Rosinalda Aurora de Melo Teles
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro
(Organizadores)

# INVESTIGAÇÕES EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Vol.2

Editora UFPE

# INVESTIGAÇÕES EM DIDÁTICA DA

# MATEMÁTICA

Rosinalda Aurora de Melo Teles
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro
(Organizadores)

# INVESTIGAÇÕES EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

**Vol.2**

Editora UFPE

Recife/2017

Catalogação na fonte:
Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

I62 Investigações em didática da matemática [recurso eletrônico] / Rosinalda Aurora de Melo Teles, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Carlos Eduardo Ferreira Monteiro, (Organizadores). – Recife : Ed.UFPE, 2017.

Vários autores.
Inclui referências.
ISBN 978-85-415-0907-7 (online)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Didática – Matemática. 4. Prática de ensino – Matemática. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Org.). II. Borba, Rute Elizabete de Souza Rosa (Org.). III. Monteiro, Carlos Eduardo Ferreira (Org.).

372.7 CDD (23.ed.) UFPE(BC2017-052)

# APRESENTAÇÃO

## Investigações em Didática da Matemática

Rosinalda de Aurora Teles – rosinaldateles@yahoo.com.br
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba – resrborba@gmail.com
Carlos Eduardo Ferreira Monteiro – cefmonteiro@gmail.com

Este é o segundo livro proposto com o objetivo de divulgar investigações desenvolvidas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (Edumatec). O Volume 1 foi voltado a Processos de Ensino e Aprendizagem e o presente volume volta-se para a linha de pesquisa de Didática da Matemática.

No Edumatec o objetivo desta linha de pesquisa é desenvolver estudos relativos ao funcionamento da sala de aula de Matemática, buscando compreender os fenômenos didáticos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática, para todos os níveis de ensino e para a formação inicial e continuada do professor que ensina Matemática na Educação Básica.

Os autores desse volume são professores do Edumatec ou convidados de outras instituições brasileiras e francesas. Os artigos apresentados neste livro, ora são fruto de estudos desenvolvidos pelos próprios professores do Programa ou convidados, ora apresentam resultados obtidos no conjunto de estudos desenvolvidos por discentes de mestrado, já egressos do Programa, sob orientação do docente pesquisador.

A proposta desse volume alinha-se com a perspectiva defendida pelo recém-criado Grupo de Trabalho de Didática da Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem). Esse grupo de trabalho tem por objetivo fomentar o desenvolvimento, o debate científico e a divulgação de investigações sobre fenômenos didáticos, nas quais a problematização dos objetos de saber em jogo é um elemento central.

O primeiro capítulo, *Análise Comparativa da Relação Institucional à Grandeza Área no 6º ano no Brasil e na França,* de autoria de Paula Moreira Baltar Bellemain, Alain Bronner e Mirène Larguier, traz uma investigação desenvolvida sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Os autores caracterizam o ensino proposto em livros didáticos de 6º ano do Ensino Fundamental brasileiro e no nível equivalente na França (classe de sixième), acerca da área de figuras planas, e identificam elementos explicativos para as escolhas de transposição didática evidenciadas pelas análises.

No segundo capítulo, *A Matemática e a Articulação com Outras Áreas de Conhecimento: O Que Livros de Matemática Propõem?*, a Professora Rosinalda Aurora de Melo Teles, a partir de quatro pesquisas orientadas por ela, desenvolvidas na linha de pesquisa Didática da Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (Edumatec), discute articulações entre Matemática e outras disciplinas. Apresentadas em ordem cronológica, três das pesquisas envolvem análise de livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental e a outra investigou os livros dos acervos complementares do Plano Nacional do Livro Didático 2010.

No Capítulo 3, no texto *Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para Discutir o Ensino de Matemática,* escrito pela Professora Marilena Bittar da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), visa-se esclarecer algumas dúvidas sobre a relação entre Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas, discutir o papel da Engenharia Didática dentro do campo científico conhecido como Didática da Matemática e estimular o leitor a estudar mais esse tema. Para isso, apresenta as principais ideias da Engenharia Didática e alguns elementos da Teoria das Situações Didáticas. Também discute exemplos do uso da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e algumas ideias acerca das evoluções em torno do tema.

O Capítulo 4, intitulado *O Trabalho com Álgebra no Ensino Fundamental: Caminhos e Descaminhos*, escrito pelo Professor Marcelo Câmara dos Santos, busca levantar algumas discussões sobre o processo de ensino e de aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental, particularmente nos anos finais dessa etapa de escolarização. Para isso, toma como base algumas pesquisas realizadas pelos participantes do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, do Edumatec.

Finalmente, no Capítulo 5, *Modelo, Modelização e Decisões Didáticas*, a Professora Iranete Maria da Silva Lima, recorre ao texto da sua tese de doutoramento para desenvolver uma reflexão sobre as noções de *modelo* e *modelização*, particularizando o estudo de decisões didáticas tomadas por professores. O viés de pesquisa se expressa neste ensaio teórico por meio da apresentação de três modelos de decisões didáticas e de um exemplo de modelização didática.

Pela variedade de temáticas e de abordagens teórico-metodológicas utilizadas pelos autores desse livro, acreditamos que esse volume pode, em muito, contribuir para interessados em Educação Matemática – sejam pesquisadores (docentes e discentes) de programas de pós-graduação, sejam professores de distintos níveis de ensino da Educação Básica.

# Análise comparativa da relação institucional à grandeza área no 6º ano no Brasil e na França[1]

Paula Moreira Baltar Bellemain[2]
Alain Bronner[3]
Mirène Larguier[4]

## Introdução

Este texto discute o ensino da área de figuras planas no 6º ano, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático – TAD – desenvolvida por Yves Chevallard e seus colaboradores (ARTAUD, 1998; BOSCH; GASCÓN,

---

1 Pesquisa desenvolvida entre 2012 e 2013, com suporte do CNPq, por meio de bolsa de pós-doutorado no exterior (PDE) concedida a Paula Baltar, sob a supervisão de Alain Bronner e com a colaboração de Mirène Larguier.

2 Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) Emails: paula.baltar@terra.com.br e pmbaltar@gmail.com.

3 Os professores Alain Bronner (email: alain.bronner@fde.univ-montp2.fr) e Mirène Larguier são docentes da Universidade Montpellier 2 e desenvolvem suas atividades de pesquisa no laboratório LIRDEF (Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique, Éducation, Formation). Durante a realização da pesquisa, o LIRDEF era vinculado ao Institut Universitaire de Formation des Maîtres (IUFM), hoje Faculdade de Educação de Montpellier-França.

4 Email: miren.larguier@gmail.com.

2007; BRONNER, 2007b; CHAACHOUA; COMITI, 2010; CHEVALLARD, 1985; CHEVALLARD, 1992; CHEVALLARD, 2011, CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, entre muitos outros). Esse objeto de estudo está inserido em um projeto de pesquisa mais amplo e de longo prazo que busca caracterizar e problematizar o ensino das grandezas geométricas (mais especificamente comprimento, área e volume), bem como identificar razões explicativas para as escolhas feitas na transposição didática dessas grandezas ao longo da Educação Básica.

O foco nas grandezas geométricas justifica-se por sua importância na história da humanidade e, em particular, na evolução da própria Matemática, por sua presença marcante nas práticas sociais de todos os tempos, inclusive nos diversos âmbitos de atuação profissional, pela riqueza de resultados de pesquisas sobre seu ensino e sua aprendizagem e pelo papel que lhe é atribuído na Matemática do Ensino Fundamental brasileiro atual.

Optamos pela via da análise comparativa. Além do interesse intrínseco de analisar o caso brasileiro e o caso francês, o recurso à análise comparativa entre diferentes instituições tem-se mostrado bastante útil para colocar em evidência que as escolhas de transposição didática feitas em determinado período, em certa instituição não são naturais nem tampouco as únicas possíveis (CELI, 2006; CHAACHOUA; COMITI, 2010). Pretendemos, no médio prazo, analisar o ensino das grandezas geométricas ao longo de toda a Educação Básica brasileira e nos níveis equivalentes da escola francesa. Nossa intenção é identificar escolhas convergentes de transposição didática e particularidades das diferentes instituições nas quais as grandezas geométricas (e mais especificamente a área de figuras planas) são objeto de estudo. Há, portanto, duas naturezas de comparação: entre países e entre níveis de escolaridade. A comparação entre os dois países permeia todas as etapas da pesquisa. Quanto aos níveis de ensino, iniciamos analisando o ensino no 6° ano e no nível equivalente na França. Em ambos os países, o estudo da área se estende desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. A classe de 6° ano marca a transição entre duas etapas da escolaridade e, portanto, a análise da condução do ensino no 6° ano deve trazer elementos sobre o que se supõe que tenha sido estudado nos Anos Iniciais e o que se pretende que seja estudado nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Tomamos como ponto de partida das análises, a abordagem proposta nos livros didáticos. A política nacional do livro didático no Brasil tem assumido enorme relevo nas últimas décadas. Com a implantação e ampliação sucessiva do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), reafirma-se o papel importante desse recurso nas práticas docentes e no apoio à aprendizagem. Há uma melhoria nítida da qualidade dos livros didáticos de Matemática após a implantação do PNLD, embora haja também aspectos passíveis de crítica, como o fato de algumas coleções ainda situarem sistematicamente os capítulos voltados para o campo das Grandezas e Medidas nos capítulos finais dos livros. Acreditamos que a pesquisa acadêmica deve ser uma aliada desse processo pois, ao se debruçar de maneira mais minuciosa sobre pontos específicos, sinaliza lacunas ou abordagens inadequadas, no tratamento dos conteúdos matemáticos. Os autores de livros didáticos podem se nutrir, entre outros elementos, dos resultados das pesquisas para fundamentar suas escolhas de transposição didática e a equipe responsável pelo processo de avaliação do PNLD, pode se apoiar nas pesquisas para subsidiar o processo de avaliação. Por outro lado, as escolhas didáticas realizadas pelos autores e os resultados do processo avaliativo geram questões que alimentam a pesquisa acadêmica.

A análise das escolhas de transposição didática expressas nos livros didáticos franceses e brasileiros situa-se em um contexto institucional mais amplo, que diz respeito ao papel que o livro didático desempenha na educação escolar nesses dois países. Por isso, embora o foco da pesquisa seja o ensino das grandezas geométricas, procuramos discutir a relação entre as particularidades dos sistemas educacionais dos dois países e o modo como se conduz o estudo da área de figuras planas nos livros didáticos de 6º ano.

Na construção do objeto dessa pesquisa, outra escolha fundamental foi seu marco teórico. Yves Chevallard evidenciou, há mais de 30 anos, que o conhecimento escolar não é cópia simplificada do saber acadêmico e investigou, juntamente com seus colaboradores, o processo de construção do saber escolar em Matemática, as condições e os impedimentos que pesam sobre esse processo de construção. O conceito de transposição didática tem sido usado em pesquisas do mundo inteiro e não apenas na Educação Matemática, mas também em estudos sobre o ensino e a aprendizagem de objetos das Ciências, da Linguagem, da Educação Física e muitos outros (BOSCH; GASCÓN, 2007). Hoje a transposição didática está inserida dentro de uma teoria bem mais ampla, que ocupa um lugar central na Didática da Matemática – a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Um dos indícios da fecundidade da TAD pode ser observado pelo fato de já terem sido realizados cinco congressos focados nos avanços dessa teoria, alternadamente na Espanha e na França. Pode-se dizer que há uma comunidade científica sólida que participa do desenvolvimento dessa Teoria, em torno de seu fundador, cuja contribuição à Educação Matemática é inquestionável. Como é sabido, Yves Chevallard recebeu em 2009 o Prêmio Hans Freudenthal do ICMI (International Comission on Mathematical Instruction), em reconhecimento à relevância do programa de pesquisa por ele encabeçado. Como previsto, a TAD se mostrou uma teoria plenamente adequada a subsidiar a investigação que pretendíamos realizar, uma vez que fornece os instrumentos teóricos e metodológicos que permitem caracterizar e problematizar os objetos de saber (no nosso caso, as grandezas geométricas e mais especificamente a área), o processo de estudo desses objetos, bem como as condições e restrições oriundas do contexto institucional no qual esse processo de estudo se realiza.

O texto que segue está estruturado em cinco tópicos. O primeiro dá uma visão geral da problemática da pesquisa mais ampla e apresenta o recorte em foco nesse texto. No segundo é feita uma breve caracterização das instituições investigadas e são identificados condições e impedimentos relativos ao livro didático e ao currículo. O terceiro tópico apresenta o instrumento teórico metodológico elaborado no âmbito da pesquisa para guiar a análise de referenciais curriculares e livros didáticos – o filtro da grandeza área. No quarto tópico é apresentada uma análise da abordagem da área de figuras planas em dois livros didáticos (um brasileiro e um francês) destinados ao sexto ano e à classe de *sixième*. O quinto tópico traz a análise dos capítulos nos quais a área de figuras planas é objeto de estudo, em dez livros didáticos brasileiros e seis franceses, com foco na interrelação entre o campo das grandezas e medidas e os temas transversais.

## Problemática da pesquisa

Neste tópico apresentam-se inicialmente alguns resultados de pesquisa que nortearam a escolha do objeto de investigação e permitiram traçar um primeiro pano de fundo para o foco de análise, centrado essencialmente em um conjunto de pesquisas que abordam comprimento, área e volume como grandezas. Em seguida, é construído um breve resumo de elementos da Teoria Antropológica do Didático que conduzem a situar o ensino e a aprendizagem das grandezas geométricas em um campo mais amplo que se interessa pela vida dos objetos de saber nas instituições. Com base nesses dois alicerces, é contruído o recorte que leva à formulação dos objetivos de pesquisa.

## Sobre o ensino e a aprendizagem da área de figuras planas

Área é considerada nessa pesquisa como grandeza, e não como objeto do campo da geometria. Embora no estudo das grandezas geométricas (comprimento, área, volume e abertura de ângulo) haja fortes relações entre o campo da geometria e o das grandezas e medidas, as pesquisas em didática têm apontado a pertinência de distinguir os objetos geométricos (linhas, superfícies, sólidos, ângulos) e as grandezas associadas a esses objetos (respectivamente comprimentos, áreas, volumes e aberturas de ângulos). Essa escolha já começa a ser incorporada nas escolhas curriculares de vários países.

Douady e Perrin-Glorian (1989) evidenciaram que, no tratamento de questões sobre área, ora os alunos amalgamavam a área e a superfície (característica do que chamaram concepções geométricas), ora focalizavam exclusivamente os elementos em jogo no cálculo (o que modelizaram em termos de concepções numéricas), ora oscilavam entre esses dois tipos de concepção e não eram capazes de articular adequadamente os conhecimentos geométricos e numéricos presentes na resolução de problemas sobre área. Esses dois pólos de concepções (geométricas e numéricas) permitiam interpretar erros frequentes observados pelos professores e evidenciados em pesquisas.

No início dos anos 1990, de acordo com o levantamento que fizemos (BALTAR, 1996) nos resultados de avaliações de larga escala francesas, percebemos que as questões sobre área e perímetro tinham baixos níveis de aproveitamento e segundo a avaliação da Associação de Professores de Matemática do Ensino Público (APMEP) no nível equivalente ao terceiro ciclo, dois dos três conteúdos que apresentavam maiores índices de fracasso no currículo francês da época eram relacionados à aprendizagem das grandezas geométricas: o cálculo sobre grandezas (entre outros, áreas e volumes) e a utilização das unidades.

Esses resultados correspondiam a aspectos da aprendizagem dos conceitos de área e perímetro, identificados como complexos e problemáticos em outros contextos institucionais, como por exemplo, no contexto brasileiro da década de 1990:

> (...) o cálculo de área é usualmente ensinado através de fórmulas de área, que são funções que fornecem a medida de área, em termos do comprimento de segmentos associados à figura. Este procedimento é indispensável para o cálculo de áreas, mas, em sua utilização, têm sido verificadas persistentes dificuldades entre os alunos. Uma delas é a confusão entre área e perímetro; outra é a extensão indevida da validade das fórmulas de área: 'a área de um paralelogramo é o produto dos lados'. (LIMA, 1995).

A análise dos resultados do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco (SAEPE) em 2002 (PERNAMBUCO, 2003), nos níveis de 4ª e 8ª séries (5º e 9º ano respectivamente na nomenclatura atual), indica baixos índices de desempenho nas questões referentes às grandezas geométricas, inclusive quando comparados aos índices apresentados por outros campos da Matemática (BELLEMAIN, 2003). Da mesma forma, a análise dos resultados do INAF (Índice Nacional de Alfabetismo Funcional) feita por Lima e Bellemain (2004) mostra que, embora comprimento e área sejam conteúdos extremamente presentes na vida social, o desempenho dos sujeitos na resolução de problemas envolvendo comprimento e área era baixo[5], inclusive quando comparado com o desempenho em questões sobre outros conteúdos.

Rogalski (1982) destaca que a aquisição das relações entre diferentes grandezas geométricas é um processo complexo e de longa duração. Nas relações entre comprimento e área, por exemplo, intervém um processo duplo de diferenciação e de coordenação. Ao mesmo tempo, devem-se diferenciar propriedades simultaneamente presentes numa figura (o comprimento do contorno e a área da superfície, por exemplo) e coordenar essas mesmas propriedades na apropriação das fórmulas.

Dificuldades conceituais ligadas ao cálculo das medidas das grandezas geométricas, à apropriação das fórmulas e seu uso no cálculo de áreas e perímetros, também foram encontrados nas pesquisas sobre a aprendizagem do volume publicadas em um número temático da revista Recherches en Didactique des Mathématiques (VERGNAUD, 1983). No cálculo de volumes, alguns alunos utilizam procedimentos nos quais há confusões entre comprimentos, áreas e volumes, inclusive adicionando indevidamente grandezas de naturezas distintas (uma área com um comprimento, por exemplo). Estes pesquisadores evidenciaram a dificuldade

5 Não temos conhecimento de estudos mais recentes dessa natureza, mas as pesquisas realizadas no contexto brasileiro e internacional confirmam o desempenho fraco dos sujeitos na resolução de problemas relativos às grandezas geométricas e apontam para uma raiz de natureza epistemológica para as dificuldades e erros cometidos na resolução de problemas.

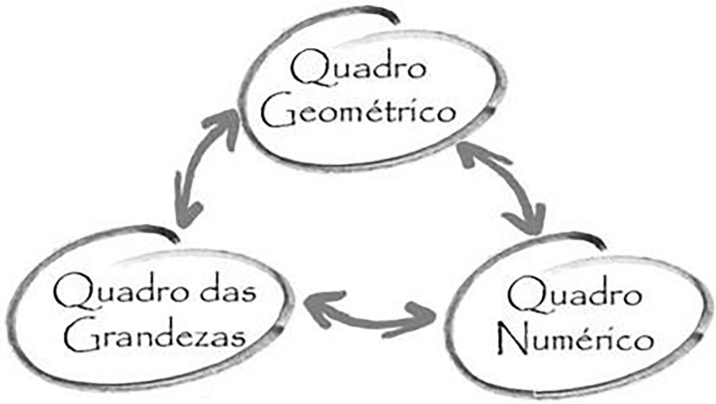
da composição multiplicativa das dimensões, o que se articula com a construção do campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Os entraves relativos à dissociação entre grandezas geométricas (comprimento, área e volume) podem ser extremamente persistentes como mostra Schneider (1991), numa pesquisa realizada na Bélgica, em torno da introdução do cálculo integral no Ensino Médio (alunos de 15 a 18 anos). Schneider interpreta alguns dos erros cometidos pelos alunos no cálculo de áreas e volumes, como consequência de um obstáculo de natureza epistemológica que a pesquisadora denomina "obstáculo da heterogeneidade das dimensões". A hipótese de existência de um obstáculo em torno da relação entre área e perímetro também é evidenciada por Perrin-Glorian (1992).

Diversas pesquisas das últimas décadas (ARAUJO; CÂMARA, 2009; BARBOSA, 2002; BELLEMAIN, 2003; BELLEMAIN, 2009; BELLEMAIN; LIMA, 2002; BRITO, 2003; CARVALHO, 2012; DUARTE, 2002; FACCO, 2003; FERREIRA, 2010; MELO, 2003; OLIVEIRA, 2002; PESSOA, 2010; SANTOS, 2005; TELES, 2007, por exemplo) mostram que entraves semelhantes aos observados pelos autores supracitados na aprendizagem de comprimento, área e volume são observados entre os alunos brasileiros de Ensino Fundamental. Essa constatação é uma das razões que justificou o fato de nos interrogarmos sobre a maneira como esses conteúdos são abordados nos livros didáticos e sobre maneiras alternativas de trabalhar grandezas geométricas na escola.

A concepção e experimentação de uma engenharia didática (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) evidenciaram que a abordagem do conceito de área como grandeza autônoma favorecia a construção de relações entre conhecimentos geométricos e numéricos na resolução de problemas de área. Neste caso, distinguem-se, três quadros: o geométrico – ao qual pertencem as superfícies –, o das grandezas – ao qual pertence a área – e o das medidas – que são números reais positivos. Um par (número, unidade de área) é uma maneira de designar uma área, a qual é considerada como uma classe de equivalência de superfícies.

**Figura 1 – Esquema conceitual relativo às grandezas geométricas**




Fonte: Bellemain e Lima (2002), adaptado de Douady e Perrin-Glorian (1989).

Na tese de doutorado de um dos autores (BALTAR, 1996), confirmamos a pertinência de adotar a abordagem de área como grandeza no nível equivalente ao terceiro ciclo brasileiro. Pesquisas posteriores estenderam essa hipótese, considerando também comprimento e volume como grandezas (BARBOSA, 2002; BRITO, 2003; MORAIS; BELLEMAIN, 2010; OLIVEIRA, 2002, por exemplo).

A abordagem usual dos livros didáticos franceses da década de 1980, para o nível equivalente aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, segundo Douady e Perrin-Glorian (1989), caracterizava-se pela seguinte sequência: iniciava-se pelo ladrilhamento de figuras, passando rapidamente para o ladrilhamento com quadrados e a contagem de quadrados para determinar a área de figuras; em seguida buscavam-se meios mais econômicos do que a contagem, para calcular a área de retângulos e quadrados; eram introduzidas as unidades do sistema internacional de unidades e estabelecidas as fórmulas de cálculo da área de retângulos em função dos comprimentos de seus lados; finalmente eram expostas as fórmulas de cálculo da área de triângulos, losangos, paralelogramos e trapézios. Ou seja, a abordagem proposta nos livros didáticos da época focalizava quase exclusivamente os quadros geométrico e numérico, de um ponto de vista estático (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).[6]

Alguns trabalhos realizados por membros do grupo Pró-grandeza (BARROS, 2006; FERREIRA, 2010; MELO, 2004; MORAIS; BELLEMAIN, 2010; SANTANA, 2006; SILVA, 2004; SILVA, 2011; TELES, 2007, entre outros) analisam aspectos pontuais da abordagem de comprimento, área e/ou volume em livros didáticos brasileiros para o ensino regular ou para a Educação de Jovens e Adultos (CARVALHO, 2012). Em Bellemain (2002) apresentamos um primeiro estudo comparativo de escolhas de transposição didática em livros didáticos brasileiros e franceses. Pesquisas anteriores também se debruçaram sobre a abordagem de grandezas geométricas em livros didáticos franceses, como Celi (2006). Tomamos os achados dessas pesquisas como ponto de partida, mas nenhum desses estudos havia focalizado a comparação entre o estudo desses objetos na França e no Brasil, sob a ótica da TAD e em conexão com condições e impedimentos de níveis superiores de codeterminação. Além disso, os livros didáticos são modificados ao longo do tempo. Escolhemos então analisar os livros didáticos que potencialmente foram adotados nas turmas de 6º ano das escolas públicas brasileiras, ou seja, aqueles que constam no guia de livros didático em vigor nos anos letivos 2012 e 2013 - o do PNLD 2011 (BRASIL, 2010).

Dentro do campo mais amplo das grandezas geométricas, escolhemos investigar o estudo da área de figuras planas. Essa escolha justifica-se pelo conhecimento acumulado sobre a didática desse conceito ser mais amplo que aquele relativo a comprimento e a volume. Além disso, por um lado, o estudo isolado do comprimento não permitiria tocar em alguns aspectos conceituais relevantes e delicados como a relação com as estruturas multiplicativas, por exemplo, e por outro, o estudo do volume traz uma complexificação excessiva, por exemplo, ao exigir lidar com o

---

6 Douady e Perrin-Glorian constroem e experimentam uma engenharia didática cuja abordagem da área rompe com aquela predominante nos livros didáticos da época, ou seja, passam a considerar no ensino a área como uma grandeza. Cabe questionar aqui se essa tendência a enfatizar o numérico está mantida nos livros didáticos atuais.

espaço euclidiano tridimensional. Nossa intenção na continuidade dessa pesquisa é ampliar e adaptar os estudos teóricos e empíricos realizados sobre a área para as demais grandezas geométricas, mas nesse momento, optamos por focar a área.

Questionamos de que maneira os livros didáticos atuais na França e no Brasil abordam a área de figuras planas, confrontando, entre outros elementos, essas abordagens com a perspectiva proposta nas pesquisas em Educação Matemática. Para subsidiar essa análise, elaboramos um instrumento teórico-metodológico – o filtro da grandeza área – apresentado no segundo tópico do presente capítulo.

Como já foi dito, o marco teórico dessa pesquisa é a teoria antropológica do didático – TAD. Os elementos dessa teoria que foram mobilizados na pesquisa são brevemente discutidos a seguir.

## Elementos da Teoria Antropológica do Didático

O germe inicial da TAD é a teoria da Transposição Didática, cujas primeiras ideias foram apresentadas por Yves Chevallard na Primeira Escola de Verão de Didática da Matemática realizada em julho de 1980. A evolução dessa teoria é discutida no primeiro congresso da TAD por Bosch e Gascón (2007, p. 387)[7]:

> O processo de transposição didática começa longe da escola, na escolha dos corpus de conhecimentos que se deseja transmitir. Uma vez realizada essa escolha, gera-se um tipo trabalho claramente criativo – não uma mera 'transferência', adaptação ou simplificação – que se pode descrever como um processo de desconstrução e reconstrução dos diferentes

7 Todas as citações cuja língua original não é o português foram traduzidas pelos autores do capítulo.

> elementos desses conhecimentos, com o objetivo de tornar-los 'ensináveis' preservando sua potência e funcionalidade.

As grandezas geométricas, e especificamente a área, fazem parte do currículo de Matemática no Ensino Fundamental brasileiro e nos níveis equivalentes na França. São, portanto, parte do corpo de conhecimentos que as sociedades desejam transmitir às novas gerações. Cabe, então, questionar se as maneiras como se propõe trabalhar esses conteúdos na escola permitem preservar sua potência e funcionalidade.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001) destacam que esse processo de reconstrução escolar da Matemática, modelizado na teoria pela noção de transposição didática, é imprescindível, pois as motivações que deram origem aos objetos matemáticos não são necessariamente significativas e adaptadas ao contexto escolar contemporâneo. Afirmam também a influência sobre esse processo, de leis que não dependem da vontade e das escolhas dos protagonistas da escola.

O trabalho transpositivo é realizado por um coletivo que Chevallard (1985) denomina noosfera, o qual é composto pelos "responsáveis pelo desenho e implementação dos planos de estudo, pelos matemáticos acadêmicos - produtores do conhecimento matemático, pelos membros do sistema de ensino (professores, em particular)" (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 387-388). Esse processo de construção do saber pode ser modelizado em primeira instância por dois encadeamentos: o primeiro é do saber sábio (elaborado por uma instituição produtora) ao saber a ensinar (construído pela instituição transpositiva) e o segundo do saber a ensinar para o saber ensinado (elaborado pela instituição de ensino).

Bosch e Gascón (2007) observam que o trabalho da noosfera se realiza sob condições históricas e institucionais que nem sempre são fáceis de discernir. Acrescentam, ainda, que embora se torne necessário para que o ensino seja possível, ele gera restrições sobre o que é possível realizar com os objetos de saber na escola: "A limitação mais forte ocorre quando o processo de transposição não é capaz de manter ou recriar uma possível "razão de ser" dos conhecimentos que a escola se propõe a transmitir" (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 388)

No caso dessa pesquisa, interrogamos como as escolhas de transposição didática relativas às grandezas geométricas no Brasil e na França dão (ou não) visibilidade às razões de ser das grandezas geométricas, e, mais especificamente, à área.

Uma primeira contribuição fundamental da Transposição Didática, segundo Bosch e Gascón (2007) é a ampliação da unidade empírica de análise da Didática da Matemática. O olhar da transposição didática evidencia a necessidade de levar em consideração os fenômenos relativos à reconstrução da Matemática na escola, para interpretar o que acontece na sala de aula. E em decorrência disso, a não reduzir o campo de investigação à matemática ensinada e aprendida na escola, mas, ao contrário, a incluir e problematizar a Matemática "a ensinar", ou seja, aquela produzida pela noosfera, bem como a Matemática produzida pela comunidade científica dos matemáticos:

> Dado que as matemáticas são um conhecimento que se usa, ensina, aprende, pratica, difunde em instituições sociais, para entender as matemáticas escolares é necessário entender as razões que motivam e justificam seu ensino, e também o modo como essas matemáticas estão sendo interpretadas nas diferentes instituições de produção, desenvolvimento, uso e difusão. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 391).

Visto que atividades matemáticas são realizadas em distintas instituições, Chevallard (1985) propõe o uso do plural "saberes" para

> distinguir o que seria o saber matemático 'original' ou 'sábio' produzido pelos matemáticos e outros pesquisadores; o saber matemático 'a ensinar' designado oficialmente pelos programas e documentos

> curriculares; o saber matemático ensinado pelos professores em suas aulas; e o saber aprendido pelos estudantes no sentido de que podem dispor dele ao final do processo de aprendizagem para iniciar novos processos. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 392).

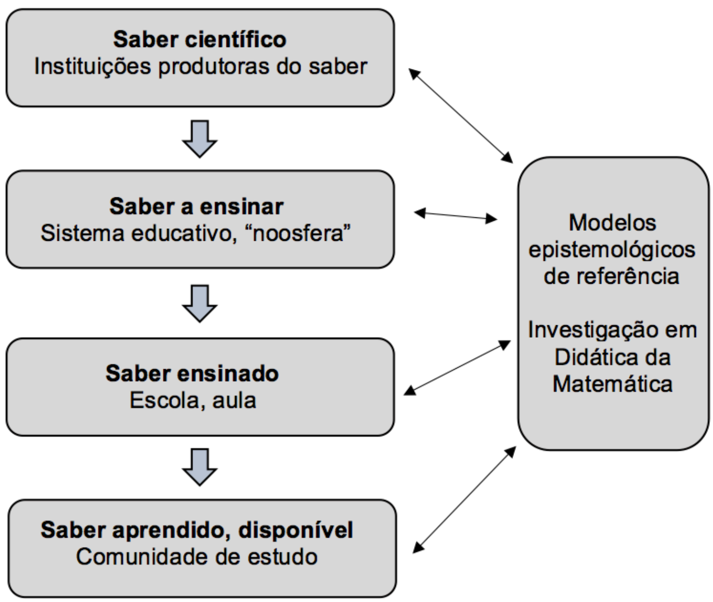
Como se pode perceber, além dos elementos do esquema original, Bosch e Gascón (2007) acrescentam o saber efetivamente aprendido pelos alunos.

Como consequência dessa tomada de posição, a compreensão das dificuldades dos alunos deve incorporar a análise do modo como os saberes vivem na instituição de ensino e questionar o papel que as noções matemáticas desempenham nas atividades (matemáticas ou não) e a maneira como o estudo dos objetos é conduzido pelos professores. É preciso ir ainda mais longe

> porque esse saber é parte do saber a ensinar na escola, em que contextos e problemáticas se inscreve inicialmente, e o que justifica essa inscrição. Essa análise do saber a ensinar não pode fazer economia da origem, ou 'razão de ser' desta noção, por que se construiu inicialmente, em que âmbito, contexto ou problemática, e como participa do desenvolvimento do saber matemático, até chegar às possíveis funções da noção nas atividades (matemáticas e não matemáticas) que ocorrem na sociedade e que, em certo sentido, são o que justifica e legitima sua escolha como 'saber a ensinar'. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 392-393).

O olhar da transposição didática leva a considerar que não basta analisar o saber a ensinar e o saber a ser ensinado. É necessário discutir e problematizar os modelos do saber acadêmico que dominam as instituições educativas e construir modelos epistemológicos de referência para os objetos de estudo investigados, a partir dos dados empíricos das três instituições básicas consideradas: a comunidade acadêmica dos matemáticos, o sistema educativo e a escola, o que Bosch e Gascón (2007, p. 394) representam pelo esquema a seguir:

**Figura 2 – Esquema relativo à transposição didática**




Fonte: Traduzido e adaptado de Bosch e Gascón (2007, p. 394).

Ainda nessa perspectiva, Chevallard (2007, p. 717) afirma que:

> O que diz a teoria da transposição didática, em outros termos, é que não há referencial privilegiado, a partir do qual observar, analisar, julgar o mundo dos saberes, e mais amplamente, das praxeologias. O 'saber acadêmico' é ele mesmo uma função, não uma substância, do qual o pesquisador em didática deve expressamente se descentrar. Daí decorre que o trabalho do pesquisador em didática consiste, a cada

> vez, em construir uma referência nunca definitiva a partir da qual analisa as praxeologias cuja difusão está em estudo.

Nosso interesse se volta para a primeira etapa da transposição didática:

> estudo da formação do 'texto de ensino' que indica 'o conhecimento que deve ser ensinado' por meio das produções da noosfera (programas oficiais, livros didáticos, recomendações para os professores, materiais didáticos, etc.) e ressalta as condições e restrições sob as quais o conhecimento se constitui e evolui (ou se mantém fixo) no tempo. (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 393).

Ou seja, no âmbito dessa pesquisa, nosso olhar focalizou a relação entre saberes científicos e saberes a ensinar em relação às grandezas geométricas e mais especificamente em relação à área.

A segunda contribuição da Transposição Didática é, de acordo com Bosch e Gascón (2007), a modelização das atividades matemáticas e didáticas, em termos de objetos do conhecimento e relações com os objetos, na perspectiva da ecologia institucional dos objetos matemáticos (CHEVALLARD, 1992).

A modelização antropológica da atividade matemática (CHEVALLARD, 1992) vai se apoiar em alguns "termos primitivos", dentre os quais, destacam-se inicialmente: os objetos de saber, as pessoas e as instituições. Os objetos são o termo mais genérico e, em particular, pessoas, posições, instituições são todos objetos. O objeto matemático em foco nessa pesquisa é a área. As instituições consideradas são o sexto ano do Ensino Fundamental brasileiro e a classe sixième na França.

O conhecimento entra em cena com a noção de relação. Chevallard (1992, p. 86) postula que "Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como existente (para ela)", ou dito de outra maneira, um objeto O existe "se pelo menos uma pessoa ou uma instituição tiver uma relação com esse objeto". Chevallard (2007, p. 710) explica que "entrava – e entra – na relação de X com O tudo o que X é levado a fazer com O, inclusive o que a pessoa pensa, diz ou até sonha em relação a O". Conhecer um objeto, no sentido da TAD significa ter uma relação com o objeto (CHEVALLARD, 1992).

A relação institucional a um objeto é modelada a partir das práticas vivenciadas na instituição nas quais o objeto intervém. Analogamente, a relação pessoal de um indivíduo com um objeto de saber é caracterizada pela maneira como esse indivíduo conhece esse objeto e pelas práticas que vivencia com esse objeto. As relações pessoais que os indivíduos estabelecem com os objetos, dependem das relações institucionais com esses objetos, nas instituições das quais ele é sujeito (CHEVALLARD, 1992). Quando um indivíduo se torna sujeito de uma instituição, sua relação pessoal com os objetos que existem nessa instituição é modificada, pois passa a sofrer a influência das condições e imposições próprias da relação institucional com esse objeto nessa instituição. A aprendizagem é vista na TAD como modificação da relação pessoal com um objeto (CHEVALLARD, 1992).

Outro elemento posto na TAD é a noção de posição. No caso de instituições didáticas (nas quais há uma intenção de modificação da relação com o saber), há as posições básicas de professor e de aluno e as relações institucionais com os objetos de saber dependem da posição ocupada pelos sujeitos. Para Chevallard (1992), um sistema didático (SD) é constituído de sujeitos da instituição (I) que ocupam nesse sistema as posições de professor (P) e aluno (A) e objetos (O) cuja aprendizagem é visada na instituição. Neste mesmo texto, Chevallard explicita que um sistema didático não vive num vácuo. Depende de outros sistemas didáticos e da existência de um ambiente sistêmico – um sistema de ensino - que lhe dá condições de existência.

A caracterização da relação institucional com os objetos de saber vai se apoiar na noção de organização praxeológica ou praxeologia. A TAD postula que "a atividade matemática deve ser interpretada como uma atividade humana e como consequência propõe um modelo geral das atividades humanas que formula em termos de praxeologia" (BOSCH; GASCÓN, 2007, p. 397).

