Marchand e Bednarz (1999). São elas: problema aritmético; problema de partilha; problema de transformação e falso problema. Além dessas categorias de análises, elaboramos duas outras, que chamamos de problema de Lilavati e problema de sistema.

Resultados

Analisando todos os livros, encontramos 311 problemas. No primeiro momento, observamos que os LD trazem, em média, 31 problemas. Entretanto, existe uma grande variação nessa quantidade (de 18 a 43 problemas) entre os LD, como pode ser observado no gráfico 1:

Gráfico 1 - Frequência absoluta de problemas por LD



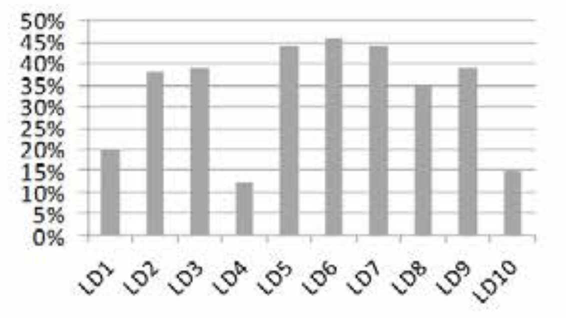
Fonte: os autores

Apesar de alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1998), preconizarem que o ensino da matemática se torna mais eficaz e significativo por meio da resolução de problemas, conseguimos observar que isso talvez não seja considerado por alguns autores de LD de matemática, uma vez que a média foi de 31 problemas nos capítulos que têm por objetivo o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Em alguns LD, a quantidade de problemas é bem menor que a média, como o LD3, que traz apenas 18 problemas.

Acreditamos que seria interessante, em pesquisas futuras, investigar qual a relação entre a quantidade de problemas propostos para o ensino de equações e a quantidade de atividades de resolução direta de equações, com o objetivo de verificar se a preferência dos LD é por um ensino voltado à resolução de problemas ou por técnicas de resolução de equações. Outro estudo interessante seria verificar se em outros capítulos dos LD analisados aparecem problemas relacionados com equações polinomiais do 1º grau, uma vez que eles podem ser explorados em campos da matemática diferentes, como a geometria, por exemplo.

Buscamos também observar a importância que os autores dos LD dão a cada tipo de problema. No gráfico 2, temos a distribuição dos percentuais dos falsos problemas por LD.

Gráfico 2 – Percentual dos falsos problemas por LD



Fonte: os autores

Nesse momento, podemos observar que boa parte dos LD explora excessivamente esse tipo de problema. Em média 33% dos problemas propostos nos LD para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita são desse tipo. Vale lembrar que, apesar de serem representados matematicamente por uma equação, os falsos problemas não são considerados problemas de estrutura algébrica (GAMA, 2003; MARCHAND; BEDNARZ, 2000), uma vez que não levam o estudante a estabelecer relações entre os dados do enunciado. Temos um exemplo de um falso problema no extrato a seguir:

Figura 4 – Extrato de um falso problema

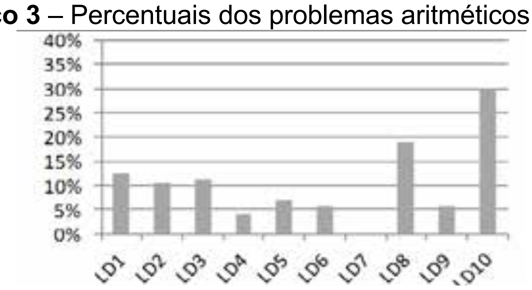
A diferença entre certo número e 10 é igual à terça parte desse número. Que número é esse?

Fonte: Dante (2009, p. 125)

Problemas como os da figura 4 podem não favorecer a passagem da aritmética para a álgebra, uma vez que sua ênfase está, ao que tudo indica, na técnica de resolver a equação encontrada após a conversão, não potencializando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa afirmação se ancora na concepção de que o trabalho cognitivo do estudante, ao resolver um problema, está, segundo Duval (2003), muito mais no momento da conversão do problema para a linguagem matemática, do que na resolução da equação obtida.

Também encontramos problemas em alguns LD que aparentemente não têm relação com equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, que são os problemas aritméticos. Um problema desse tipo até pode ser resolvido por procedimentos algébricos, como, por exemplo, o uso de equações. Entretanto, o uso de estratégias algébricas não é justificado, tendo em vista que, para que um problema seja de estrutura algébrica, isto é, resolvido por procedimentos algébricos, a utilização de procedimentos aritméticos tem que ser enfadonha, cansativa ou insuficiente (DA ROCHA FALCÃO, 1997), o que não acontece com os problemas aritméticos. No gráfico 3 temos a distribuição dos percentuais desse tipo de problema por LD.

Gráfico 3 – Percentuais dos problemas aritméticos por LD



Fonte: os autores

Conseguimos observar que os LD analisados dedicam, em média, 10,5% dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau a problemas aritméticos. Entretanto, percebemos que existe uma grande variação desses percentuais por LD (de 0% a 30%). O LD7 é o único livro que não aborda esse tipo de problema no capítulo analisado. Porém, ele tem uma forte preferência pelos falsos problemas (44% dos problemas). O LD8, e principalmente o LD10, dedicam, a esse tipo de problema, uma porcentagem bem maior em relação aos outros livros. Temos no extrato seguinte um problema aritmético.

Figura 5 – Extrato de um problema aritmético

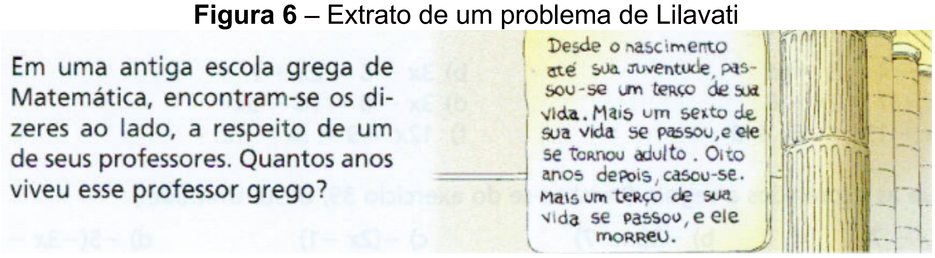
Em uma papelaria, Célio comprou três lapiseiras iguais e pagou com uma cédula de R$ 20,00. Sabendo que ele recebeu R$ 6,20 de troco, qual o preço de cada lapiseira?

Fonte: Souza e Pataro (2009, p. 157)

Esse problema pode ser resolvido facilmente por duas operações aritméticas simples. Uma subtração (20,00 – 6,20 = 13,80) e uma divisão (13,80 : 3 = 4,60). Acreditamos que esse tipo de problema, sendo resolvido da forma proposta pelos LD, ou seja, utilizando unicamente equações do 1º grau, podem, ao invés de facilitar a transição da aritmética para álgebra, prejudicar, tendo em vista que não levam o estudante a confrontar estratégias diferentes na resolução do mesmo problema.

Também conseguimos identificar um tipo de problema que acreditamos que seja inspirado nos problemas antigos, como o da personagem "Lilavati". Podemos observar um exemplo desse tipo de problema no extrato a seguir:

Figura 6 – Extrato de um problema de Lilavati



Fonte: Carvalho e Reis (2009, p. 150)

Os problemas de Lilavati aparecem em 60% dos LD analisados. No LD1 (27,5% dos problemas), no LD2 (3,5% dos problemas), no LD4 (8,5% dos problemas), no LD6 (5,5% dos problemas), no LD7 (12,5% dos problemas) e no LD9 (5,5% dos problemas).

Verificamos que o LD1 tem uma forte preferência por esse tipo de problema, dedicando a esse tipo de problema quase um terço dos problemas do capítulo analisado. Consideramos os problemas de Lilavati como problemas de estrutura algébrica, por levarem o estudante a estabelecer relações entre as informações contidas no enunciado para construírem a equação que representa o problema.

Além dos problemas de Lilavati, também encontramos, em alguns LD, problemas que são mais facilmente resolvidos utilizando um sistema de duas equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Nos LD é sugerido ao aluno que ele chegue à equação polinomial do 1º grau com uma incógnita no momento de converter um problema desse tipo, o que demanda uma conversão bem mais complexa, pois o registro de chegada, em linguagem algébrica, é bastante diferente do registro de partida, em linguagem natural.

Esses problemas aparecem no LD1 (2,5% dos problemas), no LD6 (2,5% dos problemas), no LD7 (6% dos problemas), no LD8 (3% dos problemas), no LD9 (14% dos problemas) e no LD10 (5% dos problemas).

Já os problemas de transformação foram observados em metade dos LD analisados, e em pequena percentagem. Eles apareceram no LD4 (8,5% dos problemas), no LD6 (2,5% dos problemas), no LD7 (3% dos problemas), no LD8 (9% dos problemas) e no LD9 (8% dos problemas).

O destaque para esse tipo de problema não é tão grande, uma vez que a média nos LD brasileiros é de 4%. Isso apresenta semelhanças com o que ocorre nos LD canadenses do secundário 2 (equivalente ao 7º ano no Brasil) analisados na pesquisa de Marchand e Bednarz (1999), uma vez que essas pesquisadoras encontraram, em média, 4,5% dos problemas de sua pesquisa sendo desse tipo. Podemos observar um problema de transformação no extrato a seguir:

Figura 7 – Extrato de um problema de transformação

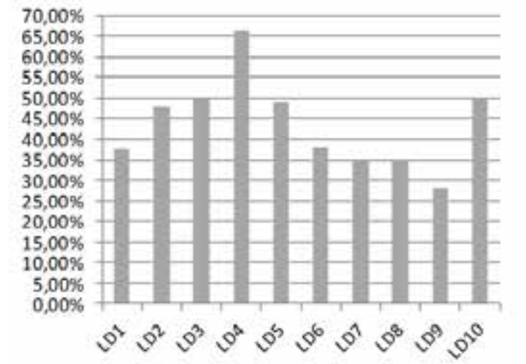
Dentro de um ano, Ana Maria terá o triplo da idade que tinha há nove anos. Qual é a idade de Ana Maria hoje? 14 anos

Fonte: Bianchini (2006, p. 118).

No momento da conversão desse problema, o estudante deve tomar como valor inicial a idade de "Ana Maria" e representá-la por X. A partir desse momento, é necessário estabelecer relações entre as informações do enunciado para chegar à equação que representa o problema. No caso do exemplo supracitado, temos como equação, após a conversão, a seguinte: "X + 1 = 3.(X – 9)", na qual "X + 1" representa a expressão “dentro de um ano” e “3.(X – 9)” representa a expressão “o triplo da idade que tinha há nove anos”.

Verificamos que, em todos os livros, a maior parte dos problemas de estrutura algébrica é formada por problemas de partilha. Destacamos os LD2, LD3, LD5 e LD10, que reservam cerca de metade dos problemas do capítulo analisado para esse tipo de problema. O destaque é ainda maior para o LD4, que possui 66,5% dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita sendo os problemas de partilha. Podemos observar esses percentuais no gráfico 4.