Uma praxeologia, segundo Chevallard (2002a) é um modelo de quatro componentes interligados [T, τ, θ, Θ]. T representa um tipo de tarefa, τ representa uma técnica que permite cumprir tarefas do tipo T, θ representa uma tecnologia que permite explicar a técnica e Θ representa uma teoria que justifica a tecnologia. Esses quatro componentes articulam-se em torno de dois blocos:

- Um bloco prático-técnico [T, τ], que designa o saber-fazer (do latim práxis) e consiste na associação entre um tipo de tarefa e uma técnica;
- Um bloco tecnológico-teórico [θ, Θ], que designa o saber (do latim logos) resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria.

Chevallard acrescenta que o uso do termo praxeologia sugere a intenção de destacar a interdependência entre as dimensões práxis e logos.

A organização matemática (OM) em torno de um tipo de tarefa [T, τ, θ, Θ] é dita uma organização pontual. O agrupamento de OM pontuais em torno de uma tecnologia vai gerar uma praxeologia local [$T_i$, $\tau_i$, θ, Θ]. Uma praxeologia gerada pela junção de várias praxeologias locais em torno de uma teoria é chamada praxeologia regional [$T_{ij}$, $\tau_{ij}$, $\theta_j$, Θ]. Finalmente, a praxeologia global [$T_{ijk}$, $\tau_{ijk}$, $\theta_{jk}$, $\Theta_k$] resulta da agregação de várias organizações matemáticas regionais (CHEVALLARD, 2007).

A análise em termos de praxeologia fornece um instrumento não apenas teórico, mas também metodológico para caracterizar o que se faz em uma instituição com certo objeto de saber. Mas a TAD propõe também interrogar a razão de existência das praxeologias na instituição, ou seja, o que motiva que essa praxeologia seja instalada e não outra num certo período na instituição. Essa natureza de questionamento conduz a uma via importante dentro da TAD, chamada problemática ecológica. Em analogia com o campo da ecologia, nessa linha, questionam-se as condições de vida dos objetos de saber nas instituições, o que leva a discutir como os objetos institucionais interagem e que funções cumprem na instituição. A problemática ecológica, segundo Artaud (1998, p. 101) é "um meio de questionar o real. O que existe e porquê? Mas também o que não existe e porquê? O que poderia existir? Sob que condições? Inversamente, sendo dado um conjunto de condições, que objetos são levados a viver ou ao contrário são impedidos de viver nessas condições?". Ainda segundo essa autora, a problemática ecológica, no seio da TAD vai fornecer ao pesquisador um meio para tomar distância em relação à ilusão de transparência e observar as relações de dependência dos objetos que investiga.

A Didática para Chevallard (2011, p. 27) é "a ciência das condições, impedimentos e restrições da difusão das praxeologias nas instituições da sociedade". Nessa perspectiva, os fenômenos de difusão dos saberes matemáticos situam-se na vida em sociedade e o campo de estudo dos pesquisadores em didática se estende muito além dos intramuros da sala de aula.

No coração da Didática, estão os meios possíveis de difusão dos saberes matemáticos, os entraves a serem superados para permitir essa difusão. Um dos aspectos importantes a serem observados é a articulação entre o fazer (modelado pelo bloco práxis) e o dizer (modelado pelo bloco logos).

Quando se manifesta uma intenção didática relativa a uma organização matemática (OM), forma-se um sistema didático, no qual uma instituição ensinada tem por tarefa estudar a OM e uma instituição ensinante tem por função dirigir o estudo dessa OM. O estudo e a ajuda ao estudo de Organizações Matemáticas não são independentes de condições, restrições, impedimentos próprios ao modo como a instituição lida com os objetos em jogo, os quais dependem inclusive de elementos mais amplos da cultura na qual essa instituição está imersa.

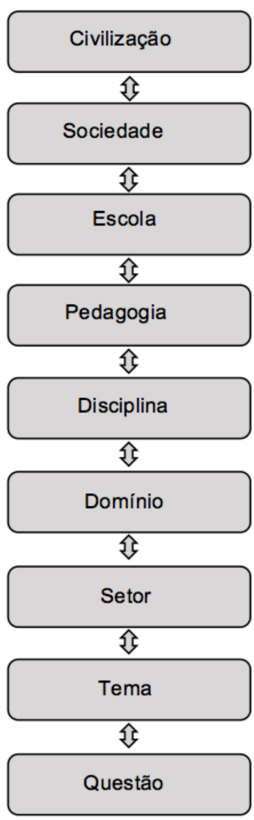
Chevallard (2002a) propõe analisar o processo de estudo de organizações matemáticas pontuais $[T, \tau, \theta, \Theta]$ com a noção de praxeologia didática, a qual se apoia na caracterização de seis momentos do estudo: Primeiro encontro com o tipo de tarefa $T$; Exploração de $T$ e surgimento da técnica $\tau$;

Construção do bloco tecnológico-teórico; Institucionalização; Trabalho da organização matemática; Avaliação. Essa organização em momentos não pressupõe uma sequência cronológica rígida. Indica apenas que, em algum momento do estudo essas funções deverão ser cumpridas.

Nessa pesquisa procuramos caracterizar organizações matemáticas e didáticas relativas ao objeto área de figuras planas em livros didáticos de 6º ano (e *sixième*).

Bosch e Gascón (2007) evidenciam uma terceira contribuição da Transposição Didática e da TAD – a escala de níveis de codeterminação – representada pelo esquema a seguir:

**Figura 3 – Esquema relativo aos níveis de codeterminação do didático**




Fonte: Traduzido e adaptado de Chevallard (2002b) e Bosch e Gascón (2007).

A análise da ecologia das praxeologias matemáticas e didáticas leva a postular a necessidade de considerar condições e restrições oriundas dos diversos níveis interligados. As praxeologias pontuais, locais, regionais e globais correspondem respectivamente aos níveis da questão, do tema, do setor e do domínio, os quais são ditos níveis inferiores da escala de codeterminação (BOSCH; GASCÓN, 2007). Mas as possibilidades de vida das praxeologias matemáticas e didáticas dependem também de condições e restrições oriundas dos demais níveis de codeterminação didática.

Artigue e Winslow (2010) destacam a importância de considerar os diferentes níveis de codeterminação didática na realização de análises comparativas entre diferentes instituições.

No caso da nossa pesquisa, interrogamos que condições e restrições referentes ao livro didático e ao currículo, pesam sobre o modo como é conduzido o estudo das praxeologias relativas às grandezas geométricas e mais especificamente à área no Ensino Fundamental no Brasil e no nível de ensino equivalente na França.

Como já foi dito, a entrada privilegiada nessa pesquisa é a análise de livros didáticos. Chaachoua e Comiti (2010) discutem o papel da análise de livros didáticos na TAD e defendem que se trata de um elemento importante a considerar na caracterização da relação institucional com os objetos matemáticos. Explicitam, ainda, que a análise ecológica de um objeto de saber se organiza em torno de duas noções: "o habitat que designa os lugares de vida e o ambiente conceitual desse objeto do saber e o nicho que designa a função desse objeto no sistema de objetos com os quais ele interage" (CHAACHOUA; COMITI, 2010, p. 775). Esses autores destacam também a necessidade de explicitar o contexto de produção dos livros didáticos. No nosso caso, no sistema educacional brasileiro, estamos em um momento de estabilidade do sistema, uma vez que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998) estão em vigor há aproximadamente 15 anos. Mas precisamos discutir, em um nível mais macro, o papel que os PCN e o PNLD desempenham nas escolhas de transposição didática dos livros didáticos. Além disso, em um nível mais micro, pretendemos caracterizar o nicho e o habitat das grandezas geométricas na França e no Brasil. Chaachoua e

Comiti (2010, p. 786) destacam, ainda, que a análise comparativa de livros didáticos de diferentes instituições permite "fazer ressurgir as razões de ser de certos objetos, que não enxergamos mais se permanecemos na nossa própria instituição". Essa observação conforta nossa escolha de realizar uma análise comparativa de livros didáticos franceses e brasileiros.

## Delimitação do objeto de pesquisa

Como já foi dito, nosso interesse se volta para o estudo das grandezas geométricas no Ensino Fundamental brasileiro e nos níveis equivalentes na França, com foco na grandeza área de figuras planas. A escolha do 6º ano do Ensino Fundamental justifica-se por se tratar de um momento de transição entre os Anos Iniciais e os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Com base no exposto, o objetivo geral desta pesquisa foi:

Caracterizar e buscar elementos explicativos para as escolhas de transposição didática dos livros didáticos atuais acerca da área de figuras planas no 6º ano do Ensino Fundamental brasileiro e no nível equivalente na França (classe de sixième).

Para atingir esse objetivo geral foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- Caracterizar as instituições em foco: sexto ano do Ensino Fundamental brasileiro e classe de *sixième* francesa.
- Analisar o papel dos livros didáticos nas instruções oficiais francesas e brasileiras.
- Construir um instrumento teórico-metodológico de análise do ensino da área de figuras planas: o filtro da grandeza área.
- Caracterizar, com base no filtro da grandeza área, a relação institucional com o objeto área nas instituições sexto ano do Ensino Fundamental brasileiro e *sixième* na França.
- Identificar elementos da razão de ser das grandezas geométricas no Ensino Fundamental brasileiro atual e na *école élémentaire* e *collège* na França.

- Estabelecer conexões entre as condições, impedimentos e restrições que pesam sobre as escolhas de transposição didática, oriundas de níveis superiores de codeterminação didática nos sistemas educativos francês e brasileiro e a relação institucional com o objeto área expressa nos livros didáticos.

## Breve caracterização das instituições

Este estudo teve por objetivo caracterizar as instituições em foco - sexto ano do Ensino Fundamental e classe de *sixième* - situando-as em um contexto mais amplo.

No caso do Brasil, consideramos ao mesmo tempo o âmbito do país e o do estado de Pernambuco. Essa escolha justifica-se pelo fato de que a definição de currículos oficiais em nosso país se dá em diversos níveis, dentre os quais o federal e o estadual.

A fim de comparar os sistemas educativos francês e brasileiro, buscamos alguns dados estatísticos sobre os dois países, tanto em bases de domínio público como a Wikipédia, como nos sites oficiais do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e a instituição equivalente na França – Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques (INSEE), bem como nos sites dos Ministérios de Educação dos dois países. No caso da França, consultamos também o *code de l'éducation* que agrupa e organiza as leis e normas que dizem respeito à educação e encontra-se no site do poder legislativo francês.

Para dar uma visão mais ampla da educação no Brasil, dois documentos tiveram uma importância central: a Constituição Federal e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDBEN 9394/96 (BRASIL, 1996). Foram analisadas as versões originais desses documentos (as quais datam de 5 de outubro de 1988 e 20 de dezembro de 1996, respectivamente) e as versões em vigor após algumas alterações (versão da Constituição que data de 29 de março de 2012, e a 5ª edição, publicada pela Câmara dos Deputados em 2010, da LDB). No caso da Constituição Federal, foi analisado, mais precisamente o extrato que diz respeito à Educação, ou seja, a seção I do capítulo III (Da educação da cultura e do esporte, do título VIII – da ordem social).

(a) Duas realidades bastante diferentes

O quadro a seguir apresenta e permite comparar alguns dados relativos à França, ao Brasil e ao estado de Pernambuco.

**Quadro 1 – Comparação entre a França, o Brasil e Pernambuco**

| | **França** | **Brasil** | **Pernambuco** |
|---|---|---|---|
| Área[8] em km$^2$ | 675.417 | 8.514.877 | 98.311 |
| População estimada | 65.350.000 | 193.946.886 | 8.796.032 |
| PIB (em milhões de dólares americanos) | 2.808.265 (5º lugar)[9] | 2.517.927 (6º lugar) | 38,7 (por volta de 78 milhões de reais) |
| PIB per capita[10] | 44.008 USD (19º lugar) | 12.789 USD (54º lugar) | 4.393 USD (por volta de R$9000,00) |
| IDH | 0,872 (14º lugar) | 0,699 (73º lugar) | 23º lugar entre os estados brasileiros[11] |
| Decomposição territorial / administrativa[12] | 36570 municípios<br>96 departamentos<br>22 regiões | 5564 municípios<br>27 unidades da federação | 185 municípios |

Fonte: organização dos dados dos autores do capítulo, a partir de informações coletadas em 2013 na wikipedia, no IBGE e no site do INSEE.

8 Dos 675.417 Km$^2$ de área do território francês, 552.000 Km$^2$ na França metropolitana.

9 Posições da França e do Brasil, nas classificações dos países quanto ao PIB e ao PIB per capita.

10 Os dados relativos ao PIB e ao PIB per capita da França e do Brasil foram extraídos do relatório do FMI publicado em 2012, em referência ao ano de 2011 (consultado na Wikipédia)

11 Houve uma mudança metodológica no cálculo do IDH por país e essa mudança ainda não foi incorporada pelo IBGE no cálculo por estados. Por isso, o valor absoluto fica um pouco sem sentido, na comparação com o IDH brasileiro, o que nos levou a optar pela posição relativa do estado de Pernambuco, em relação aos demais estados brasileiros.

12 No caso da França, para essa rubrica, só foram considerados os dados da França metropolitana.

Foram considerados a área dos territórios, a população estimada, o Produto Interno Bruto (PIB), o PIB per capita (razão entre o PIB e a população), o IDH (Índice de Desenvolvimento Humano) e a decomposição territorial-administrativa. Em alguns casos, para situar melhor os dados, foram tomados os valores absolutos, mas foram também explicitadas as posições dos dois países na classificação mundial, bem como a posição de Pernambuco, no Brasil.

Se a área do território brasileiro é mais de 12 vezes a da França[13], a população brasileira é apenas o triplo da francesa. Tal diferença se explica entre outros fatores, pelo fato de a Floresta Amazônica ocupar aproximadamente 5 milhões e meio de quilômetros quadrados. O PIB brasileiro é relativamente próximo do francês, mas, se tomamos o PIB per capita como critério, observamos uma diferença bastante nítida: o francês é mais de três vezes o brasileiro e suas posições na classificação mundial são bastante distintas. Do mesmo modo, na classificação mundial relativa ao Desenvolvimento Humano, a França ocupa a 14ª posição, enquanto o Brasil ocupa a 73ª. É importante sublinhar que dentre os fatores considerados no cálculo do IDH, há o nível de escolarização. Esses dois países são também nitidamente diferentes, quanto à organização territorial e administrativa. Embora a área territorial e a população brasileiras sejam maiores, a quantidade de municípios na França é quase seis vezes a quantidade brasileira. Todas essas características têm provavelmente impactos sobre o modo como o sistema educativo é estruturado, indicando condições e restrições que pesam sobre o ensino da Matemática e mais especificamente sobre o ensino do objeto área no 6º ano.

O estado de Pernambuco ocupa aproximadamente 1% do território nacional e sua população representa por volta de 4,5% da população brasileira. Embora sua participação no PIB nacional seja de pouco mais de 2%, na classificação dos estados, Pernambuco se encontra em 10º lugar. Como se

---

13 A área indicada no quadro inclui os territórios ultramarinos, Guadalupe, Martinica. Considerando apenas a França metropolitana (cuja área é de aproximadamente 550 mil quilômetros quadrados), essa razão é maior que 15.

sabe, por razões históricas, a riqueza ainda é extremamente concentrada na região Sudeste e no estado de São Paulo. O PIB per capita de Pernambuco no período em que foi realizada a pesquisa representava por volta de $\frac{1}{3}$ do PIB per capita brasileiro e em torno de $\frac{1}{10}$ do PIB per capita francês. Do mesmo modo, o IDH pernambucano era um dos mais baixos do Brasil.

(b) A educação nos dois países

A leitura do *code de l'éducation*[14] mostra que na França:

- a instrução é obrigatória de seis a dezesseis anos (article L131-1) e deve ser assegurada prioritariamente em estabelecimentos de ensino (article 131-1-1);
- as crianças a partir de três anos devem ser acolhidas em uma escola maternal, se suas famílias fizerem a demanda (article 113-1);
- a escolaridade obrigatória deve garantir a cada aluno o domínio de uma base de conhecimentos e competências – o *socle commun*[15] – indispensáveis para o prosseguir sua formação, construir um futuro pessoal e profissional e ter sucesso em sua vida em sociedade. Esta base compreende, entre outros componentes o «domínio dos principais elementos da Matemática», «uma cultura humanista e científica que permita o livre exercício da cidadania» e o "domínio das técnicas usuais da informação e da comunicação" (article122-1-1);
- o artigo 122-1-1 postula, ainda, que esses conhecimentos e competências são determinados pelo *Haut Conseil de*

14 Disponível em: http://www.legifrance.gouv.fr/affichCode.do?cidTexte=LEGITEXT000006071191&dateTexte=20110201 (consultado em 29 de outubro de 2012)

15 «La scolarité obligatoire doit au moins garantir à chaque élève les moyens nécessaires à l'acquisition d'un socle commun constitué d'un ensemble de connaissances et de compétences qu'il est indispensable de maîtriser pour accomplir avec succès sa scolarité, poursuivre sa formation, construire son avenir personnel et professionnel et réussir sa vie en société.»

*l'éducation* e a aquisição do *socle commun* pelos alunos é avaliada e considerada no prosseguimento da escolaridade.

- o ensino escolar (*maternelle*, *élémentaire*, *collège* e *lycée*) é gratuito (article L-132) e laico (L – 141)
- os estabelecimentos de ensino de primeiro e segundo graus podem ser públicos ou privados (article 151-3).

No que diz respeito à gestão da educação e à divisão de responsabilidades na França, a formação e remuneração dos professores são da alçada do governo federal, bem como a determinação dos programas curriculares. A gestão dos estabelecimentos escolares fica a cargo dos municípios, departamentos ou regiões. O ensino primário tem duas etapas a *école maternelle* que acolhe crianças de 3 a 5 anos e a *école élémentaire* voltada para crianças de 6 a 9 anos. O ensino secundário também se organiza em duas etapas: a primeira chamada *collège* é finalizada com a submissão dos alunos a um exame nacional chamado *Brevet* e a segunda etapa, chamada *lycée*, é concluída com exames nacionais, o *baccalauréat* (profissional, tecnológico ou geral), e o certificado de aptidão profissional, no caso do ensino agrícola. Por volta de 17% dos alunos do ensino primário e secundário são escolarizados atualmente em estabelecimentos de rede privada, sendo a maior parte destes submetida a contrato de associação com o Estado e frequentemente confessionais.

A leitura da Constituição Federal brasileira em vigor mostra que:

- A educação é um direito de todos e um dever do Estado e da família (art. 205);
- A educação visa o desenvolvimento pessoal, a preparação para o exercício pleno da cidadania e a qualificação para o trabalho (art. 205);
- Dentre os princípios que regem o ensino (art. 206), encontramos a igualdade de acesso e de permanência na escola, a liberdade pedagógica, a coexistência de estabelecimentos de ensino públicos e privados, a gratuidade nas escolas públicas,

a garantia de um padrão de qualidade, a valorização dos profissionais da educação escolar;

- O Estado deve garantir entre outros a educação básica obrigatória e gratuita de 4 a 17 anos (art. 208) inclusive promovendo para aqueles que não tiveram acesso na idade própria, a universalização progressiva do Ensino Médio gratuito, a oferta do ensino regular noturno, o apoio, em todas as etapas da escolarização básica, por meio de programas suplementares de material didático escolar, transporte, alimentação e assistência à saúde;
- Conteúdos mínimos devem ser estabelecidos no nível de Ensino Fundamental para garantir a formação básica comum e o respeito dos valores culturais e artísticos nacionais e regionais (art. 210);
- A União, os estados da federação e os municípios organizam colaborativamente seus sistemas de ensino (art. 211);
- O governo federal é responsável pela organização do sistema federal de ensino, financia os estabelecimentos públicos federais e exerce um papel na redistribuição, de modo a garantir igualdade de condições e um padrão mínimo de qualidade, por meio de assistência técnica e financeira aos demais níveis (art. 211, § 1º);
- Os municípios são encarregados prioritariamente do Ensino Fundamental e da Educação Infantil (art. 211, § 2º);
- Os estados e o Distrito Federal são responsáveis prioritariamente pelo Ensino Fundamental e Médio (art. 211, § 3º);
- Os três níveis de gestão devem definir as colaborações necessárias para garantir a universalização do acesso ao ensino obrigatório;
- O governo federal deve investir pelo menos 18% de seu orçamento na educação e os demais níveis de gestão são obrigados a investir no mínimo 25% de seus orçamentos em educação. A universalização do acesso e a garantia de um padrão de

qualidade e equidade nos termos do plano nacional de educação são prioridades (art. 212);

- É definido (art. 214) que um plano nacional de educação deve ser estabelecido, por períodos de 10 anos, para determinar as metas, as estratégias de implementação a serem realizadas, em regime colaboração pelos sistemas de ensino nos diferentes níveis, visando, entre outros, erradicar o analfabetismo, universalizar o acesso à escola e melhorar a qualidade do ensino.

A LDB 9394/1996 reafirma os princípios declarados na Constituição, torna-os mais precisos e acrescenta alguns elementos. No que se segue, vamos concentrar os comentários sobre o que é específico da LDB em relação à Constituição.

Desde o princípio, fica claro que a Educação é compreendida em sentido mais amplo, mas a LDB regulamenta a educação escolar. Dito isso, dentre os princípios que regem o ensino, além daqueles expressos na Constituição, podemos destacar a valorização da experiência extra-escolar e a relação entre educação escolar, trabalho e práticas sociais. A garantia da qualidade, a pluralidade de ideias e concepções pedagógicas e a valorização dos profissionais da educação escolar são reafirmadas. No artigo 4° da LDB 9394/96, é explicitado o dever do Estado de garantir, entre outros, o acesso ao Ensino Fundamental, o acesso aos materiais didáticos escolares (item VIII) e o controle da qualidade do ensino (item IX).

O título IV da LDB diz respeito à organização da educação nacional e à divisão de responsabilidades entre União, estados e municípios. Entre as atribuições da União (art. 9°), há a elaboração do Plano Nacional de Educação e o estabelecimento de recomendações curriculares para a Educação Básica. Tais recomendações devem ser consideradas pelos demais níveis de gestão na definição de conteúdos mínimos a serem assegurados a todos a fim de garantir uma formação comum a todos os brasileiros.

A educação escolar é estruturada em dois níveis: Educação Básica e Educação Superior. A Educação Básica, por sua vez, é estruturada em três etapas: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

A etapa em foco nessa pesquisa é o Ensino Fundamental. No artigo 23 da LDB é explicitado que esse nível pode ser organizado por classes anuais, semestrais, ciclos ou outros critérios referentes à idade assim como outras formas de agrupamento se for conveniente para o processo de ensino e aprendizagem. O calendário escolar deve se adaptar às particularidades locais inclusive climáticas e econômicas, sendo garantida a quantidade de horas e dias letivos preconizada por lei: 800 horas distribuídas em 200 dias de trabalho efetivo por ano.

O artigo 26 estabelece que o currículo do Ensino Fundamental e Médio deve ter uma base nacional comum a ser completada por cada sistema de ensino (dos estados e municípios) e cada estabelecimento escolar, o que consiste em uma parte diversificada devido às peculiaridades regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e do público. Os currículos devem integrar obrigatoriamente o estudo da Língua Portuguesa, da Matemática, de conhecimentos do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente a brasileira.

O Ensino Fundamental é obrigatório e tem duração de nove anos, a partir dos seis anos de idade (inicialmente era previsto que essa etapa tivesse duração de oito anos, a partir dos sete anos de idade, mas o art. 32 da LDB foi modificado pela Lei 11274 de fevereiro de 2006). O objetivo central dessa etapa da escolaridade é a formação do cidadão, por meio do domínio, entre outros, da língua e do cálculo.

Embora date do final da década de 1990, o documento ainda em vigor no Brasil, que traz as recomendações curriculares a nível nacional são os Parâmetros Curriculares Nacionais. Na introdução dos PCN (BRASIL, 1997), é explicitado que esse documento foi concebido para permitir a busca de um referencial comum de qualidade para todo o país, ao mesmo tempo em que respeita a diversidade sócio-cultural das regiões.

> Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas

> autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas. (BRASIL, 1997, p. 13).

Os parâmetros, contrariamente ao Programa francês, não têm caráter obrigatório, mas um status de recomendação e de base comum a ser complementada nos diferentes níveis de gestão (estados e municípios). No texto dos PCN, os conteúdos são organizados em quatro ciclos de aprendizagem (de dois anos cada). O documento referente aos quatro primeiros anos dessa etapa (antigas 1ª a 4ª séries) foi publicado em 1997 e aquele referente aos quatro últimos anos dessa etapa (antigas 5ª a 8ª séries) foi publicado em 1998. Em 2006, a Lei 11.274 determina que essa etapa deve ter nove anos de duração e começar aos seis anos (abrangendo o que antes era o último ano da Educação Infantil – pré-escola): a organização por ciclos perde sua força e passa a vigorar uma nova nomenclatura para cada classe: 1º ao 9º anos do Ensino Fundamental. Os livros didáticos são estruturados por anos, a Lei 11.274 determina a duração do Ensino Fundamental sobre os critérios de idade e duração, mas as instruções oficiais em vigor a nível nacional, nas quais há explicitação de objetivos de aprendizagem e conteúdos a serem abordados, são ainda os PCN, os quais estão organizados por ciclos. Essa flexibilidade é garantida pela LDB e gera condições que pesam sobre a organização do estudo de objetos matemáticos na escola.[16]

---

16 Desde 2013, quando essa pesquisa foi realizada, outras políticas públicas relativas à educação foram implementadas: foi aprovado o Plano Nacional de Educação, está em discussão a Base Nacional Comum Curricular, etc. Em etapas posteriores da pesquisa a influência dessas políticas deverá ser considerada.

O quadro abaixo explicita brevemente as correspondências entre as classes no sistema educativo atual na França e no Brasil.

**Quadro 2 – Comparação entre o Ensino Fundamental brasileiro e os níveis equivalentes na França**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Brasil | Ensino Fundamental | | | | | | | | |
| | Anos Iniciais do Ensino Fundamental | | | | | Anos Finais do Ensino Fundamental | | | |
| | 1° ano | 2° ano | 3° ano | 4° ano | 5° ano | 6° ano | 7° ano | 8° ano | 9° ano |
| | | | | | | | | | |
| França | CP | CE1 | CE2 | CM1 | CM2 | $6^{\text{ème}}$ | $5^{\text{ème}}$ | $4^{\text{ème}}$ | $3^{\text{ème}}$ |
| | *Ecole élémentaire* (última etapa do ensino primário) | | | | | *Collège* (primeira etapa do ensino secundário) | | | |

Fonte: autores do capítulo.

Como se pode observar, a classe em foco nessa pesquisa, o 6º ano no Brasil, é a primeira da segunda etapa do Ensino Fundamental e a primeira do nível *collège* na França (*sixième*)[17]. A estrutura da escolarização tem aspectos semelhantes e algumas especificidades. A duração e o tempo de permanências (em anos) da criança na escola são bastante próximos. O sexto ano corresponde a uma transição entre etapas em ambos os países, mas essa transição é mais marcada no sistema francês. No caso do sistema brasileiro, o Ensino Fundamental com suas duas etapas (anos iniciais e anos finais) é visto como um todo, enquanto no francês a *école élémentaire* é a segunda etapa do ensino primário (a primeira etapa é a escola maternal) e o *collège* é a primeira etapa do ensino secundário (sendo a segunda etapa o equivalente ao Ensino Médio brasileiro).

17 Para tornar a leitura mais fluida, a partir daqui, sempre que fizermos referência à classe de *sixième* no sistema francês, utilizaremos o equivalente no sistema brasileiro: 6º ano.

O conjunto de dados e observações acima permite delinear alguns aspectos importantes acerca das condições institucionais do ensino no 6º ano:

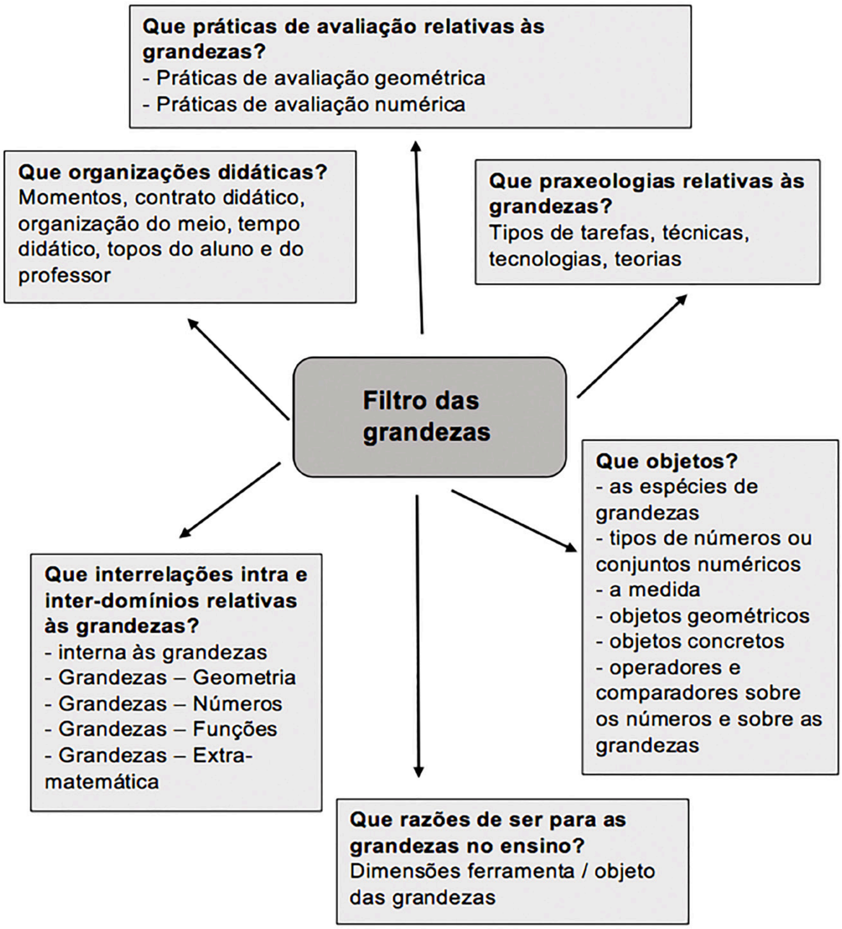
- as realidades social e econômica da França, do Brasil e do estado de Pernambuco são bastante distintas;
- em ambos os países a instrução é obrigatoria e gratuita nos estabelecimentos públicos e a Matemática está incluída entre os componentes básicos do currículo obrigatório;
- a divisão de responsabilidades entre a União e demais níveis de gestão (estados e municípios, no Brasil; *régions*, *departements* e *communes*, na França) se faz em ambos os países, mas de maneiras distintas;
- na França, a União estabelece programas curriculares nacionais que são seguidos por todo o sistema de ensino, enquanto no Brasil, a União apenas estabelece recomendações e uma base curricular comum, a ser completada nos níveis estadual e municipal, bem como nos estabelecimentos escolares – a preocupação com a diversidade cultural e social é expressa nos documentos oficiais brasileiros enquanto esse aspecto não foi observado nos documentos franceses analisados;
- no Brasil, os documentos oficiais expressam a necessidade de garantia de um padrão de qualidade e a responsabilidade do Estado no fornecimento de material didático, o que, a nosso ver, justifica a existência de uma política de Estado relativa ao livro didático – o PNLD (Programa Nacional do Livro Didático). Isso não foi observado nos documentos franceses;
- a formação para o exercício pleno da cidadania, para o prosseguimento dos estudos e para a profissionalização estão presentes nos documentos oficiais de ambos os países.

A partir daqui, nosso interesse se volta explicitamente para o ensino da grandeza área. O tópico 3 discute o instrumento teórico metodológico de análise intitulado "filtro da grandeza área", construído nessa pesquisa. No quarto e quinto tópicos são apresentados os resultados das análises de livros didáticos do 6º ano franceses e brasileiros, segundo critérios componentes do filtro. Ao final, procuramos estabelecer conexões entre as características da relação institucional com o objeto área no 6º ano no Brasil e na França, identificadas por meio das análises dos livros e as condições e restrições oriundas da análise das condições institucionais de níveis superiores de codeterminação.

## O filtro da grandeza área

Para nortear as análises do ensino da área de figuras planas, foi elaborado um instrumento teórico metodológico chamado filtro da grandeza área. Esse instrumento corresponde a uma instanciação do filtro das grandezas (ANWANDTER-CUELLAR, 2012), o qual por sua vez, foi construído em analogia ao filtro do numérico (BRONNER, 2007; LARGUIER, 2009). O filtro da grandeza área, construído com base no filtro das grandezas e em diálogo com a revisão de literatura sobre o ensino e aprendizagem das grandezas geométricas (brevemente apresentada no item 1.1 desse capítulo), fornece uma grade de descrição e análise das relações institucionais ao objeto área. O filtro das grandezas produzido na tese de Nathalie Anwandter-Cuellar sob a orientação de Alain Bronner é esquematizado a seguir:

**Figura 4 – Filtro das grandezas**




Fonte: Anwandter-Cuellar (2012).

A ideia central do filtro é ao mesmo tempo fornecer um quadro para a consideração de componentes importantes do ensino dos objetos matemáticos e tomar cada entrada de maneira relativamente independente, de modo a compor uma análise em que os vários componentes se cruzam e se complementam. Assim, ao investigar o ensino do objeto «área de figuras planas», com base no filtro das grandezas interrogamo-nos sobre alguns aspectos:

Quais os objetos em jogo? Quais as razões de ser da área no ensino? Como são (ou não) contempladas as suas dimensões enquanto instrumento e enquanto objeto? Como são consideradas as interrelações da área com outros objetos (do domínio das grandezas e medidas, de outros domínios da Matemática, de outras disciplinas escolares, de práticas sociais extra-escolares)? Que praxeologias matemáticas são trabalhadas em torno desse objeto? Que praxeologias didáticas são construídas em torno dessas organizações matemáticas? Que práticas de avaliação são trabalhadas no ensino da área?

Um arcabouço geral é construído, com base nas pesquisas anteriores sobre o ensino e a aprendizagem da área ou das grandezas e medidas de modo mais amplo. O filtro tem natureza dinâmica e é sistematicamente enriquecido pelos estudos teóricos e empíricos.

a) Principais objetos

No que diz respeito aos objetos em jogo, retomamos parcialmente a categorização dos objetos proposta por Brousseau (2002) para o domínio das grandezas e medidas, instanciando-a no caso da grandeza área:

**As superfícies:** objetos geométricos dos quais a área é um atributo. Em relação às superfícies, um aspecto importante a ser destacado é a distinção frequentemente esquecida entre os objetos concretos (superfície de uma mesa, por exemplo) e os objetos abstratos (quadrado, retângulo, ...);

**As áreas**: trata-se de um tipo de grandeza, que se relaciona com outros tipos de grandeza geométrica: comprimento, volume, abertura de ângulo. Esse termo vai designar tanto o tipo de grandeza como um valor particular desse tipo de grandeza (por exemplo, a área de um quadrado dado);

**As funções-medida** são aplicações aditivas do conjunto das áreas no conjunto dos números reais não negativos. A cada unidade de área corresponde uma função medida diferente.

**A medida de uma área** relativa a uma unidade de área é o número real não negativo obtido por meio da função medida.

**O termo «grandeza medida»** faz referência ao par número unidade (por exemplo, 25 $cm^2$, para designar a área de um quadrado de lado 5 cm). Corresponde ao que antigamente era designado pelo termo número concreto.

Ainda em relação aos objetos que tem importância central no estudo do objeto área, há aqueles que remetem à conexão do domínio das grandezas com o domínio numérico (BRONNER, 1997, 2007a): os números, os operadores e os comparadores.

b) O lugar e o papel do objeto área

O objeto área vai encontrar seu lugar na arquitetura global das orientações currriculares, dos livros didáticos e das práticas docentes por meio de organizações matemáticas pontuais, locais, regionais e globais. Observamos o lugar atribuído a esse objeto, com base na escala de níveis de codeterminação didática e suas articulações com outros objetos, tanto relativos a outros tipos de grandeza como de diferentes domínios matemáticos. Pretende-se, por meio desse componente do filtro, questionar nas instituições, as razões de ser desse objeto, seus nichos e habitats, em conexão com as dinâmicas instaladas e convocadas:

- a dinâmica interna ao domínio das grandezas e medidas e à espécie de grandeza área;
- as dinâmicas entre domínios da Matemática (com a geometria, com a aritmética ou a álgebra);
- as dinâmicas extra-matemáticas, das quais se distinguem aquelas que se fazem entre componentes curriculares (interrelações com outras disciplinas escolares) e aquelas que estabelecem conexões com práticas sociais extra-escolares.

Pretendemos também interrogar nessas dinâmicas, se o objeto área é conectado com outros objetos (matemáticos ou não) e de que maneiras, bem como o seu funcionamento enquanto instrumento ou objeto (DOUADY, 1986).

c) Organizações matemáticas e didáticas relativas ao objeto área

Como já foi dito, o primeiro componente de uma organização matemática são os tipos de tarefa. No nosso caso, tomamos como pontos de partida classificações anteriores sobre o ensino-aprendizagem da área (BALTAR, 1996) e para o domínio das grandezas e medidas (ANWANDTER-CUELLAR, 2012). Baltar (1996) classifica, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais, as situações que dão sentido à área em três tipos: situações de comparação, situações de medida e situações de produção. Anwandter-Cuellar (2012) propõe uma tipologia de sete gêneros de tarefa relativas às grandezas: comparar, medir, calcular, produzir objeto de grandeza dada, produzir objeto de grandeza maior ou menor, estudar efeitos de transformações ou deformações sobre uma grandeza e transformar unidades.

Consideramos, então, os seguintes tipos de tarefa para a espécie de grandeza área:

T1 : Comparar áreas;
T2: Determinar uma área;
T3: Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies;
T4: Produzir uma superfície de área dada;
T5: Produzir uma superfície de área maior ou menor que uma área dada;
T6: Converter unidades de área;
T7: Determinar o valor de uma espécie de grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área.

Em relação à tipologia proposta por Anwandter, consideramos que os gêneros medir e calcular deveriam ser agrupados em um único tipo de tarefa (T2), pois o que os diferencia essencialmente são as técnicas empregadas. O tipo de tarefa T7, ausente da tipologia de Anwandter, corresponde, por exemplo, a tarefas como "qual o preço de um terreno de 650m$^2$, se o preço por metro quadrado é R$200,00"?

Os demais elementos das organizações matemáticas são as técnicas, tecnologias e teorias. Nas instituições produtoras do saber acadêmico matemático ou didático, algumas teorias relativas à espécie de grandeza área ou ao domínio das grandezas foram produzidas ao longo da história (CHEVALLARD; BOSCH, 2001, 2002; DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989; ROUCHE, 1992, entre outros). Uma parte das contribuições desses estudos está presente em um documento destinado à formação continuada dos professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental (Ministère de l'Education Nationale, 2007). Percebe-se um esboço que se constrói pouco a pouco de modelo praxeológico de referência para o estudo das grandezas e medidas no Ensino Fundamental e mais especificamente da grandeza área, o qual se constitui em um suporte para a análise dos referenciais curriculares, dos livros didáticos e das práticas docentes relativas a esse objeto.

Ainda na perspectiva das organizações praxeológicas, mas tomando outro critério do filtro em foco, estão as práticas de avaliação de uma grandeza. Dando continuidade aos trabalhos de Bronner (1997, 2007a, 2007b), Anwandter-Cuellar (2012) propõe distinguir diferentes tipos de avaliação de uma grandeza (no nosso caso de uma área): a avaliação numérica (exata ou aproximada, das quais Bronner fornece as subcategorias cálculo aproximativo, cálculo algorítmico e aproximação), avaliação geométrica (exata ou aproximada) e avaliação por medição.

Pretende-se ainda, com base no filtro da grandeza área, examinar como são propostos os diferentes momentos do estudo desse objeto, que relações são estabelecidas com suas razões de ser, como são (ou não) consideradas as conexões entre área e perímetro, se são (ou não) levadas em consideração as distinções entre objetos concretos e abstratos. Ainda em relação com as organizações didáticas, pretende-se observar os tipos de retomada (LARGUIER, 2009) engajados no estudo da área.

## Análise comparativa de dois livros didáticos de sexto ano

Este estudo foi baseado na análise dos seguintes documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os Anos Iniciais e para os Anos Finais do Ensino Fundamental, programas curriculares franceses para a *école élémentaire* e o *collège*, dois livros didáticos de Matemática destinados ao 6º ano do Ensino Fundamental: um brasileiro e um francês.

Para a escolha do livro didático brasileiro a ser analisado foi feito um levantamento de todas as coleções aprovadas nos PNLD de 2002, 2005, 2008 e 2011. Percebemos que 32 coleções foram aprovadas pelo menos uma vez nessas quatro edições do PNLD e 10 coleções constavam no guia do PNLD 2011. Consultamos também os dados estatísticos do FNDE. A coleção escolhida (DANTE, 2009) foi aprovada nas edições de 2005, 2008 e 2011, o que indica um tempo de uso relativamente estável nas escolas. É uma das mais adotadas pelos professores brasileiros (4º lugar) e há coleções aprovadas desse mesmo autor nos níveis dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, o que pode permitir no prolongamento dessa pesquisa observar o estudo desse mesmo objeto em outras etapas da escolaridade. No caso da coleção francesa, por não haver uma política de estado relativa ao livro didático e não termos tido acesso a dados precisos sobre a venda dos livros didáticos franceses, a mesma foi escolhida por se tratar de uma coleção utilizada por um quantitativo significativo de professores[18].

Os resultados desse estudo foram apresentados no texto *Étude comparative de la reprise de l’enseignement de l’aire en classe de sixième en France et au Brésil* no IV CITAD – Congrès Internacional sur la théorie

18 Como não foi possível obter informação oficial sobre a quantidade de coleções comprada pelas escolas, a escolha do livro a ser analisado, foi feita com base em informações assistemáticas fornecidas pelas editoras e por professores em formação continuada.

anthropologique du didactique, realizado em Toulouse em abril de 2013 (BELLEMAIN, BRONNER, LARGUIER, 2017)[19].

As análises desse estudo mostraram que em ambos os países, a área de figuras planas é objeto de estudo desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (école élémentaire na França), inserida em um domínio intitulado grandezas e medidas. A razão de ser desse domínio no Ensino Fundamental brasileiro é fortemente ancorada nos usos sociais, nas aplicações em outras disciplinas, nas interrelações com os demais domínios, notadamente com os números e operações e a geometria. Compõem ainda essa razão de ser, a possibilidade de evidenciar o caráter histórico da construção dos saberes matemáticos e a possibilidade de uso dos conteúdos desse domínio no estudo de temas transversais. O programa francês é menos explícito no que diz respeito às justificativas da inclusão do domínio das grandezas e medidas entre os objetos de estudo da école élémentaire e do collège, mas podem-se notar argumentos que indicam a ligação desse domínio com situações da vida cotidiana, usos em outras disciplinas escolares e, sobretudo, conexões com o campo dos números e operações. A análise de um livro didático brasileiro e um francês, para o 6º ano do Ensino Fundamental (classe de sixième respectivamente) mostra convergências e especificidades quanto à condução do estudo do objeto área de figuras planas. No que diz respeito ao lugar do domínio das grandezas e medidas e da área de figuras planas na arquitetura global dos livros didáticos analisados, percebe-se que no brasileiro, há um capítulo dedicado ao domínio das grandezas e medidas como um todo, seguido de outro capítulo dedicado ao estudo das grandezas geométricas, enquanto isso não ocorre no livro francês. Em ambos, o estudo desse domínio é realizado ao final do livro. A interrelação entre os domínios das grandezas e medidas e dos números e operações é forte nos dois livros, colocando a medida de grandezas como um elemento constitutivo da

---

19 De acordo com o funcionamento desse evento, a versão aprovada pelo comitê científico do evento é publicada nos pré-anais de circulação restrita aos participantes e versão definitiva do texto foi publicada como capítulo de livro, em 2017.

razão de ser do estudo dos números. No livro didático brasileiro a área é fortemente presente nessa dinâmica entre domínios, mas isso não se verifica no livro francês. Do mesmo modo, os usos sociais da área e as conexões com outras disciplinas (Geografia, por exemplo) são fortemente exploradas no livro brasileiro, enquanto tem um lugar marginal no francês. Em ambos os livros são explorados diversos tipos de tarefa, mas há ênfase nas tarefas de tipo "determinar a área de uma figura", com a técnica de contagem de quadradinhos no caso de figuras não usuais traçadas na malha quadriculada e destaque para o uso de fórmulas no cálculo da área de figuras usuais. Há convergência ainda quanto ao espaço restrito que é dedicado às técnicas não numéricas (baseadas na invariância da área por decomposição e recomposição, por exemplo). Por outro lado, o livro didático francês acentua bem mais que o brasileiro, o estudo da diferenciação entre área e perímetro, integrando nesse estudo inclusive o uso de tecnologias computacionais.

## A razão de ser do estudo da área de figuras planas

Nessa etapa da pesquisa, questionamos quando e como as tarefas envolvendo área de figuras planas propostas nos livros didáticos se conectavam com problemáticas cruciais da vida em sociedade. Para tanto, analisamos os capítulos nos quais a área é objeto de estudo nos 10 livros didáticos brasileiros aprovados no PNLD 2011 e em seis livros didáticos franceses focando a relação entre saberes matemáticos e temas transversais. Esse trabalho foi apresentado nas jornadas Sherbrooke-Montpellier em junho de 2013[20].

20 O colóquio *Les savoirs disciplinaires face aux éducations*, integrante da 4ª edição das jornadas Montpellier-Sherbrooke é resultante de acordos de cooperação entre grupos de pesquisa do IUFM de Montpellier, dentre os quais o grupo ao qual Alain Bronner e Mirène Larguir são vinculados e grupos de pesquisa da cidade de Sherbrooke na província do Quebec, Canadá.

Considerando a natureza do evento, analisamos além dos documentos de orientação curricular franceses e brasileiros (inclusive os volumes dos PCN relativos aos temas transversais), documentos de natureza curricular da província do Quebec no Canadá.

Com base na análise das tarefas relativas ao objeto área nos 16 livros didáticos franceses e brasileiros, construímos uma tipologia dos problemas quanto às contribuições possíveis para a formação dos alunos relativa aos temas e à aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Essa interrelação foi construída em conexão com a discussão sobre a razão de ser do objeto área e à dinâmica extra-matemática, ambos componentes do filtro da grandeza área. Confirmado o que havia sido observado nos livros didáticos analisados na etapa anterior da pesquisa, os livros brasileiros trazem uma maior quantidade e variedade de tarefas que colocam em jogo a articulação entre a Matemática e as práticas sociais extra-escolares, no estudo da área de figuras planas. Tanto nos livros brasileiros como nos franceses, foram identificadas situações que estabelecem conexões com questões importantes da vida em sociedade, como aquelas que dizem respeito ao meio ambiente, mas, de modo geral, o topos[21] do aluno (o que fica sob sua responsabilidade) é bastante reduzido, o que pode comprometer a possibilidade de uma contribuição mais efetiva ao exercício pleno da cidadania.

21 O termo topos, vem do grego e indica o lugar próprio de algo. Na TAD, a noção de topos de um sujeito designa o que fica sob sua responsabilidade, o lugar que esse sujeito ocupa na instituição.

## Considerações finais

Partimos de um objeto de pesquisa amplo, voltado para a caracterização e a busca de explicações que justifiquem escolhas de transposição didática das grandezas geométricas e suas medidas no Ensino Fundamental no Brasil e na França. Os estudos de natureza bibliográfica e teórica realizados exigiram nessa primeira etapa uma maior delimitação do objeto de estudo, agora centrado no ensino da grandeza área e no 6º ano do Ensino Fundamental (classe *sixième* na França).

Para atingir os dois primeiros objetivos específicos (caracterizar as instituições em foco: sexto ano do Ensino Fundamental e classe de sixième e o papel dos livros didáticos nas instruções oficiais francesas e brasileiras) foram analisados diversos documentos oficiais dos dois países. Observamos que as realidades sociais da França e do Brasil e as condições institucionais são bastante distintas, mas apresentam também alguns aspectos em comum. Dentre os aspectos em comum, destacam-se o caráter obrigatório da instrução, a proximidade da estruturação escolar, que situa o sexto ano na passagem entre duas etapas da escolaridade e a formação para o exercício pleno da cidadania como uma das prioridades da educação escolar. Dentre as especificidades, vemos que o Brasil é um país de maior extensão territorial, mais populoso, com menor PIB per capita e menor IDH que a França. Essas características devem fazer parte da explicação de porque adotar recomendações curriculares não obrigatórias ao contrário da França, onde há um programa nacional comum. Por outro lado, os documentos nacionais brasileiros assinalam a responsabilidade da União no fornecimento de material didático e na garantia de padrões de qualidade de ensino, o que provavelmente está entre as razões que justificam a existência de uma política de Estado relativa ao livro didático. A existência do PNLD reforça o papel central dos livros didáticos nas práticas docentes e na definição dos currículos brasileiros, enquanto na França não há nenhum controle por parte do estado sobre esses recursos.

Nosso terceiro objetivo específico foi construir um instrumento teórico-metodológico de análise do ensino da área de figuras planas. Com base nos trabalhos anteriores de Bronner (2007a, 2007b) e Anwandter-Cuellar (2012) elaboramos o filtro da grandeza área, que fornece um primeiro arcabouço teórico metodológico para a análise de documentos de orientação curricular, livros didáticos e práticas docentes. Esse instrumento, por enquanto, foi utilizado na análise dos PCN, dos programas franceses e de alguns livros didáticos, mas seu alcance vai além: tanto no que diz respeito aos níveis de escolaridade como à possibilidade de uso na análise de práticas docentes efetivas. Trata-se de um instrumento dinâmico, que pode ser nutrido e ampliado por outros estudos de natureza teórica ou empírica, mas que na sua forma atual já dá conta de alguns elementos importantes da relação institucional com a grandeza área, como a razão de ser desse objeto, as organizações praxeológicas ou as interrelações desse objeto com outros objetos que vivem nas instituições.

Em consonância com o quarto objetivo da pesquisa, caracterizamos, com base no filtro da grandeza área, elementos da relação institucional com esse objeto no sexto ano do Ensino Fundamental no Brasil e na França. Observamos que em ambos os países há um domínio das grandezas e medidas prescrito nas orientações curriculares, mas cujas condições ecológicas de existência estão em construção. O foco do estudo da área ainda é fortemente marcado pelos seus aspectos numéricos em ambas as instituições e a construção da área como uma grandeza ainda deixa a desejar. No livro didático brasileiro analisado há um foco marcante na razão de ser da área ancorada nas práticas sociais, enquanto no francês esse aspecto recebe pouco destaque. A análise dos capítulos sobre área nos dez livros didáticos brasileiros e seis franceses aponta para uma confirmação desse ancoramento nos livros brasileiros e para o pouco relevo nos livros franceses. Por outro lado, o que fica efetivamente a cargo do aluno nas tarefas em que a interrelação com as práticas sociais é feita é muito reduzido, o que pode comprometer uma conexão mais significativa entre a área como objeto matemático escolar e seus usos sociais. O livro francês analisado explora de modo mais explícito e desafiador a relação entre área e perímetro, integrando inclusive o uso de *softwares*.

Além dos usos sociais, a razão de ser das grandezas geométricas e da área está ancorada nas interrelações com o campo numérico nos dois livros didáticos analisados, embora a conexão seja mais explícita no livro brasileiro do que no francês. Ou seja, contemplando o quinto objetivo de pesquisa, a razão de ser das grandezas geométricas e da área no Ensino Fundamental, as análises de recomendações curriculares e de livros didáticos apontam para os usos nas práticas sociais (mais forte no Brasil que na França) e para a interrelações com o domínio numérico (mais explícitas no Brasil, no caso da área, do que na França).

Finalmente, no que diz respeito ao último objetivo específico da pesquisa (estabelecer conexões entre as condições, impedimentos e restrições que pesam sobre as escolhas de transposição didática, oriundas de níveis superiores de codeterminação didática nos sistemas educativos francês e brasileiro e a relação institucional com o objeto área expressa nos livros didáticos), a conexão com práticas sociais expressa nos livros didáticos brasileiros analisados é coerente com as recomendações curriculares e as instruções oficiais (desde a LDB até os PCN) que colocam a formação para o exercício pleno da cidadania como eixo central do Ensino Fundamental e preconizam a valorização das experiências extra-escolares dos estudantes. Esse aspecto, embora presente nos livros franceses é mais discreto, o que também foi observado nos textos oficiais daquele país. Por outro lado, a inclusão de atividades que integram tecnologias no estudo das relações entre área e perímetro, na França é coerente com o que consta no *socle commun*, enquanto esse aspecto não é enfatizado no livro brasileiro analisado, nem foi marcante nos textos oficiais brasileiros. Cabe ressaltar, ainda, que nem os PCN nem o PNLD dão qualquer instrução precisa sobre conteúdos a serem abordados em cada ano da escolaridade, o que conduz a uma grande flexibilidade nos livros didáticos brasileiros, não observada nos livros franceses. Tal flexibilidade curricular é uma escolha que situamos na escala dos níveis de codeterminação didática, no nível da sociedade: preconizada na LDB para responder à pluralidade cultural do Brasil. O funcionamento do sistema educativo francês é bastante diferente: os conteúdos são definidos de maneira razoavelmente precisa no programa nacional até o nível dos assuntos, o que deixa uma margem bem menor para os autores de livros didáticos.

Para além dos elementos de resposta às questões que nos inquietavam sobre o ensino das grandezas geométricas ao iniciar essa pesquisa, ficam também muitas pistas de continuidade dessa etapa. Um novo Guia do Livro didático para os Anos Finais do Ensino Fundamental (PNLD 2014) foi publicado desde então e cabe averiguar se as tendências observadas se confirmam nas obras mais recentes, ampliando o corpus de análise para outros livros didáticos de 6º ano. Temos interesse também em ampliar o objeto de pesquisa para a educação básica como um todo e para as demais grandezas geométricas (comprimento, volume e abertura de ângulo). Gostaríamos também de ampliar o objeto de estudo para outras etapas da transposição didática, analisando o saber ensinado, por meio de observações de práticas docentes efetivas e o saber aprendido pelos alunos. Todos esses possíveis estudos de natureza empírica, certamente devem nutrir a reflexão teórica e o refinamento do filtro da grandeza área, a ser adaptado na construção de filtros para as demais grandezas geométricas. Outra via de aprofundamento diz respeito ao papel do Programa Nacional do Livro Didático na definição do currículo brasileiro e ao papel dos livros didáticos nas práticas docentes. Caminhamos um pouco, mas temos um longo e rico caminho pela frente...

## Agradecimentos

Agradecemos aos professores Rosinalda Teles, Rute Borba e Carlos Eduardo Monteiro, organizadores do livro, à professora Marilena Bittar e aos membros do grupo Pró-grandeza: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, pelas valiosas contribuições dadas nas versões preliminares desse capítulo.

## Referências


ANWANDTER-CUELLAR, N. **Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France**. 2012. Tese (Doctorat en Histoire Philosophie et Didactique des Sciences) - Université Montpellier 2, Montpellier, 2012.

ARAUJO, A. J. de; CÂMARA, M. Avaliação Externa do Projovem: o caso de áreas e volumes. **Boletim de Educação Matemática-BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 23-50, 2009.

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In: ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUE, 9., 1998. **Actes...** ARDM et Crédit Agricole de Bruz, 1998.

ARTIGUE, M.; WINSLOW, C. International comparative studies on mathematics education: a viewpoint from the anthropological theory of didactics. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 31, n. 1, p. 47-82, 2010.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège**. 1996. Thèse (Doctorat) - IMAG-Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BARBOSA, P. R. **Efeitos de uma sequência de atividades relativas aos conceitos de comprimento e perímetro no Ensino Fundamental**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

BARROS, A. L. de S. **Uma análise das relações entre área e perímetro em livros didáticos de 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2006.

BELLEMAIN, P. M. B. Une étude comparative des choix de transposition didactique à propos du concept d'aire en France et au Brésil. In: ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUE, 9., 2002. **Actes...** 2002.

BELLEMAIN, P. M. B. A aprendizagem das relações entre comprimento e área no ensino fundamental. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEM, 2., 2003, Santos. **Anais...** Santos, 2003.

BELLEMAIN, P. M. B. O que as orientações curriculares preconizam? O que os professores esperam? O que os alunos fazem? Uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - SIPEM, 4., 2009, Brasília. **Anais...** Brasília, 2009.

BELLEMAIN, P. M. B.; BRONNER, A.; LARGIER, M. Étude comparative de la reprise de l'enseignement de l'aire en classe de sixième en France et au Brésil. In : CIRADE, G. (Org.) **Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la Société** – Actes du 4ième Congrès International sur la TAD, 2017. Pp. 753-784. Disponível em https://citad4.sciencesconf.org/data/pages/ActesCITAD4.pdf, consultado em 4 de setembro de 2017.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental**. Natal: SBHMat, 2002.

BOSCH, M. C.; GASCÓN, J. 25 años de Transposición Didáctica. In: RUIZ-HIGUERAS, L. (Org.). **Societad, Escuela y matemáticas, Aportaciones de la Teoria Antropológica de lo Didáctico**. España: Universidad de Jaen, 2007. p. 385-406.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1º e 2º ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 3º e 4º ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Congresso Nacional. **Lei nº 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Publicada no DOU de 23/12/1996.

BRASIL. Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica. **Guia Nacional do Livro Didático (6º ao 9º ano)** – PNLD 2011: Brasília, 2010.

BRITO, A. F. de. **Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no segundo ciclo do ensino fundamental**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2003.

BRONNER, A. **Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée**, 1997. Thèse (Doctorat) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1997.

BRONNER, A. **La question du numérique: le numérique en questions ?** Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2. 2007.

BRONNER, A. Anthropologie didactique du numérique dans l'enseignement secondaire français. In: RUIZ-HIGUERAS, L. (Org.). **Societad, Escuela y matemáticas, Aportaciones de la Teoria Antropologica de lo Didáctico**. España: Universidad de Jaen, 2007.

BROUSSEAU G. Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In: Dorier J. L. et al. (Ed.) **Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques**, Corps, La Pensée Sauvage: Grenoble, 2002.

CARVALHO, D. G. **Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do Projovem urbano sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2012.

CELI, V. Les formules de calcul d'aires planes: un trait d'union entre le géométrique et le numérique. Apports d'une analyse comparative. In: ROUCHIER, R. et al. (Ed.) **Actes de la XIII ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2005.

CHAACHOUA, H., COMITI, C. L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. In: BRONNER, A. et al. (Org.) **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.** Montpellier: IUFM de l'Academie de Montpellier, 2010. p. 771-790.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.12/1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. Structures & fonctions. In: DORIER, J. L.; ART. AUD, M; ARTIGUE, M., BERTHELOT, R.; FLORIS, R. (Ed.). **Actes de la 11ª École d'été de Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 3-22, 2002a.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. Écologie & régulation. In: In: DORIER, J. L.; ART. AUD, M; ARTIGUE, M., BERTHELOT, R.; FLORIS, R. (Ed.). **Actes de la 11ª**

**École d'été de Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 41-56, 2002b.

CHEVALLARD, Y.. Passé et present de la théorie anthropologique du didactique. In: RUIZ-HIGUERAS, L. (Org.). **Societad, Escuela y matemáticas, Aportaciones de la Teoria Antropológica de lo Didáctico (TAD).** España: Universidad de Jaen, 2007. p. 705-746.

CHEVALLARD, Y. Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? In: BOSCH, M.; GASCÓN, J.; OLARRÍA, A.; ARTAUD, M.; BRONNER, A.; CIRADE, G.; LADAGE, C.; LARGUIER, M. (Org.) Un Panorama de la TAD. **Anais do 3º Congresso da TAD: Apports de la Théorie Anthropologique du Didactique**. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica, 2011.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Les grandeurs en mathématiques au college. Partie I: Une Atlantide Oubliée. **Petit x**, Grenoble, n. 55, p. 5-32, 2001.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. Les grandeurs en mathématiques au college. Partie II: Mathématisations. **Petit x**, Grenoble, n. 59, p. 43-76, 2002.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. C.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas:** O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 6° ano. São Paulo: Ática, 2009.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7/2, p. 5-31, 1986.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d' apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathématics**, Netherlands, v. 20, n 4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área, como Grandeza, no Ensino Fundamental**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

FACCO, S. R. **Conceito de área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2003.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais**. 2002. Dissertação (Mestrado em

Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

LARGUIER, M. **La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde:** un problème de la profession. 2009. Thèse (Doctorat) - Université Montpellier 2, Montpellier, 2009.

LIMA, P. F. Considerações sobre o conceito de área. In: SEMANA DE ESTUDOS EM PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Habilidades matemáticas relacionadas com grandezas e medidas. In: Fonseca M. C. **Letramento no Brasil:** Habilidades Matemáticas: Reflexões a partir do INAF 2002 ed. São Paulo. Global: Ação Educativa Assessoria, Pesquisa e Informação: Instituto Paulo Montenegro, 2004, v. único, p. 153-172.

MELO, E. B. de **Uma análise do tratamento dado aos conceitos de comprimento e perímetro em livros didáticos atuais adotados na rede municipal de Arcoverde**. 2004. Monografia (Especialização em Avaliação Educacional em Matemática). UFPE, Recife, 2004.

MELO, M. A. P. de **Um estudo dos conhecimentos de alunos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental sobre os conceitos de área e perímetro**. 2002. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Rural Federal de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2002.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE. **Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège** - Grandeurs et mesures au collège, République Française/Ministère de l'Éducation Nationale/EduSCOL/dgesco, 2007.

MORAIS, L. B.; BELLEMAIN, P. M. B. Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA – UFPE - CONIC, 18., 2010, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2010.

OLIVEIRA, G. R. F. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental**: um estudo de caso. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2002.

PERNAMBUCO. **Sistema de Avaliação Educacional**: SAEPE: relatório. Secretaria de Educação e Cultura: Recife, 2003.

PERRIN-GLORIAN M. J. **Aires de surfaces planes et nombres décimaux.** Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM - 6ème. 1992. Thèse (Doctorat) - Université Paris VII, Paris,1992.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2010.

ROGALSKI, J. Acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 3, n. 3, p. 343-396, 1982.

ROUCHE, N. **Le sens de la mesure**: des grandeurs aux nombres rationnels. Bruxelas : Didier-Hatier, 1992.

SANTANA, W. M. G. de **O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área**: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2006.

SANTOS, M. R. dos. **Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Rural Federal de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2005.

SCHNEIDER, M. Un obstacle épistémologique soulevé par des «découpages infinis» des surfaces et des solides. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 11, n. 2.3, p. 241-294, 1991.

SILVA, J. V. G. da **Análise da abordagem do conceito de comprimento, perímetro e área em livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2011.

SILVA, M. F. F. **Frações e Grandezas Geométricas:** Um estudo exploratório da abordagem em livros didáticos. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2004.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométricas e suas medidas, da álgebra e das funções: um estudo sobre as fórmulas de área no ensino fundamental**. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2007.

VERGNAUD, G. Didactique du concept de volume. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, v. 4.1, 1983.

# Articulação entre Matemática e outras disciplinas: muitos livros, quatro olhares, várias possibilidades

Rosinalda Aurora de Melo Teles[22]

## Introdução

Diferentes demandas se apresentam hoje aos profissionais da Educação. Muitas delas complexas e multifacetadas. Expressões como interdisciplinaridade, contexto e contextualização são recorrentes nas propostas curriculares nacionais, bem como na literatura da área. De acordo com Gitirana e Carvalho (2010), a utilização de contextos variados nas situações de ensino e aprendizagem da Matemática, entre outros aspectos, pode possibilitar que os alunos mobilizem conhecimentos prévios para entender melhor um conteúdo matemático e auxiliar na formação de um cidadão crítico e consciente. Estes autores também apontam que coleções de livros didáticos buscam contextualizar os conteúdos matemáticos de várias maneiras, entre elas, nas práticas socioeconômicas, em situações de compra e venda, e também em outras áreas do conhecimento, especialmente, Geografia, Física, Arte, Química, Astronomia, Economia. Neste capítulo discute-se e

22 Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) Email: rosinaldateles@yahoo.com.br

defende-se a importância da articulação entre diferentes disciplinas ou áreas de conhecimento, compreendida aqui como o uso de contextualizações consistentes.

No ensino da Matemática, há duas perspectivas: a primeira, a necessária articulação entre os quatro eixos[23]: números e operações; grandezas e medidas, espaço e forma (Geometria) e tratamento da informação (Estatística). Recomenda-se, atualmente, que estes eixos temáticos de aprendizagem, sejam abordados de modo equilibrado, buscando uma articulação interna entre os conteúdos de cada um deles e dos eixos entre si. A segunda perspectiva diz respeito a uma articulação externa – entre conteúdos matemáticos e conteúdos de outras disciplinas. Dessa forma, deve-se trabalhar em sala de aula atividades que mobilizem, ao mesmo tempo, conhecimentos de vários eixos, como os geométricos e das grandezas e medidas, dos números e operações e estatística, e que se relacionem a outras áreas do conhecimento ou disciplinas específicas, como Ciências, História e outras.

De acordo com Gitirana e Carvalho (2010), não há dúvidas de que a contextualização dos conteúdos matemáticos é fundamental, mas nem sempre é fácil desenvolvê-la a contento. É preciso evitar contextualizações artificiais ou aquelas que não cumprem uma função significativa na melhoria do ensino e aprendizagem. Para evitar inadequações, faz-se necessário conhecer bem o objeto matemático a ser articulado ou contextualizado com outras disciplinas. Santos e Teles (2011) frisam que o desafio é não descaracterizar os objetos do saber da Matemática, porém, abordá-los destacando os significados que um conteúdo matemático pode assumir, situando a Matemática como uma ciência que possui aspectos culturais e sociais, além de amplamente utilizada para compreender fenômenos de outros campos de saber. Vários fatores podem interferir diretamente no desenvolvimento do processo de contextualização do objeto do

23 Algumas propostas curriculares propõem um quinto eixo: Álgebra e Funções.

saber que, de certa forma, é construído e influenciado pelas concepções e impressões de quem o constrói, do professor, do aluno e do meio social.

Este capítulo se insere na perspectiva da pesquisa em Educação Matemática como um campo multidisciplinar e interligado à utilidade e a qualidade, critérios utilizados para julgar a relevância de pesquisas, de acordo com Kilpatrick (1995). A partir de quatro pesquisas desenvolvidas na linha de pesquisa Didática da Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (EDUMATEC), orientadas por Rosinalda Aurora de Melo Teles, discute articulações entre Matemática e outras disciplinas. Apresentadas em ordem cronológica, três delas envolvem análise de livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental e a outra os livros dos acervos complementares do PNLD 2010 (BRASIL, 2009).

A primeira delas, desenvolvida por Luciana Ferreira dos Santos, concluída em 2010, analisou o ensino de simetria e das artes visuais em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. A segunda, realizada por Daniella Cristina Silva dos Santos, finalizada em 2011, analisou o tema transversal meio ambiente na abordagem do bloco das grandezas e medidas como contexto ou pretexto nos livros didáticos de Matemática. A terceira, o trabalho de Andrea Paula Monteiro de Lima, concluído em 2012, no qual, entre outros aspectos, estudou a articulação entre os números e as operações, as grandezas e o pensamento geométrico em obras dos Acervos Complementares 2010. Finalmente, o trabalho de Julia Calheiros Cartela de Araujo, concluído em 2013, um estudo exploratório envolvendo orientações de documentos curriculares e atividades de livros didáticos para alfabetização matemática sobre tempo.

Buscamos a partir da leitura dos dados destas quatro pesquisas, apontar possibilidades de articulação entre a Matemática e outras disciplinas, além de propor alguns questionamentos para alimentar reflexões no âmbito da educação matemática que também possam desencadear outras pesquisas.

## Conexão entre artes visuais e Matemática no conteúdo simetria

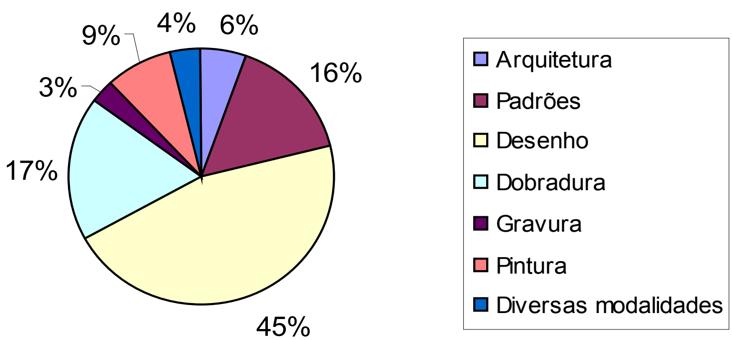
Na perspectiva de integração entre diferentes áreas do saber, Santos (2010), realizou um estudo no qual mapeou atividades que articulam simetria e Artes Visuais, em 17 coleções de livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, todas aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD de 2010 com circulação até 2012. Os livros, não consumíveis, de cada PNLD são distribuídos para uso das escolas por 3 anos consecutivos, ou seja, um mesmo ano ou série só recebe livros novos a cada três anos. Neste intervalo de tempo os exemplares são reutilizados. Para realização da pesquisa foram tomados por base os três polos cronológicos indicados no estudo de Bardin (2009) sobre análise de conteúdo: pré-análise; exploração do material e tratamento dos resultados; a inferência e a interpretação.

Santos (2010) realizou a análise de 200 atividades que envolviam geometria e artes visuais, tanto do ponto de vista da arte quanto da Matemática. Os dados revelaram que, assim como propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática (BRASIL, 1997), o conteúdo simetria é abordado em todos os volumes dos anos iniciais, concentrando-se nos volumes 3 e 5, como conteúdo geométrico, aproximando-se do que propõe o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2010). No universo das quase 200 atividades analisadas, 166 abordavam a simetria de reflexão, nas modalidades desenho (91), dobradura (34), arquitetura (11), gravura (6), pintura (17) e modalidades mistas (7). Nas outras 22 atividades que tratavam da simetria de translação, nas modalidades artísticas padrão (20) e dobradura (2).

Do ponto de vista da arte, Santos (2010), identificou diferentes modalidades artísticas: desenho (completar figura ou desenhar a figura simétrica), atividades que envolvem produção de dobraduras (como kirigami e origami), os padrões (artesanato, mosaicos e tapeçaria), pinturas (com borrão de tinta e pinturas de artistas conhecidos). As imagens de obras arquitetônicas e gravuras possuem mais de uma modalidade artística.

O gráfico a seguir, Figura 1, elaborado por Santos (2010) ilustra como as modalidades artísticas estão distribuídas nas 17 coleções analisadas.

**Figura 1 – Gráfico – Frequência das modalidades artísticas nas coleções**




Fonte: SANTOS (2010)

Santos (2010) critica a leitura superficial de imagens, solicitada em 66% das atividades, pois, de acordo com a autora, o aluno não é instigado a nenhum tipo de apreciação estética nestas atividades, além de apresentar uma série de lacunas, no que diz respeito ao ensino da arte visual, pois as imagens são desenhos estereotipados, produzidos por adultos. Além disso, embora os desenhos sejam de coleções de livros didáticos diferentes, possuem muitos aspectos parecidos, minimizando as possibilidades das crianças aumentarem o próprio repertório de imagens, sendo deste modo uma articulação fragilizada entre as artes visuais e o conteúdo simetria.

Também de acordo com Santos (2010) e Santos e Teles (2012), as atividades com padrões, identificadas nos livros analisados, sob o ponto de vista matemático, são superficiais, pois a exploração restringe-se à identificação intuitiva da simetria sem discutir as propriedades matemáticas presentes nas imagens. No exemplo a seguir, Figura 2, de acordo com a autora, por apresentar dois tipos de simetria poder-se-ia explorar conceitos como regularidade, sentido, direção e outros aspectos a serem evidenciados numa atividade com simetria de translação. Assim, por apresentar reflexão, há possibilidade de identificar o eixo de simetria e equidistância entre pontos, mas realiza-se apenas a comparação das duas imagens.

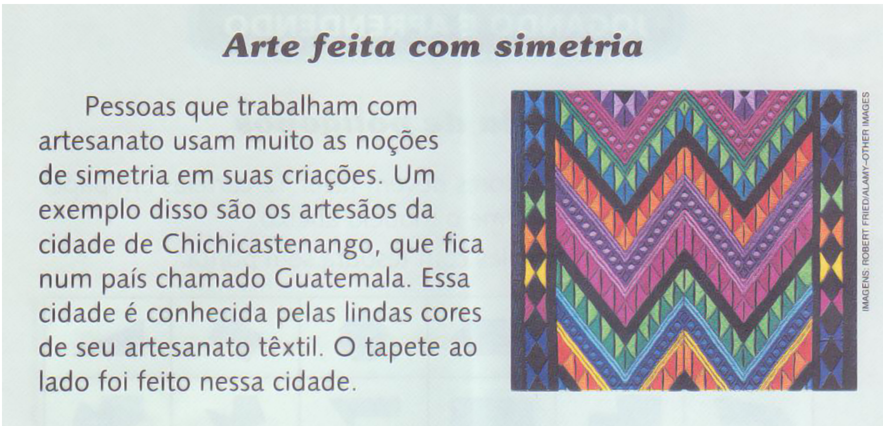
**Figura 2 – Exemplo de atividade de padrão em Livros Didáticos**


Fonte: BARROSO, J. M. (Org). **Projeto Pitanguá**: Matemática. v. 2, 2. ed. São Paulo: Moderna, 2008, p. 217.

Sob o ponto de vista da arte, embora as imagens sejam de azulejos, aspecto muito comum em monumentos culturais como igrejas, casarões e outros ambientes, a leitura não solicita do aluno nenhum tipo de análise estética, como estudo das formas, cores e volumes, sendo também superficial.

Na leitura de imagens, de acordo com Santos (2010), apresenta-se uma obra desenvolvida por um artista ou grupo étnico, num dado contexto histórico-cultural, ou uma obra arquitetônica, mas não são feitas análises das obras. Esse tipo de leitura é identificada nas modalidades *pintura, arquitetura e nos padrões,* nos quais há leitura de imagem nos contextos da tapeçaria e artesanatos indígenas, como ilustrado na Figura 3. Em algumas atividades, de acordo com a autora da pesquisa, o educando é direcionado a perceber e analisar aspectos matemáticos nas obras de arte, como as formas geométricas e regularidades. Apesar de não explorar elementos de visualidade do artesanato, a atividade repertoria o aluno com imagens para uma produção posterior.