Gráfico 4 – Percentuais dos problemas de partilha por LD



Fonte: os autores

Um problema de partilha é considerado de estrutura algébrica, uma vez que leva o estudante a estabelecer relações entre as informações do enunciado no momento da conversão do problema para a linguagem algébrica. Além disso, um problema de partilha, como o do exemplo a seguir, tem um grau de dificuldade alto, tendo em vista que seu caráter de congruência, no momento da conversão, é considerado muito baixo, ou seja, a representação de chegada, em linguagem algébrica, não transparece na representação de partida, em linguagem natural. De acordo com Duval (2003), o estudante tem um trabalho cognitivo mais importante ao resolver problemas cujo caráter de congruência seja baixo. Podemos observar um problema desse tipo no extrato a seguir.

Figura 8 – Extrato de um problema de partilha


Em uma corrida de motos, um prêmio de R$ 350 mil foi distribuído entre os três primeiros colocados. O segundo colocado recebeu R$ 50 mil a mais que o terceiro. O primeiro colocado recebeu o dobro do segundo. Com base nisso:

a) Escreva uma sentença que represente o problema. (*Dica:* você precisa usar parênteses.)

b) Descubra quanto cada corredor recebeu.

Fonte: Carvalho e Reis (2009).

Para o estudante elaborar uma equação que represente o enunciado do exemplo anterior, ele pode, no primeiro momento, representar o valor do 3º colocado por "X". Quando o enunciado diz que "o segundo colocado recebeu R$ 50 mil a mais que o terceiro", se o estudante representou o valor do 3º colocado por "X", ele deve representar então essa expressão por "X + 50".

Quando o enunciado diz que "o primeiro colocado recebeu o dobro do segundo", isso não significa, como na sentença anterior, "2.X", e sim, "2.(X + 50)", ou "2.X + 100". Portanto, a expressão algébrica não expressa o que está na expressão em linguagem natural, ou seja, temos o que Duval (2003) chama de "não congruência". Outro fator de dificuldade é que a ordem da leitura não pode ser levada em consideração. A equação equivalente ao enunciado é: "X + (X + 2) + (X + 2 + 3) = 46".

Por fim, temos, na tabela a seguir, um resumo dos resultados encontrados em nosso trabalho.

Tabela 1 – Percentuais dos tipos de problemas por LD

	LD1	LD2	LD3	LD4	LD5	LD6	LD7	LD8	LD9	LD10
Falsos problemas	20%	38%	39%	12,5%	44%	46%	44%	34,5%	39%	15%
Problemas aritméticos	12,5%	10,5%	11%	4%	7%	5,5%	-	19%	5,5%	30%
Problemas de Lilavati	27,5%	3,5%	-	8,5%	-	5,5%	12,5%	-	5,5%	-
Problemas de sistema	2,5%	-	-	-	-	2,5%	6%	3%	14%	5%
Problemas de transformação	-	-	-	8,5%	-	2,5%	3%	9%	8%	-
Problemas de partilha	37,5%	48%	50%	66,5%	49%	38%	34,5%	34,5%	28%	50%

Fonte: os autores.

A partir da tabela 1, verificamos que o LD7 é o único que não aborda os problemas aritméticos, ou seja, problemas em que os procedimentos aritméticos são mais econômicos na solução do que os procedimentos algébricos. Observamos também que o LD3 e o LD5 são os únicos que abordam apenas problemas de partilha como problemas de estrutura algébrica, além de terem a distribuição das percentagens dos problemas bem parecida. O LD6 e o LD9 são os únicos livros que abordam todos os tipos de problemas identificados na pesquisa.

Acreditamos que o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita proposto nos LD poderia dar uma ênfase maior nos problemas de estrutura algébrica, em vez de enfatizarem os falsos problemas e os problemas de estrutura aritmética, como boa parte dos livros faz, e que pode ser observado na tabela 1. Um dos objetivos propostos nos PCN é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Entretanto, esse objetivo é alcançado, como aponta o próprio documento, por meio de situações diversificadas, e principalmente por meio da resolução de problemas. Pesquisas também apontam que uma das maneiras de desenvolver o pensamento algébrico nos estudantes é por meio da resolução de problemas de estrutura algébrica envolvendo equações polinomiais do 1º grau (MARCHAND; BEDNARZ, 2000 e CÂMARA, 2010), uma vez que levam o estudante a estabelecer relações entre as informações contidas no enunciado do problema.

Considerações finais

Este artigo tem como objetivo apresentar os resultados de um estudo que buscou investigar os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita nos LD de matemática do 7º ano aprovados no PNLD-2011. Adotamos como categorias de análise as propostas por Marchand e Bednarz (1999). Além das categorias propostas por essas pesquisadoras, pudemos identificar duas outras, que chamamos de “problemas de sistema” e “problemas de Lilavati”.

Em nossa análise, conseguimos identificar 311 problemas, ou seja, uma média de 31 problemas por LD. Entretanto, constatamos que existe uma grande variação na quantidade de problemas, de 18 a 46, entre os livros.

Encontramos falsos problemas em todos os LD, uma média de 33% de problemas dessa natureza. Marchand e Bednarz (2000) lembram que, apesar de ser representado por uma equação, esse tipo de problema não pode ser considerado de estrutura algébrica, por não levar o estudante, no momento da conversão, a estabelecer relações entre as informações do enunciado, uma vez que o caráter de congruência (DUVAL, 2003) é praticamente total.

A ênfase nesse tipo de problema pode revelar que, para o LD, o mais importante no trabalho com a álgebra escolar parece ser a resolução de equações, e não a sua aplicação na resolução de problemas. Em nossa pesquisa investigamos apenas os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Entretanto, acreditamos que seria interessante uma investigação para verificar qual a ênfase dada pelos LD nos processos de resolução de equações, em relação aos problemas.

Em nossa pesquisa, assim como nas de Marchand e Bednarz (1999), quase a metade (43%) dos problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita são problemas de partilha. Isso talvez ocorra em razão de esse tipo de problema ter sido fundamental para o surgimento da álgebra, como lembra Da Rocha Falcão (1997).

Contudo, vale lembrar que nem todos os problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau têm relação com esse objeto matemático, como os problemas aritméticos e os problemas de sistema.

Isso nos leva a questionar sobre, em que medida, nossos LD colaboram com a passagem, pelo aluno, da aritmética à álgebra. De fato, os resultados parecem indicar que, no caso dos LD de matemática brasileiros, o trabalho com problemas de estrutura algébrica se reduz a uma espécie de complemento, sendo privilegiada a exploração de técnicas para resolver equações.

Referências

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica: o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação). UFPE, Recife. 2007.

BERNARD, J.; COHEN, M. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As**

ideias da álgebra. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 10, p. 111-126.

BIANCHINI, E. **Matemática**. 7º Ano. São Paulo: Moderna. 2006

. BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 3, p. 23-36.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. MEC/SEF, Brasília, 1998.

CÂMARA, M. Estratégias Utilizadas por Alunos de 6º Ano na Resolução de Problemas de Estrutura Algébrica. In: **Anais do X ENEM**. Salvador. 2010.

CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. **Aplicando a Matemática**. 7º Ano. Tatuí: Casa Publicadora do Livro. 2009

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J. **Matemática na Medida Certa**. 7º Ano. São Paulo: Scipione. 2009.

COSTA, W. R. **Investigando a Conversão da Escrita Natural para Registros em Escrita Algébrica em Problemas Envolvendo Equações de Primeiro Grau**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). UFPE, Recife. 2010.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática.** 7º Ano. São Paulo: Ática. 2009.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D.; *Et al*. **Estudos em psicologia da educação matemática**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica**.** Campinas: Papirus, 2003.

FREITAS, M. **Equação do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP, São Paulo. 2002.

GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação** – NCE – IM/UFRJ, Rio de Janeiro. 2003.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática**. 7º Ano. São Paulo: FTD. 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. 7º Ano. São Paulo: Atual. 2009.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática**. 7º Ano. São Paulo: Moderna. 2009.

KIERAN, C. Equações e expressões em álgebra. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org). **As ideias da álgebra.** Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 9, p. 104-110.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P.; (Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual. 1995. cap. 13, p. 144-154.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In: **Bulletin AMQ,** Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ. 1999.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. Développement de l'algèbre dans un context de resolution de problems. In **Bulletin AMQ,** Vol. XL, N°4. Québec: AMQ, 2000.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática**: Ideias e Desafios. 7º Ano. São Paulo: Saraiva. 2009.

RIBEIRO, J. S. **Projeto Radix**: Matemática. 7º Ano. São Paulo: Scipione. 2009.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. 7º Ano. São Paulo: FTD. 2009.

SPERAFICO, Y. L. S.; GOLBERT, C. S. Análise de erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau. In: **Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul.** Caxias do Sul, 2012.

CAPÍTULO 14

O ENSINO DE FRAÇÕES EQUIVALENTES E AS QUANTIDADES INTENSIVAS E EXTENSIVAS[29]

Josué Ferreira dos Santos Filho
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

Diversos estudos, como Canova (2006), Cunha (2002), Esteves (2009), Merlini (2005), Nunes, Bryant, Pretzlik e Hurry (2003), Nunes e Bryant (1997), apontam problemas tanto no ensino como na aprendizagem dos números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nunes e Bryant, por exemplo, ao tratarem sobre a compreensão das frações pelas crianças, afirmam:

> Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

[29] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2015.

Canova (2006), ao investigar o entendimento de 51 professores dos anos iniciais do ensino fundamental acerca do conceito de fração, elaborou um instrumento diagnóstico em que os sujeitos responderam se era possível representar uma figura circular dividida em três partes não congruentes, sendo duas de mesma cor, por uma fração, e, caso afirmativo, qual seria essa fração. Ao analisar os resultados, a pesquisadora concluiu que 43% dos sujeitos responderam que a figura poderia ser representada por uma fração e a fração seria 2/3.

Avaliações externas em larga escala no Brasil, como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) em nível nacional, e o SAEPE (Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco) em nível estadual, também apresentam resultados desfavoráveis em relação ao ensino e à aprendizagem dos números racionais.

Santos (2011), por exemplo, investigou estratégias utilizadas por estudantes da rede municipal do Recife na resolução de questões do SAEPE sobre números racionais e constatou que, tanto nos itens que elaborou para sua pesquisa, como no resultado do SAEPE/2008, o percentual de acerto não chegou a 50%.

Observando a tabela 1, que apresenta o percentual de acerto por descritores, do SAEPE/2011, para o 5° ano do ensino fundamental, verificamos que nenhum descritor ficou acima de 50%.