**Figura 3 – Exemplo de atividade de leitura de imagens em Livros Didáticos**




Fonte: BARROSO, J. M. (Org). **Projeto Pitanguá**: Matemática. v.2, 2. ed, São Paulo: Moderna, 2008, p. 127.

Santos (2010) também mapeou atividades que apresentavam reproduções de esculturas e arquitetura. Apesar de serem imagens que trazem a possibilidade de se realizar uma apreciação analítica[24] e fazer-se um julgamento das qualidades estéticas e diferenças nas diversas obras apresentadas, a leitura se limita à identificação de um eixo imaginário. A distinção entre eixo e plano de simetria é sugerida pelo Guia do Livro Didático (BRASIL, 2007) e considerada importante para conceituação de simetria.

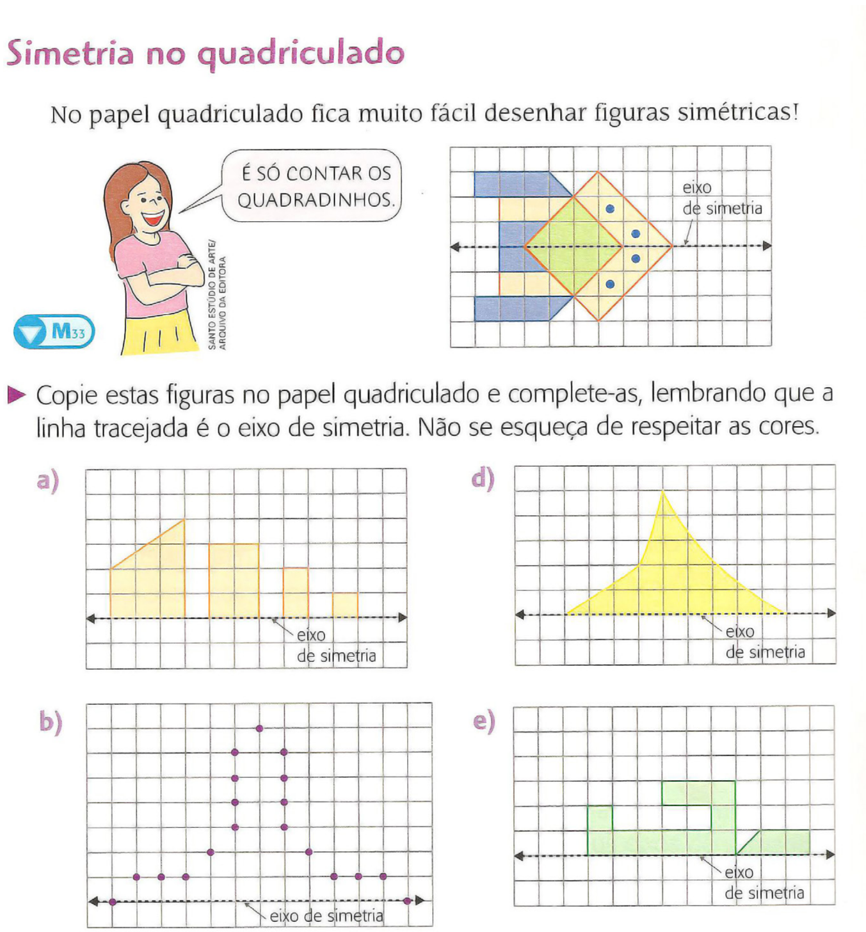
24 O termo *apreciação analítica* é discutido na dissertação de mestrado de Luciana Ferreira dos Santos, disponível no link: http://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3915?show=full.

Por se tratar de um livro, cujo objeto de estudo é a simetria, a possibilidade de ler, interpretar e explorar aspectos referentes às obras de arte, como diferenças de estilos entre os pintores, entre as cerâmicas, as formas, linhas e volumes dispostos nas duas pinturas, assim como as cores e as padronizações das cerâmicas, tornariam, de acordo com Santos (2010), as atividades interessantes do ponto de vista do ensino e aprendizagem da simetria, pois aproximaria o tema do cotidiano e da cultura do aluno. Todavia, as imagens precisam de fato ser de obras de artes para que a criatividade, criticidade e sensibilidade dos educandos sejam aguçadas, afirma a autora.

Por outro lado, apesar de as propriedades da simetria serem essenciais para a construção formal do conceito, Santos (2010) não defende a formalização precoce do conceito de simetria, ao contrário. A autora, assim como o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2010), sugere que este conteúdo deve partir de noções intuitivas e lúdicas. Nesse sentido, as Artes Visuais podem contribuir de forma significativa para a formalização do conceito de simetria que deveria acontecer ao longo dos anos iniciais.

Do ponto de vista da Matemática, Santos (2010) analisa como propriedades da simetria são ou não exploradas nestas atividades. Ela destaca que na Simetria de Reflexão, a equidistância em relação ao eixo, na modalidade artística desenho é implicitamente explorada na ação de completar a figura na malha quadriculada, o mesmo observa-se nas gravuras, na qual a leitura de imagem estimula a comparação de dois lados da figura em relação ao eixo. Nas modalidades artísticas identificadas no estudo de Santos (2010): desenho, dobradura, arquitetura, gravura e pintura, embora algumas atividades pudessem oportunizar a explicitação dessa propriedade, não se faz menção à equidistância. No exemplo a seguir, Figura 4, implicitamente, a atividade propõe que o aluno complete a imagem estabelecendo pontos na malha quadriculada com a mesma distância em relação ao eixo da parte conhecida da figura.

**Figura 4 – Exemplo de atividade na malha quadriculada**



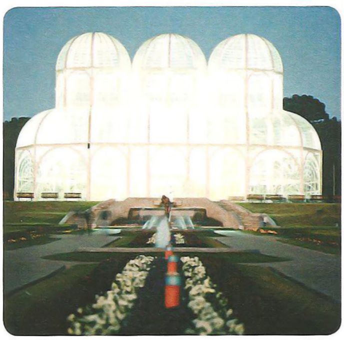

Fonte: SOUZA, M.H. et al. **Asas para voar**: Matemática. v.3. São Paulo: Ática, 2008, p. 144.

Em atividades com dobradura e borrão de tinta, Santos (ibid) destaca que o aluno é direcionado a pensar sobre a equidistância de forma muito intuitiva, pois não se utiliza nenhum outro recurso como instrumento de medida (cordão, régua, fita métrica, dentre outros) para verificar se a distância está sendo conservada.

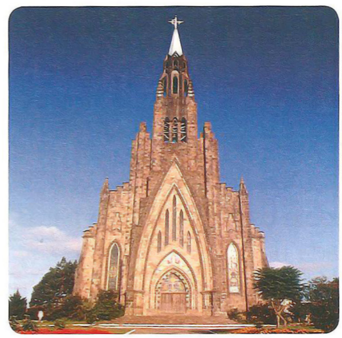
Nas modalidades "Pintura", "Gravura" e "Arquitetura", Santos (2010) não identificou referência ao perpendicularismo. Em imagens como a 'Casa de Vidro', do Jardim Botânico da cidade de Curitiba, que possui muitas retas perpendiculares, Figura 5, esse aspecto não é ressaltado na imagem, nem nos enunciados das atividades.

**Figura 5 – Exemplo de atividade de arquitetura**

Observe estas fotos:




Jardim botânico de Curitiba, Casa de vidro, Paraná.




Igreja matriz de Nossa Senhora de Lourdes, Canela – Rio Grande do Sul.

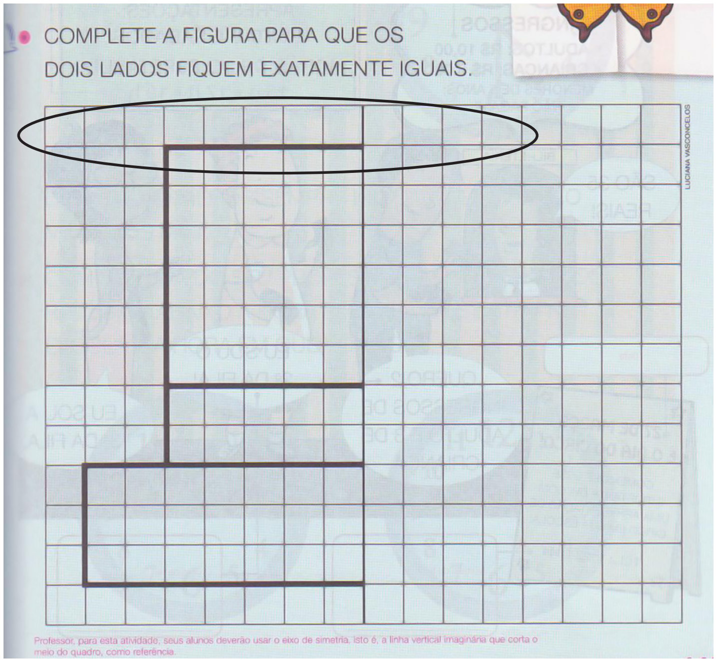
Tanto na primeira foto como na segunda parece haver uma harmonia nas formas, não é mesmo?

Isso ocorre porque há **simetria**.

Fonte: SOUZA, M. H. et al. **Asas para voar**: Matemática. v. 4, São Paulo: Ática, 2008, p. 161.

A conservação (de forma, de comprimento, de alinhamento dos pontos), conforme Santos (2010), é explorada implicitamente nas modalidades desenho e dobradura, na solicitação de desenhar uma figura imagem exatamente igual à figura original e a partir da sobreposição de uma figura a outra, respectivamente. No entanto, não há explicitação da necessidade de conservar o comprimento dos segmentos, a forma da figura inicial e os ângulos, como no exemplo a seguir, Figura 6.

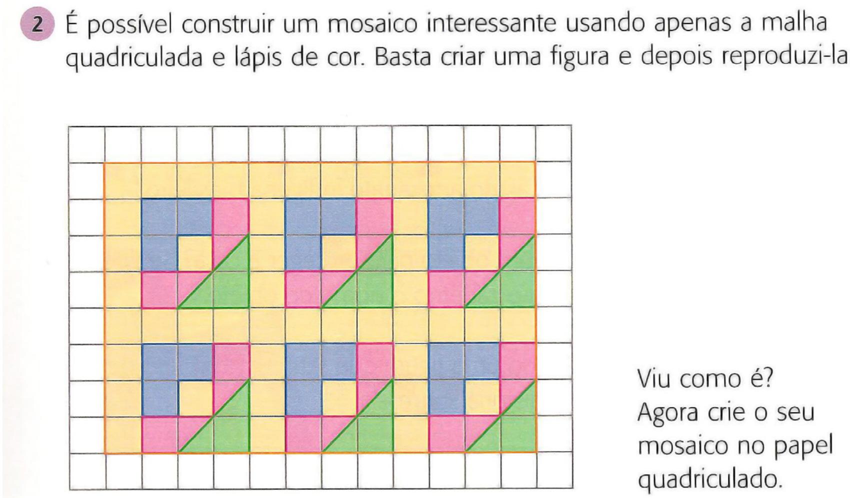
**Figura 6 – Exemplo de atividade envolvendo conservação da forma**




Fonte: GASTALDI, M. et al. **Projeto Buriti**: Matemática. v.1. São Paulo: Moderna, 2007, p. 117.

Também em relação às propriedades da simetria de translação, Santos (2010) analisou a permanência da direção da figura ao realizar o deslocamento. Nas atividades com padrões não há indícios que ajudem o aluno a refletir sobre a necessidade da manutenção, bem como a necessidade de conservar a distância, conforme exemplo a seguir, Figura 7.

**Figura 7 – Exemplo de atividade de simetria de translação em atividade de padrões**




Fonte: SOUZA, M. H. et al. **Asas para voar**: Matemática. v.3. São Paulo: Ática, 2008, p. 145.

Em síntese, Santos (2010) destaca que a presença de 200 atividades que articulam simetria e artes visuais em 17 coleções de livros didáticos de Matemática, evidencia que as coleções têm buscado, através das conexões entre artes visuais e geometria, trilhar um caminho no qual a aprendizagem da Matemática seja mais prazerosa e significativa. Ao mesmo tempo, sinaliza para laços de colaboração e reciprocidade entre estas áreas de conhecimento, visto que os livros didáticos, um dos poucos materiais impressos disponíveis em todas as salas de aula e lares do Brasil, podem oportunizar o acesso a obras de artistas como Escher, Odetto Guersoni, entre outros.

Do ponto de vista da formalização do conhecimento matemático, há muito a trilhar, pois as propriedades das simetrias, embora sejam essenciais para que os alunos construam um conhecimento formal sobre o tema, não são exploradas nas atividades, predominando o caráter intuitivo e pragmático, sem aprofundamento ao longo dos volumes. Embora não seja esperado para este nível de ensino, definições complexas, as atividades propostas poderiam variar em função do tipo de simetria envolvida, posição dos eixos, etc.

## Meio ambiente e Matemática

Outra pesquisa que também investigou a articulação da Matemática com outras disciplinas foi realizada por Santos (2011). A mestranda analisou atividades que abordam conteúdos relacionados às grandezas e medidas em situações envolvendo contextos socioambientais em coleções de livros didáticos de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Santos (2011) partiu do pressuposto que um dos grandes problemas enfrentados pela sociedade contemporânea está relacionado às questões ecológicas. Cada vez mais em voga, faz parte das pautas de suportes de informações, como jornais, rádios, revistas, televisão e internet, que noticiam, em tempo real, desastres ambientais em várias partes do mundo. Por isso, conforme Santos (2011), para rever ou amenizar a atual crise ambiental é de fundamental importância educar a sociedade para viver harmoniosamente com o meio ambiente.

Por outro lado, é cada vez mais frequente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que influenciarão a vida das pessoas. Estar alfabetizado para a sociedade contemporânea, "supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações" (BRASIL, 1997, p. 84).

Guiado pela urgência em educar a sociedade em relação aos problemas ambientais, o tema meio ambiente é incorporado a um dos principais instrumentos norteadores do currículo escolar, os PCN, fazendo parte dos Temas Transversais.

Dentre os Temas Transversais, a temática ambiental tem se destacado nas abordagens dos livros didáticos, uma vez que envolve situações ligadas à economia, política, cultura e sociedade. Nos livros de Matemática, o contexto de caráter socioambiental tem sido forte aliado no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos como os conteúdos das grandezas e medidas, números e operações, tratamento da informação (TI), principalmente na introdução destes conhecimentos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na pesquisa realizada por Santos (2011), dentre os conteúdos de caráter ambiental, sugeridos pelos PCN, a temática resíduos sólidos, revela-se nos livros didáticos de Matemática, como um dos temas mais explorados nas contextualizações com os conteúdos das grandezas e medidas. A autora analisou oito coleções de livros de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2010, nas quais foram identificadas 65 atividades envolvendo grandezas e medidas, destas 38% envolviam o contexto resíduos sólidos. Este percentual corresponde a 24 questões, nas quais as grandezas massa, duração de intervalo de tempo e valor monetário, foram identificadas como as mais exploradas, associadas principalmente ao bloco números e operações. A maioria destas atividades enfatiza apenas a medida, valorizando unidades convencionais de medida como o quilograma (kg) e a tonelada (t). Outro aspecto relevante, destacado pela autora, é a abordagem do tema ambiental apenas como pretexto, isto é, não há problematizações do contexto social envolvido na situação, geralmente também não há preocupação com a exploração do conteúdo matemático, muito menos do conteúdo ambiental.

Santos e Teles (2011), fazendo um estudo paralelo à pesquisa a realizada por Santos (2011), identificaram e analisaram aspectos relacionados às escolhas conceituais e metodológicas adotadas pelos autores em relação aos conteúdos do bloco tratamento da informação e a articulação com o tema meio ambiente.

As coleções foram escolhidas aleatoriamente dentre aquelas avaliadas e indicadas no Guia de Livros Didáticos 2010, e que possuíam volumes do 1º ao 5º ano.

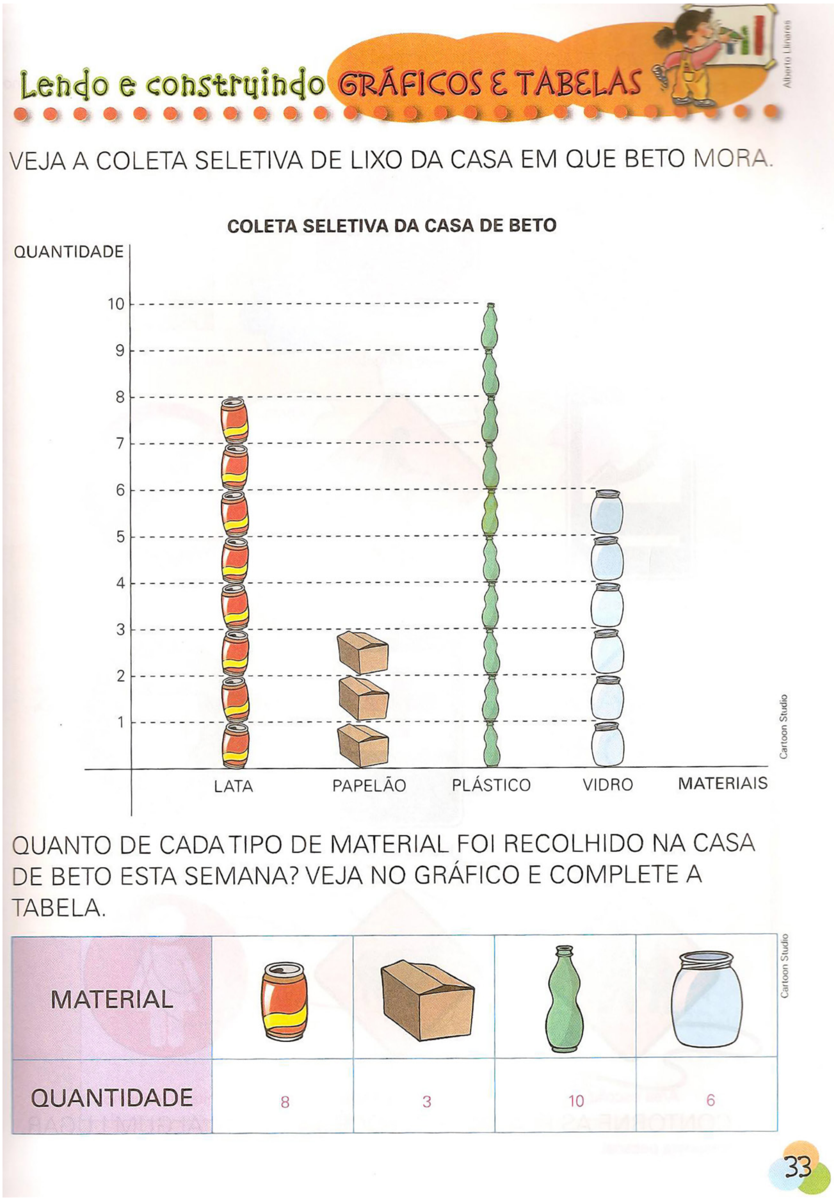
No conjunto das coleções, foram identificadas 116 atividades que usam o contexto socioambiental nas abordagens de conceitos matemáticos. Foram identificadas 47 atividades dentre as 116, ou seja, 40% do total, relacionadas ao bloco de conteúdos tratamento da informação, encontradas nos volumes do 1º, 3º, 4º e 5º ano, havendo ausência no 2º ano.

De acordo com as autoras, o contexto lixo predomina nas contextualizações. Outros contextos, como desperdício de água e de energia, biodiversidade, aquecimento global, desmatamento e reflorestamento, também são utilizados para sensibilizar o sujeito quanto à problemática que se instaura na sociedade contemporânea.

Ainda de acordo com Santos e Teles (2011), a articulação do bloco tratamento da informação com os outros blocos de conteúdos matemáticos, especialmente números e operações, enriquece ainda mais as abordagens que envolvem o contexto ambiental, permitindo relevantes relações entre as variáveis expressas no fenômeno explorado, facilitando a organização de informações.

Gráficos de coluna e barra, gráficos de linha, bem como, com menor incidência, gráficos pictóricos, são utilizados nas atividades, promovendo a contextualização entre as noções da Estatística e o tema meio ambiente. Os usos são respectivamente para ilustrar apenas variação individual de um evento, exemplificar a variação de um evento ao longo do tempo, tal como, determinar a média anual e para contar a quantidade de material. A Figura 8 ilustra o uso de um gráfico pictórico.

**Figura 8 – Gráfico Pictórico**



Lendo e construindo GRÁFICOS E TABELAS

VEJA A COLETA SELETIVA DE LIXO DA CASA EM QUE BETO MORA.



QUANTO DE CADA TIPO DE MATERIAL FOI RECOLHIDO NA CASA DE BETO ESTA SEMANA? VEJA NO GRÁFICO E COMPLETE A TABELA.

| MATERIAL | | | | |
|---|---|---|---|---|
| QUANTIDADE | 8 | 3 | 10 | 6 |

33

Fonte: CENTURIÓN, M. et al. **Coleção Porta Aberta**, 1º ano. São Paulo: FTD, 2008. p.33.

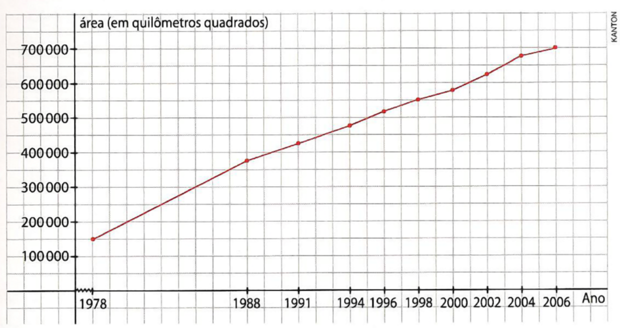
Neste outro exemplo, com variáveis ordinais, o gráfico de linha, Figura 9, pressupõe uma leitura crítica e um posicionamento em relação à situação da Floresta Amazônica.

**Figura 9 – Gráfico de Linha**

**1.** O gráfico mostra a área da floresta original que já havia sido devastada em cada ano indicado. Por exemplo: até 1978, já haviam sido perdidos cerca de 150 000 quilômetros quadrados de floresta.

Para fazer o gráfico, usamos dados do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), cujos técnicos usam fotos tiradas de satélites para acompanhar o estado da floresta. Os números foram arredondados para facilitar a leitura do gráfico.

Área devastada da Amazônia




**a)** Em 1988, quantos quilômetros quadrados já haviam sido destruídos? 375 000 quilômetros quadrados, aproximadamente.

**b)** E em 1991? Quantos já haviam sido destruídos? 425 000 quilômetros quadrados, aproximadamente.

**c)** Em 1996, que área a floresta havia perdido? Quase 520 000 quilômetros quadrados.

**d)** Até 2003, que área da floresta já havia sido devastada? 650 000 quilômetros quadrados.

**e)** De 1998 a 2003 são 5 anos. Nesse período, que área da floresta foi perdida? Qual a média anual de perda nesse período? 100 000 quilômetros quadrados. A média é 20 000 quilômetros quadrados por ano.

**f)** Você sabe a área original da floresta. A devastação já superou 10% dessa área? E 20%? Sim; não.

**g)** Em 2003, quanto restava da área da floresta? Cerca de 3 350 000 quilômetros quadrados. Atenção: a pergunta se refere a quanto restava, e não a quanto havia sido destruído.

**h)** O gráfico mostra algum período em que a devastação tenha parado? Não

**2.** Escreva um pequeno texto sobre a situação da Floresta Amazônica. No seu texto, diga o que vem acontecendo e por que isso é perigoso. Se conseguir, dê sugestões que possam contribuir para atenuar esse problema. Resposta pessoal.

137

Fonte: IMENES, L. et al**. Coleção Conviver:** Matemática. 5º ano, p.137. São Paulo: Moderna, 2008.

A pesquisa também indica que tabelas simples e de dupla entrada são as representações estatísticas mais exploradas pelos autores nas coleções analisadas, como ilustrado a seguir na Figura 10. Em relação a este aspecto, o aluno é solicitado a completar a tabela fornecida, buscando informações em textos, gráficos e dados coletados a partir de situações do dia a dia. Outra característica de atividades que envolvem o uso da tabela é a interpretação de dados para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos, por exemplo, verificar, identificar que material aparece mais ou menos vezes.

**Figura 10 – Exemplo de Tabela**

**2)** Copie a tabela a seguir e com a supervisão de um adulto anote as quantidades do lixo seco descartado em sua casa na semana pesquisada. Depois, estime quanto lixo seco sua família produz num mês e indique na tabela (considere um mês correspondendo a 4 semanas).

| Lixo descartado na casa de ______ / ___ pessoas | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Período | Papel / Papelão (kg) | Plástico | Vidro | Metal |
| 1 semana | | | | |
| 1 mês (estimativa) | | | | |
| Destino do lixo: | caminhão do lixo ☐ | | catadores/coleta seletiva ☐ | |

duzentos e sessenta e cinco 265

Agora compare seus registros com os de seus colegas.

**1)** Verifiquem qual material apareceu em todas as tabelas, qual apareceu mais vezes, quem produziu mais lixo na semana pesquisada, se existe relação entre o número de moradores e a quantidade de lixo produzido.

**2)** Preencham uma tabela geral com a estimativa da quantidade de lixo produzido num mês pelas famílias de todos os alunos da classe.

Fonte: DANTE, L. **Aprendendo Sempre**. São Paulo: Ática, 2008. p. 265-266.

Nos gráficos, a localização de pontos extremos (máximo e mínimo), variações (crescimento, decrescimento e estabilidade), frequência de uma categoria, quantificação da variação e combinação, com exceção dos pontos extremos, são características pouco ou nunca exploradas nas atividades. Santos e Teles (2011) também destacam que, apesar de as coleções proporem inter-relações entre os conhecimentos, as atividades não favorecem a reflexão pelo aluno sobre qual seria a representação mais adequada para um dado problema, se detendo apenas na leitura e interpretação de gráficos e tabelas. Estes e outros aspectos, identificados na pesquisa de Santos (2011), sinalizam para fragilidade também na articulação entre o tema meio ambiente e conteúdos matemáticos nos livros didáticos de Matemática para os anos iniciais.

## Os Acervos Complementares e a Matemática

Lima (2012) analisou um conjunto de obras que possibilitam a exploração de conteúdos de três grandes áreas de conhecimento: (1) Ciências da Natureza e Matemática, (2) Ciências Humanas e (3) Linguagem e Códigos. As obras compunham os Acervos Complementares do PNLD 2010 e foram distribuídas em 2010 pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) para as turmas do 1º e 2º anos de escolarização, para serem utilizados como material de apoio às atividades realizadas em sala de aula. São cinco acervos com 30 títulos cada. Assim, cada turma do 1º e do 2º ano de escolarização das escolas públicas do Brasil teoricamente recebeu um dos acervos, podendo, contudo, haver uma rotatividade de títulos por turma, ou seja, uma turma pode utilizar os livros de outra. Destacamos que os Acervos Complementares na versão 2013 contemplaram 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental, o chamado "Ciclo de Alfabetização".

A natureza da pesquisa desenvolvida por Lima (2012) foi *descritiva*. De acordo com Rudio (1986, p.71) "a *pesquisa descritiva* está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los".

Para a identificação das obras que permitem a exploração de conceitos matemáticos, Lima (2012) utilizou o manual dos Acervos

Complementares do PNLD 2010. A partir da leitura de cada uma das 150 resenhas contidas no manual, empregando como critério “palavras” ou “termos” relativos à Matemática, a mestranda, identificou 20 obras cujo foco principal é a Matemática, conforme quadro a seguir. Nove delas possibilitavam a exploração de conceitos de mais de um campo matemático.

**Quadro 1 – Obras de Matemática dos Acervos Complementares do PNLD 2010**

| | Titulo | Editora | Publicação | Autor |
|---|---|---|---|---|
| **01** | A princesa está chegando | Callis | 2009 | Yu Yeong-So |
| **02** | As três partes | Ática | 2009 | Edson Luiz Kozminski |
| **03** | Barangandão Arco-Íris | Petrópolis | 2008 | Adelson Murta Filho (Adelci) |
| **04** | Brincando com dobraduras | Gaia | 2008 | Thereza Chemello |
| **05** | Brinque- book com as crianças na cozinha | Brinque-Book | 2005 | Gilda de Aquino |
| **06** | Clact... clact... clact... | Abril | 2008 | Liliana e Michele Iacocca |
| **07** | Contagem regressiva | Girafinhas | 2008 | Kay Woodward |
| **08** | Contando com o relógio | Scipione | 2003 | Nilson José Machado |
| **09** | Desenhando Animais | Panda Books | 2008 | Ed Emberley |
| **10** | Desenhando faces | Panda Books | 2007 | Ed Emberley |
| **11** | Era uma vez um menino travesso | Educacional | 2006 | Bia Villela |
| **12** | Eram 3 | Globo | 2008 | Guto Lins |
| **13** | Folclore brasileiro infantil | Girassol | 2006 | Célia Ruiz Ibámez |
| **14** | Fugindo das garras do gato | Callis | 2008 | Choi Yun-Jeong |
| **15** | Histórias de contar | Globo | 2008 | Ana Paula Perovano |
| **16** | O presente de aniversário do marajá | Brinque-Book | 2006 | James Rumford |
| **17** | O valor de cada um | FTD | 2008 | Martins R. Teixeira |

| | Titulo | Editora | Publicação | Autor |
|---|---|---|---|---|
| **18** | Só um minutinho: um conto de esperteza num livro de contar | FTD | 2008 | Yuyi Morales |
| **19** | Tô dentro, to fora... | Formato | 2005 | Alcy |
| **20** | Uma incrível poção mágica | Callis | 2009 | Sin Ji-Yun |

Fonte: Lima (2012).

A tarefa de articular conteúdos de mais de um campo matemático, de acordo com a autora da pesquisa, deverá ser efetivada de fato pelo professor em sala de aula, uma tarefa não muito simples. Citando Mandarino (2009, p.37), ela afirma que o "grande desafio é conseguir articular os assuntos abordados, bem como articulá-los com outros campos de conhecimento". Mesmo diante das dificuldades e do fato de ser o professor o responsável por realizar a atividade de articulação entre os campos, ela aponta a obra *Brinque-book: com as crianças na cozinha*, Figura 11, como uma opção que pode ajudar neste desafio. Na obra, ilustrada no exemplo a seguir, durante o preparo dos alimentos, leva-se em consideração, tanto aspectos dos números e operações, ao serem informadas na receita as quantidades de ingredientes necessários, quanto aspectos das grandezas e medidas, ao serem solicitadas as medidas de alguns dos ingredientes, indicação do tempo de preparo e temperatura do forno. Por exemplo, numa das situações de medição, solicita-se ¾ de xícara de óleo, ou seja, além da noção de medida, envolve números racionais na representação fracionária. Desse modo, ao efetuar a medição (campo das grandezas e medidas) é preciso mobilizar aspectos das frações (campo dos números e operações).

**Figura 11 – Possibilidade de articulação entre campos da Matemática**


Fonte: AQUINO, G. **Brinque-book**: com as crianças na cozinha. São Paulo: Brinque book, 2005. p. 38.

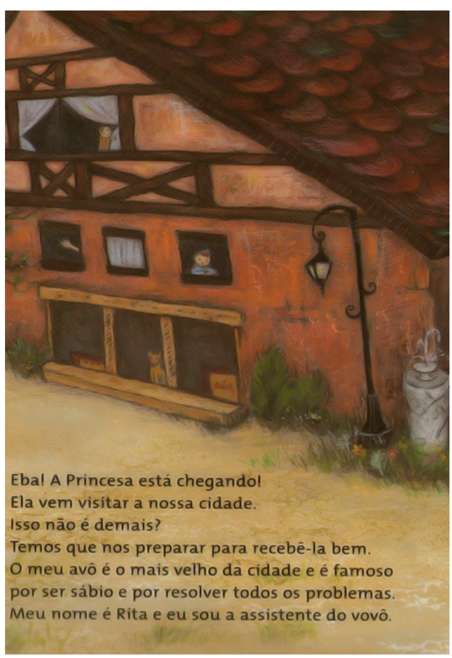
A possibilidade de articulação entre conteúdos de vários campos ou blocos de conteúdos matemáticos numa mesma obra foi observado por Lima (2012) apenas nas obras em que um desses campos é o das grandezas e medidas, que constitui-se, por sua natureza, um campo fértil para este tipo de articulação. Segundo Lima e Bellemain (2010) há três razões que justificam a inclusão desse campo matemático nas atividades escolares: os seus usos sociais, com suas utilizações nas técnicas e nas ciências; as conexões com outras disciplinas escolares; e as articulações com outros conteúdos da Matemática.

Lima (2012) destaca que, independente do modo como os conteúdos dos campos matemáticos estão presentes nas obras, elas não foram, necessariamente, escritas com a finalidade de ensinar conteúdos matemáticos e, por isso, não devem ser exigidas delas tais características.

Outro foco de análise utilizado por Lima (2012), foi a integração da Matemática nas obras dos Acervos Complementares do PNLD 2010, utilizando a classificação dos autores Shih e Giorgis (2004). A autora identificou no conjunto das obras investigadas, três modos de integração já apontados pelos autores: livros nos quais a Matemática serve de base para a história, livros nos quais compreender Matemática é essencial para se compreender a história e livros nos quais a Matemática emerge naturalmente da história. Contudo, há obras que apresentam características de uma única categoria e outras que apresentam características de mais de uma categoria.

Para ilustrar esta constatação, Lima (2012) discute uma obra que relata a história de um vilarejo em que seus moradores aguardam a visita de uma princesa, Figuras 12 e 13. Para receber a princesa, eles resolvem preparar um lugar especial com os maiores e melhores objetos. Durante toda a história, os personagens utilizam a matemática para decidir quais objetos serão do quarto da princesa.

**Figuras 12 e 13 – Páginas do livro A Princesinha está Chegando**

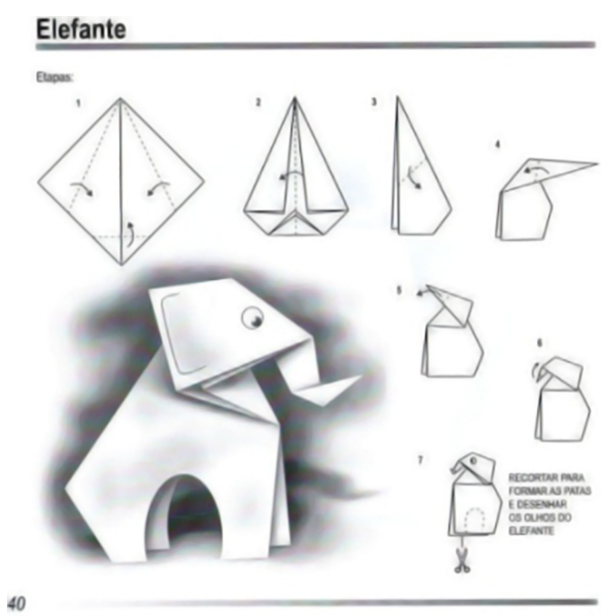



Fonte: Yeong-so, Y. **A princesa está chegando**. São Pualo: Callis, 2009. p. 2-3.

De acordo com Lima (2012), na obra *A princesa está chegando!* há intenção de ensinar habilidades matemáticas de medição, principalmente de área de retângulos utilizando unidades não convencionais. É importante compreender a Matemática utilizada pelos personagens para entender a história. Desse modo, nesta obra, tanto a Matemática serve de base para a história, como é necessário compreendê-la para entender a história.

Outra obra, utilizada como exemplo por Lima (2012), *Brincando com dobraduras,* Figura 14, ilustra a possibilidade de vivenciar a matemática enquanto se realiza as atividades práticas de confecção de dobraduras. Nessa ação, a matemática sai do contexto do texto do livro e passa a integrar-se naturalmente à vida real, por meio da manipulação de papel durante a montagem de dobraduras.

**Figura14 – Página do livro Brincando com Dobraduras**




Fonte: CHEMELLO, T. **Brincando com dobraduras**. São Paulo: Gaia, 2008. p. 40.

De acordo com Lima (2012), existem obras dos Acervos Complementares nas quais a matemática emerge naturalmente da história por meio das conexões feitas pelo leitor, como nas obras: As três partes e Tô dentro, tô fora. Também destaca que muitas vezes o elemento que propicia a conexão com a matemática são as ilustrações.

Para Lima (2012), alguns elementos das obras são determinantes para caracterizar o tipo de integração da Matemática. Contudo, há casos em que a integração só poderá ocorrer por meio das escolhas feitas pelo professor, uma vez que a obra não apresenta claramente aspectos matemáticos.

Lima (2012) também analisou a articulação entre a Matemática e os gêneros textuais nas obras dos Acervos Complementares do PNLD 2010. Verificou a relação quantitativa desta articulação e refletiu sobre sua possível influência nos processos de alfabetização e de formação de leitor, bem como no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos. Os dados quantitativos mostraram que no conjunto das 13 obras do gênero história são contemplados todos os campos matemáticos. Outro dado revelou que, das cinco obras do gênero instrucional, quatro contemplam o campo pensamento geométrico. A característica marcante do gênero instrucional é a sugestão de atividades práticas. Na análise da influência da articulação entre gêneros textuais e campos matemáticos, Lima (2012) cogitou a possibilidade de ocorrer concomitantemente o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos e o desenvolvimento dos processos de alfabetização e formação de leitor.

Finalmente, a pesquisa de Lima (2012), por seu potencial de nos fazer refletir sobre este tema, suscita, por um lado, várias possibilidades de pesquisas futuras e supõe ter contribuído para edições posteriores dos Acervos Complementares. Por outro lado, à medida que esmiúça aspectos importantes das obras destes acervos, também vislumbra contribuir para a utilização didática destas e de outras obras infantis em salas aulas do Ensino Fundamental.

## Tempo e duração de intervalo de tempo: tema multidisciplinar

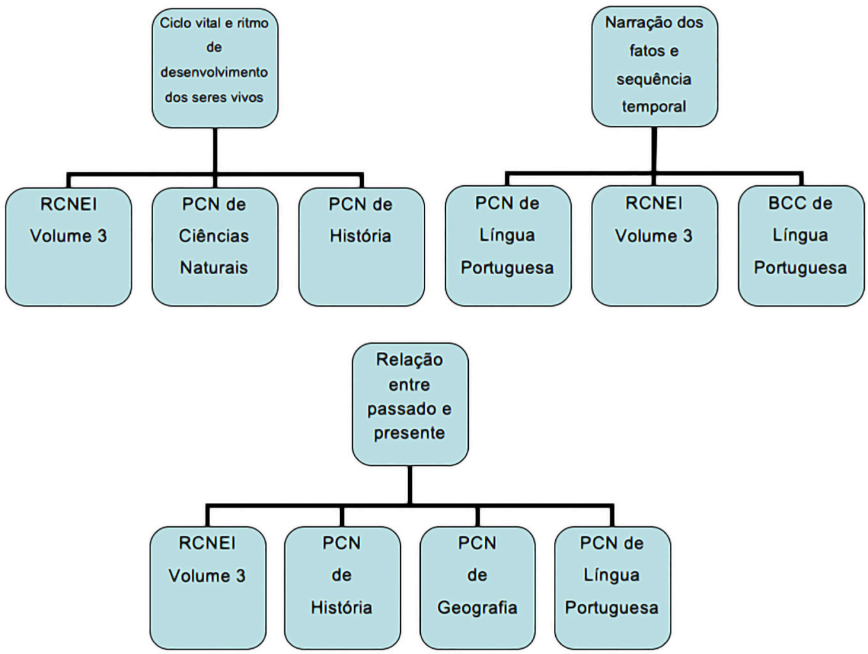
Araujo (2013) investigou como as orientações de documentos curriculares sobre o ensino do tempo se materializam em livros didáticos para Alfabetização Matemática. Embora tenha analisado livros didáticos apenas da área de Matemática, a análise de documentos curriculares em diferentes disciplinas sinaliza para diversas ideias sobre o tempo nestas orientações. Por exemplo, orientações sobre o ciclo vital e ritmos de desenvolvimento dos seres vivos, são explicitadas no Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil (RCNEI) e nos PCN de Ciências e História.

Os PCN (BRASIL, 1997) de Língua Portuguesa, o RCNEI (BRASIL, 1998) e a Base Curricular Comum de Pernambuco (BCC) de Língua Portuguesa (PERNAMBUCO, 2008) orientam trabalhar com as crianças a narração dos fatos seguindo uma sequência temporal e causal. O RCNEI (BRASIL, 1998), os PCN (BRASIL, 1997) de História, Geografia e Língua Portuguesa abordam a relação entre passado e presente.

Nos PCN de História (BRASIL, 1997) a autora identificou as operações temporais estudadas por Piaget (2002): sucessão, duração e simultaneidade. Porém, no documento, segundo a autora, aparece outra nomenclatura para estas operações temporais: referência anterioridade, posterioridade e simultaneidade.

Em síntese, Araujo (2013) apresenta o esquema (Figura 15) a seguir para ilustrar algumas articulações entre as orientações dos documentos oficiais nas diferentes disciplinas.

**Figura 15 – Articulações entre as orientações dos documentos oficiais referentes ao tema "tempo"**




Fonte: Araujo (2013), p. 49.

Na sua pesquisa, Araujo (2013) também mapeou atividades que abordassem tempo em todas as 23 coleções de livros didáticos para Alfabetização Matemática aprovadas pelo PNLD 2013. Como resultado, foram identificadas nestas coleções 206 atividades que abordam a duração de intervalo de tempo, como grandeza matemática ou conhecimento cronológico, e como contexto para trabalhar outras temáticas. A partir da fundamentação teórica e das orientações dos documentos curriculares, construiu algumas categorias de análise: duração de intervalos de tempo, sequências temporais e dispositivos de marcação e medição de tempo. Dentre as análises, a autora discute, por exemplo, atividades que abordam períodos do dia. Para ilustrar, na atividade da Figura 16 é solicitado ao aluno ligar cada cena de acordo com os períodos em que ela acontece;

seja de dia, ligando ao sol; seja à noite, ligando à lua, refletindo a perspectiva histórica quando o tempo era medido pelos fenômenos naturais. A atividade ainda traz três perguntas envolvendo os períodos do dia, indagando aos alunos se eles sabem quando é dia ou quando é noite. Esse tipo de atividade, conforme a autora possui relação com os períodos do dia, e é considerado pelo RCNEI (BRASIL, 1998) importante, pois auxilia a estruturação do pensamento da criança para desenvolver o conceito de tempo como grandeza.

**Figura 16 - Atividades com dois períodos do dia**


1 . Ligue o Sol com as atividades que costumam ser realizadas durante o **dia**. Ligue a Lua com as atividades que geralmente são realizadas durante a **noite**.

*Resposta pessoal. Pode acontecer de alguns alunos realizarem durante a noite algumas atividades que, geralmente, a maioria das pessoas faz durante o dia. O contrário também pode acontecer.*

*O trabalho com o tempo será desenvolvido ao longo de todos os volumes desta coleção. As atividades desta página e da seguinte iniciam o trabalho com a identificação e diferenciação de noite e dia. Aproveite a oportunidade para organizar atividades feitas ao longo de um dia, na escola e fora dela.*

Ilustrações: Luiz Podavin

DE OLHO NO TEMPO-I

Discuta com os colegas as questões abaixo.

- Você também realiza as atividades mostradas nas ilustrações desta página?
- Como você sabe quando é dia?
- Como você sabe quando é noite?

Fonte: CERULLO, M. I. et al. **Matemática**: Ponto de Partida. 1º ano. 2. ed. São Paulo: Sarandi, 2011, p.52.

Em outra categoria analisada por Araujo (2013), ordenação de acontecimentos, são apresentadas às crianças imagens fora da ordem e solicita-se que enumerem ou coloquem na ordem os acontecimentos. Neste tipo de atividade há, claramente, articulação da Matemática com outras disciplinas, pois supõe a mobilização por parte da criança de conhecimentos diversos. Na atividade a seguir, Figura 17, por exemplo, o item b supõe conhecimento do ciclo das plantas, um conhecimento da área de Ciências Naturais.

**Figura 17 - Atividade de ordenação dos acontecimentos**

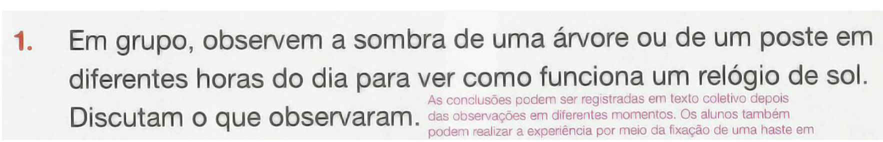

Fonte: CENTURIÒN, M. et al. Porta Aberta. 2º ano, 1. ed. São Paulo: FTD, 2011, p.167.

No estudo de Araujo (2013), o dispositivo relógio, amplamente explorado nas coleções analisadas, também é visto como o instrumento mais utilizado pela sociedade atual para marcação e medição de tempo. Para a autora, citando Prigogine (1988), na perspectiva física, a ideia de Aristóteles sobre o tempo ser medido a partir da perspectiva do antes e depois é o que fazemos hoje em dia, quando medimos o tempo com os relógios que têm um movimento periódico.

Ela também defende que na perspectiva histórica, vê-se a tentativa da marcação do tempo pelas civilizações e a criação de instrumentos de medida, como o relógio das águas, relógio de sol e sua evolução até os dias de hoje com os relógios digitais. Na análise dos documentos, a indicação para se trabalhar tempo por meio de relógios é vista no documento PCN (BRASIL, 1997).

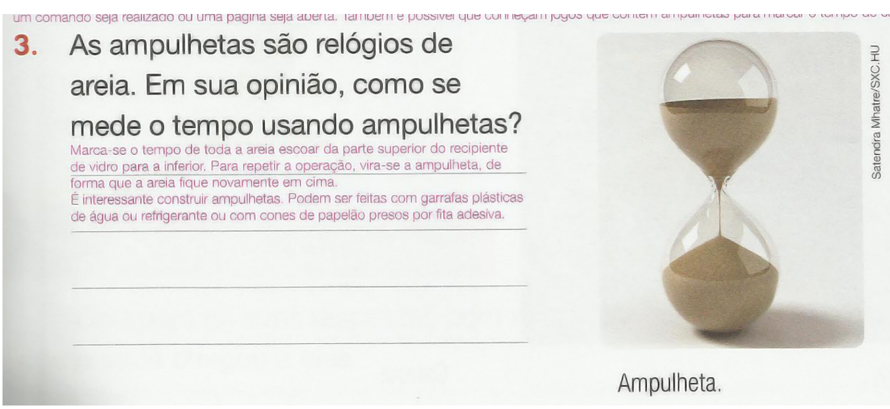
A partir das análises das coleções, Araujo (2013) identificou quatro tipos de relógios utilizados nos livros didáticos: relógio de ponteiro, relógio digital, relógio do sol e relógio de areia. Essa diversidade de relógios abordada nas coleções, conforme a autora é interessante, pois contribui para situar o aluno na história e a criação desse dispositivo, também valoriza a cultura, podendo a professora, em sala de aula, fazer o regaste histórico das civilizações que utilizaram esses tipos de relógios, como ilustrado no exemplo a seguir, na Figura 18.

**Figura 18 - Tipos de relógios**



1. Em grupo, observem a sombra de uma árvore ou de um poste em diferentes horas do dia para ver como funciona um relógio de sol. Discutam o que observaram. As conclusões podem ser registradas em texto coletivo depois das observações em diferentes momentos. Os alunos também podem realizar a experiência por meio da fixação de uma haste em

Exemplo 1



3. As ampulhetas são relógios de areia. Em sua opinião, como se mede o tempo usando ampulhetas?
Marca-se o tempo de toda a areia escoar da parte superior do recipiente de vidro para a inferior. Para repetir a operação, vira-se a ampulheta, de forma que a areia fique novamente em cima.
É interessante construir ampulhetas. Podem ser feitas com garrafas plásticas de água ou refrigerante ou com cones de papelão presos por fita adesiva.

Satendra Mhatre/SXC.HU

Ampulheta.

Exemplo 2

Fonte: AIDAR, M. Aventura do Saber. 2. Ano. São Paulo: Leya, 2011. p.213.

Neste outro exemplo, Figura 19, envolvendo outro tipo de atividade de marcação de horas, um exercício cujas horas não são apresentadas nos dispositivos, seja relógio de ponteiro ou digital, mas que o próprio corpo do aluno seja um relógio. Além de manter articulação com linguagem, pois envolve a leitura de poema, há indicação que seja realizada em dupla, no qual um dos alunos diz as horas e o outro utilizando seus braços como ponteiros de relógio faça a marcação:

**Figura 19 - Atividade marcação de hora com o corpo**

Com os colegas, faça uma dramatização do poema **O relógio**, de Vinicius de Moraes.

**O relógio**

Passa, tempo, tic-tac
Tic-tac, passa, hora
Chega logo, tic-tac
Tic-tac, e vai-te embora
Passa, tempo
Bem depressa
Não atrasa
Não demora
Que já estou
Muito cansado
Já perdi
Toda a alegria
De fazer
Meu tic-tac
Dia e noite
Noite e dia
Tic-tac
Tic-tac
Tic-tac...

MORAES, Vinicius de. *Poesia completa e prosa: poemas infantis*. Extraído do *site*: <www.viniciusdemoraes.com.br/poesia/index.php>. Acesso em: 1º fev. 2011.

Vamos brincar de relógio?

- Forme uma dupla com um colega.
- Um fala um horário, e o outro indica esse horário representando, com os braços, a posição dos ponteiros.
- Depois, troque de lugar com o seu colega.



Fonte: GIOVANNI, J. A Conquista da Matemática. 2. ano. São Paulo: FTD, 2011. p.154.

Araujo (2013) desenvolveu um estudo exploratório que teve como foco apenas a abordagem do tempo em livros didáticos de Matemática, no entanto a autora acredita que outras pesquisas que envolvam, por exemplo, análises diagnósticas, numa perspectiva cognitiva sobre a construção da noção de tempo pelas crianças, ou análise de escolhas metodológicas dos professores em suas práticas, são necessárias para se constituir um corpo de conhecimentos sólidos sobre o ensino e a aprendizagem da grandeza duração de intervalo de tempo, ou simplesmente sobre o *tempo*, tema multifacetado e multidisciplinar e, inegavelmente, presente em nossas vidas.

## Considerações Finais

Pensar a articulação entre a Matemática e outras disciplinas é um campo vasto e instigante. Neste texto, discutimos os achados sobre este tema em vários livros, sob quatro olhares diferentes. Apontamos várias possibilidades, nem sempre consistentes como discutimos, mas tentativas que nos instigam a elaborar muitos questionamentos: quais seriam as consequências desta articulação no ensino dos diferentes campos do saber para a formação cidadã dos nossos estudantes? Que usos podem ser feitos destas articulações? E mais ainda: como deveria ser uma boa articulação? Os dados das pesquisas discutidas neste texto, especialmente as de Santos (2010) e Santos (2011), apontam fragilidades na articulação entre artes e simetria e meio ambiente e Matemática, respectivamente em atividades propostas em livros didáticos para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Ao refletirmos sobre estes dados, vislumbramos quantas pesquisas poderiam ser produzidas para responder estas perguntas e deste modo contribuir para uma visão da pesquisa em Educação Matemática como um campo multidisciplinar e interligado à utilidade e qualidade, defendida por Kilpatrick (1995) e por nós no início deste capítulo.

Este capítulo resgata pesquisas que envolveram a análise de atividades de livros didáticos, como a de Araujo (2013) ou material de apoio didático para o professor, como as obras dos Acervos complementares de Lima (2012), no entanto, a reflexão sobre a articulação entre a Matemática e outras disciplinas, pode ser ampliada e remetida a outras dimensões ou eventos. Eventos como a aprendizagem, ou seja, pesquisas relacionadas ao sujeito que aprende ou eventos relacionados ao ensino, ao professor que ensina, às suas práticas de ensino, aos seus conhecimentos profissionais.

Finalmente, acreditamos que este texto pode contribuir para aprofundar a reflexão sobre a necessidade e a potencialidade dos livros didáticos de Matemática considerarem a necessária articulação interna, entre conteúdos ou blocos de conteúdos matemáticos e também a articulação com outras áreas de conhecimento, pois este tipo de articulação constitui-se numa boa forma de contextualização.

## Referências


ARAUJO, J. C. **Tempo, desafio conceitual e didático: um estudo exploratório sobre orientações de documentos curriculares e atividades de livros didáticos para alfabetização matemática**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 5. ed. Lisboa: Edições 70, 2009

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 1º e 2º ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular para a Educação Infantil.** v. 3. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Matemática / Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. **Acervos Complementares:** as áreas do conhecimento nos dois primeiros anos do Ensino Fundamental. Brasília, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Básica. **Guia Nacional do Livro Didático (6º ao 9º ano)** – PNLD 2011: Brasília, 2010.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J. B. P. Ministério da Educação. **Coleção Explorando o Ensino.** A matemática do contexto e o contexto na Matemática. Secretaria de Educação Básica, v. 17. 248 p. Matemáticas: Ensino Fundamental: Brasília, 2010.

KILPATRICK, J. Staking claims. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 3, n. 4, p. 21-42, 1995.

LIMA, A. P. M. **Acervos complementares do PNLD 2010:** um estudo sobre a relação entre matemática e gêneros textuais. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J. B. F. P. (Org.). **Coleção Explorando o Ensino.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010, v. 17, p.167-200.

MANDARINO, M. C. F. Que conteúdos da matemática escolar professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental priorizam? In: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (Org.). **Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife, v. 6: SBEM, 2009. p. 29 – 48.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. Base Curricular Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco: língua portuguesa. Recife: SE. 2008. 110p.

PIAGET, J. **A noção de tempo na criança**. Rio de Janeiro: Record, 2002.

PRIGOGINE, I. **O Nascimento do Tempo**. Lisboa: Edições 70, 1988.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. 33. ed. Petrópolis: Vozes, 1986.

SANTOS, D. **O tema transversal meio ambiente na abordagem do bloco das grandezas e medidas:** contexto ou pretexto nos livros didáticos de matemática? 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTOS, D.; TELES, R. Temática socioambiental e as grandezas e medidas: contexto ou pretexto? In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CIAEM, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

SANTOS, L. F. **Pintar, dobrar, recortar e desenhar:** o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SANTOS, L. F.; TELES, R. Pintar, dobrar, recortar e desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42 A, p. 291-310, abril 2012.

SHIH, J. C.; GIORGIS, C. Building the Mathematics and Literature Connection through Children's Responses. **Teaching Children Mathematics,** p.328-333, fev. 2004.

# Contribuições da teoria das situações didaticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matematica[25]

Marilena Bittar[26]

Quando fui convidada a escrever um texto para esse livro, pensei em discutir um tema com o qual trabalho desde o término do meu doutorado, em 1998: a engenharia didática. Tenho orientado diversas pesquisas e participado de bancas de mestrado e doutorado que fazem uso da Engenharia Didática (ED). Nesses momentos, bem como em aulas sobre essa temática, algumas questões surgem, de forma recorrente: quando se faz uso da engenharia didática deve-se também utilizar a teoria das situações didáticas? A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa ou de ensino? Nesse texto, busco esclarecer algumas dessas dúvidas, discutir o papel da engenharia didática dentro do campo científico conhecido como didática da matemática e estimular o leitor a estudar mais esse tema. Para

---

25 Agradeço a Paula Baltar Bellemain por suas valiosas contribuições com a leitura atenciosa desse texto.

26 Docente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PPGEduMat da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), bolsista produtividade pesquisa/CNPq, líder do DDMat – Grupo de Estudos em Didática da Matemática e coordenadora do GT 14 Didática da Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Email: marilenabittar@gmail.com

isso, inicialmente, apresento as principais ideias da engenharia didática, em seguida abordo alguns elementos da teoria das situações didáticas por sua estreita relação com a ED. Na terceira parte do texto discuto exemplos do uso dessa metodologia de pesquisa. E, finalmente, nas considerações finais trago, brevemente, algumas ideias acerca das evoluções em torno da engenharia didática.

Escrevi esse texto em uma linguagem próxima àquela da sala de aula, conversando com o leitor como faço em tais situações. Faço essa escolha, arriscada, com o intuito de tornar a leitura mais acessível a quem começa a se interessar pelo tema e que pensa que esse arcabouço teórico-metodológico pode ser útil em sua pesquisa. Além disso, as reflexões que trago aqui são fruto de muitas aulas e debates com licenciandos, mestrandos, doutorandos e outros colegas com os quais tive a oportunidade de discutir as temáticas apresentadas nesse texto. Assim, continuo aqui uma dessas conversas e aproveito para agradecer a esses meus "formadores" com os quais tenho aprendido muito.

## Em que consiste a Engenharia Didática?

Para entender um pouco dessa metodologia (de pesquisa), vamos retroceder no tempo e voltar à época de sua origem ou, ao menos, de sua consolidação como metodologia de pesquisa em Educação Matemática.

Na década de 1970 tiveram início, na França, diversas investigações sobre o processo de aprendizagem da Matemática. Essas pesquisas analisavam a realização de sequências didáticas em sala de aula. Não havia, à época, uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores no preparo e análise dessas sequências, uma vez que aquelas oriundas do campo da Educação não atendiam às especificidades que emergiam dos trabalhos em desenvolvimento: era preciso algo que considerasse, ao mesmo tempo, a especificidade do conteúdo matemático e questões didáticas. Essa é uma marca forte dos trabalhos desenvolvidos nessa década e que, posteriormente, deram origem ao que é conhecido, desde então, como a Didática da Matemática (corrente francesa) que teve, em sua origem, estudos realizados por Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Yves Chevallard, Raymond Duval, Michele Artigue, Régine Douady, Aline Robert, dentre outros. Esses pesquisadores e outros que se seguiram a eles desde então, não somente na França, ajudaram (e têm ajudado) a consolidar a Didática da Matemática como um campo científico.

Apesar de não haver uma metodologia de pesquisa que considerasse tal especificidade, as "experimentações" em classe seguiam alguns padrões quanto ao seu preparo, à realização em sala de aula e à análise dos dados. Além disso, essas experimentações baseavam-se, sempre, em pressupostos teóricos que tinham em comum o desejo de levar o aluno a construir seu conhecimento, como é caso da teoria das situações didáticas (BROUSSEAU, 1986), à qual dedico a segunda parte desse texto. Desde a década de 1970 é possível encontrar os primeiros trabalhos sobre a engenharia didática (ED) e na década de 1980 esses estudos começam a ser sistematizados notadamente por Guy Brousseau, Yves Chevallard e Régine Douady. Ao final dessa década, Michèlle Artigue publica um artigo (ARTIGUE, 1990) na *Recherches em Didactiques de Mathématiques*[27] que sistematiza e permite disseminar essa metodologia de pesquisa[28] na França e no exterior seja por publicações em outras línguas e/ou por difusão desse mesmo texto.

Um dos pontos de partida para a elaboração de uma engenharia didática pode ser a escolha de um tema para o qual se verifica que a aprendizagem não ocorre como desejado. O modo de investigar a aprendizagem do tema é focado no sistema didático – aluno(s), professor, saber em jogo e um meio[29]. Trata-se então, de estudar condições que possam favorecer essa aprendizagem e é justamente para o estudo de condições que podem favorecer a aprendizagem que a engenharia didática aparece

---

27 Revista francesa de grande circulação entre pesquisadores da Educação Matemática.

28 Uma versão em português desse artigo pode ser encontrada em (ARTIGUE, 1996).

29 Meio é o "sistema antagonista do aluno" (BROUSSEAU, 1986, p.89).

como uma ferramenta metodológica pertinente[30]. A ED é constituída de quatro fases ou etapas: análise preliminar; concepção e análise *a priori* das situações a serem propostas; realização da sequência didática; análise *a posteriori* e validação. É importante ressaltar que, apesar de essas fases terem, inicialmente, uma ordem, há possibilidades de, estando em uma fase ir para outra anterior a essa, como discutirei mais adiante.

A análise preliminar consiste de um amplo estudo do objeto (matemático) que é foco da sequência didática e tem por objetivo fornecer subsídios ao pesquisador para a elaboração da sequência didática. Para tanto é preciso realizar um estudo do ponto de vista matemático desse objeto e do ponto de vista geralmente adotado no ensino, o que pode ser feito por meio de análise de livros didáticos, de orientações curriculares e outros. Além disso, é importante buscar pesquisas anteriores, relacionadas ao objeto de estudo, que abordem, entre outros, dificuldades de alunos relativas ao tema em estudo visando compreender, inclusive, as origens dessas dificuldades, que podem estar no desenvolvimento epistemológico do conteúdo. A análise preliminar permite que o pesquisador elabore hipóteses cognitivas e didáticas que fundamentarão a construção da sequência didática. Assim, de posse dessas informações tem início a elaboração da sequência didática acompanhada da análise *a priori*, que tem uma parte de descrição e outra de antecipação. São descritas/discutidas as atividades a serem propostas e possíveis estratégias de resolução,

---

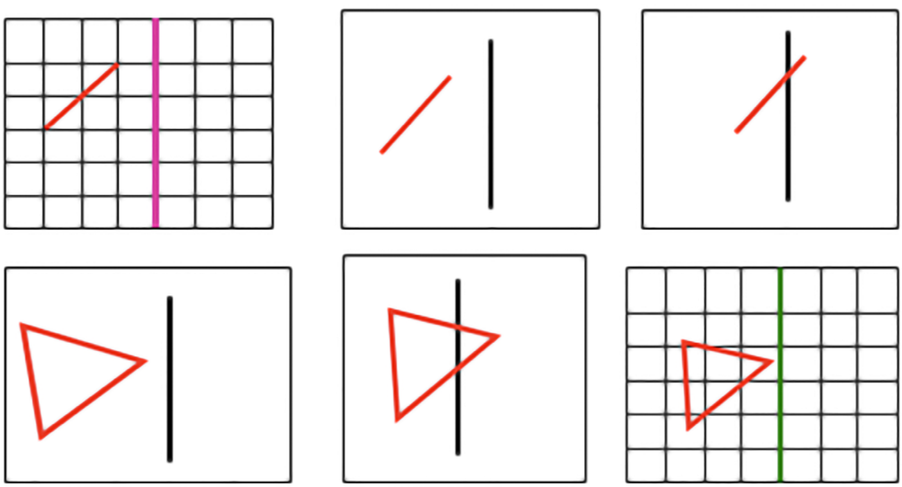
30 Pode-se dizer, de modo mais amplo, que além das contribuições pontuais na investigação do ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos específicos, a engenharia didática tem um papel central na verificação experimental de construções teóricas da didática da matemática. Nesse aspecto, destacam-se as relações da engenharia didática com a Teoria das Situações Didáticas, com a Dialética Instrumento-Objeto (DOUADY, 1986) e com a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). O COREM - Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques (Centro de observação e de pesquisa sobre o ensino de matemática) -da escola Jules Michellet, da cidade de Talence, próxima a Bordeaux na França funcionou, durante 25 anos como um verdadeiro laboratório de didática experimental, no qual o arcabouço teórico metodológico da engenharia didática norteou diversas pesquisas. O COREM e as pesquisas ali desenvolvidas sob a ótica da engenharia didática tiveram um papel fundamental na constituição da teoria das situações didáticas.

incluindo análise dessas estratégias do ponto de vista dos alunos que irão resolver as atividades: que conceitos/propriedades são usados nas estratégias? Que dificuldades os alunos podem ter? O que o aluno precisa saber para entender o problema proposto? E para resolver o problema? Que tipo de controle o aluno tem sobre sua ação? Em resumo, uma análise *a priori* deve conter a sequência didática (as atividades a serem propostas aos alunos), a descrição e justificativa das escolhas ligadas tanto à organização geral de cada sessão quanto às situações propostas e as possíveis estratégias de resolução das atividades propostas.

A elaboração das atividades é acompanhada (ou feita em função) das variáveis didáticas – elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos. Por exemplo, as equações do primeiro grau $x+3=7$ e $5x+19=2x-4$ não demandam, necessariamente, as mesmas estratégias de resolução: é possível resolver a primeira equação por meio de técnicas aritméticas enquanto que a resolução da segunda equação demanda uma técnica algébrica. Assim, para um aluno que está iniciando o estudo da álgebra o "tipo" de equação proposta pode ser uma variável didática. Para complementar a discussão sobre variável didática e a importância desse elemento na engenharia didática usarei um exemplo que considero bastante pertinente para tal, inspirado em Grenier (1985), cujo foco de estudo foi a simetria nos anos iniciais.

A autora trabalhou as atividades jogando, essencialmente, com três variáveis: o material disponível (papel quadriculado ou não, uso de régua e compasso,...), a posição da figura em relação ao eixo de simetria (interseção ou não com o eixo; paralela, perpendicular ou oblíqua em relação ao eixo – no caso de a figura ser um segmento de reta) e a complexidade da figura (segmento de reta, triângulo, figuras compostas por outras, e etc.). Na figura 1 são dados exemplos de atividades para a construção da figura simétrica à figura dada (por uma simetria de reflexão), nas quais as variáveis devem assumir diferentes "valores", o que implica em mobilização, por parte dos alunos, de diferentes estratégias para a resolução das atividades. Assim, encontrar o simétrico de um segmento em um papel quadriculado, cujas extremidades coincidem com pontos da malha quadriculada e que não intersecta o eixo pode ser uma atividade realizada sem dificuldades (ou ao menos acessível) para alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Já ao mudar o valor de variável papel e propor encontrar o simétrico desse segmento em um papel sem malha quadriculada os conhecimentos a serem mobilizados pelos alunos envolvem conceitos mais elaborados ligados, inclusive, às construções geométricas.

**Figura 1 – Exemplos de mudanças nos valores das variáveis didáticas**



Fonte – Elaborada pela autora.

No caso da primeira imagem acima, à esquerda, há um segmento inclinado traçado na malha quadriculada, com um eixo de simetria vertical. O segmento não corta o eixo de simetria. Neste caso, a construção do simétrico se apoia amplamente na malha. Inicialmente, o sujeito traça (concretamente ou mentalmente) segmentos horizontais passando pelas extremidades do segmento (os quais fazem parte da malha, uma vez que o eixo é vertical). Depois marca o simétrico de cada extremidade do segmento. Como se sabe, um ponto e seu simétrico são equidistantes do eixo de simetria. No caso aqui discutido, a determinação da posição das imagens das extremidades do segmento pela simetria de reflexão, vai se apoiar na equidistância entre dois "nós" sucessivos, a qual é também característica da malha quadriculada. O simétrico do segmento será obtido traçando o segmento que une as imagens das extremidades do segmento original. Ao mudar o valor da variável "tipo de papel" de "papel quadriculado" para "papel branco", mesmo continuando com um segmento que não intersecta o eixo de simetria, a estratégia anteriormente descrita é inviabilizada, daí a necessidade de mobilização de outros caminhos de resolução. Será preciso traçar a perpendicular ao eixo e marcar a equidistância de cada extremidade e seu simétrico, em relação ao eixo de simetria, sem o apoio da malha, o que pode ser feito, por exemplo, utilizando régua, esquadros e compasso. O uso desses instrumentos vai levar a estratégias qualitativamente diferentes daquelas apoiadas na malha. Do mesmo modo, nas demais configurações da figura 1 as mudanças de valores das variáveis têm impacto sobre o bloqueio de determinadas estratégias ou o favorecimento de outras estratégias de resolução.

Percebe-se então a importância de descrever estratégias de resolução, corretas ou não, dos problemas propostos acompanhadas das análises de cada uma delas com previsão de comportamentos (cognitivos) dos alunos. Durante a realização das atividades pelos alunos, o pesquisador estará mais preparado para compreender o que esses estão fazendo e, consequentemente, saber que tipo de intervenção deve realizar para favorecer a aprendizagem.

Uma vez preparada a sequência didática, chega o momento de aplicá-la, de realizar a chamada *experimentação*. Ao aplicar as atividades, o pesquisador irá observar os alunos (sujeitos da pesquisa) e refletir: é essa a sessão prevista? Se não, em quê difere dela? Por quê? Que regras norteiam as interações entre os diferentes atores na turma? É possível identificar as regras estáveis (costumes) e as regras variáveis? Em função de quê?

Entra então, em cena, a quarta fase da engenharia didática: a análise *a posteriori* e validação. A análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas deve ser feita sempre em confronto com o previsto na análise a *priori* e com os objetivos a serem alcançados.

Esse confronto deve ser realizado em vários momentos da engenharia didática e é esta característica da ED que a define como tendo validação interna. A preocupação deve ser sempre analisar a evolução do sujeito ao longo da realização da sequência didática. Não se trata de confrontar dois grupos que passaram por experiências diferentes e nem de comparar conhecimentos de um aluno antes da realização da sequência didática e ao final dessa. Essas são características de uma validação externa "[...] porque são externas à classe" (ARTIGUE, 1990, p. 284). Claro que, de acordo com o objetivo de investigação, comparações como essas podem ser feitas, mas é preciso enfatizar que uma das características marcantes da engenharia didática é o confronto contínuo, ao longo da realização da sequência, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, uma vez que é esse confronto que permite redefinir rumos, quando necessário.

Na engenharia didática, o pesquisador pode estar na fase de realização da sequência didática planejada e, ao analisar os resultados obtidos (confronto entre análise a *priori* e análise a *posteriori*) perceber que é necessário planejar outra situação ou alterar uma situação planejada. Nesse momento todos os estudos já realizados também na análise preliminar servirão como apoio ao pesquisador. Por exemplo, se durante uma atividade ele percebe que o aluno está manifestando uma dificuldade já identificada em outras pesquisas, ele pode lançar mão de atividades que auxiliem o aluno e/ou o confrontem a uma falsa concepção que ele manifesta, se for esse o caso.

Por fim, quero dedicar algumas linhas a uma afirmação importante de se ter claro. A engenharia didática é uma metodologia de pesquisa e, ela não é fechada, como afirmam algumas críticas a essa metodologia. Ao contrário, ela propõe uma forma de preparar, aplicar e analisar sequências didáticas. Seu objetivo é promover a construção do conhecimento pelo aluno, com papel importante atribuído ao professor, e para que isso aconteça, ela é aberta. Essa metodologia propõe analisar o que ocorre ao longo do processo de ensino: conforme a situação vai se desenvolvendo, em sala de aula, o pesquisador redireciona, apresenta alternativas. Isso só é possível ser feito se o pesquisador tiver clareza do "chão que pisa". É essencial conhecer dúvidas e concepções que os alunos normalmente têm, relacionados ao conceito em cena, como o ensino tem sido proposto e que alternativas podem ser apresentadas para ajudar o aluno a superar suas dificuldades. Para tudo isso é essencial uma análise criteriosa da sequência didática, das atividades propostas, dos caminhos e/ou estratégias possíveis de serem usados pelos alunos. Daí a importância de uma análise *a priori* bem realizada. Essa correção de percurso, não significa que são feitas mudanças para obrigar o aluno a seguir determinado caminho, ou a responder como previsto na análise *a priori*. De forma alguma! O que ocorre é que caso se perceba, durante a realização e a análise da realização das atividades, que o aluno está, por exemplo, mobilizando uma concepção errônea, o pesquisador deve propor a ele uma ou mais situações que lhe permitam confrontar suas concepções: somente assim é possível evoluir no processo de aprendizagem. Não se deseja cumprir/aplicar uma sequência didática inteira tal como foi prevista, independentemente do que acontece durante sua realização. A análise *a priori* não é uma "receita" a ser seguida e sim um exercício de reflexão e preparo para a atuação do pesquisador no momento da realização das atividades com os alunos. Nesse sentido, quaisquer mudanças, na sequência didática, que se façam necessárias para favorecer a aprendizagem dos alunos são bem vindas desde que apoiadas nos estudos realizados.

Após essa breve apresentação o leitor pode questionar: quando usar a engenharia didática? Claro que não existe uma resposta "correta" ou uma "única" resposta para essa pergunta; o importante em qualquer pesquisa é que quaisquer que sejam as escolhas teóricas e metodológicas elas permitam responder à questão de pesquisa. Vamos pensar em uma situação para a qual a engenharia didática parece pertinente. Digamos que, por motivos diversos, eu tenha interesse em um determinado tema, por exemplo, o ensino de probabilidade no 9º ano do ensino fundamental e que a leitura de pesquisas já realizadas me permitam concluir que o ensino desse tema não tem contribuído com a aquisição de significados pelos alunos, ou que esses apresentam dificuldades relativas à aprendizagem desse tópico. Decido, então, realizar uma investigação com a intenção de propor e avaliar uma alternativa ao ensino praticado. Essa alternativa será uma sequência didática. Mas que tipo de sequência? Qual o paradigma de aprendizagem subjacente ao desenvolvimento da sequência? Se eu quero levar o aluno a construir seu conhecimento, a ter papel ativo em sua aprendizagem, então a teoria das situações didáticas aparece como um referencial teórico coerente e pertinente para ajudar a pensar as situações a serem propostas. Dessa forma vou pensar situações que possam ser vividas como *adidáticas* pelos alunos, como discutirei mais adiante. Surgem, então, novas questões: como elaboro essa sequência? Elaboro atividades de acordo com minha experiência, minhas crenças e inspiração? Isso é importante, porém, para a realização de uma pesquisa é insuficiente. Devo utilizar uma metodologia que me ajude, não somente a elaborar as atividades, mas também, e principalmente, a analisar possibilidades das atividades e os resultados obtidos com a realização dessas atividades. E é então que a ED aparece como uma escolha pertinente para tal estudo.

Antes de passar aos exemplos creio ser importante discorrer, mesmo que brevemente, sobre a teoria das situações didáticas por ser bastante utilizada em conjunto com a engenharia didática e, especialmente, pelo fato de que essa teoria está fortemente ligada à origem da engenharia didática; foi essa teoria que deu lastro à constituição da ED.