Tabela 1 – Percentual de acertos nos itens sobre números racionais no SAEPE/2011

Descritor	Habilidade	Percentual de acerto
D 20	Identificar diferentes representações de um mesmo número racional.	**26,1%**
D 21	Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica.	**42,2%**
D 22	Resolver problema utilizando a escrita decimal de cédulas e moedas do sistema monetário brasileiro.	**48,4%**
D 23	Resolver problema com números racionais expressos na forma de fração ou decimal, envolvendo diferentes significados.	**44,6%**
D 24	Resolver problema envolvendo noções de porcentagem (25%, 50%, 100%).	**26,2%**

Fonte: Santos Filho (2015, p. 10)

São números preocupantes quanto ao ensino e à aprendizagem dos números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental.

CAPÍTULO 14

ante, em nossa dissertação de mestrado, inves-
os iniciais julgam propostas de ensino[30] para o
, tomando por base as expectativas de aprendi-
iculares de Matemática de Pernambuco

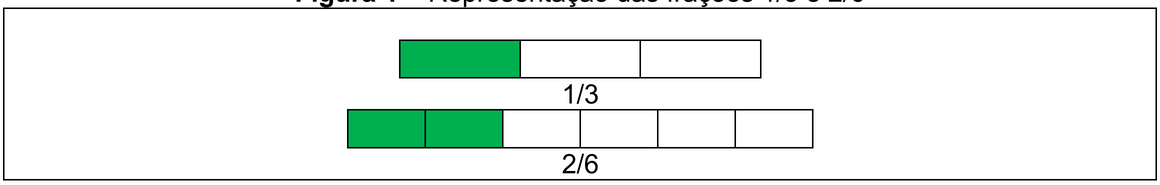
corte para apresentar os resultados de duas pro-
dades intensivas e extensivas, referentes à
cionar frações equivalentes em situação contex-

Quantidades intensivas e extensivas

Nunes *et al*. (2003) alertam que, ao tratar de equivalência de fração em contexto de quantidades extensivas em situações de parte-todo, a classe de equivalência vai depender do tamanho do todo (ou da unidade), ou seja, para obter frações equivalentes, nesse contexto, os todos devem ser equivalentes.

Vejamos o exemplo a seguir, em que aparecem representações das frações 1/3 e 2/6.

Figura 1 – Representação das frações 1/3 e 2/6



Fonte: Santos Filho (2015, p. 33)

Nesse caso, as frações 1/3 e 2/6 não pertencem a uma mesma classe de equivalência, porque os dois todos não são equivalentes.

Já a equivalência de frações em contexto de quantidades intensivas pode ocorrer entre duas frações que se referem a todos diferentes. Por exemplo, se fizermos uma jarra de suco usando um copo de concentrado para dois copos de água, o suco terá a mesma concentração e gosto que uma jarra maior de suco feito com dois copos de concentrado e quatro copos de água. Em situações de quantidades intensivas, 1/2 e 2/4 são equivalentes mesmo que o todo não seja idêntico.

[30] Vamos considerar proposta de ensino como uma sequência de ensino, ou mesmo um exemplo que pode ser utilizado, para introduzir as ideias de determinado conteúdo específico ou para aprofundá-lo.

Essas considerações de Nunes *et al*. (2003) acerca de equivalência de frações em quantidades extensivas e intensivas foi objeto de especial atenção em nossa pesquisa, uma vez que forneceu subsídios importantes para investigar o conhecimento do professor dos anos inicias, na acepção de Ball, Thames e Phelps (2008), quanto ao ensino de frações equivalentes em contexto de quantidades intensivas e extensivas.

Conhecimento do professor

Interessado em investigar os conhecimentos necessários a um professor em sua profissão, Shulman (1986) identifica três domínios no conhecimento do professor: o conhecimento específico do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

Ball, Thames e Phelps (2008) reconhecem que o conhecimento pedagógico do conteúdo teve um grande impacto sobre a comunidade científica, e várias pesquisas foram desenvolvidas abordando esse aspecto do conhecimento do professor.

No entanto, seu potencial foi pouco explorado, uma vez que, para muitos, sua natureza e seu conteúdo eram óbvios. Isso tornou o conhecimento pedagógico do conteúdo pouco individualizado, sem uma definição e sem fundamentos empíricos, o que resultou por limitar a sua utilidade.

É na intenção de ampliar e aprofundar o trabalho de Shulman (1986), que Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o modelo teórico "conhecimento matemático para o ensino", que, segundo eles, é o conhecimento matemático de que os professores precisam para realizar efetivamente o seu trabalho como professor de Matemática.

Ball, Thames e Phelps (2008) fazem uma releitura nos dois grandes domínios do conhecimento propostos por Shulman (1986) – conhecimento específico do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo – e sugerem um refinamento desses domínios, dividindo-os em três subdomínios cada um.

Nessa perspectiva, o conhecimento específico do conteúdo poderia ser subdividido em conhecimento comum do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do horizonte do conteúdo. Já o conhecimento pedagógico do conteúdo poderia ser subdividido em conhecimento do conteúdo e estudantes, conhecimento do conteúdo e ensino e conhecimento do conteúdo e currículo.

Aspectos metodológicos

Nossa pesquisa de mestrado se constituiu em um estudo descritivo de caráter diagnóstico em que analisamos os dados coletados, tanto quantitativamente como qualitativamente, por meio de um questionário, que foi nosso instrumento diagnóstico.

O questionário foi composto por vinte propostas de ensino, quatro para cada uma das cinco expectativas de aprendizagem, presentes nos Parâmetros Curriculares de Matemática de Pernambuco, referentes ao trabalho com os números racionais nos anos iniciais do ensino fundamental.

No questionário, perguntamos ao professor se a proposta é correta ou errada. Sendo correta, questionamos se ele a usaria em sala de aula; se poderia usar em sala de aula; ou se não usaria em sala de aula.

O procedimento de o professor, ao julgar a proposta como correta, associá-la à sua prática em sala de aula foi de grande relevância para a pesquisa, pois contribuiu no sentido de depurar o instrumento diagnóstico, identificar vertentes do conhecimento matemático para o ensino e analisar possíveis entraves na compreensão de algumas ideias relativas aos números racionais presentes nas propostas de ensino.

Assim, o professor, ao julgar a proposta de ensino, teria que escolher uma das alternativas: "A proposta está correta, e eu certamente usaria em sala de aula"; "A proposta está correta, e eu poderia usar em sala de aula"; "A proposta está correta, mas eu não usaria em sala de aula"; "A proposta está errada, e eu jamais usaria em sala de aula". Depois de escolhida a alternativa, havia um espaço para o professor justificar a resposta.

Cabe ressaltar que, no momento da aplicação do questionário, pedimos aos sujeitos que justificassem suas respostas da melhor forma possível, pois seria muito importante para a análise dos dados da pesquisa.

Participaram da pesquisa 70 professores do 4º ano e 82 professores do 5º ano, cujos questionários numeramos de 01 a 70 e 01 a 82, respectivamente. Cada sujeito foi identificado pela letra “P” de professor e uma sequência de três algarismos. O das centenas representa o ano em que o professor leciona e os dois restantes representam o número do questionário. Por exemplo, (P503) é um professor do 5º ano, cujo número do questionário é 03.

Análise dos resultados

A análise dos resultados de cada proposta se deu por meio da coordenação de duas perspectivas de análise – quantitativa e qualitativa – em dois momentos distintos:

1º Momento: analisamos o resultado dos professores que, ao julgarem a proposta, apresentaram resposta diferente daquela contida na análise prévia do questionário no que diz respeito a estar a proposta correta ou errada, e suas justificativas permitiram identificar possíveis entraves para o ensino dos números racionais.

2º Momento: analisamos o resultado dos professores que, ao julgarem a proposta, apresentaram resposta idêntica à obtida na análise prévia do questionário no que diz respeito a estar a proposta correta ou errada e, na intenção de identificar vertentes do conhecimento matemático para o ensino, conforme Ball, Thames e Phelps (2008), classificamos suas justificativas em adequada consistente, adequada inconsistente ou inadequada. Observemos o quadro a seguir.

Quadro 1 – Classificação das justificativas

Adequada consistente	Justificativa que manifesta vertentes do conhecimento matemático para o ensino.
Adequada inconsistente	Justificativa que não está errada, mas não apresenta elementos suficientes que garantem a manifestação de vertentes do conhecimento matemático para o ensino.
Inadequada	Justificativa não pertinente, não apropriada, ou errada do ponto de vista da Matemática.

Fonte: Santos Filho (2015)

Apresentamos, a seguir, a análise dos resultados referentes ao trabalho com as frações equivalentes em contexto de quantidades intensivas e extensivas. Foram duas propostas de ensino, C e D, acerca da expectativa de aprendizagem “Relacionar frações equivalentes em situação contextualizada”.

Proposta C: **“Apresentar à criança a seguinte situação: Numa mesa há três jarras distintas A, B e C. Na jarra A temos suco de laranja com 1/5 de concentrado e 4/5 de água; na jarra B também há suco de laranja com 1/5 de concentrado e 4/5 de água; se juntarmos os conteúdos das jarras A e B na jarra C vamos obter suco de laranja com 2/5 de concentrado”.**

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a ideia de frações equivalentes em quantidades intensivas.

Ela foi considerada errada na análise prévia do questionário, porque em situações de quantidades intensivas não é possível adicionar frações da mesma forma que em situações de quantidades extensivas. Sendo assim, a quantidade de concentrado na jarra C continua sendo 1/5, e não 2/5 como sugere a proposta.

A tabela a seguir apresenta como os professores julgaram a proposta:

Tabela 2 - Resultado referente à proposta C

Julgaram a proposta “c”	Professores do 4º e 5º ano
Correta, e eu certamente usaria em sala de aula.	18%
Correta, e eu poderia usar em sala de aula.	24%
Correta, mas eu não usaria em sala de aula.	18%
Errada, e eu jamais usaria em sala de aula.	21%
Não assinalaram alternativas.	19%

Fonte: Santos Filho (2015, p. 107)

1º Momento: A tabela 2 revela que 60% dos professores julgaram a proposta correta.

São dados preocupantes, uma vez que as quantidades intensivas se referem às medidas baseadas na relação entre duas quantidades diferentes, portanto, não suscetíveis de adição.

Os sujeitos que julgaram a proposta correta somaram 1/5 + 1/5 sem considerar os aspectos intensivos das quantidades envolvidas na situação:

(P466): “Basta juntar 1/5 + 1/5 = 2/5”.

(P517): "Soma de fração com o mesmo denominador. Soma-se apenas o numerador para obter-se o todo (resultado)".

Essa compreensão errônea, acerca da equivalência de frações em quantidades intensivas, está presente na prática pedagógica desses docentes:

(P510): "Com o próprio recipiente (três jarras) e os sucos nas mesmas proporções faria a experiência e a conta de adição".

(P535): "Acredito que essa proposta seria bem utilizada em sala de aula".

Já os que julgaram a proposta "correta, mas eu não usaria em sala de aula" (18%, conforme a tabela 2), justificaram:

(P422): "Acho muito alto o nível para os alunos".

(P571): "Ficaria muito complicado para o nível deles".

Tais sujeitos julgaram uma proposta errada como correta e justificaram que não usariam em sala de aula porque a proposta é complicada para a criança. Assim, os docentes que julgaram a proposta correta não demonstram conhecimento matemático para o ensino quanto ao trabalho de frações equivalentes em quantidades intensivas.