## A Teoria das Situações Didáticas[31]

A teoria das situações didáticas (TSD) foi desenvolvida por Guy Brousseau (1986; 1998; 2008), considerando: o modo como o matemático produz matemática (que parte de um problema); o trabalho de recontextualização que o professor deve realizar (acerca do objeto matemático a ser estudado) e como o aluno aprende. Nesse último quesito a perspectiva adotada pelo

---

31 Ao leitor interessado em saber um pouco mais sobre essa teoria recomendo o texto de Freitas (2008). Após essa primeira leitura é essencial ler textos escritos pelo autor. Em português há Brousseau (1996; 2008).

autor é a construtivista com forte papel de mediador do professor. Com essas reflexões o autor elabora um modelo teórico que define uma situação didática como sendo as relações estabelecidas (explícita ou implicitamente) entre um ou vários alunos em um sistema educativo (professor ou análogo) com a finalidade de que o(s) aluno(s) adquira(m) um determinado saber. Assim, nesse modelo uma situação didática é qualquer situação de sala de aula ou de outro ambiente escolar (como na educação a distância) na qual há um professor com a intenção de ensinar algum conceito a um ou vários alunos. Pode-se, dessa forma, analisar uma situação didática e chegar-se à conclusão de que a abordagem didática do professor se aproxima do tecnicismo, construtivismo ou outro. Entretanto, Brousseau quis propor um modelo teórico que contribuísse com a aprendizagem matemática dos alunos (de diversos níveis de escolaridade), compreendendo a aprendizagem como um processo de construção do conhecimento, à luz da teoria piagetiana. Cabe aqui uma breve observação: apesar de Piaget atribuir importância às interações, esse não é o centro da psicologia genética; já a TSD considera fundamental as interações entre sujeitos e atribui papel primordial ao professor como mediador do processo de aprendizagem. Com esses princípios básicos Brousseau define uma situação *adidática*, um tipo particular de situação didática, como sendo aquela na qual o aluno assume o papel de (pequeno) matemático, na qual há elevado grau de autonomia do aluno na interação com professor. Suas ações não são motivadas pelo desejo de satisfazer a uma expectativa do professor, mas pelo desejo genuíno de resolver o desafio/problema posto pela situação; ele realiza investigações e é plenamente corresponsável pela construção do seu conhecimento.

De acordo com a teoria das situações didáticas para que uma determinada situação possa ser *adidática* ela deve ser elaborada de tal forma que o aluno entre no jogo, aceite o problema como sendo seu[32].

32 É exatamente isso que faz um matemático: ele tenta resolver um problema que, de alguma forma, é importante para ele, desperta sua curiosidade científica.

Quando isso ocorre diz-se que houve a *devolução*. Mas, uma vez que o aluno entra no jogo, se a resolução da atividade exige conhecimentos já adquiridos e familiares, a atividade será facilmente resolvida, portanto, não se trata de um problema para o aluno. O aluno deve ter condições de começar a pensar uma estratégia de resolução, caso contrário há o abandono imediato do problema; o aluno "sai" da situação. Dessa forma, a atividade proposta deve ser tal que o aluno tenha uma estratégia inicial, um procedimento "inicial" ancorado nos saberes e conhecimentos anteriores, porém tal procedimento não permite resolver o problema, caso contrário não seria uma situação de aprendizagem. Esse procedimento inicial deve se mostrar rapidamente insuficiente ou ineficaz para que o aluno seja obrigado a realizar acomodações, modificações de seu sistema de conhecimento. Assim, a atividade proposta deve ser tal que o aluno consiga começar a tentar resolvê-la, mas não consiga fazê-lo de imediato: o problema deve exigir, para sua resolução, o conhecimento a ser construído pelo aluno. O papel do pesquisador (ou do professor) ao longo do trabalho dos alunos deve ser de mediador. Ele não deve fornecer respostas ou pistas sobre o que deve ser usado para resolver a situação, mas é importante ter claro que o professor não se ausenta do processo; ao contrário: ele deve incentivar os alunos a continuarem no jogo, questionando-os com perguntas, sempre que necessário, de modo a que permaneçam no jogo. Para que os alunos tenham autonomia intelectual no desenvolvimento da situação proposta, é preciso pensar a elaboração de um meio *adidático* que permita a validação de suas ações, ou seja, esse meio – elaborado pelo pesquisador – deve permitir que os alunos testem a validade (ou não) de suas conjecturas.

Para Brousseau (1986) as situações *adidáticas* podem ser modeladas em três tipos, sempre de acordo com o que faz o aluno, relativamente ao conhecimento em cena: situação *adidática* de *ação*, de *formulação* e de *validação*. A situação de ação tem início quando o aluno aceita o problema como sendo seu, portanto houve a *devolução*, e passa a tentar encontrar uma solução para o problema proposto. Essas ações devem levá-lo a elaborar conjecturas sobre a solução parcial ou total do problema proposto e essa é a situação *adidática* de *formulação*. Muitas vezes ela pode ocorrer quando o aluno precisa comunicar ao outro sua conclusão. Uma vez elaborada a conjectura é preciso validá-la, verificar se ela é ou não verdadeira. Essa prova não é necessariamente uma demonstração formal e pode variar em função do nível de escolaridade do aluno. Essas situações podem acontecer diversas vezes dentro de uma mesma situação *adidática*. Para ilustrar, recorro à situação *Corrida ao 20* (BROUSSEAU, 1998), amplamente discutida em textos que abordam a TSD. Trata-se de um jogo entre dois jogadores, J1 e J2, em que o primeiro (J1) fala o número 1 ou 2, em seguida o segundo (J2) fala um número adicionando 1 ou 2 ao número falado por J1 e passa a vez para que esse continue, procedendo sempre da mesma forma, ou seja, adicionando 1 ou 2 ao número falado pelo parceiro. Ganha o jogo quem conseguir chegar a 20 primeiro. Vejamos o exemplo de uma partida possível de ser realizada considerando as regras do jogo:

**Figura 2 – Exemplo de uma partida do jogo** *Corrida ao 20***.**

| Jogador 1 | Jogador 2 |
|---|---|
| **2** | **4** (2+2) |
| **6** (4+2) | **7** (6+1) |
| **9** (7+2) | **10** (9+1) |
| **12** (10+2) | **13** (12+1) |
| **15** (10+2) | **16** (15+1) |
| **17**(16+1) | **19** (17+2) |
| **20**(19+1) | |

Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse exemplo o Jogador 1 ganhou o jogo, mas será que o fez de forma consciente? Será que em algum momento da partida o Jogador 2 teve a chance de ganhar também? Para responder a essas questões é preciso saber qual é a estratégia que garante a vitória (deixo para o leitor). Mas imaginemos a situação vivenciada por esses dois jogadores com a presença de um professor, que é responsável pela *devolução* e por realizar questionamentos, ao longo do jogo, que levem os alunos a tentarem validar suas conjecturas. Uma vez que os alunos compreendem as regras do jogo e passam a buscar essa estratégia, podemos dizer que houve a *devolução*. Supondo que a primeira jogada deles foi a da figura 2, então eles agiram sobre a situação, mas é preciso formular a estratégia e, em seguida, tentar validá-la. Como ainda não chegaram ao resultado desejado (a estratégia vencedora) devem refazer o ciclo, agindo (jogando), formulando e então (in)validando a resposta encontrada[33]. Durante todo o processo o professor está presente, mediando a situação, entretanto, não fornece informação acerca do conhecimento visado, nem (in)valida as soluções propostas, caso contrário a situação deixaria de ser *adidática*. Aproveitando esse exemplo, gostaria de chamar a atenção para o fato de que nessa situação o aluno não sabe que conceito matemático o professor deseja que ele construa ou que está em cena, exatamente como deve ser em uma situação *adidática*. Além disso, para encontrar a estratégia de resolução desse problema e de sua generalização, nos anos iniciais, é preciso lançar mão do conceito que o pesquisador queria fazer emergir, a divisão euclidiana[34].

Como fazer então para que, *a priori*, uma situação possa ser caracterizada como sendo *adidática*? Nesse momento a engenharia didática aparece como uma metodologia pertinente. É fundamental que o pesquisador conheça o desenvolvimento epistemológico do conceito visado, as dificuldades já detectadas por outras pesquisas, relacionadas à aprendizagem desse conceito, como os livros didáticos abordam, normalmente, o tema em estudo, o que dizem as diretrizes curriculares (os documentos oficiais). Esse estudo é o que constitui a análise preliminar, primeira fase da engenharia didática, que serve de apoio para a elaboração da sequência a ser desenvolvida. De posse dessas informações, o pesquisador começa a elaborar as atividades que compõem a sequência didática.

---

33 Uma apresentação e análise detalhada dessa situação são apresentadas na introdução de (BROUSSEAU, 1998).

34 Contei o final do filme, mas ainda deixo ao leitor a análise dessa situação, tanto do ponto de vista didático quanto do ponto de vista matemático.

Nesse momento, é preciso escolher as variáveis didáticas sobre as quais o pesquisador vai trabalhar para provocar o surgimento do estudo visado. Além disso, cada atividade proposta é minuciosamente analisada, pensando-se em possíveis estratégias, corretas ou não, a serem utilizadas pelos alunos e em dificuldades que esses poderão encontrar. A análise a *priori* está, assim, relacionada com a racionalização da concepção da sequência didática. Ela permite, de certo modo, simular o que pode ocorrer, repertoriar possibilidades e ao fazer isso, questionar, antes de aplicar a sequência, se as escolhas didáticas de vários níveis são as mais pertinentes para atingir certos objetivos de aprendizagem.Por esse motivo, dizemos que a situação elaborada tem condições, *a priori*, de ser vivida como *adidática*, mas somente com sua realização e análise é possível dizer se, de fato, isso ocorreu.

## Alguns exemplos de uso da Engenharia Didática

Nesse parágrafo são apresentados alguns dados de pesquisas realizadas sob minha orientação e que tiveram a engenharia didática como metodologia de pesquisa. Porém, o leitor tem à sua disposição diversas pesquisas que têm sido realizadas no Brasil com o uso dessa metodologia especialmente no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal e Pernambuco, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera\SP, além do Programa do qual faço parte (PPGEduMat), da UFMS.

## A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

Sistemas de equações lineares estão presentes na educação básica desde o ensino fundamental, em geral no 8º ano, e, nesse momento trata-se de estudar sistemas de duas equações e duas incógnitas. São vistos os métodos da substituição e da adição[35]. No ensino médio esse estudo é ampliado para sistemas com mais de duas equações e de duas incógnitas, o que acarreta em novos métodos de resolução. Nesse momento, em geral os alunos demonstram não se lembrar do que foi anteriormente visto e têm dificuldades em compreender o que significa um sistema de equações lineares. Foi justamente a vivência dessa experiência que motivou Rocha (2010) a investigar a aprendizagem desse conceito no ensino fundamental[36]. No excerto a seguir o autor justifica e articula a escolha da TSD, como principal apoio teórico de sua pesquisa, e da engenharia didática, como metodologia de pesquisa.

> Nosso desafio nessa proposta é investigar se alunos, acostumados ao que Freitas (2007) chamou de aprendizagem formal, quando a compreensão verdadeira da Matemática é substituída pela memorização, pelas técnicas e pelos processos de automatismo, aprendem um conteúdo matemático por meio da adaptação dos conhecimentos já adquiridos. Diante deste modelo, no qual o aluno está acostumado a perguntar ao professor e obter de imediato a resposta sem que ao menos seja levado a fazer reflexões, sentimos a necessidade de buscar referências para a realização dessa investigação. Desta forma, encontramos na Teoria das Situações Didáticas e na Engenharia Didática, sustentação teórica e metodológica para refletirmos sobre nosso objeto de pesquisa, no caso, a

35 Esses dois métodos estão presentes em todos os livros didáticos do 8º ano do ensino fundamental e são abordados sempre pelos professores, porém podem ser encontrados também, em alguns livros didáticos os métodos da comparação, redução, tentativas, transposição e modelagem gráfica (VALENZUELA, 2007).

36 Ao leitor interessado no ensino e aprendizagem de resolução de sistemas de equações lineares de três incógnitas e três equações indico a leitura de Chiari (2011).

> aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau pelo método da substituição por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em ambiente papel e lápis e o software Aplusix. (ROCHA, 2010, p.15).

A escolha em trabalhar apenas com o método da substituição foi devido ao tempo disponível para a realização da sequência didática com os alunos[37]. A pesquisa foi realizada com dez alunos do 8º ano de uma escola pública da Nova Alvorada do Sul/MS. Os encontros foram realizados paralelamente às aulas de matemática, com alunos que não apresentaram, ou apresentaram pouca, dificuldade em resolução de equações do 1º grau em um teste diagnóstico realizado antes do início da realização das sessões[38]. É importante deixar claras as razões dessas duas escolhas. Escolheu-se trabalhar com alunos que não tinham mostrado dificuldade em resolver equação do 1º grau pelo fato de o objetivo central da investigação em curso ser a aprendizagem de sistemas de equações do 1º grau e de o tempo para tal investigação ser curto: não seria possível realizar um trabalho (necessário) com alunos que não conseguissem resolver equação do 1º grau. É claro que a leitura dos resultados encontrados deve ser feita à luz das escolhas feitas, pois a realização da mesma sequência didática em uma sala de aula ordinária de 8º ano do ensino fundamental não seguirá o mesmo desenvolvimento, haja vista, entre outras coisas, o fato de a maioria dos alunos ter dificuldades em resolver equação do 1º grau[39].

---

37 Muitas vezes, o tempo disponível para a realização de uma pesquisa limita o tema a ser tratado uma vez que nessa perspectiva teórica visa-se a construção do conhecimento pelo aluno, o que demanda um trabalho realizado e analisado em todos os seus detalhes, especialmente em se tratando de uma primeira pesquisa com o referido tema.

38 Esse teste não teve como objetivo comparar resultados anteriores à realização da sequência didática com resultados posteriores.

39 Em pesquisa realizada com cerca de 2400 alunos do 9º ano de escolas públicas de Campo Grande, foi possível que observar que apenas 16% conseguiram resolver corretamente a equação $x+3=-8$ (BITTAR, 2006).

Como o desejado, com essa sequência didática, era levar os alunos a construírem seu conhecimento – método da substituição para resolução de sistemas de equações do 1º grau – as situações propostas deveriam permitir que eles vivenciassem situações *adidáticas*. Nesse momento de uma pesquisa realizada com o suporte teórico da teoria das situações didáticas, a questão principal é como organizar as atividades para que o conhecimento seja possível de ser elaborado pelos alunos. Como dito anteriormente, cada atividade deve ser cuidadosamente pensada. Assim, para levar o aluno a compreender o que significa um sistema de equações e a elaborar um método de resolução desse sistema que contribua com a atribuição de significados a esses conceitos, Rocha iniciou as sessões com atividades que pudessem ser resolvidas aritmeticamente e que, aos poucos, caminhassem até o desejado. Assim, a primeira atividade da sequência didática foi a seguinte:

> Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17 e a diferença entre esses números seja igual a 5.
> a) Escreva as informações do problema que você vai usar para encontrar os números procurados;
> b) Resolva o problema e descreva como fez para encontrar os números procurados;
> c) Verifique se esse par de números é realmente a solução do problema e descreva como fez a verificação.

O aluno pode tentar resolver esse problema por meio de tentativas escolhendo dois números cuja soma seja igual a 17 (por exemplo, 9 e 8) e verificando se a diferença entre eles é igual a 5. Caso isso não ocorra ele tenta outros pares de números. Como a atividade trabalha, propositadamente, com números “pequenos”, essa estratégia é possível de ser utilizada. Caso o problema pedisse, por exemplo, dois números cuja soma fosse igual a 138 essa estratégia seria demasiadamente custosa e então o aluno sentiria necessidade de ter outra ferramenta que resolvesse esse problema.

Para levar o aluno a construir a ideia de resolução de um sistema pelo método da substituição, foram propostas algumas atividades de resolução de sistemas que pudessem permitir que isso ocorresse. Um exemplo é o sistema a seguir, no qual o valor de uma das incógnitas é dado.

**Figura 3 – Sistema de equações proposto aos alunos**

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$$

Fonte: Elaborada pela autora.

Os resultados da pesquisa de Rocha mostram que é possível levar os alunos a construírem conceitos algébricos, e foi o uso da engenharia didática entrelaçada à teoria das situações das didáticas que permitiu elaborar uma sequência didática.

Outra pesquisa, sob minha orientação, que também fez uso da teoria das situações das didáticas como principal referencial teórico e da engenharia didática, como referencial metodológico, foi a desenvolvida por Abe (2009). A autora investigou a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvessem duas visões diferentes de probabilidade, a clássica e a frequentista. Não apresento mais detalhes dessa pesquisa devido ao espaço desse capítulo, mas decidi citá-la pelo fato de ela abordar um tema relativamente novo no ensino fundamental e trazer algumas contribuições interessantes para a aprendizagem da probabilidade.

## Engenharia Didática, Teoria das Situações das Didáticas e Níveis de Prova

No parágrafo anterior vimos como a articulação entre a teoria das situações didáticas e a engenharia didática pode favorecer a aprendizagem de um conceito matemático pelos alunos. Nesse parágrafo apresento a pesquisa desenvolvida por Oliveira (2009) que teve por objetivo investigar argumentações de alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas. Apesar de a argumentação não ser um conceito matemático, seu uso é pedra fundamental na arte de fazer Matemática[40]. A motivação pessoal[41] da autora partiu de sua experiência como professora:

> A realidade nesta escola, e sem dúvida a realidade de muitas escolas brasileiras, na época, fossem elas públicas ou privadas, era o ensino de uma Matemática dividida em várias disciplinas: Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao ensinar Geometria, uma das dificuldades dos alunos era entender conceitos geométricos como mediatriz, bissetriz e semelhança de triângulos. Mesmo apresentando definições, discutindo-as, dando exemplos diferenciados e inúmeras atividades, a compreensão não era alcançada pela totalidade dos alunos e, por mais que tentasse métodos diferentes, não conseguia a compreensão de todos, o que representava uma frustração para mim. (OLIVEIRA, 2009, p.15)

Com essa inquietação inicial, Oliveira buscou pesquisas relacionados ao seu tema de interesse para, assim, encontrar apoio para a elaboração de uma engenharia didática que favorecesse a aprendizagem dos alunos acerca da argumentação. Pietropaolo (2005) mostrou a dificuldade

---

40 Chevallard (1991) chama tais conceitos de paramatemáticos.

41 Somente a motivação pessoal não justifica a realização de uma pesquisa, porém é fundamental que o pesquisador se sinta “apaixonado” por sua pesquisa. Tomo emprestado de um egresso do PPGEduMat essa expressão, que considero muito apropriada: apaixonar-se pelo seu trabalho, pois somente assim fazemos algo com o melhor de nós, como deve ser feito, sempre, em Educação. A justificativa das escolhas de uma pesquisa passa, entre outros, por pesquisas que mostram a necessidade de sua realização.

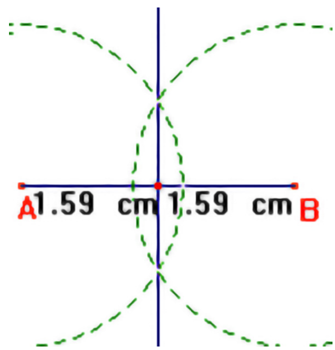
de alunos em realizar demonstrações. Já Ponte at al. (2005) mostram que sob determinadas condições é possível envolver os alunos em atividades que estimulem a argumentação. Jahn, Healy e Coelho (2007) realizaram uma investigação com professores de matemática da educação básica e constataram que a maioria deles não trabalhava, em suas aulas, as argumentações ou algum tipo de prova.

As provas, em Matemática, podem ser classificadas em pragmáticas ou intelectuais. As primeiras são aquelas baseadas na experiência e as segundas são aquelas com objetivo de generalização e são caracterizadas por Balacheff (1988) em quatro tipos: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. No empirismo ingênuo o sujeito se contenta em verificar a validade de uma conjectura para alguns casos particulares, às vezes para um único. A experiência crucial se caracteriza pelo fato de que alguns poucos casos não satisfazem o sujeito e ele busca verificar a validade da conjectura com algum caso "diferente", que ele considera crucial. No exemplo genérico ainda são usados exemplos, porém sem se ater às suas particularidades; há a presença do raciocínio dedutivo. E, finalmente, a experiência mental é caracterizada pela não necessidade de exemplos. Para melhor entender esses conceitos recorro à análise *a priori* de Oliveira (2009) e trago aqui uma atividade proposta por ela, seguida de exemplos de possíveis respostas e suas classificações com relação ao tipo de argumentação feita. Antes, porém, é necessário esclarecer que os alunos tinham à sua disposição compasso, régua, papel, lápis e um computador equipado com o *Cabri-Géomètre*, assim, as interações dos alunos com meio eram "influenciadas" pelo meio elaborado pela pesquisadora.

> A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio desse segmento. Os pontos que pertencem à mediatriz equidistam dos extremos do segmento?

1. Empirismo ingênuo

**Figura 4 – exemplo de empirismo ingênuo**

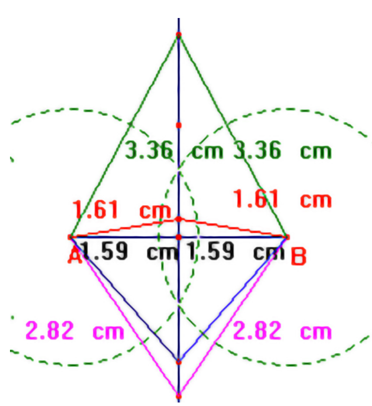



Fonte: Oliveira (2009)

Constrói-se um segmento e sua mediatriz. Em seguida é medida a distância do ponto médio aos pontos extremos do segmento. Essa medida e, talvez, mais duas ou três são suficientes, para o aluno, para mostrar a validade da conjectura.

2. Experiência crucial

**Figura 5 – exemplo de exemplo crucial**

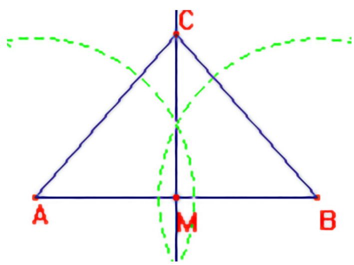



Fonte: Oliveira (2009)

Diferentemente do empirismo ingênuo, são feitas diferentes medições com pontos marcados "ao acaso" na mediatriz e, com o resultado encontrado, crê-se que a conjetura foi validada.

3. Exemplo genérico

**Figura 6 – exemplo de exemplo genérico**




A partir do procedimento de construção, a seguinte justificativa é fornecida: Seja C um ponto qualquer da mediatriz. $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$ são congruentes, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$; $\overline{CM}$ é comum aos triângulos AMC e BMC; $C\hat{M}B$ e $C\hat{M}A$ são ângulos retos. Logo, os triângulos AMC e BMC são congruentes (caso LAL). Assim, $\overline{CB}$ é congruente à $\overline{CA}$.

Fonte: Oliveira (2009)

Nesse caso a demonstração é feita com o apoio do desenho.

4. Experiência mental

Esse tipo de argumentação, diferentemente do caso anterior, é feito sem referência a um desenho ou uma construção (no caso de uma argumentação em Geometria). Uma possível resposta é, então, a seguinte:

Como a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é perpendicular a esse segmento e o intercepta em seu ponto médio (M), então ao tomar um ponto C qualquer sobre a mediatriz, teremos dois triângulos CAM e CBM, que serão congruentes, pelo caso LAL de congruência de triângulos.

Essas resoluções são fruto da análise *a priori* das atividades propostas pela pesquisadora. Percebe-se, uma vez mais, a importância de tal análise para compreender o nível de desenvolvimento em que o aluno está (no que diz respeito à argumentação) e então pensar estratégias de ação para fazê-lo evoluir nesses níveis. Assim, ao mesmo tempo em que a pesquisa visava analisar uma alternativa ao ensino de geometria ela ajudou a melhor compreender as dificuldades dos alunos.

A sequência didática constou de 35 atividades desenvolvidas ao longo de 10 sessões. Inicialmente os alunos tiveram muita dificuldade em compreender a necessidade de justificar os procedimentos de construção, entretanto, após algumas sessões se habituaram e mesmo quando a atividade não demandava justificativa eles perguntavam se não deveriam "provar" o que haviam feito. A análise dos dados permitiu à pesquisadora inferir que atividades de construções geométricas podem constituir um meio para a aprendizagem da Geometria desde que não se trate de "passar receitas" de procedimentos de construção. Além disso, foram observadas algumas evoluções nas argumentações dos alunos, porém, ainda havia muito a caminhar, o que considero natural, uma vez que a aprendizagem é um processo, ao menos segundo os preceitos da construção do conhecimento.

Pesquisa sobre argumentações de alunos com o apoio teórico da Teoria das Situações Didáticas e da Tipologia de Provas foi desenvolvida por Piccelli (2010), e também foi possível constatar a pertinência do uso dessas duas teorias bem como da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa para a investigação realizada.

## A Engenharia Didática e Registros de Representação Semiótica

A Matemática, diferentemente das ciências experimentais, é a única que não permite acesso direto aos seus objetos; só temos acesso aos objetos da Matemática por meio de representações desses objetos. Essa é a premissa da Teoria de Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (2009). Quando desenhamos um triângulo, por mais variado que seja esse desenho trata-se de uma representação do objeto matemático e não do objeto. Assim sendo, surge o que Duval denomina de paradoxo: para apreender um objeto matemático é preciso abstrair qualquer representação dele, mas como fazer isso se só temos acesso a ele por meio de suas representações? Não se tem acesso direto a esse objeto e, ao mesmo tempo, para que seja possível compreender o objeto em estudo é preciso conseguir ir além de suas representações. Duval (2003) defende que para que isso seja possível de acontecer é preciso que o sujeito trabalhe com diversas representações de um mesmo objeto, o que é raramente feito no ensino, qualquer que seja o nível de escolaridade. Em mais de 20 anos de experiência lecionando diferentes disciplinas (de matemática) para a licenciatura e outros cursos de exatas, pude perceber que, não raro, os alunos parecem não compreender que a reta da geometria analítica é a mesma do cálculo diferencial e também a mesma da geometria vetorial. Assim o autor propõe uma abordagem cognitiva para a análise do trabalho em matemática, incluindo a análise das dificuldades de alunos, conforme explica Paula (2011, p.35).

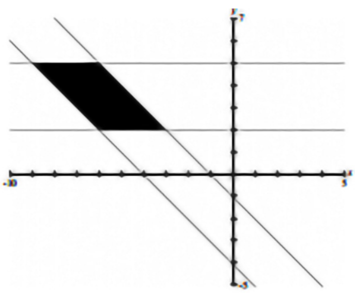
> [...] a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e a necessária para outros campos do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos da matemática e de outros domínios de conhecimentos, mas na grande variedade e na diferença da importância das representações semióticas para a matemática e para outras áreas de conhecimento.

A geometria analítica, no ensino médio, consiste basicamente do estudo de alguns conceitos e propriedades da geometria plana, por meio da álgebra. Os alunos desse nível de escolaridade já conhecem, por exemplo, a circunferência como um elemento da geometria plana. No ensino médio, esse mesmo objeto é estudado por meio do uso de pontos cartesianos do plano. O que ocorre, em geral, é que nesse momento não é estabelecida qualquer relação entre o já foi ensinado e o novo. Tem-se a impressão de se tratar de um objeto totalmente novo, o que não contribui com a aprendizagem do conceito pelos alunos que não estabelecem relações entre um objeto geométrico, como a circunferência, e seu correspondente objeto algébrico, a equação da circunferência. Para estabelecer relações entre esses objetos é fundamental que o aluno reconheça a circunferência em suas diferentes representações: geométrica, algébrica e analítica.

Esse cenário, de ausência de elo, entre a geometria plana e a álgebra para a construção da geometria analítica, está muito presente nos livros didáticos e parece que os professores terminam por não conseguirem, eles mesmos, estabelecerem essa ligação. Pensando então nos futuros professores de matemática do ensino médio, Paula (2011) desenvolveu, com esse público, uma engenharia didática com o objetivo de investigar a mobilização e a articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica. Essa investigação não teve caráter diagnóstico. Ao contrário, buscou-se que os licenciandos construíssem a ideia da geometria analítica como um reinvestimento da geometria plana e da álgebra. Não se tratava de dar um curso de geometria analítica, mas sim de colocar os alunos em situação de investigação na qual fosse preciso fazer uso de conceitos já estudados e estabelecer novas relações entre eles.

A sequência didática proposta pelo autor baseou-se nos pressupostos da teoria das situações didáticas e nos registros de representação semiótica. A primeira orientou quanto ao tipo de situação a ser proposta e ao papel do pesquisador durante o desenvolvimento da sequência, que deve ser o de mediador. As escolhas das atividades foram feitas considerando a importância de se trabalhar com diferentes registros de representação semiótica e de favorecer idas e vindas entre esses registros, como preconiza Duval (2009). Com essas escolhas definidas, o autor escolheu trabalhar com as seguintes variáveis didáticas: ambiente proposto (papel & lápis ou software grapheq), eixo cartesiano (presença ou ausência do eixo no desenho a ser reproduzido por meio de relações algébricas) e composição da figura (desenho constituído por uma única figura geométrica ou por várias). Ilustrarei o uso das variáveis com duas atividades (3ª e 4ª atividades da sequência) propostas aos acadêmicos. Eles recebiam os desenhos da figura 7, 1ª coluna, em papel sem pauta e deveriam reproduzi-los, no computador, com o *software grapheq*.

**Figura 7: exemplos de atividades propostas aos acadêmicos**

| Desenho fornecido aos alunos | Discussão sobre as variáveis didáticas |
|---|---|
|  | Essa figura pode ser vista como a composição de figuras (4 triângulos); os eixos cartesianos não foram explicitados deixando os alunos livres para reproduzirem a figura como desejassem e, dependendo da escolha as relações algébricas envolvidas mudam. |
|  | Nessa atividade a figura é vista basicamente como uma única (paralelogramo); os eixos coordenados foram explicitados obrigando o aluno a respeitar a posição da figura no plano. |

Fonte: Elaborada pela autora.

Temos assim uma pesquisa desenvolvida à luz da teoria das situações didáticas, porém fazendo uso também de outra teoria, registros de representação semiótica, para que os objetivos pudessem ser alcançados e isso por meio de uma engenharia didática. O confronto constante entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* permitiu que o pesquisador mediasse a situação tendo em vista as transformações entre registros e, consequentemente, a articulação, por parte dos alunos, de conceitos geométricos e algébricos (PAULA, 2011; BITTAR ; PAULA, 2013).

## Considerações finais

Foram tratados neste texto apenas três exemplos de uso da engenharia didática com diferentes teorias, entretanto, como disse anteriormente, diversas pesquisas que fazem uso dessa metodologia têm sido desenvolvidas usando outros referenciais teóricos que coadunam com os fundamentos da ED. Esse foi o caso, por exemplo, da pesquisa de doutorado que realizei, quando fiz uso, entre outras, da teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) para investigar dificuldades de alunos franceses acerca do conceito de vetor (BITTAR, 1999). Assim, devemos ter em mente que a escolha das teorias que dão suporte à investigação deve ser coerente com o objetivo de pesquisa e é fundamental que também esteja em acordo com a metodologia de pesquisa escolhida. Esse é o princípio básico e crucial a ser seguido em qualquer pesquisa e não é diferente em uma investigação que trabalhe com a didática da matemática.

A realização de uma ED não acontece sem dificuldades, dentre as quais o tempo disponível para a pesquisa que é, quase sempre curto, especialmente quando se trata de uma pesquisa de mestrado. Alguns temas necessitariam de engenharias de longa duração, como foi o caso da pesquisa desenvolvida por Guimarães (2009) sobre o desenvolvimento do cálculo mental por alunos dos anos iniciais. A autora trabalhou durante um ano com uma mesma turma (2º semestre de 2007 e 1º semestre de 2008), duas vezes por semana, durante 15 minutos em cada sessão. Esse tempo longo de experimentação permitiu, não somente o desenvolvimento de procedimentos de cálculo mental por parte dos alunos, como também uma análise apurada das dificuldades enfrentadas por eles.

Uma questão que não representa dificuldade para a realização de uma engenharia didática, mas que é importante de se levar em consideração é a possibilidade de sua reprodução em sala de aula. Há grande variedade de engenharias já realizadas com resultados importantes no que concerne a aprendizagem do aluno. Entretanto, muitas delas necessitam de um tempo para sua aplicação que não é compatível com o tempo de aula. Além disso, o professor precisa estar preparado para esse uso. Nesse momento percebe-se a necessidade de um trabalho de formação de/com professores para que esses se apropriem e transformem a engenharia adaptando-a à sua realidade. Ou seja, trata-se de transformar o que foi/é usado como metodologia de pesquisa em um produto – mas não uma receita – que possa ser trabalhado, em sala de aula, pelo professor. Pode-se pensar então em dois tipos de engenharia didática: uma voltada para a produção do conhecimento científico e outra para a formação de professores. Esse foi um dos temas de debate na Escola de Verão em Didática da Matemática[42] que ocorreu em 2009, cujo foco de estudo foi a engenharia didática, mais especificamente a evolução desse conceito. Para quem quiser dar continuidade ao estudo sobre esse tema, recomendo fortemente a leitura das atas desse evento (MARGOLINAS et al., 2011).

Por fim, espero que minha opção por um texto com linguagem mais coloquial consiga cumprir com o desejo de aproximar as discussões aqui apresentadas do leitor e que, ao mesmo tempo, estimule a busca por aprofundamentos teóricos necessários para um pesquisador, não somente com as leituras indicadas ao longo do texto como outras que têm sido produzidas no campo da Didática da Matemática.

## Referências


ABE, T. S. **Proposta de uma engenharia didática para o ensino de probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2009.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-307. La Pensée Sauvage, 1990.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en Mathématique chez les élèves de collège**. 1988. Tese (Doctorat) - Université Grenoble: Université, 1988.

BITTAR, M. A noção de vetor no ensino secundário francês: um exemplo de metodologia de pesquisa em didática da matemática. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – ANPED, 22., 1999, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Anped, 1999.


42 Esse evento acontece a cada dois anos, na França.

BITTAR, M. Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. O estudo de um caso: o software Aplusix. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – SIPEM, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Recife: SBEM, 2006.

BITTAR, M.; PAULA, A. F. Articulação da geometria euclidiana plana e da álgebra no estudo de geometria analítica com o Grafeq. **Boletim GEPEM** (Online), v. 62, p. 117-133, 2013.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique ds Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115. Grenoble: La Penseé Sauvage, 1986.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 35-113.

BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique.** Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y**.** L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n.2, p. 221-266, 1999.

CHIARI, A. S. **A utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do Ensino Médio**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2011.

DOUADY, R. Jeux de cadre et dialectique outil-objet, **Recherches en didactique des mathématiques**, Grenoble, La Penseé Sauvage, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registro de Representação Semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11- 33.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-112.

GRENIER, D. Quelques aspects de la symetrie orthogonale pour des élèves de Classes de 4 ème et 3 ème. **Petit X**, Grenoble, IREM de Grenoble, n. 7, p. 57-69, 1985.

GUIMARÃES, S. D. **A prática de cálculo mental para ampliação e construção de novos procedimentos de cálculo por alunos do 4o e 5o ano do ensino fundamental**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2009.

JAHN, A. P.; HEALY, L.; COELHO, S. P. Concepções de Professores de Matemática sobre prova e seu ensino: mudanças e contribuições associadas à participação em um projeto de pesquisa. In: ASSOCIAÇÃO NACIONAL PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – ANPED, 30., 2007, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Anped, 2007.

MARGOLINAS, C.; ABBOUD-BLANCHARD, M.; BUENO-RAVEL, L.; DOUEK, N.; FLUCKIGER, A.; GIBEL, P.; VANDEBROUCK, F.; WOZNIAK, F. **En amont et en aval des ingénieries didactiques**: XV école d'été de didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 2011.

OLIVEIRA, S. G. S. **A integração das Construções Geométricas no ensino de Geometria**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2009.

PAULA, A. F. de. **Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2011.

PICCELLI, P. H. **Processos de Validação de Conjecturas em Geometria Plana**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2010.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da Educação Básica e da formação de professores de Matemática**. 2005. Tese

(Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2005.

PONTE, J. P.;BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROCHA, F. de O. **Aprendizagem da resolução de sistemas por alunos do 8º ano do ensino fundamental.** 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2010.

VALENZUELA, S. F. **O uso de dispositivos didáticos para o estudo de técnicas relativas a sistemas de equações lineares no ensino fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Campo Grande, 2007.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

# O trabalho com álgebra no ensino fundamental: caminhos e descaminhos

Marcelo Câmara dos Santos[43]

Em nosso texto buscamos levantar algumas discussões sobre o processo de ensino e de aprendizagem de álgebra no ensino fundamental, particularmente nos anos finais dessa etapa de escolarização. Para isso, vamos tomar como base algumas pesquisas realizadas pelos participantes do Grupo de Pesquisa Fenômenos Didáticos na Classe de Matemática, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

A álgebra escolar talvez ainda seja um dos campos da matemática em que os alunos encontram mais dificuldades, e funciona como uma espécie de divisor de águas entre o sucesso e o fracasso escolar.

> Implicitamente, em nossas salas de aula, dividimos os alunos em dois grupos. O grupo dos alunos que têm

43 Professor aposentado do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Docente Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – da UFPE, do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE) e do Programa de Pós-graduação Profissional em Gestão e Avaliação da Educação da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

> facilidade em manipular expressões algébricas, em resolver equações e sistemas, etc., tem o caminho aberto para continuação da escolaridade. Já o aluno que não consegue demonstrar habilidade nesse domínio está condenado ao fracasso. (CÂMARA, 2010, p. 01).