2º Momento: A tabela 2 informa que 21% dos professores julgaram a proposta errada. Desse percentual, menos da metade (47%) apresentaram justificativas, cuja classificação consta na tabela a seguir:

Tabela 3 – Classificação das justificativas de professores que julgaram a proposta errada

Apresentaram justificativa	Adequada consistente	Adequada inconsistente	Inadequada
47%	7%	33%	60%

Fonte: Santos Filho (2015).

Conforme a tabela 3, foram 7% de justificativas classificadas em adequada consistente:

(P458): "Errado, pois a proporção é a mesma. Continuaria a mesma proporção 8/10 de água para 2/10 de suco. Ou 4/5 de água e 1/5 de suco".

Este sujeito demonstra conhecimento matemático para o ensino, pois compreende aspectos relacionados à equivalência de frações em quantidades intensivas.

Por outro lado, 33% dos professores, conforme tabela 3, apresentaram justificativa adequada inconsistente:

(P410): "Não usaria, porque acho que está errada".

(P508): "Porque essa afirmação não condiz com o correto".

Tais justificativas não estão erradas. No entanto, nada dizem sobre a equivalência de frações em quantidades intensivas, não manifestando vertentes do conhecimento matemático para o ensino.

Houve, ainda, 60% que apresentaram justificativa inadequada:

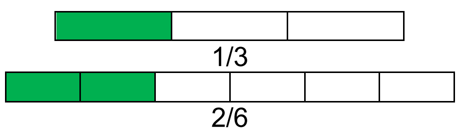
(P456): "Não, pois 2/5 é inferior a 1/5 + 4/5".

(P553): "Para que o problema tivesse aplicação prática, a jarra teria de ser maior, isso comprometeria o entendimento".

Portanto, os sujeitos que julgaram a proposta errada, mas cujas justificativas foram classificadas em adequadas inconsistentes ou inadequadas, não demonstraram conhecimento matemático para o ensino quanto à equivalência de fração em quantidades intensivas.

Proposta D: **Tomando por base as figuras a seguir, explicar para a criança que as frações 1/3 e 2/6 são equivalentes.**

Figura 2 – Representação das frações 1/3 e 2/6



Fonte: Santos Filho (2015, p. 33).

O objetivo da proposta foi investigar como os professores julgam uma situação de ensino que explora a equivalência de frações em quantidades extensivas em situação de parte-todo.

A proposta, na análise prévia do questionário, foi considerada errada, porque as duas figuras, cujas partes coloridas são representadas pelas frações 1/3 e 2/6, só pertenceriam a uma classe de equivalência de frações se fossem congruentes.

Tabela 4 - Resultado referente à proposta D

Julgaram a proposta “D”	Professores do 4º e 5º ano
Correta, e eu certamente usaria em sala de aula.	34%
Correta, e eu poderia usar em sala de aula.	25%
Correta, mas eu não usaria em sala de aula.	13%
Errada, e eu jamais usaria em sala de aula.	12%
Não assinalaram alternativas.	16%

Fonte – Santos Filho, 2015, p. 109

1º Momento: De acordo com a tabela 4, quase três quartos dos professores julgaram a proposta correta.

Nunes *et al*. (2003), chamam a atenção para o fato de que, ao tratar de equivalência de frações em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade).

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta correta não compreendem que o tamanho do todo compromete os aspectos extensivos das quantidades envolvidas na situação:

(P466): “Basta multiplicar 1x2=2 e 3x2=6, comprovando a exatidão”.

(P555): “Porque para realizar equivalência de uma fração realmente multiplica-se o denominador e o numerador por um mesmo número maior que 1”.

São sujeitos que obtém frações equivalentes por meio de um algoritmo, mas desconhecem os aspectos extensivos da equivalência de frações em situação de parte-todo.

Essa compreensão errônea acerca da equivalência de frações está presente na prática pedagógica destes docentes:

(P426): “Sim usaria, pois a atividade está de fácil compreensão”.

(P578): “Possivelmente eu usaria inicialmente uma pizza dividida em 3 partes iguais. Facilitaria a compreensão inicial e só depois usaria a barra”.

A tabela 4 também informa que 13% dos sujeitos julgaram a proposta “correta, mas não usaria em sala de aula”:

(P452): “As crianças teriam dificuldade para entender”.

(P509): “Meu aluno não iria compreender. Está avançado para o nível dele”.

Esses professores não compreendem a proposta, julgam-na correta e justificam que não a usariam em sala de aula porque é complicada para a criança.

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta correta apresentam dificuldades em compreender a equivalência de frações em quantidades extensivas numa situação de parte-todo.

2º Momento: A tabela 4 informa que 12% dos professores julgaram a proposta errada. Desse percentual, 47% apresentaram justificativas, cuja classificação está na tabela a seguir:

Tabela 5 - Classificação das justificativas dos professores que julgaram a proposta errada

Apresentaram justificativa	Adequada consistente	Adequada inconsistente	Inadequada
47%	56%	0%	44%

Fonte: Santos Filho (2015).

A tabela 5 informa que 56% dos sujeitos tiveram suas justificativas classificadas em adequada consistente, pois manifestam vertentes do conhecimento matemático para o ensino:

(P417): "Tomando por base as figuras representadas observamos que elas não são equivalentes".

(P425): "Pois as figuras deveriam ser iguais, de mesmo tamanho, mas uma dividida em 3 e outra em 6".

(P553): "Usaria esta situação com retângulos de tamanhos iguais, o que visualmente não é o caso".

Esses docentes compreendem que na equivalência de frações em contexto de quantidades extensivas em situação de parte-todo, a classe de equivalência depende do tamanho do todo (ou da unidade).

A tabela 5 ainda informa que 44% dos professores apresentaram justificativa inadequada:

(P432): "Não consigo compreender".

(P523): "Não procede. As crianças não entenderiam".

São justificativas, portanto, que não apresentam um conteúdo pertinente.

Assim, os sujeitos que julgaram a proposta errada, mas tiveram suas justificativas classificadas em inadequada, não demonstraram conhecimento matemático para o ensino concernente à equivalência de fração em quantidades extensivas.

Considerações finais

As propostas de ensino analisadas, C e D, buscaram identificar conhecimentos, na acepção de Ball, Thames e Phelps (2008), de professores dos anos iniciais do ensino fundamental, quanto ao trabalho com frações equivalentes em quantidades intensivas e extensivas.

Na proposta C, que investigou a ideia de frações equivalentes em quantidades intensivas, 60% dos professores não compreenderam que, no contexto de quantidades intensivas, não é possível adicionar frações. Já na proposta D, que investigou a equivalência de frações em quantidades extensivas, três quartos dos professores não observaram o tamanho do todo, e julgaram a proposta considerada errada, na análise prévia, como correta.

São números preocupantes, uma vez que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) reconhecem que uma das dificuldades de o estudante compreender o conceito de fração está em entender a noção de equivalência. Ball, Thames e Phelps (2008) consideram fundamental que os professores conheçam os conteúdos que ensinam, porque, se os professores não conhecem bem determinado conteúdo como poderão ajudar seus alunos a aprendê-lo?

Estes resultados comprovam que os sujeitos participantes da pesquisa, em geral, não demonstram conhecimento matemático para o ensino no que diz respeito ao trabalho de equivalência de frações em quantidades intensivas e extensivas.

Assim, faz-se necessário rever a questão da formação, tanto a inicial quanto a continuada, de professores que ensinam nos anos iniciais do ensino fundamental, sobretudo, quanto ao seu conhecimento de Matemática.

Referências

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. (2008). **Content Knowledge for Teaching:** What Makes It Special? Journal of Teacher Education, *59(5)*, 389-407.

BRASIL. Ministério da educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, 1997.

CANOVA. R. F. **Crença, concepção e competência dos professores do 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2006.

CUNHA, M. R. K. **A quebra da unidade e o número decimal:** um estudo diagnóstico nas primeiras séries do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2002.

ESTEVES, A. K. **Números decimais na escola fundamental:** interações entre os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. UFMS/MS 2009.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Dissertação Mestrado em Educação Matemática, PUC/SP, 2005.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U.; HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco** / Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd, Juiz de Fora, 2012.

SANTOS, R. S. **Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos da rede municipal do Recife na resolução de questões do Saepe sobre números racionais.** Dissertação de Mestrado. Recife, UFPE, 2011.

SANTOS FILHO J. F. **Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, UFPE, 2015.

SHULMAN, L. **Those Who Understand:** Knowledge Growth in Teaching. Educational Researcher: Washington, v. 15, n.2, February, 1986. p.4-14.

CAPÍTULO 15

O GEOGEBRA E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: O CASO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS[31]

André Pereira da Costa
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

A relevância da Geometria para o homem, no que diz respeito ao seu desenvolvimento humano e à constituição de sua cidadania, é difícil de ser avaliada, tendo em vista que a Geometria é empregada em inúmeras situações, desde utilizações mais cotidianas até mesmo em aplicações mais sofisticadas, dentro e fora da sala de aula. Para tanto, faz-se necessário refletir sobre o modo como esse conhecimento matemático está sendo tratado nos mais diversos espaços de escolarização, em todos os seus níveis, que se constituem como ambientes importantes para a introdução dos estudantes no conhecimento geométrico (LIMA BORBA; PEREIRA DA COSTA, 2018).

É importante ressaltar que a Geometria, durante anos, foi excluída da abordagem dos conteúdos matemáticos escolares, ficando, também, ausente nos livros

[31] Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado do primeiro autor, sob a orientação do segundo, defendida em 2016.

didáticos, nos guias de orientação curricular e nos cursos de formação de professores de Matemática. Tal fato gerou a ausência de embasamento geométrico em alunos e professores (LORENZATO, 1995; PEREIRA, 2001; CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

Na estrutura curricular das instituições brasileiras de ensino, a Geometria enfrentou mudanças influenciadas pelo formalismo derivado da tendência lógica e dedutiva do raciocínio, especialmente nos anos de 1960, pela ênfase do "algebrizar" geométrico, consequência do Movimento da Matemática Moderna, e pela ilustração de aspectos e operações da Álgebra, fatores esses que favoreceram a exclusão da Geometria no ensino da Matemática (ITACARAMBI; BERTON, 2008).

Outro fator, que também contribuiu para a negligência com a Geometria, foi a Lei de Diretrizes e Bases do Ensino de 1º e 2º graus de 1971, a lei 5.692/71. A partir desse período, tal lei concedeu autonomia aos estabelecimentos de ensino do país a elaborarem os programas dos diversos componentes curriculares, concedendo a muitos professores, que não se sentiam preparados para abordar conteúdos geométricos em seus programas, a possibilidade de excluir a Geometria de suas abordagens de conteúdo em sala de aula (PAVANELLO, 1993).

Por outro lado, tal fato é um cenário do passado que vem sendo superado, principalmente a partir das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), que passaram a enfatizar o trabalho com a Geometria, somando-se às diversas pesquisas da área de Educação Matemática, em especial as que se relacionam ao uso das tecnologias no ensino da Geometria, que surgem a cada dia.