As provas do Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE confirmam essa dificuldade. Nas provas de 2009, aplicadas a alunos do nono ano do ensino fundamental, encontramos que, em média, os itens relativos aos descritores de álgebra são acertados por somente um terço dos alunos. Nessas provas, os descritores que tratam de álgebra se dividem em três grandes blocos, converter um registro em linguagem natural para a linguagem simbólica (equação ou sistema), resolver problema envolvendo uma equação (de primeiro ou segundo graus) e determinar a regra de formação de uma sequência (de números).

Em média, os itens que demandam a conversão de registros de representação são acertados por 38% dos alunos, os que envolvem a resolução de um problema por 39% dos alunos e aqueles que solicitam a identificação da regularidade de uma sequência por apenas 25% dos alunos. Pode parecer paradoxal o fato de os alunos obterem maior rendimento nos itens envolvendo a resolução de um problema, já que esse tipo de item demandaria duas ações cognitivas seguidas, a conversão do enunciado em linguagem natural para a equação, seguido de sua resolução. Entretanto, percebemos que, em geral, os alunos buscam resolver esse tipo de problema por meio do uso de estratégias aritméticas, como veremos mais adiante.

Nessa direção, Beltrão (2011) investigou as estratégias utilizadas por alunos do nono ano das redes públicas de Pernambuco na resolução de problemas envolvendo álgebra. Para isso, ele aplicou testes com itens da mesma estrutura daqueles presentes nas provas do SAEPE de 2008. Trata-se de itens espelho aos do SAEPE, mas em que não foram oferecidas alternativas de respostas para os alunos. A ausência de alternativas para as questões fez com que o número de respostas em branco atingisse, em média, 45% contra uma média de 3% nas provas do SAEPE.

Enquanto no SAEPE 2008 os itens que tratam de álgebra foram acertados, em média, por um quarto dos alunos de nono ano, o trabalho de Beltrão (2011) mostrou que, quando não são apresentadas alternativas para as questões, o percentual médio de sucesso nos itens é de apenas 5,1%. O quadro a seguir mostra os resultados nos dois casos, por tipo de habilidade envolvida.

**Quadro 1 – Redimento dos alunos nos itens de álgebra (em %)**

| Habilidade requerida | SAEPE | Beltrão |
|---|---|---|
| Conversão de registros de representação | 31,4 | 7,0 |
| Resolução de problema | 24,5 | 5,3 |
| Descoberta de padrão em uma sequência | 20,6 | 3,0 |

Fonte: Adaptado de Beltrão (2011)

Se os resultados das avaliações em larga escala têm mostrado que os alunos apresentam grandes dificuldades no trabalho com álgebra escolar, os resultados apresentados acima chamam a atenção para o fato que a situação é mais crítica do que mostram essas avaliações.

Nessa mesma direção, André (2007) realizou um estudo com 343 alunos de oitavo ano de escolas estaduais da região metropolitana do Recife. O objetivo foi de investigar como os alunos realizam a conversão da linguagem natural para a linguagem simbólica em problemas envolvendo equações de primeiro grau. Para isso foi aplicado um teste com 14 problemas em que o aluno deveria unicamente apresentar a equação associada ao problema, sem resolvê-lo.

Os resultados mostraram que, em média, as questões foram acertadas por somente 3,4% dos alunos. André (2007) encontrou ainda que 16% dos alunos utilizaram uma expressão aritmética para representar simbolicamente o problema. Parece-nos importante ressaltar que os sujeitos da investigação se encontravam cursando o final do oitavo ano, ou seja, já haviam passado por dois anos de estudo sistemático da álgebra. A mesma influência de procedimentos aritméticos no trabalho com álgebra também foi encontrada por Beltrão (2011), em que os alunos buscavam sistematicamente encontrar um resultado numérico para os itens que demandavam somente a conversão para o registro simbólico.

Fala-se bastante, em educação matemática, em pensamento numérico, pensamento geométrico, pensamento probabilístico, etc. Mas o que seria "pensar algebricamente"? O que diferencia "pensar algebricamente" de "representar algebricamente"?

Ao mesmo tempo, falar em pensamento algébrico implica em considerarmos o que é álgebra, ou, mais especificamente, o que é álgebra na escola de ensino básico. Usiskin (1995), tomando por base o papel das letras, fala em quatro concepções de álgebra, aritmética generalizada, estudo de relações, álgebra como estrutura e álgebra como meio de resolver certos problemas. Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), talvez na tentativa de incorporar tradicionais práticas das escolas brasileiras, adotam a mesma tipologia de Usiskin, mas substituindo a concepção "meio de resolver problemas" pela dimensão "resolução de equações". Em nosso trabalho, até mesmo pelas limitações de espaço, vamos nos situar no aspecto resolução de problemas, o que nos leva, necessariamente, à questão da resolução de equações.

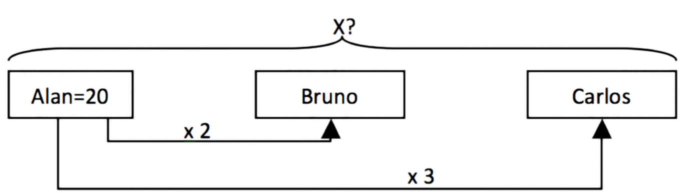
O trabalho com a resolução de problemas tem sido bastante destacado como elemento fundamental no processo de ensino aprendizagem de matemática. Apesar disso, a dimensão operatória ainda prevalece em todos os níveis de escolaridade. Nas séries iniciais, o trabalho com os algoritmos das operações toma um espaço considerável nesse processo. Assim, busca-se trabalhar de maneira exaustiva os algoritmos para, após, aplicá-los em situações de resolução de problemas.

Quando, na segunda fase do ensino fundamental, inicia-se o trabalho com álgebra, essa escolha se repete. A ênfase recai na exploração das expressões algébricas e na resolução de equações, como ferramentas de resolução de problemas. Isso implica em uma dupla dificuldade. De uma parte, os procedimentos aritméticos vão influenciar bastante o aluno no trabalho com problemas algébricos. De outra parte, a ênfase na manipulação simbólica termina por criar, no aluno, a compreensão que as técnicas de resolução de equações, por exemplo, são mais importantes que a resolução do problema, ele mesmo.

Mas o que seria um “problema algébrico”? O que nos leva a diferenciá-lo de um “problema aritmético”? Para Bednarz e Janvier (1996), em um problema aritmético o aluno pode partir de valores conhecidos para determinar valores desconhecidos, como mostra o exemplo a seguir.

> *Alan tem 20 figurinhas, Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?*

Esse problema poderia ser representado pela estrutura abaixo, em que, a partir de duas operações de multiplicação e uma de adição, o aluno chega à resposta do problema, na medida em que o valor conhecido refere-se a um dos elementos da situação, no caso, ao número de figurinhas de Alan.

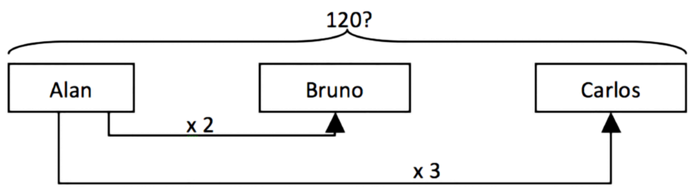



A representação simbólica seria $x = 20 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3$.

Já em um problema do tipo algébrico, parte-se não de um valor conhecido, mas de relações para se chegar ao valor desconhecido, em um processo inverso ao problema do tipo aritmético, como mostra o exemplo a seguir.

*Alan, Bruno e Carlos têm, juntos, 120 figurinhas. Bruno tem o dobro de figurinhas de Alan e Carlos tem o triplo de figurinhas de Alan. Quantas figurinhas têm cada um?*

Nesse caso, o aluno deve partir não de um valor conhecido, mas será preciso estabelecer relações entre os elementos do problema, que teria a seguinte estrutura.




Os valores desconhecidos (incógnitas) não mais poderiam (ou deveriam) ser obtidos por uma sequência de operações aritméticas, sendo necessário estabelecer uma equação que expresse as relações, como, por exemplo, $A + A \cdot 2 + A \cdot 3 = 120$.

Quando falamos que o aluno "deveria" estabelecer uma equação para resolver o problema acima, estamos considerando que ele, em seu processo de escolarização, foi levado a efetuar a tão falada ruptura epistemológica da passagem da aritmética para a álgebra. Entretanto, em um trabalho recente (CÂMARA; OLIVEIRA, 2009), verificamos que mesmo os alunos em seu oitavo ano de escolaridade recorrem a processos aritméticos para resolver esse tipo de problema, também chamado de problema de partilha (MARCHAND; BEDNARZ, 1999). Nesse estudo, que apresentaremos mais adiante, identificamos cerca de 30% dos alunos recorrendo à divisão por três para obter os valores desconhecidos.

Por outro lado, encontramos cerca de 10% de alunos no sexto ano de escolaridade, e que, portanto, ainda não foram introduzidos à álgebra escolar, se servindo de um raciocínio algébrico na resolução desse tipo problema, como mostra a reprodução abaixo, extraída da produção de um aluno.

$$\underbrace{\text{Alan} \qquad \text{Bruno} = \text{Alan x 2} \qquad \text{Carlos} = \text{Alan x 3}}_{120 : 6 = 20} \Rightarrow \begin{cases} \text{Alan} = 20 \\ \text{Bruno} = 20 \text{ x } 2 = 40 \\ \text{Carlos} = 20 \text{ x } 3 = 60 \end{cases}$$

Por esse protocolo podemos observar que, mesmo se esse aluno não representa formalmente a equação, ele mostra ser capaz de reconhecer as relações envolvidas no problema e elaborar uma representação mental da equação. Nesse caso, dizemos que esse aluno está "pensando algebricamente", ao contrário do aluno que simplesmente divide o total de figurinhas por três, que estaria trabalhando em um pensamento aritmético.

Isso nos leva a outras questões sobre o trabalho com a álgebra escolar. Uma delas diz respeito aos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003) privilegiados em nossas salas de aula de matemática. De fato, no trabalho algébrico, o ensino tem sua ênfase totalmente baseada na exploração da manipulação simbólica padronizada, criando, no aluno, a concepção que álgebra é "brincar com letras", seguindo regras bem definidas e imutáveis. Assim, para cada parte da álgebra (produtos notáveis, fatoração, equações de primeiro e segundo graus, etc.) temos um conjunto de manipulações estabelecidas pela escola.

Além disso, como dissemos anteriormente, o trabalho com a resolução de problemas aparece posteriormente à exploração da manipulação de registros simbólicos. Com isso, surgem as enormes dificuldades dos alunos em realizar a conversão de um registro em linguagem natural (o enunciado de um problema) para o registro em linguagem simbólica (a equação correspondente).

Entretanto, quando observamos o desenvolvimento do saber matemático ao longo da história, podemos verificar que esse saber foi construído a partir de problemas do cotidiano da sociedade na busca pelo desenvolvimento do ser humano. Particularmente, os processos algébricos de resolução de problemas apareciam ligados ao contexto cotidiano, tais como problemas de partilha de heranças, de estruturas de telhados, etc. Nesse momento, a simbologia estava totalmente ausente, sendo as relações representadas unicamente em linguagem natural (fase da álgebra retórica).

Isso nos leva a refletir sobre a resolução de problemas em álgebra escolar e, mais particularmente, no que chamamos de "problemas de partilha".

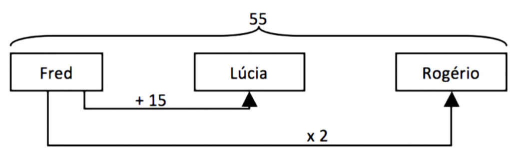
Do ponto de vista do ensino, de acordo com Bednarz, Kieran e Lee (1996), a abordagem da álgebra na escola pode ser feita por meio de muitas ideias, em particular a resolução de problemas, abordagem que historicamente tem assumido um importante papel no desenvolvimento e no ensino da álgebra. Bednarz, Kieran e Lee (1996) verificaram que, muitas vezes, o aluno não consegue identificar a expressão algébrica associada a um problema em linguagem natural, seja ela uma equação ou um sistema de equações de 1º grau, por exemplo. Em situação de resolução de problemas, o esforço prévio de "armar" a equação é cognitivamente mais trabalhoso que o trabalho posterior de escolha e operação de um algoritmo algébrico, de acordo com Kieran (1992). Tal afirmação nos leva a acreditar que, talvez, a maior dificuldade dos alunos ao lidar com problemas de natureza algébrica resida na tradução dos dados de um determinado enunciado para outro tipo de registro de representação, o que Duval (2003) chama de conversão, ação fundamental para a resolução de problemas de estrutura algébrica.

Problemas dessa natureza foram estudados por Marchand e Bednarz (1999), que identificam três tipos de problemas de estrutura algébrica, "problema de transformação", "problema de taxa" e "problema de partilha". Em um problema de partilha aparecem relações entre os dados (incógnitas) e uma quantidade total (conhecida), que é expressa em função de suas diferentes partes (desconhecidas). Entre essas partes são estabelecidas relações de comparação, levando a uma composição dessas relações.

No caso de problemas de partilha, Marchand e Bednarz (1999) identificam algumas variáveis ligadas às relações envolvidas que podem modificar as estratégias (e o desempenho) dos alunos, o "número", a "natureza" e o "encadeamento" das relações. O número de relações está associado ao número de elementos desconhecidos. Por exemplo, no problema das figurinhas apresentado anteriormente, temos três incógnitas (Alan Bruno e Carlos) e duas relações (Bruno-Alan e Carlos-Alan). A natureza das relações está ligada às operações entre elas; por exemplo, a sentença *recebe 3 a mais* se caracteriza como de natureza aditiva, enquanto a sentença *recebe o dobro* se refere a uma estrutura multiplicativa.

Em relação ao encadeamento das relações, as autoras identificam três categorias de problemas, tipo fonte, tipo composição e tipo poço. No encadeamento tipo fonte, as relações envolvidas são geradas a partir de uma mesma grandeza. Abaixo exemplificamos com um problema a representação de sua estrutura.

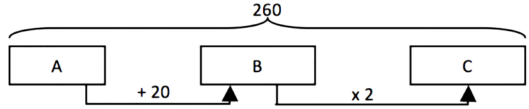
*Frederico, Lúcia e Rogério têm, juntos, 55 revistas em quadrinhos. Lúcia tem 15 revistas a mais que Frederico e Rogério tem o dobro de revistas de Frederico. Quantas revistas tem cada um?*




Esse problema apresenta duas relações de comparação (três incógnitas), sendo que a primeira é aditiva e a segunda é multiplicativa, e que seu encadeamento é do tipo fonte, na medida em que Frederico é a "fonte" das relações com Lúcia e com Rogério.

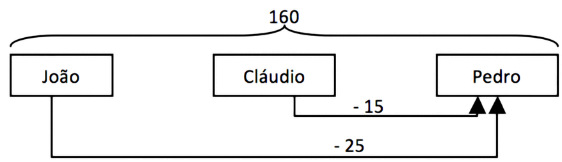
No encadeamento tipo composição, as relações são estabelecidas em sequência, como ilustra o problema abaixo. Nele, a primeira relação é aditiva e a segunda é multiplicativa.

*Três times de basquete participaram da final do campeonato fazendo, juntos, 260 pontos. O time B fez 20 pontos a mais que o time A e o time C fez o dobro de pontos do time B. Quantos pontos fez cada time?*



Finalmente, no encadeamento tipo poço todas as relações convergem para um dos dados do problema. No problema abaixo encontramos esse tipo de encadeamento, com as duas relações de natureza aditiva.

*João, Pedro e Cláudio têm, juntos, 160 carrinhos. Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio. Quantos carrinhos tem cada um deles?*




Em termos de estratégias possíveis de serem mobilizadas pelos sujeitos, podemos classificá-las em dois tipos, estratégias aritméticas e estratégias algébricas. Em uma estratégia aritmética, o aluno parte de valores conhecidos *tentando criar pontes* (MARCHAND; BEDNARZ, 2000, p. 18) para chegar aos valores desconhecidos, caracterizando-se por um raciocínio sintético. Já em estratégias algébricas, o aluno parte dos elementos desconhecidos, em um raciocínio analítico.

Câmara e Oliveira (2010) realizaram um estudo com alunos de sexto ano do ensino fundamental de escolas do Recife para identificar as estratégias e os registros utilizados na resolução de problemas de partilha. Os alunos foram solicitados a resolver sete problemas, sendo seis deles com duas relações. Esses problemas diferiam pelo tipo de encadeamento (fonte, composição e poço) e pela natureza das relações (multiplicativas e aditivas).

A análise dos dados foi feita a partir de três eixos, rendimento (acerto, erro e não resposta), representação das relações envolvidas no problema (pictórica, simbólica, linguagem natural e mista), e estratégia inicial privilegiada. Neste caso, investigamos também as estratégias secundárias mobilizadas pelos sujeitos. Em cada um desses eixos de análise, foi considerada a natureza das relações e seu encadeamento.

Em relação ao rendimento, os resultados se mostraram de acordo com aqueles de Marchand e Bednarz (2000), em que os problemas de tipo poço se mostram mais difíceis para o aluno. Nesse tipo de problema, apenas 23% dos sujeitos tiveram sucesso, contra 33% para problemas do tipo composição e 44% para problemas do tipo fonte. No caso do encadeamento tipo poço, a identificação da estrutura demanda que o sujeito considere as operações inversas daquelas presentes no enunciado. Exemplificando, dizer que Pedro tem 25 carrinhos a menos que João e 15 carrinhos a menos que Cláudio implica que o aluno estabeleça as relações J = P+25 e C = P+15.

Estratégias que fazem recurso a raciocínios aritméticos, em que se busca partir de valores para as incógnitas, são mobilizadas por 80% dos alunos de 6° ano. Foi observado, também, que somente 9% dos alunos se servem de estratégias mobilizando o pensamento algébrico, em que o ponto de partida são as relações estabelecidas entre as incógnitas. Isso parece reforçar o peso que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem na formação do pensamento matemático dos alunos.

Duas estratégias aritméticas são mais mobilizadas pelos alunos. Na primeira delas, o aluno busca dividir o total em três partes iguais (D3), como se a partilha devesse ser realizada equitativamente. Essa estratégia é particularmente escolhida quando a primeira relação que aparece no enunciado é multiplicativa, mostrando, mais uma vez, a necessidade do aluno em realizar uma operação para resolver um problema, e que essa operação esteja sempre associada ao enunciado do problema (ganhar/somar, etc.).

Na segunda, o aluno atribui um valor a uma das incógnitas do problema (AV) para, em seguida, determinar os outros valores, aplicando as relações entre as incógnitas. Essa estratégia é privilegiada pelos alunos em problemas que apresentam a primeira relação do enunciado de natureza aditiva.

É importante ressaltar também que, mesmo trabalhando com sujeitos que ainda não foram apresentados à álgebra escolar, 10% deles buscaram mobilizar um raciocínio algébrico para encontrar a solução do problema. Evidentemente a representação simbólica ainda é pouco mobilizada por eles, que priorizam a representação mental da equação associada ao problema.

Resultados semelhantes foram encontrados em outro estudo, mas utilizando os mesmos instrumentos e 140 alunos, de mesma etapa de escolarização, de 5 escolas da região de Québec, no Canadá (OLIVEIRA; CÂMARA, 2011).

Apesar de o rendimento dos alunos canadenses ter sido maior que aquele dos alunos brasileiros, a dificuldade em função do tipo de encadeamento foi a mesma, como mostra o quadro a seguir.

**Quadro 2 – Rendimento por encadeamento de relações (em %)**

| Tipo de encadeamento | Brasil | Canadá |
|---|---|---|
| Fonte | 44 | 63 |
| Composição | 33 | 45 |
| Poço | 23 | 39 |

Fonte: Oliveira e Câmara (2011).

Também aqui foi possível perceber que os problemas do tipo fonte se mostram mais fáceis para os alunos, e os do tipo poço mais difíceis. Já em relação às três estratégias mais utilizadas pelos alunos, foram encontrados resultados diferentes, como mostra o quadro a seguir.

**Quadro 3 – Estratégias mobilizadas pelos alunos (em %)**

| Estratégia | Brasil | Canadá |
|---|---|---|
| Dividir o total por três (D3) | 34 | 25 |
| Atribuir valores às incógnitas (AV) | 40 | 47 |
| Algébrica (AL) | 9 | 4 |

Fonte: Oliveira e Câmara (2011).

Podemos observar que as estratégias aritméticas D3 e AV são preferidas pelos alunos de sexto ano brasileiros e canadenses. Por outro lado, os alunos brasileiros conseguem mobilizar a estratégia algébrica com mais frequência que os estudantes canadenses de mesma etapa de escolarização.

Analisando com maior detalhe o percentual do tipo de estratégia no interior de cada encadeamento de relações, podemos observar que a escolha da estratégia de base AV cresce em função da complexidade das relações, atingindo o percentual de 44% (alunos brasileiros) e 59% (alunos canadenses) em problemas do tipo poço. Por outro lado, a escolha da estratégia D3 diminui em função da complexidade das relações, apresentando pouca variação em relação ao encadeamento das relações. Da mesma forma, decresce igualmente o recurso à estratégia algébrica (AL), sendo mais adotada em problemas do tipo fonte. Em outros termos, os resultados parecem indicar que existe uma relação entre as estratégias AV, D3 e AL que precisa ser melhor investigada

Avançando nesse trabalho, Santos Junior (2013) aplicou o mesmo instrumento a 251 alunos dos três anos finais do ensino fundamental (7°, 8° e 9°) de escolas da região metropolitana do Recife. O objetivo foi de investigar em que medida os alunos obtém maior sucesso na resolução de problemas de partilha, e se as estratégias de base identificadas nos estudos anteriores se modificam com o avanço da escolaridade. No quadro a seguir mostramos o rendimento dos alunos, agrupando os resultados dos estudos.

**Quadro 4 – Rendimento por encadeamento de relações de alunos do ensino fundamental (em %)**

| Encadeamento | 6°B | 6°C | 7° | 8° | 9° |
|---|---|---|---|---|---|
| Fonte | 44 | 63 | 54 | 49 | 68 |
| Composição | 33 | 45 | 29 | 37 | 44 |
| Poço | 23 | 39 | 15 | 17 | 29 |

Fonte: Oliveira e Câmara (2011) e Santos Junior (2013).

De imediato podemos observar que os alunos de sexto ano do Canadá, que ainda não tiveram contato formal com a álgebra escolar, apresentam rendimento maior que os alunos brasileiros de nono ano, que passaram por três anos de aprendizagem sistemática de álgebra. Que variáveis poderiam explicar esse efeito? Uma questão que podemos colocar se refere ao currículo de matemática nos dois países. No Canadá, há mais de uma década as escolas trabalham com um currículo que se baseia na ideia de resolução de problemas, ou seja, os alunos são submetidos sistematicamente ao trabalho com a resolução de problemas. Já no Brasil a inexistência de um currículo mínimo nacional leva os professores a utilizar o livro didático adotado como guia nas escolhas curriculares. Ao mesmo tempo, a maioria dos livros didáticos brasileiros trabalha com o modelo "definição □ exemplos □ exercícios de fixação" (CÂMARA, 2002). Em outros termos, os alunos brasileiros são, em sua grande maioria, submetidos a uma aprendizagem baseada na exploração de procedimentos, em detrimento da resolução de verdadeiros problemas.

Como dissemos anteriormente, a ênfase recai nas técnicas operatórias para resolver equações. Após a aprendizagem de equações aparecem os problemas, que na verdade se caracterizam como exercícios de aplicação de equações. Abandona-se, assim, o próprio processo histórico que levou ao desenvolvimento de equações, que foram os problemas da vida cotidiana das sociedades.

Podemos observar que o rendimento de alunos brasileiros de sexto ano na resolução de problemas tipo poço é bem próximo do rendimento dos alunos de nono ano. Fazemos a hipótese que os alunos de sexto ano, que ainda não trabalharam álgebra na escola, buscam estratégias próprias para resolver o problema, enquanto aqueles que já passaram pelo processo de aprendizagem de álgebra buscam mobilizar o que aprenderam na escola para resolver o problema. Entretanto, se a aprendizagem não foi efetiva, o aluno fica sem opções, nem consegue aplicar o que aprendeu na escola, nem se sente livre para utilizar estratégias próprias.

Essa hipótese se fortifica quando observamos a utilização de estratégias algébricas. No estudo de Câmara e Oliveira (2010), encontramos 9% dos alunos de sexto ano utilizando estratégias algébricas, enquanto Santos Junior (2013) mostrou que 24% dos alunos de nono ano utiliza esse tipo de estratégia. Isso nos leva a considerar que alunos de nono ano, apesar de utilizarem estratégia algébrica mais frequentemente, não conseguem ter sucesso em sua utilização.

Mas em que medida os problemas algébricos são trabalhados na escola? Para responder a essa questão vamos considerar dois elementos que estão na base do fenômeno da Transposição Didática, no sentido de Yves Chevallard (1991), o livro didático e os documentos curriculares.

Em relação ao livro didático podemos considerar o trabalho de Almeida (2011), que investigou os problemas propostos para o trabalho com equações polinomiais de primeiro grau nas dez coleções de matemática para a segunda etapa do ensino fundamental aprovadas pelo PNLD 2011. Como primeiro resultado ele encontrou que os livros didáticos exploram poucos problemas no trabalho com equações (média de 30 problemas por livro), buscando enfatizar o uso de procedimentos para resolver as equações.

Esse fato fica mais reforçado pela presença dos chamados falsos problemas (MARCHAND; BEDNARZ, 2000), que contribuem, em média, com 30% dos problemas apresentados ao aluno. Neles, o objetivo único é levar o aluno a realizar a conversão (na maioria das vezes congruente, como veremos mais a frente) do registro em linguagem natural para a equação, ou seja, o foco é na resolução da equação, e não na compreensão das relações. Por exemplo, no falso problema "a diferença entre certo número e 10 é igual à terça parte desse número. Que número é esse?", temos o que Duval (2003) chama de "codificação", na medida em que o registro de partida, em linguagem natural, é bem próximo do registro de chegada, a equação.

Os problemas aritméticos representam, em média, mais de 10% dos problemas dos livros. Nesse tipo de problema, o recurso a equações não se justifica, sendo mais vantajoso para o aluno usar somente as operações aritméticas básicas. Por exemplo, o problema "Em uma papelaria, Célio comprou três lapiseiras iguais e pagou com uma cédula de R$20,00. Sabendo que ele recebeu R$6,20 de troco, qual o preço de cada lapiseira?", pode ser resolvido facilmente por duas operações aritméticas simples, uma subtração (20,00 – 6,20 = 13,80) e uma divisão (13,80 : 3 = 4,60) (ALMEIDA, 2011, p. 91).

Já os problemas de partilha representaram, em média, 44% dos problemas presentes nos livros didáticos. Entretanto, Almeida (2011) mostrou que os problemas de partilha com uma única relação representam 70% dos problemas dessa natureza. Em um problema de partilha desse tipo, os procedimentos aritméticos se mostram mais econômicos para o aluno, desencorajando-o a mobilizar o pensamento algébrico. Por exemplo, tomemos o problema “Em um dia de trabalho, um feirante vendeu 45 kg de laranja. No período da tarde ele vendeu 7 kg a mais que no período da manhã. Quantos quilogramas de laranja ele vendeu no período da manhã?” (ALMEIDA, 2011). Esse problema pode ser facilmente resolvido subtraindo-se 7 de 45 e dividindo-se o resultado obtido por 2. O autor encontrou também que “em 60% dos livros analisados foram privilegiados os problemas de partilha com uma relação de natureza aditiva” (ALMEIDA, 2011, p. 99), como é o caso do problema do feirante.

Dentre os 316 problemas das dez coleções analisadas, somente 15% deles eram problemas de partilha com duas relações (três incógnitas), sendo metade do tipo “fonte” e metade do tipo “composição”. Somente um único problema com encadeamento tipo poço foi encontrado. Isso talvez possa justificar o baixo rendimento dos alunos nesse tipo de problema.

Em relação aos documentos curriculares, vamos considerar dois deles, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – PCPE (PERNAMBUCO, 2012). No caso dos PCN, o trabalho com álgebra se encontra dentro do bloco de conteúdos dos números e suas operações. No documento relativo aos anos iniciais, o leitor é alertado a não trabalhar com esse conteúdo nos anos iniciais, afirmando que eles serão explorados na etapa posterior de escolarização. O mesmo ocorre com a parte destinada ao terceiro ciclo, ou seja, sexto e sétimo anos. O documento alerta que “devido à complexidade que caracteriza os conceitos e procedimentos algébricos não é desejável que no terceiro ciclo se desenvolva um trabalho visando ao aprofundamento das operações com as expressões algébricas e as equações” (BRASIL, 1998, p. 68). Nesse momento, o trabalho algébrico se baseia na noção de variável e no aspecto de generalização e no cálculo do valor numérico de expressões algébricas.

O trabalho com a resolução de problemas algébricos é pouco presente nesse documento, deixando a impressão que o foco deve estar, particularmente, nas equações. Isso se reflete nas diferentes concepções de álgebra presentes no documento (BRASIL, 1998, p.116). Enquanto Usiskin (1995) trata uma das concepções de álgebra como um “meio de resolver problemas", os Parâmetros Curriculares Nacionais consideram a dimensão "resolução de equações". Apesar de o documento frequentemente condenar a ênfase em regras e procedimentos, no caso da álgebra afirma-se que o trabalho com letras "poderá completar a noção de álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico" (Ibdem, p.118).

Ao contrário dos PCN, os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PCPE) tratam álgebra e funções como um bloco de conteúdos distinto. Para os anos iniciais esse documento preconiza, além do trabalho com regularidades em sequências, determinação de um elemento desconhecido, proporcionalidade e generalizações, atividades que envolvam a resolução de problemas nos dois anos finais dessa etapa, como mostram as expectativas de aprendizagem a seguir.

- (4° ano) "Resolver, utilizando representação própria, problemas de partilha de quantidades envolvendo uma relação (por exemplo, João e Maria têm, juntos, 30 figurinhas, sendo que João tem 10 a mais que Maria. Quantas figurinhas tem cada um?)" (PERNAMBUCO, 2012, p.66).
- (5° ano) "Resolver, utilizando representação própria, problemas de partilha de quantidades envolvendo duas relações multiplicativas (por exemplo, João e Maria e José têm, juntos, 30 figurinhas, sendo que Maria tem o dobro de figurinhas de João, e José tem o triplo de figurinhas de João. Quantas figurinhas tem cada um?)" (PERNAMBUCO, 2012, p.67).

O trabalho com os problemas de partilha é retomado nas orientações para o sexto ano, e, para o sétimo ano, ele é ampliado para problemas envolvendo transformações, como mostra o extrato seguinte.

- (6° ano) "Resolver problemas de partilha de quantidades envolvendo com duas ou mais relações, fazendo uso das representações simbólicas" (PERNAMBUCO, 2012, p.104).

- (7° ano) "Resolver problemas de partilha e de transformação (por exemplo, dentro de dois anos a minha idade será o dobro da idade que você tinha há dois anos atrás...), fazendo uso das representações simbólicas" (PERNAMBUCO, 2012, p.104).

Pode-se observar que, nesta etapa de escolarização, os PCPE recomendam que o aluno utilize representações simbólicas no trabalho com problemas algébricos, ao contrário dos anos iniciais, em que ele deveria utilizar representações próprias; em outras palavras, inicia-se a representação simbólica de equações de primeiro grau. Entretanto, em relação às equações, o documento cita que

> As equações de primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido. Assim, cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. (PERNAMBUCO, 2012, p.102).

Percebe-se, assim, a importância de partir da resolução de problemas para, posteriormente, representa-los por meio de equações, enfatizando que uma equação (representação simbólica) é apenas mais um tipo de registro de representação de um problema algébrico.

Câmara e Oliveira (2010) identificaram quatro tipos de registros de representação utilizados por alunos de sexto ano na resolução de problemas de partilha. O quadro a seguir exemplifica esses tipos de registro para o problema: *Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o dobro do número de alunos que joga vôlei. Nessa escola, quantos alunos praticam cada esporte?*.

**Quadro 5 - tipos de registros de representação das relações.**

| | |
|---|---|
| Pictórica | □ □□□ □□ ⇨ 180 |
| Simbólica | $\left.\begin{array}{l} F=V.3 \\ \\ B=V.2 \end{array}\right\} \quad V + V.3 + V.2 = 180$ |
| Linguagem natural | “Se eu fosse dividir 180 em partes iguais, para ter o que se pede, ficaria 3 partes para futebol, uma para vôlei e duas para basquete e junto seria 6 partes. Então eu dividi 180 por 6 e distribuí 30 vezes 3, 30 vezes 1 e 30 vezes 2”. |
| Mista (LN+S) | $\underbrace{\text{triplo de V}}_{F} + V + \underbrace{\text{dobro de V}}_{B}$ □ 180 |

Fonte: Câmara e Oliveira (2010).

Em termos de registros de representação semiótica, pode-se esperar que o aluno, a partir de um problema oferecido em linguagem natural, mobilize um registro simbólico (usando letras ou não), figural (por meio de esquemas ou desenhos), gráfico (tabelas), etc.

Entretanto, a escola pouco tem contribuído para que o aluno busque elaborar algum tipo de registro de representação semiótica no processo de resolução de problemas. Câmara e Oliveira (2009) observaram que, na resolução de problemas algébricos, apenas 14% dos alunos utiliza algum tipo de registro para representar as relações do problema e, destes, 62% adotam a representação simbólica. Em outras palavras, é como se os alunos demonstrassem certo receio em utilizar outras representações que não aquelas formais da matemática escolar.

A questão dos registros de representações em matemática é fundamental para a aprendizagem dos alunos. Se em geografia podemos apreender o conceito de vegetação estando em determinado tipo de floresta, ou em ciências podemos acompanhar o desenvolvimento de um vegetal, em matemática não temos acesso direto aos seus conceitos, não podemos, por exemplo, “medir um binômio”. Os conceitos matemáticos somente são acessíveis por intermédio de suas representações; por exemplo, podemos representar o número dois pelo numeral "2", por duas bonecas, pela palavra "dois" ou "deux", mas trata-se de uma construção mental, abstrata.

No trabalho com a álgebra escolar, essa questão se torna ainda mais presente, particularmente na medida em que, ainda, se concebe a álgebra escolar como a "matemática das letras". Não podemos nos esquecer que, antes de ter acesso ao registro que representa um objeto matemático é preciso que ele seja construído em nossa mente. Inverter esse processo leva ao fracasso da aprendizagem (PERNAMBUCO, 2013).

Torna-se, portanto, necessário e urgente repensarmos o trabalho que desenvolvemos atualmente com álgebra em nossas salas de aula, buscando fazer com que o aluno consiga elaborar significado a esse domínio e desenvolver o pensamento algébrico.

## Referências

ALMEIDA, J. R. **Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2011.

ANDRÉ, R. C. M. **Investigando a transição da linguagem natural para a linguagem algébrica:** o equacionamento de enunciados de problemas à luz dos registros de representação semiótica. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2011.

BERNARDZ, N., KIERAN, C. et LEE, L. **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching. Amsterdã: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 1996.

BEDNARZ, N.; JANVIER, B. Emergence and developement of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to algebra:**

perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BELTRÃO, R. C. H. **Exame do SAEPE:** um estudo das estratégias mobilizadas pelos alunos para resolver problemas algébricos. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Recife, 2011.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais –** Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1998.

CÂMARA, M. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 9, n,12, 2002.

CÂMARA, M. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: o que estamos fazendo em nossas salas de aulas? ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 10., Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

CÂMARA, M.; OLIVEIRA, I. Les stratégies utilisées par les élèves de secondaire I pour résoudre des problèmes de structure algébrique au Brésil, une étude préliminaire. In: SÉMINAIRE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES. 2009, Montréal. **Anais...** Montréal: Université du Québec à Montréal, 2009.

CÂMARA, M.; OLIVEIRA, I. Estratégias utilizadas por alunos de 6º ano na resolução de problemas de estrutura algébrica. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – ENEM, 10., Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique:** du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

KIERAN, C. The learning and teaching of school algebra. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 390-419

MARCHAND, P. E. ; BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **Bulletin AMQ**, Québec, v. 39, n. 4, 1999.

MARCHAND, P.; BEDNARZ, N. Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. **Bulletin AMQ**, v. 40, n. 4, Québec, 2000.

OLIVEIRA, I. ; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CIAEM, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011.

PERNAMBUCO. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SEDUC, 2012.

PERNAMBUCO. **Parâmetros na Sala de Aula de Matemática – Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SEDUC, 2013.

SANTOS JÚNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2013.

USISKIN, Z. O que é álgebra da escola média? In: COXFORD, A.; SHULTE, A. P. (Org.). **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

# Modelo, Modelização e Decisões Didáticas

Iranete Maria da Silva Lima

## Introdução

As pesquisas em Educação Matemática utilizam, cada vez mais, os modelos teóricos construídos para melhor compreender os processos de ensino e de aprendizagem. Nosso objetivo neste capítulo é refletir sobre as noções de *modelo* e *modelização*, particularizando o estudo de decisões didáticas tomadas por professores. O viés de pesquisa se expressa neste ensaio teórico por meio da apresentação de três modelos de decisões didáticas e da modelização proposta por Tahri (1993), ilustrada por duas sequências didáticas da sua pesquisa.