Atualmente, é possível perceber que os livros didáticos já apresentam uma abordagem coerente acerca dos conteúdos geométricos trazendo, inclusive, exemplos que articulam os outros conteúdos/conceitos matemáticos relacionados à Geometria. No entanto, na maioria das vezes, muitos docentes acabam não abordando a Geometria em suas aulas, ou a abordam de maneira incoerente, por apresentarem várias dificuldades conceituais nesse campo da Matemática (BARBOSA, 2011).

Todavia, apesar de os documentos curriculares nacionais (BRASIL, 1998; 2018) e de as pesquisas na área educacional destacarem a importância do conhe-

CAPÍTULO 15

nento pleno dos estudantes, a Geometria tem si-
de forma equivocada na sala de aula da escola
9). Tal fenômeno pode ser justificado pela ausên-
lucacionais no campo geométrico e o curso diário

ciam o distanciamento progressivo entre as pes-
e a realidade da sala de aula é a dificuldade de
nciadas nas pesquisas com a sua aplicação, do
escolar. Como consequência, a aprendizagem da
prometida (CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

Nesse cenário, avaliações em larga escala, a exemplo do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE, 2015), têm evidenciado que a maioria dos estudantes está concluindo o ensino fundamental com um saldo negativo em determinadas expectativas de aprendizagem que abrangem a Matemática. Na Geometria, por exemplo, apenas 18,3% dos alunos conseguem resolver problemas utilizando relações métricas no triângulo retângulo, e 22,1% conseguem identificar propriedades dos triângulos a partir da comparação de medidas dos ângulos e dos lados (PERNAMBUCO, 2015).

Dessa forma, os baixos desempenhos apresentados pelos discentes nessas avaliações podem constituir um forte indício de que a Geometria continua sendo trabalhada de forma inadequada nas aulas de Matemática, isto é, que pouca importância é dada à Geometria pelas escolas. Isso significa que esse conhecimento é ensinado de forma que não possibilita uma aprendizagem significativa.

É importante destacar que, além do modo como certo conteúdo é abordado em sala de aula ou o fato de não ser abordado, existem outros fatores que contribuem para que o aluno apresente dificuldades conceituais e de aprendizagem. Algumas das dificuldades podem surgir em decorrência da natureza dos objetos que estão em jogo, de dificuldades intrínsecas que, geralmente, não são suficientemente consideradas em profundidade. Ao pensar possíveis justificativas para erros e dificuldades conceituais de aprendizagem, faz-se necessário ter essa reflexão presente: o que vem da complexidade própria daquele objeto de saber e que pode ser reforçado ou desestabilizado, pela maneira como é trabalhado em sala de aula, e o que por sua natureza não é complicado, mas que ou está ausente ou é trabalhado de maneira aligeirada ou equivocada.

Nesta pesquisa, consideramos como ponto de partida analisar as possibilidades reais de conexão entre os resultados de natureza teórica, derivados dos estudos educacionais, e seus efeitos na escola básica. Em particular, objetivamos investigar os efeitos de uma sequência didática para a construção do conceito de quadriláteros notáveis, utilizando o software de Geometria Dinâmica GeoGebra como recurso didático. Para isso, utilizamos como fundamentação teórica o modelo de Van-Hiele sobre o desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, centrando nos níveis iniciais. Desse modo, foi possível verificar até que ponto o uso do GeoGebra como recurso didático contribuiu com o progresso entre os níveis de pensamento geométrico dos estudantes de uma turma do sexto ano do ensino fundamental.

O modelo de Van-Hiele

Inspirados pela teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget, os pesquisadores holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf desenvolveram a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, como o produto de suas teses de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais pela Universidade Real de Utrecht, na Holanda.

A partir das discussões de Piaget sobre a evolução da inteligência, Van-Hiele (1957) percebeu a existência de diferentes níveis de pensamento sobre os conceitos de Geometria, explicando que o estudante avança por diversos níveis de pensamento no seu desenvolvimento, iniciando pelo reconhecimento das figuras geométricas, a partir de suas aparências físicas, e concluindo no estudo abstrato da Geometria (OLIVEIRA, 2012).

Todavia, diferentemente de Piaget (1999), que estabeleceu intervalos de idades mais ou menos próximas para estágios de progresso da inteligência, Van-Hiele (1957) observa que os níveis de progresso do pensamento geométrico são influenciados pela educação e incentivo norteados pela escola, e não pela maturação biológica e pela idade do sujeito.

Nesse sentido, as experiências de ensino, as metodologias, as intervenções pedagógicas, os recursos didáticos empregados, os instrumentos avaliativos adotados e as temáticas trabalhadas em sala de aula constituem aspectos fundamentais dos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria. Além disso, o docente deve considerar o nível de pensamento do estudante no processo de organização, de planejamento e de construção desses aspectos nas situações didáticas.

O modelo está organizado em cinco níveis de desenvolvimento, de modo que, ao mesmo instante em que os estudantes estudam Geometria, eles evoluem a partir de uma sequência hierárquica desses níveis de aprendizagem de conceitos, em que cada nível possui sua especificidade, marcada por um elo entre a linguagem e os objetos de estudo (VAN DE WALLE, 2009). Assim, o aluno se move do nível inicial (primeiro nível) até o mais avançado (quinto nível), por intermédio de situações educacionais adequadas, organizadas pelo professor (CROWLEY, 1994).

Além disso, a ascensão de um nível para outro depende das vivências desenvolvidas na escola, por meio de atividades apropriadas propostas em sala de aula. Assim, dito de outra forma, o modelo de Van-Hiele sugere que a mudança de um nível “menos avançado” para um nível “mais avançado” depende mais de uma aprendizagem coerente do que da idade ou da maturação biológica do estudante (NASSER; SANT’ANNA, 2010).

Para Van-Hiele (1957), no primeiro nível, os alunos reconhecem as figuras geométricas pelas suas aparências ou formas globais, e não por suas propriedades ou características próprias, isto é, o pensamento ocorre, geralmente, por meio de considerações visuais. Assim, os objetos da Geometria são considerados em sua totalidade, sem considerações claras sobre as propriedades dos seus elementos. Então, as figuras geométricas são distinguidas pelo aspecto global, sendo possível chamá-las de triângulo, quadrado, entre outros. No entanto, os estudantes não compreendem as propriedades que possibilitam a sua identificação.

O aluno consegue, por exemplo, identificar um quadrado ou um retângulo e, inclusive, é capaz de os construir sem falhas, mas um quadrado não é considerado como um retângulo, tendo em vista que divergem em suas aparências. Desse modo, as atividades propostas em sala de aula pelo professor devem promover a evolução para o segundo nível, no qual os estudantes reconhecem as figuras pelas suas propriedades.

Assim, no nível seguinte, o aluno irá distinguir um losango pelas suas propriedades (lados com medidas iguais, diagonais perpendiculares que se interceptam no ponto médio) e não por sua aparência física. Van-Hiele (1957) discute ainda que na transição do primeiro nível para o segundo, a manipulação de figuras leva o estudante à elaboração de uma estrutura mental que desenvolve o seu pensamento, promovendo a passagem entre os dois níveis. É típico do primeiro nível que os alunos utilizem um vocabulário geométrico, realizem a identificação de determinadas formas e a reprodução de certa figura (KALEFF; HENRIQUES; FIGUEIREDO; REI, 1994).

No segundo nível, o aluno não reconhece mais as figuras pelas suas aparências, mas sim, por suas propriedades gerais. Dessa forma, elas são consideradas como portadoras de propriedades. Assim, se o estudante desenha em seu caderno, mesmo com falhas, um quadrilátero notável, e se essa figura apresenta todos os ângulos retos, então ele é capaz de considerar o quadrilátero notável como um retângulo. Todavia, nessa fase, o aluno ainda não consegue ordenar logicamente as propriedades das figuras, o que faz com que, por exemplo, um quadrado não seja reconhecido como um losango (CÂMARA DOS SANTOS, 2009).

Novamente, Van-Hiele (1957) recomenda que, se o professor possibilitar a manipulação de figuras geométricas pelo aluno, tal fato promoverá o avanço do estudante para o próximo nível de pensamento geométrico, que é definido pela ordenação lógica das propriedades das figuras, isto é, pelo estabelecimento de relações entre as características das figuras geométricas.

No terceiro nível de Van-Hiele, o aluno consegue ordenar logicamente as propriedades das figuras, percebendo que elas se deduzem umas nas outras, isto é, que elas podem se articular. Desse modo, ao assinalar as características das figuras geométricas, o estudante desenvolve observações e experimentações. Como exemplo disso, destacamos o estabelecimento de propriedades empregadas para reconhecer formas e classes (BARBOSA, 2011).

Então, nesse nível, o sujeito é capaz, por exemplo, de estabelecer uma relação entre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer (que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º) com outra propriedade, que é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero notável qualquer (na qual a soma das medidas desses ângulos é igual a 360º). Além disso, o estudante reconhece um quadrado como um losango, pois percebe que, em certa situação, esses quadriláteros apresentam as mesmas propriedades. Todavia, ele ainda não compreende o significado próprio da demonstração (CÂMARA DOS SANTOS, 2001).

No quarto nível, o aluno é capaz de compreender a dedução como um meio de situar a teoria da Geometria no contexto de um sistema axiomático, além de entender o significado intrínseco da demonstração. A correlação e a função de termos não definidos, definições, axiomas, postulados e teoremas também são compreendidos. Desse modo, o estudantes consegue construir vários tipos de demonstrações, por diversos caminhos, além de estabelecer a distinção entre uma proposição e sua recíproca, motivo pelo qual as definições e os axiomas são essenciais, sendo possível distinguir quando uma condição é suficiente e também quando é necessária. Tais aspectos são características do processo dedutivo. Ainda nesse nível, o estudante é capaz de reconhecer um paralelogramo que tem quatro lados congruentes como um losango (ONTARIO, 2006).

No quinto nível, que é definido por processos basicamente matemáticos, o discente consegue compreender diferentes sistemas axiomáticos, bem como construir a diferença entre uma propriedade e sua recíproca. Existe uma análise das diferenças e ligações entre sistemas axiomáticos distintos. Como exemplo, podemos citar a Geometria Esférica, que possui seu próprio grupo de teoremas e axiomas e se norteia em linhas delineadas sobre uma esfera, ao invés de um plano. Nesse sentido, o estudante é capaz de trabalhar com geometrias não euclidianas. Além disso, o sujeito desenvolve um olhar abstrato do campo geométrico. No quinto nível, o aluno é um especialista em Matemática em nível de graduação, que estuda Geometria como área do conhecimento matemático (VAN DE WALLE, 2009).

Para Van-Hiele (1957), o progresso do pensamento geométrico não está relacionado apenas à maturidade ou à idade do sujeito, mas sim às atividades educativas e às situações didáticas organizadas pelo professor.

O software GeoGebra

O software GeoGebra foi produzido em 2001 pelo austríaco Markus Hohenwanter, pesquisador da Universidade de Salzburg (Áustria). No entanto, logo depois desse período, o programa passou a ser aprimorado e melhorado por um grupo de programadores da Universidade de Florida Atlantic (Estados Unidos), sob a coordenação de Markus Hohenwanter e Judith Hohenwanter. O nome surgiu a partir da fusão dos termos ***Geo****metria* e *Ál****gebra***.

Para Hohenwanter e Hohenwanter (2009, p.6), o GeoGebra é "[...] um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas [...]". Nesse sentido, esse software não se limita apenas ao ensino da Geometria, podendo ser utilizado no ensino de outras áreas do conhecimento matemático. Logo, além de dinâmico, também é um programa didático, podendo ser baixado gratuitamente na internet em escolas, como também na própria casa do estudante.

O GeoGebra tanto apresenta os recursos tradicionais de um programa de Geometria Dinâmica (como pontos, retas, segmentos de reta, semirretas, etc.), como também possibilita inserir, de forma direta, equações e coordenadas. Dessa forma, esse software apresenta a possibilidade de analisar um mesmo objeto matemático por meio de três diferentes perspectivas, isto é, a partir de três representações: algébrica, geométrica e gráfica, que mantêm um diálogo dinâmico entre si (CATTAI, 2007; HOHENWANTER; HOHENWANTER; LAVICZA, 2008).

No software, é possível construir pontos, retas, segmentos de reta, semirretas, vetores, seções cônicas, funções. As funções podem ser modificadas dinamicamente, mesmo que já tenham sido concluídas pelo estudante. Assim, é possível estabelecer propriedades dos objetos de estudo (PEREIRA DA COSTA; LACERDA, 2012).

No GeoGebra é possível construir representações de figuras geométricas de forma simples, utilizando apenas o mouse do computador. Mesmo sendo concluídas as construções dos objetos geométricos, o estudante pode mover e manipular de diferentes formas, por meio do recurso *arrastar*. Também é possível realizar medições de áreas, de comprimentos, de perímetros, de ângulos, de distâncias, de inclinações, etc.; e modificar os objetos produzidos, sendo que a atualização das medições ocorre de forma imediata.

Assim, o GeoGebra é um software de fácil utilização, podendo contribuir com a aprendizagem dos estudantes, além de incentivar a discussão e a socialização de informação entre eles. O professor de Matemática pode usar o GeoGebra em diversas atividades de sala de aula, em especial, na construção de representações de figuras. Portanto, pode ser um relevante recurso para os estudantes registrarem suas aprendizagens, servindo, assim, como um instrumento de avaliação por parte do docente.

A sequência didática

A sequência didática foi aplicada utilizando o GeoGebra como recurso. Desse modo, a sequência foi dividida em três fases: a) introdutória, b) intermediária e c) avançada. Em todas essas fases, os estudantes tiveram a liberdade de elaborar seus próprios caminhos de solução. Em cada fase, também, os alunos foram orientados a analisarem as estratégias elaboradas por eles na realização de cada atividade, refletindo sobre o seu desempenho. Assim, a sequência possibilitou a reflexão do estudante acerca de suas construções, configurando-se um importante recurso analítico.

Na conclusão de cada fase, os estudantes foram orientados a entregar ao aplicador da sequência (o professor da disciplina), as fichas de atividades, que continham os seus registros escritos. É importante destacar que o GeoGebra possui a opção de gravar (salvar) as ações realizadas pelos alunos. Então, as atividades de cada aluno foram gravadas (salvas) em dispositivo portátil de armazenamento (*HD externo*), ação que nos possibilitou fazer um acompanhamento e uma apreciação das produções dos estudantes no desenvolvimento das atividades.

No primeiro momento, constituído por três atividades, o objetivo foi promover a manipulação dos componentes do GeoGebra, sendo que os conceitos abordados foram: ponto médio, paralelismo e perpendicularismo. A finalidade, aqui, era a familiarização dos estudantes com o *software* supracitado.

Na segunda etapa, composta por três atividades, pretendeu-se explorar a noção de ângulos e de construção de circunferências, auxiliando a terceira fase.

Por fim, a última fase, formada por um total de oito atividades do tipo situações-problema, compreendeu a exploração efetiva dos quadriláteros notáveis (retângulo, quadrado, losango, paralelogramo e trapézio), bem como de suas propriedades. As atividades propostas nesse momento exigiram do docente um especial cuidado, no sentido de incentivar os estudantes a procurarem suas próprias resoluções para as tarefas. Além disso, o docente estimulou os estudantes a empregarem o GeoGebra para validarem suas construções, a partir da movimentação dos pontos das figuras.

O pré/pós-teste

Para analisar como os estudantes avançaram (ou não) nos níveis de pensamento geométrico por meio da sequência didática, aplicamos um pré/pós-teste. Formado por cinco questões, o teste buscou identificar os níveis de pensamento geométrico em que se encontravam os participantes do estudo, antes e após a intervenção pedagógica. Entre um teste e outro, houve um intervalo de 101 dias, que equivale a pouco mais de três meses. Em decorrência da limitação de páginas deste artigo, centramo-nos em discutir alguns resultados.

A primeira questão era composta por duas etapas. Na primeira, pediu-se aos estudantes que construíssem um retângulo, e em seguida, uma figura diferente de um retângulo. Na segunda, eles deveriam explicitar suas produções por escrito. Com isso, estávamos interessados em analisar as estratégias utilizadas por eles para realizar a diferenciação entre suas construções.

Em relação à primeira fase, ao pré-teste, o quadrilátero notável mais escolhido como um “não retângulo” pela maior parte dos estudantes foi o quadrado, sendo construído por 81% dos participantes no nosso estudo; ou seja, quatro quintos do total não reconheceram essa figura como um retângulo. Esse fenômeno pode ter ocorrido, provavelmente, pois o quadrado e o retângulo (padrão) apresentam diferenças em suas aparências físicas, característica essa típica do primeiro nível de Van-Hiele. No pós-teste, esse índice caiu para 53%, ou seja, menos de três quintos do total de participantes, o que representa um avanço no pensamento geométrico em relação ao teste anterior.

Na análise das justificativas dos estudantes referentes às suas produções, categorizamos as respostas em três classes: a) pragmática, quando o estudante menciona a aparência física ou o formato da figura em sua resposta; b) aplicativa, na qual a definição usual da figura é utilizada como justificativa; c) relacional, quando o aluno cita as propriedades das figuras produzidas. Ressaltamos que essa categorização e o pré/pós-teste foram elaboradas por Câmara dos Santos (2001).

Inicialmente, realizamos a categorização das respostas relacionadas à primeira construção, isto é, a partir da categoria anunciada, analisamos os argumentos dos estudantes para explicarem o motivo de a figura ser um retângulo.

Assim, observamos que, no pré-teste, 64% dos estudantes estavam no nível pragmático, ou seja, mais de três quintos do total fizeram referência apenas à aparência da figura, que é uma característica do primeiro nível vanhieliano. Tal índice caiu para 20% no pós-teste. Ainda no pré-teste, identificamos 23% dos participantes atuando no nível aplicativo, fazendo uso da definição do quadrilátero notável, e 13% no nível relacional, baseando-se nas propriedades da figura, que corresponde ao segundo nível de Van-Hiele. No pós-teste, esses índices apresentaram crescimento, sendo 43% no nível aplicativo e 37% no nível relacional.

Além disso, ocorreu crescimento dos índices das classes aplicativa e relacional, o que significa que, no pós-teste, houve mais estudantes mencionando a definição usual e as propriedades do retângulo em suas respostas. Esse fato representa um importante progresso na aprendizagem dos estudantes, pois segundo Van-Hiele (1957), o aluno que é capaz de reconhecer as figuras geométricas por meio de suas propriedades pode ter alcançado o segundo nível de seu modelo. Logo, no pós-teste, evidenciamos um crescimento do percentual de estudantes trabalhando no segundo nível vanhieliano.

Posteriormente, categorizamos as justificativas dos estudantes em relação à segunda figura produzida (o “não retângulo”). Desse modo, evidenciamos que no pré-teste havia 17% na classe pragmática, 77% (quase quatro quintos) na aplicativa, e 7% na relacional. No pós-teste, encontramos novamente 76% dos alunos trabalhando na classe aplicativa, e 23% na relacional. Além disso, não identificamos alunos situados na classe pragmática.

Esses dados também mostram que os alunos avançaram em seus pensamentos geométricos por meio da sequência didática, porque há uma considerável redução de alunos trabalhando na esfera pragmática (que apresenta características do primeiro nível de Van-Hiele), uma estabilidade no índice da esfera aplicativa e um crescimento na esfera relacional (que apresenta evidências do segundo nível vanhieliano). Nesse sentido, há estudantes que alcançaram o segundo nível de Van-Hiele, e outros estudantes que avançaram no próprio primeiro nível, ficando bem próximos de atingir o nível seguinte.

Na segunda questão, foram apresentados aos estudantes onze quadriláteros notáveis de diferentes formas e em diversas posições. A atividade consistiu em classificar essas figuras em diferentes famílias de quadriláteros. Nesse sentido, os alunos foram orientados a organizarem as figuras a partir das seguintes categorias: retângulos, trapézios, quadriláteros, quadrados, paralelogramos e losangos.

Entre os principais resultados dessa questão, notamos que os quadrados foram reconhecidos como retângulo no pré-teste por apenas 3% dos estudantes. No pós-teste, esse índice apresentou um crescimento considerável, passando de 20% do total de participantes. Além disso, 13% dos alunos identificaram o quadrado como losango, no pré-teste, enquanto que, no pós-teste, esse índice subiu para 27%. Ainda considerando os losangos, verificamos no pré-teste uma de média 12% dos discentes considerando os paralelogramos oblíquos como sendo losangos, enquanto que no pós-teste esse índice alcançou 18%. Esse resultado reforça a compreensão equivocada de que os losangos são “retângulos tortos”.

Na terceira questão, os estudantes foram orientados a produzirem dois quadrados diferentes. O objetivo com essa questão foi identificar os critérios utilizados pelos alunos na diferenciação entre as figuras. Então, verificamos que, no pré-teste, a maioria dos estudantes pesquisados, em média 60%, diferenciaram as duas produções apenas pelo tamanho das figuras, ou seja, produziram dois quadrados de tamanhos diferentes. Todavia, no pós-teste, esse índice reduziu para 53%. Essas evidências parecem mostrar que houve um avanço no pensamento geométrico desses estudantes, contribuindo com a redução do índice.

Além disso, no pré-teste havia um em cada três estudantes diferenciando as duas construções pela posição na folha de papel, Entretanto, nos dois estudos, observou-se que, no pós-teste, aproximadamente a metade dos participantes foi capaz de realizar essa diferenciação.

Na quarta questão, os estudantes foram orientados a construírem um losango *ABCD* a partir de dois nós dados em uma malha quadriculada, que representam dois dos seus vértices. A finalidade desse item era identificar as estratégias empregas pelos alunos na resolução do problema, isto é, se na produção do losango, eles faziam referência apenas à aparência global da figura ou se aplicavam as propriedades, nesse caso, fazendo uso das diagonais do losango.

Nesse sentido, elaboramos três categorias para as produções: a) perceptiva – quando o estudante faz referência apenas à aparência global do losango na construção; b) reflexiva – quando o aluno aplica as propriedades do losango na produção, isto é, das suas diagonais; e c) divergente – quando o estudante produz outro tipo de quadrilátero notável, que diverge do losango.

Dessa forma, observamos que a maior parte dos participantes do pré-teste, em média 57% (quase três a cada cinco alunos), se encontrava na classe perceptiva. Isto é, na construção do losango, esses estudantes fizeram referência apenas ao aspecto global da figura, que é a característica do primeiro nível de pensamento geométrico de Van-Hiele. No entanto, esse índice reduziu no pós-teste para 40% (o que corresponde a dois a cada cinco alunos).

No pré-teste, foram identificados 37% (quase dois entre cinco estudantes) de estudantes trabalhando na esfera reflexiva, referente ao uso das propriedades do losango na sua construção, que se refere ao segundo nível vanhieliano. No pós-teste, houve um aumento do número de alunos atuando nessa esfera: cerca de 57% do total (quase três entre cinco estudantes).

Além disso, 3% dos estudantes produziram um paralelogramo (não losango) em vez de um losango, no pós-teste, ficando na esfera divergente. É importante destacar que 6% dos estudantes não responderam o item no pré-teste.

O quinto item apresentava um losango *ABCD*, que teve uma parte apagada, e os estudantes eram questionados se era possível reconstruir esse quadrilátero notável (ou não), sendo que eles deveriam explicitar suas respostas. Nessa questão, o objetivo era analisar as estratégias empregadas pelos discentes na reconstrução da figura, isto é, investigar se eles faziam referência ao aspecto global da figura ou se utilizavam das suas propriedades.

Evidenciou-se que, no pré-teste, 87% dos estudantes disseram que era possível reconstruir o losango; 10% afirmaram que não era viável refazer o losango que teve um pedaço apagado; e 3% não responderam o item. No pós-teste, 93% disseram que era possível refazer o losango, enquanto que 7% foram contrários.

Entre os discentes que afirmaram que era possível reconstruir a figura no pré-teste e no pós-teste, observamos três tipos de justificativa: a) referência ao aspecto global – quando o estudante faz uso da aparência física do losango na justificativa; b) uso implícito das diagonais do losango – quando o aluno menciona as diagonais do losango de forma implícita em sua explicação; c) apelo à ideia de simetria – quando, na justificativa, o discente menciona o conceito de simetria.

Dessa forma, notamos que um primeiro grupo de estudantes fez uso apenas da aparência global da figura, afirmando que só seria necessário ligar os pontos para que a figura fosse reconstruída. Tal fato foi verificado entre 65% desses participantes no pré-teste e 61% no pós-teste. O segundo grupo de discentes fez uso implícito das diagonais, justificando que era necessário determinar a medida dos comprimentos dos segmentos de reta que formam as diagonais para reconstruir o losango apagado. Tal resposta foi observada entre 31% da turma no pré-teste e entre 39% no pós-teste. Além disso, no pré-teste, 4% dos estudantes fizeram apelo à ideia de simetria na sua justificativa; no pós-teste, entretanto, não identificamos alunos que fizessem uso dessa noção.

Considerações Finais

De modo geral, julgamos que os objetivos traçados no estudo foram alcançados. Todavia, algumas questões necessitam uma discussão mais refinada em estudos posteriores, sobretudo em relação à superação de várias dificuldades referentes à pregnância das figuras prototípicas para os quadriláteros notáveis, como verificado no estudo de Câmara dos Santos (2001).

Em relação ao pensamento geométrico dos estudantes antes da aplicação da sequência didática, no pré-teste, verificamos que todos os estudantes estavam no primeiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre o reconhecimento das figuras geométricas apenas pela sua aparência física. Contudo, no pós-teste, foi possível notarmos estudantes atuando já no segundo nível de pensamento geométrico.

No que se refere ao desenvolvimento dos níveis de pensamento geométrico, considerando o modelo de Van-Hiele (1957), verificamos um progresso importante nesse processo, pois parte considerável dos estudantes participantes avançou entre os níveis iniciais (do primeiro nível para o segundo nível), por meio da sequência didática (sendo verificado entre 27% do total de alunos participantes do nosso estudo).

Observamos, também, que alguns alunos não alcançaram a passagem do primeiro para o segundo nível, porém esses alunos progrediram significativamente dentro do próprio nível, aproximando-se do nível seguinte (43% dos estudantes). Diante dessa constatação, conjecturamos a possibilidade da existência de subníveis no primeiro nível vanhieliano. Essa hipótese foi confirmada em nossa tese de doutorado (PEREIRA DA COSTA, 2019).

Além disso, em algumas atividades da sequência didática (no que se refere às justificativas), alguns estudantes demostraram o pensamento geométrico característico do terceiro nível de Van-Hiele, no qual ocorre a ordenação das propriedades das figuras geométricas (por exemplo, reconhecer um quadrado como um retângulo e como um losango, pois apresentam propriedades em comum). No entanto, tal aspecto não foi observado no pós-teste. Esses indícios parecem mostrar que um mesmo aluno pode situar-se em diferentes níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele mas, isso, de acordo com o tipo de atividade e com o tipo de conceito matemático explorado, como foi constatado pelos pesquisadores Gutiérrez, Pastor e Fortuny (1991).

Nesta pesquisa, observamos que o progresso de níveis não ocorre em um pequeno intervalo de tempo, levando semanas e meses, como bem discutem Nasser e Sant’anna (2010). Essas autoras afirmam que o desenvolvimento do pensamento geométrico é ainda marcado pelas experiências dos estudantes, pelo contexto social, pelas relações estudante-professor e estudante-estudante, pelo número de aulas de Geometria, etc.

Outro aspecto que merece uma discussão em pesquisas futuras refere-se a alguns tipos de produções dos estudantes realizadas na sequência didática, assim como no pré-teste e no pós-teste. A título de exemplo, podemos mencionar a oitava questão da terceira fase da sequência didática, na qual os estudantes foram orientados a produzirem um losango. Nessa atividade, identificamos duplas de estudantes que construíram um trapézio ou um paralelogramo (não losango) ao invés de um losango.

Diante desses resultados produzidos, surgem algumas inquietações para trabalhos futuros: O que leva esses estudantes a realizarem essas produções? Como o modelo de Van-Hiele explicaria esses dados? Quais conceitos geométricos esses estudantes deveriam mobilizar para terem êxito nessas atividades? Qual(is) Geometria(s) eles vivenciaram nos anos iniciais do ensino fundamental? Quais situações didáticas foram exploradas? Que tipos de atividades foram trabalhados em sala de aula?

Por fim, ressaltamos a relevância de o professor de Matemática realizar um trabalho sistemático com a Geometria em sala de aula, sendo o uso do GeoGebra um caminho, contribuindo como um elemento de superação das dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes do 6º ano do ensino fundamental na classe de Matemática.

Referências

BARBOSA, C. P. **O pensamento geométrico em movimento:** um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2011. 187f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BRASIL. MEC. 1998. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. 3. ed. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. MEC. **Base Nacional Curricular Comum**. Ministério da Educação, Brasília, 2018.

CÂMARA DOS SANTOS, M. Effets de l´utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le developpement de la pensée géométrique. **Annales...** 2 Congres International Cabri Géomètre, Montreal, 2001.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em Educação Matemática:** Repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

CATTAI, A. P. O GeoGebra nas aulas de Matemática. **Anais...** 1 Encontro de Matemática do CEFET-BA, Salvador, 2007.

CROWLEY, M. L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. Aprendendo e ensinando Geometria. Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A.; FORTUNY, J. F. An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. **Journal for Research in Mathematics Education,** vol. 22, n. 3, pp. 237-251, 1991.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M. **Ajuda GeoGebra:** manual oficial da versão 3.2. 2009. Disponível em: < http://static.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf> Acesso em: 27 ago 2015.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, n.2, pp. 135-146, 2008.

ITACARAMBI, R. R.; BERTON, I. C. B. **Geometria, brincadeiras e jogos:** 1º ciclo do ensino fundamental. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008. PAVANELLO, 1993.

KALEFF, A. M. M. R.; HENRIQUES, A.S.; FIGUEIREDO, L. G.; REI, D.M. Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele. In: CONGRESSO NACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2., 1989, Rio de Janeiro. **Anais** […]. Rio de Janeiro: UFF, 1989. p.9-14.

LIMA BORBA, V. M. L. ; PEREIRA DA COSTA, A. Sucesso e fracasso no ensino da Matemática: o que dizem futuros professores de uma IES?. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 2, p. 55-76, 2018.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, n.4, pp.3-13, 1995.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2ªed. Rio de Janeiro: IM/UFJR, 2010.

OLIVEIRA, M. C. **Ressignificando conceitos de geometria plana a partir do estudo de sólidos geométricos**. 2012. 266f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

ONTARIO. MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. 2006. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année**. Géométrie et sens de l'espace: Formes géométriques. Fascicule 1. Toronto, le Ministère, p.12.

PIAGET, J. **Seis estudos de psicologia**. Trad. M. A. M. D'Amorim e P. S.L. Silva. 24.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitaria, 1999.

PEREIRA, M. R. de O. **A geometria escolar:** uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino. 2001. 84f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

PEREIRA DA COSTA, A.; LACERDA, G. H. Educação Matemática: o uso do software Geogebra como instrumento de ensino e aprendizagem da geometria plana. **Anais...** 3 Colóquio Brasileiro Educação na Sociedade Contemporânea, Campina Grande, 2012.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental:** um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

PERNAMBUCO. SAEPE – 2015. **Matemática**. Secretaria da Educação. Revista da Gestão Escolar. UFJF, Juiz de Fora, 2015. Disponível em: Acesso em: 27 fev 2017.

VAN-HIELE, P. M. **De Problematiek van het inzicht.** Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. 1957. Scriptie (Doctoraat in Wiskunde en Natuurwetenschappen) - Rijksuniversiteit Utrecht, Utrecht, 1957.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

AUTORES E AUTORAS

Marcelo Câmara dos Santos

Possui Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Católica de Pernambuco (1982). Mestrado em Didactique Des Disciplines Scientifiques – Université Claude Bernard – Lyon (1992). Doutorado em Sciences de L'education – Université de Paris X - Nanterre (1995), com pós-doutorado pelo Institute Universitaire de Formation de Maitres de Rennes (2001). Pós-doutorado Sênior pela Université Laval (2010). Professor aposentado do Colégio de Aplicação da UFPE. Colaborador do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação (CAEd) da UFJF. Foi Diretor de Formação de Professores da Educação Básica da CAPES (2017). Atuou no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPE (1997 – 2009), no qual foi coordenador entre 2002 e 2004. Atua no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, no Programa de Pós-Graduação no Ensino das Ciências da UFRPE e no Programa de Pós-Graduação Profissional em Gestão e Avaliação da Educação da UFJF. Compôs a Diretoria da SBEM-Regional PE (1999 - 2004) e da SBEM Nacional (2004 - 2010). Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Métodos e Técnicas de Ensino, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Didática da Matemática, Ensino de Matemática, formação de professores, avaliação e sequências didáticas. Coordenou a área de

Matemática na elaboração da Base Curricular Comum (BCC) para as redes Públicas de Ensino de Pernambuco (2004 – 2006); dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (2012 – 2013) e da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2014 – 2016). É líder do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática (UFPE/UFRPE).
E-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Adegundes Maciel da Silva

Mestre em Ensino das Ciências pela UFRPE; Diretoria Geral de Tecnologias na Educação - DETEC; vice Dir. na Unidade de Tecnologia - COMPAZ Caxangá - Prefeitura do Recife.
E-mail: admaciel11@gmail.com.

André Pereira da Costa

Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEns) e do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Associado aos grupos de pesquisa: Pró-Grandezas/UFPE, NUMEP/UFPE, LIPEM/UFOB e GPolC-Diferença/UFOB. Colaborador no GPAM/UFRJ e no FDCM/UFPE.
E-mail: andre.costa@ufob.edu.br

Clóvis Gomes da Silva Júnior (In Memoriam)

Doutor em Ciências da Educação pela Universidade de Lyon 2; Professor adjunto da Universidade de Pernambuco UPE-Campus Garanhuns.

Graciane Apolônio da Silva

Licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Bacharela em Direito pela Faculdade de Direito de Olinda: AESO. Estudante de Teologia (6º. Período/2020), pela Faculdade Canção Nova em Cachoeira Paulista/SP. Advogada. Professora de

ntal do Município de Cachoeira Paulista/SP. Mis-
ova, pertencente à Igreja Católica.
com.

Matemática pela Universidade Federal Rural de
tamento de Educação e do Programa de Pós-
da UFRPE e do EDUMATEC da UFPE. Membro
enos Didáticos na Classe de Matemática e Líder
do Grupo de Pesquisa em História, Epistemologia e Didática da Álgebra. Tem interesse no processo de ensino e aprendizagem da álgebra e desenvolvimento do pensamento algébrico e Teoria da Objetivação.
E-mail: jadilson.almeida@ufrpe.br

José Dilson Beserra Cavalcanti
Licenciado em Matemática, especialista em Educação Matemática, mestre e doutor em Ensino de Ciências e Matemática. Professor do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco; Coordenador do Programa de Pós-Graduação Educação em Ciências e Matemática; líder fundador do Núcleo de Pesquisa da Relação ao Saber (NUPERES); membro do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática; membro da Rede Internacional de Pesquisadores da Relação com o Saber (REPERES); Editor do International Journal of Education and Teaching (IJET-PDVL). Tem interesse de estudo e pesquisa nos seguintes temas: Formação de Professores de Matemática; História e Epistemologia da Relação ao Saber (rapport au savoir); Relação ao Saber de Professores; Mapeamento de produções científicas; Relação ao Saber de pessoas de origem popular que obtiveram êxito e ascensão social.
E-mail: dilsoncavalcanti@gmail.com.

Josué Ferreira dos Santos Filho
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pelo Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. É formado em Licenciatura plena em Matemática

pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (2001) com especialização em matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (2004); especialização em Ensino de Ciências pela Universidade Federal de Pernambuco (2010). Atualmente é professor efetivo da Secretaria de Educação de Pernambuco.
E-mail: josuedfilho@gmail.com

Luciana Silva dos Santos Souza
Doutora em Ensino das Ciências e Matemática (Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE) e em Science de L'Éducation (Université Lumière - Lyon 2). Professora Adjunta da Universidade de Pernambuco (UPE).
E-mail: luciana.santos@upe.br

Marcelo Leonardo Leôncio da Silva
Graduado em Licenciatura em Matemática. Especialista em Ensino de Matemática com Ênfase em Informática e Mestre em Educação Matemática e Tecnológica. Possui experiência no Ensino de Matemática e Ciências, na Educação Básica; Matemática Básica e Aplicada e Sistemas de informações, no Ensino Superior. Possui experiência na elaboração/avalição de materiais manipulativos e jogos para o ensino da Matemática; na avaliação de recursos de softwares educativos e em laboratórios de ensino de Matemática e Ciências. Realiza pesquisas na área nas áreas da: Teoria dos Registros de Representação Semiótica; Pensamento Algébrico e Teoria dos Grafos.
E-mail: marcelolleoncio@gmail.com

Maria José Ferreira França
Licenciada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco. Especialista em Fundamentos da Didática pela Universidade de Pernambuco UPE. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Professora do Ensino Fundamental e Médio, Supervisora Escolar, Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. Membro do grupo de pesquisa do Pró Matemática/ MEC, Acordo de Cooperação Educativa Brasil – França para a formação continuada de professores do Ensino Fundamental e Médio 1994- 1998. Técnica na Gerência de Avaliação e

Monitoramento das Políticas Educacionais da Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco. Tem interesse em Avaliação de larga escala construção de itens e análise de resultados.
E-mail: franca_mjf@yahoo.com.br

Marcus Bessa de Menezes
Licenciado em matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Mestre e Doutor em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Pós-Doutorado realizado no EDUMATEC da UFPE e na Universidad Complutense de Madrid-ES. Professor da Unidade Acadêmica de Educação do Campo, do Centro de Desenvolvimento Sustentável do Semiárido, da Universidade Federal de Campina Grande. Professor Permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Matemática do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco (CAA-UFPE), Professor Permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Professor Colaborador do Programa de Pós-Graduação Profissional em Gestão e Avaliação da Educação Pública da Universidade Federal de Juiz de Fora (PPGP/UFJF). Líder do Grupo de Pesquisa do CNPq intitulado: Didática dos Conteúdos Específicos Voltada para a Convivência com o Semiárido e Líder do Grupo de Pesquisa do CNPq intitulado: Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Educação Matemática Inclusiva e Pesquisador da Universidade Federal de Pernambuco no Grupo de Fenômenos Didáticos. Tem experiência na área de Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Contrato Didático, Transposição Didática, Teoria Antropológica do Didático e Educação Matemática Inclusiva.
E-mail: marcusbessa@gmail.com

Mônica Maria Campelo de Melo
Licenciada em matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco e Mestre em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Professora de matemática da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco e membro do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos da sala de aula de Matemática de 2007 a

2016. Coautora dos Parâmetros Curriculares de Educação Básica e Docentes do Estado de Pernambuco, com experiência também em coordenação escolar e processos de aprendizagem no Ensino Fundamental e Médio. Atuou ainda como técnica de avaliação da área de matemática da Gerência de Avaliação e Monitoramento de Políticas de Educação de Pernambuco.
E-mail: monicaseduc@gmail.com

Regina Celi de Melo André – Mestra em Educação pela UFPE. Professora de Matemática da educação básica e Assessora Pedagógica na Secretaria Executiva de Desenvolvimento da Educação da Secretaria de Educação e Esportes do Estado de Pernambuco. Colaboradora no Grupo de Pesquisa FDCM/UFPE. Membro da Diretoria da SBEM - Regional – PE - Gestão 2002-2004. Consultora na construção dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco para a Educação Básica na área de Matemática, de 2012 a 2013. Redatora do Currículo de Pernambuco para o componente curricular Matemática em 2017. Atua na formação continuada de professores.
E-mail: reginacma7@gmail.com

Rinaldo Cesar de Holanda Beltrão
Mestre em Ensino das Ciências pela UFRPE, professor da Rede pública municipal das cidades de Recife e Jaboatão dos Guararapes.

Vania de Moura Barbosa Duarte
Licenciada em matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Especialista em Ensino da Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco. Especialista em Informática na Educação pela Universidade Federal de Lavras – MG. Mestra em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Professora do Curso de Licenciatura em Matemática – Universidade de Pernambuco – Campus Mata Norte. Tem interesse pelos estudos da Didática da Matemática, Currículos de Matemática e Formação de professores de Matemática.
E-mail: vania.duarte@upe.br

PREFÁCIO

Escrever o prólogo deste livro-homenagem a Marcelo Câmara foi um momento de muita satisfação. Por isso, agradeço aos organizadores da obra por me terem oferecido a oportunidade de dizer um pouco sobre o amigo de quase 30 anos.

Olhando para trás, dou conta de que nossa amizade parece ter nascido pronta. Desde nosso encontro inicial, e até hoje, acompanho suas jornadas pelas searas da educação matemática. Algumas delas percorremos juntos, em equipes de trabalho; outras foram proveitosas parcerias entre nós. No entanto, seus caminhos foram sempre bastante diversificados, e muitos deles acompanhei mais a distância, ainda que, sempre, com admiração e reconhecimento. Sendo assim, não pretendo, nem caberia em poucas páginas, comentar toda sua trajetória profissional e suas realizações, que podem ser conhecidas em outros textos e, em particular, adiante neste livro.

Marcelo Câmara iniciou seu percurso como professor do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco (CAp-UFPE), em meados da década de 1980. Aquela foi a década da formação da educação matemática como um campo de atuação acadêmica, em vários centros do país e, entre eles, em instituições pernambucanas. Vem do convívio com colegas do CAp sua participação no grupo de professores que, naquela época, lançava as sementes da educação matemática em nosso estado.

Em particular, estava em curso uma ampla iniciativa, compartilhada entre vários polos institucionais, que contava com um leque diversificado de ações: o *Projeto*

PREFÁCIO

Escrever o prólogo deste livro-homenagem a Marcelo Câmara foi um momento de muita satisfação. Por isso, agradeço aos organizadores da obra por me terem oferecido a oportunidade de dizer um pouco sobre o amigo de quase 30 anos.

Olhando para trás, dou conta de que nossa amizade parece ter nascido pronta. Desde nosso encontro inicial, e até hoje, acompanho suas jornadas pelas searas da educação matemática. Algumas delas percorremos juntos, em equipes de trabalho; outras foram proveitosas parcerias entre nós. No entanto, seus caminhos foram sempre bastante diversificados, e muitos deles acompanhei mais a distância, ainda que, sempre, com admiração e reconhecimento. Sendo assim, não pretendo, nem caberia em poucas páginas, comentar toda sua trajetória profissional e suas realizações, que podem ser conhecidas em outros textos e, em particular, adiante neste livro.

Marcelo Câmara iniciou seu percurso como professor do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco (CAp-UFPE), em meados da década de 1980. Aquela foi a década da formação da educação matemática como um campo de atuação acadêmica, em vários centros do país e, entre eles, em instituições pernambucanas. Vem do convívio com colegas do CAp sua participação no grupo de professores que, naquela época, lançava as sementes da educação matemática em nosso estado.

Em particular, estava em curso uma ampla iniciativa, compartilhada entre vários polos institucionais, que contava com um leque diversificado de ações: o *Projeto*