Para abordar as ideias de *modelo* e *modelização* recorremos ao texto da nossa tese de doutoramento (LIMA, 2006, 2009)[44], que investigou a forma como professores tomam suas decisões didáticas com a intenção de levar o aluno a construir conhecimentos sobre a simetria axial (ortogonal).

---

44 A pesquisa foi financiada pelo CNPq. A tese está disponível no seguinte endereço: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00208015/fr/

## Noção de Modelo e de Modelização

A ideia de modelo no ensino e na pesquisa científica se fortaleceu a partir dos anos 1960, visando responder a necessidade de compreender a distinção entre um objeto de estudo no mundo real e a sua idealização. Encontramos na literatura várias definições de modelo. Walliser (1977), pesquisador nas áreas da Economia e Cognição, afirma que a noção de modelo engloba toda representação de um sistema real, seja ele mental ou físico, expresso por meio de uma linguagem oral, gráfica ou matemática. Henry (1997), pesquisador em didática da matemática, define modelo como sendo:

> [...] uma interpretação abstrata, simplificada e idealizada de um objeto do mundo real, ou de um sistema de relações, ou de um processo evolutivo, derivado de uma descrição da realidade. Este modelo pode ser representado por diferentes sistemas de signos: imagens, esquemas, linguagens ou simbolismo, que se inscrevem em diferentes registros de representações, mais ou menos isomorfos. (HENRY, 1997, p.19, tradução nossa).

Já Chevallard (1989) destaca o caráter artificial e redutor de um modelo para expressar a realidade:

> Constrói-se um modelo da realidade que leva em conta apenas os aspectos que são pertinentes à questão que se coloca sobre esta realidade. Este modelo, como sempre na atividade científica, não é a imagem mais completa possível do real. (CHEVALLARD, 1989, p. 60, tradução nossa).

A partir destas definições podemos inferir que um modelo não é construído para resolver um problema que se impõe a uma sociedade ou uma comunidade. Antes, porém, por meio de uma visão esquemática, ele tem a função de fornecer elementos que contribuam, de maneira concreta, para que uma comunidade – científica ou não – compreenda um fenômeno de investigação ou da realidade. Um modelo pode servir, por exemplo, como um meio de comunicação entre pessoas ou grupos sociais que se interessam por um determinado objeto de estudo. Ele pode, também, fornecer elementos explicativos, de maneira simplificada, do funcionamento de um sistema de alta complexidade, tornando-o mais compreensível.

Quanto mais um problema é complexo, mais se torna pertinente a utilização de um modelo, pois ele pode dar mais visibilidade ao fenômeno estudado, em termos de detalhes e de abstração, se comparado à situação real. Assim, a utilidade de construir ou de utilizar um *modelo* para *modelizar* um sistema complexo consiste na busca da inteligibilidade e da compreensão de tal sistema (LE MOIGNE, 1990). O cerne da modelização é, portanto, contribuir, de uma parte, para a estruturação dos objetos que caracterizam o fenômeno pesquisado e, de outra, para representar um conjunto de interpretações atribuídas ao fenômeno por um observador (pesquisador).

Os pesquisadores de diversos campos de investigação científica vêm construindo modelos cada vez mais aprimorados para compreender a complexidade das realidades. Esta afirmativa se funda, sobretudo, no fato de que o conhecimento é, por essência, um modelo em si mesmo. Um conhecimento resulta da apreensão ou da percepção da realidade por um sujeito pensante e é uma maneira de representar ou de explicitar algo que pertence apenas a este sujeito. Sobre isto Caplat (2002, p. viii) argumenta:

> O conhecimento possui um papel de mediação entre uma realidade percebida e as interpretações racionais. Deste ponto de vista, a noção de conhecimento está estreitamente ligada à de conceitualização, de experimentação e de subjetividade: o conhecimento de alguém sobre alguma coisa é o modelo mental que

> o indivíduo constrói sobre esta coisa e, como todo modelo, é o resultado de uma construção subjetiva. (Ibid. Tradução nossa).

Partindo desta premissa, o ato de modelizar um conhecimento tem um caráter recursivo. Ele dá ao observador (pesquisador) um meio de interpretar o que pensa um sujeito sobre um determinado objeto.

A modelização na área das Ciências Cognitivas visa compreender a natureza e a estrutura das atividades mentais de um sujeito. Ela tenta responder questões epistemológicas, especialmente, aquelas ligadas à natureza do conhecimento, levando em conta a contribuição de diferentes disciplinas científicas: as Ciências da Linguagem (BRONCKART, 1995), a Psicologia Cognitiva (PIAGET, 1979; VERGNAUD, 1981, 1998) e a Didática da Matemática (CHEVALLARD, 1999; BROUSSEAU, 1998), dentre outras.

A Psicologia Cognitiva, em particular, se interessa pela maneira como o sujeito raciocina e apreende uma informação, em termos de habilidades, potencialidade e limitações. Dentre os estudos desenvolvidos nesse domínio, referimo-nos aos trabalhos clássicos de Piaget (op.cit.) e, especificamente, a "Teoria da Equilibração" que introduz a noção do esquema. Essa teoria preconiza que o sujeito constrói conhecimentos em interação com o meio[45]. A partir dos processos de assimilação e de acomodação, em confrontação com as situações vividas, o sujeito constrói hipóteses para explicar os fenômenos do ambiente ao seu redor. A não-assimilação de novos conhecimentos, a partir da utilização dos esquemas que o sujeito já possui, está na origem dos conflitos cognitivos que podem influenciar o processo de acomodação, bem como a modificação e/ou a construção de novos esquemas.

45 Nesta abordagem teórica o *meio* corresponde ao ambiente ao redor do sujeito.

A Didática da Matemática de origem francesa, em particular, tem a construção do conhecimento pelo sujeito no seu centro de interesse. O objeto de estudo são os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, na sua totalidade. Ela se interessa pelas interações entre o professor, o aluno e o conhecimento; o triângulo didático tenta explicar o funcionamento destas interações (BROUSSEAU, 1998).

Para melhor contribuir com esta reflexão, retomamos os elementos de uma síntese publicada por Perrin-Glorian (2002) sobre as teorias da Didática da Matemática utilizadas, majoritariamente, pelos pesquisadores: *a Teoria dos Campos Conceituais (TCC)*, a *Teoria da Antropologia do Didático (TAD)* e a *Teoria das Situações Didáticas (TSD)*. A autora põe em evidência o papel que os três polos do triângulo didático exerce na interação, em cada uma destas teorias.

A Teoria dos Campos Conceituais foi proposta e desenvolvida por Vergnaud (1981, 1998), com base nos estudos de Piaget (1979) e seus colaboradores. A TCC retoma a noção de "esquema" e a redefine da seguinte maneira:

> O esquema é uma representação invariante da ação do sujeito para uma determinada classe de situações. [...] Um esquema é formado por várias categorias de elementos, todos indispensáveis: objetivos e antecipações, regras de ação, possibilidades de inferência em situação e invariantes operatórios (VERGNAUD, 1998, p.283 e 285, tradução nossa).

A TCC fornece um quadro que pode permitir a compreensão das filiações e rupturas entre diversos conhecimentos, em particular, daqueles que tornam eficaz a ação do sujeito observado. Para Vergnaud (1981, p.217), um campo conceitual é definido como "um espaço de problemas e de situações-problemas cujo tratamento requer vários tipos de conceitos e procedimentos em estreita conexão.". As ações dos professores e dos alunos devem, portanto, ser interpretadas no interior deste espaço. O conceito de invariante operatório é central nesta teoria e remete à articulação entre formas predicadas e operatórias do conhecimento[46]. Neste quadro, conforme acentua Perrin-Glorian (2002), o professor exerce o papel de mediador porque é ele quem escolhe ou constrói as situações didáticas com a intenção de levar o aluno a construir o conhecimento, além de auxiliá-lo na resolução dos problemas propostos.

A Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1999) enfoca a relação com o saber em diferentes instituições (o sistema escolar, uma sala de aula, uma família, um sujeito...). O aspecto central da teoria é a natureza do saber ensinado, no sentido das organizações matemáticas: "a relação pessoal dos indivíduos com o saber se constrói na temporalidade sob a influência de diferentes relações institucionais ao qual ele é submetido" (PERRIN-GLORIAN, 2002, p.207). Araújo (2009) destaca que a temporalidade, seja com relação ao saber ou ao tempo didático, permite distinguir os papéis do professor e do aluno.

A Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau (1986, 1990, 1998) faz referência à teoria dos jogos, tendo como foco principal a situação didática. Segundo Brousseau (1990, p. 320) "A situação didática é, para o observador, a modelização do ambiente no qual se insere um jogador, a situação de ação, de aprendizagem ou de ensino para o aluno, o quadro de ensino para o professor". Um dos interesses da TSD consiste, portanto, em modelizar os conhecimentos que o professor quer ensinar e/ou aqueles que ele quer que o aluno aprenda. E uma de suas ideias estruturantes é que os conhecimentos se manifestam, essencialmente, como instrumentos de controle das situações. Uma situação reúne um conjunto de problemas que para resolvê-los o aluno deve reinvestir conhecimentos já construídos e/ou construir novos, no intuito de atender as expectativas do professor. Em situação, o aluno age mobilizando

---

46 As pesquisas de Baltar (1996) sobre a noção de área de superfícies planas, de Bittar (1998) sobre a noção de vetor no ensino e de Teles (2007) sobre imbricações entre campos conceituais em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas são exemplos de estudos que se ancoram neste quadro teórico.

conhecimentos sobre um meio, ao passo que o professor exerce a função de regular as ações do aluno sobre este meio, nos termos do contrato didático[47].

A TSD se constitui, portanto, em um modelo em cujo interior outros foram concebidos para melhor compreender a relação didática que se estabelece entre o conhecimento, o professor e o aluno.

## Modelização em Didática da Matemática: a atividade de professor[48]

O interesse por compreender o processo de tomada de decisões pelo professor é cada vez mais frequente entre os pesquisadores das áreas de Educação e, particularmente, em Educação Matemática. Parte-se da premissa que o professor toma decisões com o objetivo de propiciar ao aluno a aprendizagem de novos conhecimentos. Estas decisões são inerentes à condução do processo de ensino, à organização do trabalho na sala de aula e à escolha dos problemas, dentre outros aspectos.

Quando o professor se depara com várias escolhas, em geral, ele tem dúvidas sobre qual decisão tomar. Antes de continuar esta discussão fazemos uma breve reflexão sobre os termos "escolha" e "decisão". Para tanto, retomamos um exemplo utilizado por Margolinas (1993):

> Se eu digo ao meu vizinho "Passe-me o sal" e ele a executa, ele produziu uma ação, mas não tomou nenhuma decisão. [...]. O educado vizinho teve, portanto, algumas escolhas diante dele: recusar, pegar o saleiro da direita ou da esquerda [...]. Negamo-nos,

47 "O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor dispõe para colocá-la em cena" (BROUSSEAU, 1998, p. 60).

48 Para construir esta seção, retomamos o artigo intitulado "Uma reflexão sobre a atividade do professor de matemática a luz da Teoria das Situações Didáticas" (LIMA, 2012).

> portanto, a nomear tais escolhas de decisão. Mas podemos imaginar situações nas quais uma ação assim banal poderia ter todas as características de uma verdadeira decisão (se esta pessoa sabe que o saleiro da direita está ligado a um detonador, e não o da esquerda, por exemplo). Toda decisão é, portanto, ligada à existência de uma escolha [...] (Ibid. p.110-111, tradução nossa).

Deste exemplo destacamos o fato de o sujeito ser capaz de tomar uma decisão apenas quando ele dispõe de algumas escolhas, que expressam a possibilidade e a liberdade de trilhar por caminhos diferentes. Uma decisão se caracteriza então pela ação voluntária do sujeito de escolher um caminho dentre aqueles que estão disponíveis.

No exercício da sua profissão o professor toma decisões de naturezas diversas, como por exemplo, institucional, metodológica, pedagógica e didática. Dentre elas, nos interessamos pelas decisões de natureza didática, aquelas que estão intrinsicamente ligadas à aprendizagem, pelo aluno, de um conhecimento visado pelo professor. Estas decisões podem ser tomadas durante a aula, momento em que o professor está em interação com o aluno. Todavia, mesmo no ensino presencial, a atividade do professor não se restringe ao que acontece na sala de aula, porque fora deste espaço físico ele planeja, elabora ou escolhe os problemas que propõe ao aluno e corrige as produções dos alunos. E nestes momentos ele também toma decisões didáticas.

Estudos desenvolvidos sobre a TSD trazem elementos importantes para a compreensão e a identificação de tipos de conhecimentos que podem intervir nas decisões didáticas do professor. Apresentamos a seguir os modelos *de Estruturação do Milieu* e *de Níveis da Atividade do Professor,* que nos permitirão expor três modelos de decisões didáticas propostos por Charnay e Mante (1992); Píéron (1993) e Tahri (1993).

O *modelo de estruturação do milieu* foi concebido por Brousseau (1986) visando permitir a formalização de uma situação didática qualquer.

Exercendo um papel central, o *milieu*[49] é apresentado em cinco níveis que estão intrinsecamente ligados a uma situação específica: o*bjetivo*, *material*, de *referência*, de *aprendizagem* e *didático*. Brousseau (Ibid.) explica:

> [...] Nessas situações, em uso nas relações didáticas, podemos distinguir ao menos quatro pessoas, quatro sujeitos distintos com os quais o aluno pode se identificar, e cinco meios [*milieux]* com os quais ele pode interagir de diferentes maneiras. Esses meios estão imbricados [*emboîtés*], nós os descrevemos como níveis do meio do aluno (p. 60, tradução nossa).

Margolinas (1995) observou que durante uma década este modelo foi mais comentado do que utilizado nas pesquisas em Didática da Matemática. Dentre as razões apontadas pela autora estão a complexidade do esquema utilizado no modelo, além da insuficiência de "posições" que contemplem o papel que o professor exerce na relação didática. Objetivando alavancar o interesse dos pesquisadores, a autora propôs uma ampliação, incluindo as posições P3, P2 e P1 (Cf. Figura 1) e uma configuração planificada do modelo, se contraponto à primeira que lembra as camadas de uma "cebola", conforme descreve Brousseau (1986).

O *modelo de estruturação do milieu* passou, então, a ter a seguinte configuração:

49 Na Teoria das Situações Didáticas o *milieu* é um sistema antagonista ao sujeito e que permite retroações às suas ações (BROUSSEAU, 1990).

**Figura 1 – Modelo de Estruturação do "milieu"**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| M3:<br>M de construção | | P3:<br>P noosférico | S3:<br>Situação noosférica | Sobre- didática |
| M2:<br>M de projeto | | P2:<br>P construtor | S2:<br>Situação de construção | |
| M1:<br>M didática | E1:<br>E reflexivo | P1:<br>P projetor | S1:<br>Situação de projeto | |
| **M0:<br>M de aprendizagem** | **E0:<br>Aluno** | **P0:<br>Professor** | **S0:<br>Situação Didática** | |
| M-:<br>M de referência | E-1:<br>E aprendiz | P-1:<br>P observador | S-1:<br>Situação de aprendizagem | A-didática |
| M-2:<br>M objetivo | E-2:<br>E em ação | | S-2:<br>Situação de referência | |
| M-3:<br>M material | E-3:<br>E objetivo | | S-3:<br>Situação objetiva | |

Fonte: Margolinas (1997, p. 43).

Nesta configuração:

- *S1, S2* e *S3* representam as *situações sobre-didáticas*, quando o professor não está em interação real com o aluno, mesmo considerando que a sua memória didática sobre o aluno e sobre a classe intervém na atividade que ele realiza (BROUSSEAU; CENTENO, 1991);
- *S-1, S-2 e S-3* representam as *situações a-didáticas*, que se relacionam diretamente com a atividade do aluno e se articulam com as posições E-1 (momento que o professor observa o aluno em atividade), E-2 e E-3 (correspondentes ao *aluno em ação* e ao *aluno objetivo*, respectivamente);
- *S0* representa a *situação didática* propriamente dita, quando o professor está em interação real com o aluno. Ela se constitui na parte mais visível da atividade do professor.

O modelo contempla, portanto, as atividades do professor e a do aluno. Porém, visando estudar apenas a atividade do professor, Margolinas (2002) propôs o *Modelo de Níveis da Atividade do Professor* que apresentamos na *Figura 2:*

**Figura 2 – Modelo de Níveis da Atividade do Professor**

***Nível + 3****: Valores e concepções sobre o ensino e a aprendizagem*
Projeto educativo: valores educativos, concepções de aprendizagem e de ensino.

***Nível + 2****: Construção do tema*
Construção didática global na qual se inscreve a aula: noções a estudar e aprendizagem a construir.

***Nível + 1****: Planejamento da aula*
Projeto didático específico para uma aula: objetivos, planejamento do trabalho.

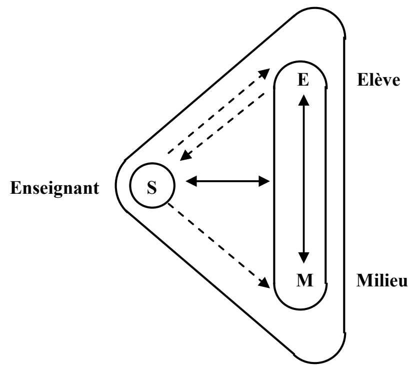
***Nível 0****: Situação didática*
Realização da aula, interação com os alunos, tomada de decisões na ação.

***Nível -1****: Observação do aluno em atividade*
Percepção da atividade dos alunos, regulação do trabalho atribuído aos alunos.

Fonte: Margolinas (2005 p. 11).

A autora acentua que o professor enquanto ator da relação didática (tanto quanto o aluno) também está em situação e, como tal, interage com um meio e aprende a partir desta interação. Brousseau (1998) representa o meio do professor em uma situação didática conforme ilustra a Figura 3.

**Figura 3 – Esquema representativo do meio do professor**[50]




Fonte: Brousseau (1998, p. 92).

O meio do professor contempla o aluno e o meio do aluno. O professor em situação didática age sobre o seu meio e, em função das retroações que dele recebe, pode modificá-lo porque foi ele quem o concebeu com o objetivo de ensinar.

Margolinas (2002) assinala que a apresentação linear do modelo pode passar a ideia de uma representação temporal e que isto não procede porque a atividade do professor perpassa o conjunto de níveis que interagem uns com os outros de forma não linear. Em ação, diante dos alunos (Nível 0), o professor é influenciado pelos conhecimentos inerentes aos níveis mais externos, como por exemplo, aqueles que agem durante a preparação da aula (Nível +1). O professor toma suas decisões em nível macro ou micro. Como definem Comiti, Grenier e Margolinas (1995), as *micro-decisões* são aquelas tomadas de imediato pelo professor (Nível 0), enquanto que as *macro-decisões* são aquelas tomadas, por exemplo, no momento do planejamento da aula (Nível +1) ou da construção do plano de curso (Níveis +2 e +3).

Esse modelo revela a complexidade da atividade do professor, bem como de sua análise. Para melhor compreendê-la, um caminho a ser

---

50 *Enseignant*: professor. *Éleve*: aluno. *Milieu*: meio

seguido pelo pesquisador pode ser a construção de uma modelização de decisões didáticas tomadas pelo professor em momentos distintos da sua atividade. Durante o planejamento, o professor prevê eventos que podem ocorrer na sala de aula e se antecipa a eles. Para tanto, determina os objetivos de ensino e de aprendizagem e os meios prováveis para alcançá-los. Organiza as ações futuras em termos de metodologia e de avaliação, dentre outros aspectos inerentes ao ato de ensinar. Porém, a organização das ações não depende apenas de vontade do professor e de seus conhecimentos, porque ele é confrontado a fatores como o funcionamento do aluno, da classe e da escola e a intervenção das famílias. A tomada de decisões será influenciada, portanto, por estes fatores.

As pesquisas de Tahri (1993), Bloch (2005) e Lima (2006, 2009) estudaram os conhecimentos que são suscetíveis de influenciar as escolhas do professor e, consequentemente, suas decisões didáticas. Estas pesquisas tomam como ponto de partida a classificação de conhecimentos do professor proposta por Shulman (1986) – *conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico* e *conhecimento pedagógico do conteúdo* – que suscitou diversas discussões, sobretudo, por não contemplar, explicitamente, a dimensão didática. Buscando ressaltar esta dimensão, Bloch (2005) retomou as categorias de Shulman (1986), descrevendo-as da seguinte maneira: *domínio da competência matemática, domínio da didática prática ou prática da didática* e *domínio pedagógico das regulações da classe*.

É consenso entre os profissionais da Educação e, podemos dizer, entre os alunos, famílias e outros atores sociais, que o domínio dos conteúdos da disciplina que ensina é condição indispensável para um bom professor. Porém, este domínio, por si só, não é suficiente para lograr êxito no ensino. Conhecer o aluno e sua realidade, a classe, o programa escolar e/ou as orientações oficiais para o professor, por exemplo, é pertinente e necessário para qualificar socialmente um bom professor. Modelizar decisões didáticas requer considerar, também, estes aspectos.

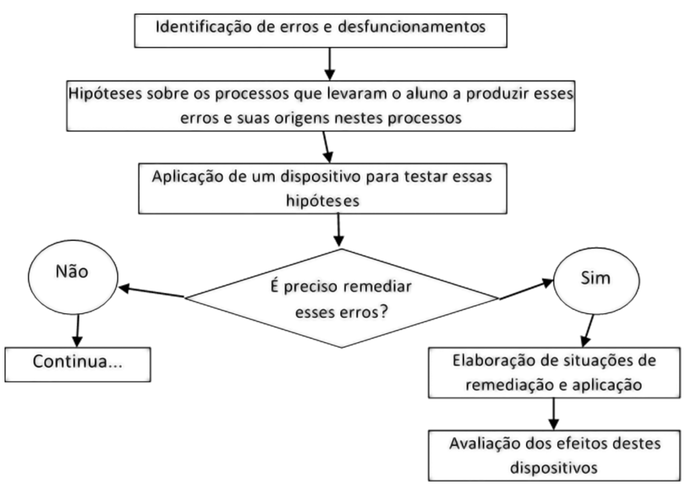
A análise de diferentes modelos de decisões didáticas revela uma característica comum a, pelo menos, duas etapas. A primeira consiste em identificar o estado de conhecimento do aluno, isto é, busca diagnosticar o que o aluno sabe e o que não sabe sobre um determinado objeto. Em alguns casos o diagnóstico consiste também em identificar os procedimentos utilizados pelo aluno na resolução de problemas e os tipos de erros. Um bom diagnóstico se constitui em uma importante ferramenta para fundamentar a elaboração de sequências didáticas, que se constitui na segunda etapa do modelo, com a intencionalidade de levar o aluno a construir novos conhecimentos.

Para ilustrar esta reflexão apresentamos, sinteticamente, três modelos de decisões didáticas e no terceiro trazemos um exemplo de modelização didática.

a) 2.1. Modelo proposto por Charnay e Mante

A principal motivação de Charnay e Mante (1992) foi pesquisar as causas de erros frequentes dos alunos para, em seguida, propor uma situação de aprendizagem visando superá-los, como pode ser observado na *Figura 4*.

**Figura 4 – Modelo de Decisões Didáticas proposto por Charnay e Mante**




Fonte: Charnay e Mante (1992, p. 6).

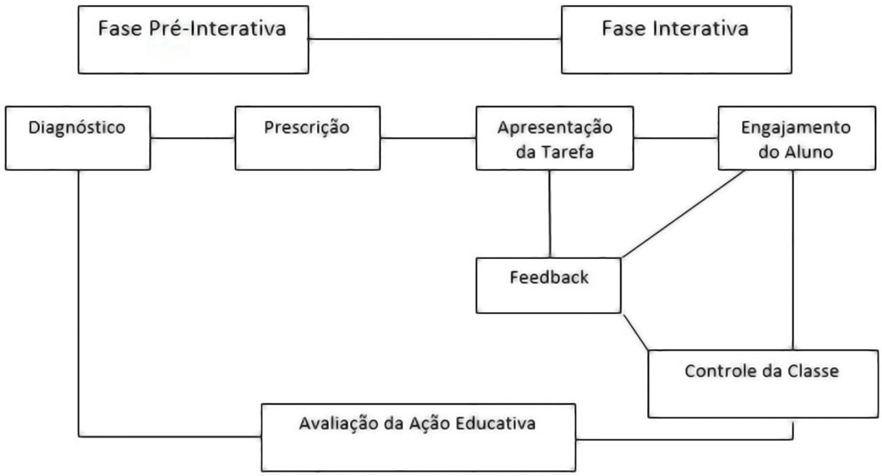
A primeira fase consiste em identificar os erros e seus desfuncionamentos. A segunda e a terceira fases se interessam pelas hipóteses do professor sobre os processos que levaram os alunos a errarem e pela origem dos erros. Os autores ressaltam que tais hipóteses são formuladas com base nas concepções de ensino e de aprendizagem do professor, nas características do aluno (por exemplo, os erros têm uma origem ontogenética?), e nas expectativas recíprocas do professor e do aluno sobre o problema a resolver (contrato didático). No entanto, como se pode observar, o modelo não contempla a questão da aprendizagem (como os alunos aprendem?), tampouco a questão do ensino (o que deve caracterizar as atividades que proponho aos alunos?).

Uma vez o diagnóstico realizado, uma primeira decisão didática deve ser tomada pelo professor: é necessário remediar ou não os erros identificados? Os autores assinalam que essa decisão depende, por um lado, do julgamento que ele faz sobre as consequências que o erro pode trazer à aprendizagem e, por outro, das suas concepções sobre a aprendizagem. Quando o professor decide que o erro deve ser corrigido, ele elabora situações de remediação e de aplicação e, em seguida, avalia os efeitos das situações vivenciadas pelo aluno. Caso contrário, ele continua o processo de ensino.

b) Modelo proposto por Piéron

No contexto do ensino da Educação Física e Esportiva, Piéron (1993) estudou os procedimentos e as decisões tomadas por professores durante a preparação das aulas. Para tanto, construiu um modelo que põe em evidência duas fases no processo de ensino: *pré-interativa* e a *interativa*.

**Figura 5 – Modelo de Decisões Didáticas proposto por Pièron**




Fonte: Piéron (1993, p. 7).

A fase *pré-interativa* contempla o diagnóstico e a prescrição. Trata-se do momento da atividade que o professor planeja a aula e, para tanto, ele toma decisões sobre as atividades que proporá ao aluno, para ter acesso ao seu estado de conhecimento, e em seguida conduzir o processo de ensino. A fase *interativa* corresponde a uma situação de sala de aula, quando o professor coloca em prática as decisões que tomou durante a fase *pré-interativa*: ele apresenta aos alunos os problemas escolhidos e avalia as ações e reações dos alunos, buscando subsídios para tomar novas decisões e ajustar o processo de ensino quando julga necessário. Como se pode observar na *Figura 5*, as duas fases do modelo não estão isoladas, considerando que a ação empreendida pelo professor na sala de aula está intrinsecamente ligada ao planejamento.

c) 2.2. Modelo proposto por Tahri

Antes de apresentar o modelo de decisões didáticas proposto por Tahri (1993), fazemos uma breve incursão sobre a relevância da modelização em Geometria, tendo em vista que neste campo da Matemática a percepção entra em cena como um elemento primordial para a apreensão do desenho. De fato, o elemento perceptivo pode influenciar a aprendizagem porque se torna um meio de controle utilizado pelo aluno na resolução do problema.

Concordamos com Laborde (1992) quando afirma que:

> [...] os modelos que são os desenhos em geometria colocam em jogo as informações visuais que, ainda não fornecendo diretamente a solução, exercem um duplo papel na resolução dos problemas geométricos:
> – no fim de resolução, quando o aluno pensa ter encontrado uma solução, elas dão indicações sobre a validade desta solução; é um meio de validação parcial ou de invalidação; esse último caso se produz, por exemplo, nos problemas de construção, se o procedimento elaborado pelo aluno o levar a um resultado perceptivo que entra em contradição flagrante com o que ele esperava;
> – durante a pesquisa, a exploração do desenho (ou dos desenhos) pode conduzir o aluno a fazer conjecturas e estar na origem dos processos de solução [...] é uma fonte de experimentação (p. 69, tradução nossa).

Durante as fases de exploração do desenho e de verificação da solução encontrada, os conhecimentos perceptíveis e geométricos mobilizados pelos alunos estão em interação. Retomamos o exemplo citado pela autora sobre a construção das imagens de figuras geométricas por simetria. Quando realiza uma construção, o aluno espera que a figura imagem tenha uma evidente semelhança com a figura inicial: os segmentos das duas figuras devem ter o mesmo comprimento e as figuras devem ser de mesma natureza (a imagem de um segmento é um segmento, a imagem de um círculo é um círculo). O estabelecimento desta relação pode favorecer a articulação entre os conhecimentos ligados à percepção e os conhecimentos geométricos.

Apresentamos, a seguir, o modelo de decisões didáticas proposto por Tahri (1993) e um exemplo da modelização que ela realizou sobre a construção da imagem de um segmento com relação a um eixo, por simetria axial.

A pesquisadora construiu um dispositivo para lhe auxiliar na análise das decisões didáticas tomadas pelos professores que participaram da pesquisa e, para isto, propôs um tutor híbrido composto por dois professores, que ela denominou tutores humanos, e um tutor artificial, que trabalharam em interação com uma dupla de alunos. Assim, as decisões poderiam ser tomadas, em parte, de maneira automática e, em parte, pelos tutores humanos. Trabalhando em conjunto, estes tutores observavam atentamente a tela do computador do aluno[51], que eles tinham acesso a partir do computador que utilizavam, buscando identificar os procedimentos mobilizados pelos alunos para fundamentar a tomada de decisões didáticas, acatando ou não as propostas do tutor artificial. Neste capítulo, focamos o nosso olhar apenas nas decisões tomadas pelos *professores*, termo que adotamos deste ponto em diante para nos referir aos tutores humanos.

Para identificar as concepções mobilizadas pelos alunos sobre a simetria axial, a pesquisadora propôs a seguinte classificação com base nos estudos de Grenier (1988)[52]:

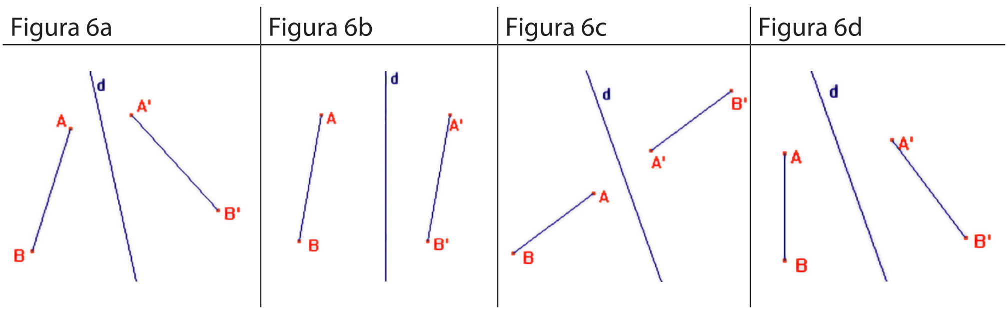
- *Concepção simetria ortogonal* (Cf. Figura 6a): a imagem do segmento é obtida por simetria ortogonal (axial).
- *Concepção paralelismo* (Cf. Figura 6b): o segmento e sua imagem são paralelos e de mesmo comprimento.

51 Os alunos trabalharam com o Cabri-Geomètre e sabiam que estavam sendo observados pelos professores em tempo real.

52 Ver Tahri 1993 (p. 68-69).

- *Concepção simetria central* (Cf. Figura 6c): a imagem do segmento objeto é construída por simetria central.
- *Concepção simetria obliqua* (Cf. Figura 6d): a imagem do segmento é obtida por simetria oblíqua. As "distâncias" do ponto e sua imagem ao eixo de simetria são conservadas, como também as direções das retas suportes dos pontos e suas imagens.

**Figura 6 – Exemplos de construções do simétrico de um segmento com relação à um eixo de simetria**



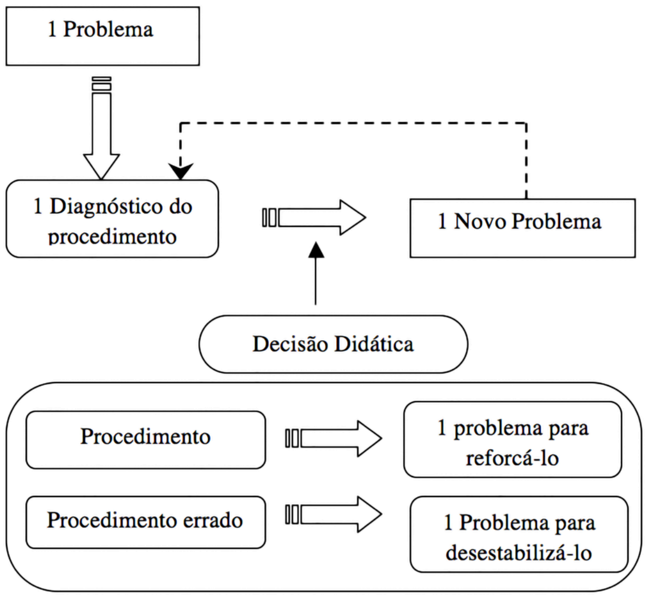

Fonte: Tahri (1993, p. 68-69).

Além disto, a pesquisadora propôs uma classificação de problemas delimitando as variáveis didáticas e os valores que considerou na pesquisa: *orientação do eixo de simetria e do segmento* (vertical, horizontal, oblíqua); *interseção entre o eixo de simetria e o segmento* (o segmento toca o eixo, o segmento corta o eixo, a intersecção entre o segmento e o eixo é vazia) e *o ângulo formado entre o segmento e o eixo de simetria* (0º, 90º, um ângulo qualquer). Com base nestas variáveis e valores 30 classes de problemas foram obtidas.

Participaram da pesquisa 24 alunos de uma turma de cinquenta alunos, utilizando uma versão do *Cabri Géomètre* (BELLEMAIN, 1992) preparada, especialmente, para esta experimentação. Trabalhando em dupla, os alunos respondiam a um problema pertencente a uma das classes de problemas.

O cenário de trabalho dos professores pode ser representado da seguinte maneira:

**Figura 7 – Esquema simplificado do Modelo de Decisões Didáticas (uma seção de trabalho) proposto por Tahri.**




Fonte: Lima e Trgalová (2005).

Os professores conheciam bem o conjunto de problemas, as concepções de simetria e a tipologia de procedimentos de construção utilizados pelos alunos. O aluno poderia, por exemplo, construir a imagem do segmento utilizando um procedimento do tipo *global*, *semi analítico* ou a*nalítico*:

> Procedimentos globais: dizemos que o procedimento de construção da imagem de um segmento é global se nesta construção não intervêm outros objetos que não seja o objeto construído ele mesmo.
> Procedimentos semi analíticos: dizemos que o procedimento de construção da imagem de um segmento é semi analítico ou semi global, se uma das extremidades do segmento é construída. O segmento em

> seguida é construído "globalmente" apoiando-se nesta extremidade;
> Procedimentos analíticos: dizemos que o procedimento de construção da imagem de um segmento é analítico si esta imagem é obtida a partir da construção das duas extremidades. O aluno constrói a imagem da primeira extremidade, depois da segunda extremidade e em seguida define o segmento imagem juntando estas duas extremidades. (TAHRI, 1993, p.49-50 tradução nossa).

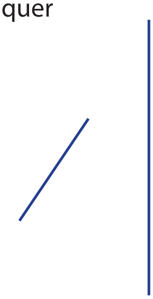
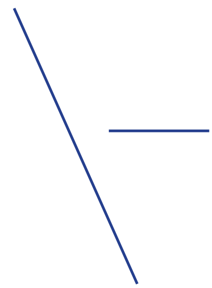
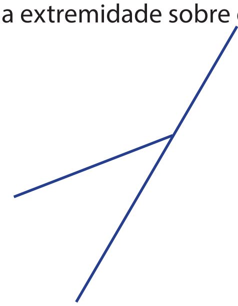
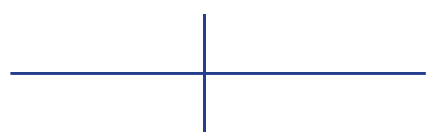
As decisões didáticas eram tomadas com base nas retroações (feedback) do sistema, nas variáveis e valores dos problemas e nas interpretações que os professores faziam das respostas do aluno. Para tomá-las, eles levavam em conta, também, as dificuldades dos alunos, que poderiam ter relação com a concepção de simetria e/ou com a utilização do *Cabri*. O diagnóstico era estabelecido a partir da observação dos objetos geométricos produzidos pelos alunos, das relações entre estes objetos e da discussão da dupla sobre eles. Para escolher um novo problema, os professores consideravam três aspectos: a natureza do objeto (a simetria axial), os elementos do objeto (eixo, segmento...) e as relações entre eles.

Para apresentar o modelo em funcionamento trazemos a análise de duas seções da pesquisa de Tahri (Ibid.), destacando as decisões didáticas tomadas pelos professores: a primeira retrata um caso de "sucesso" e a segunda um caso de "insucesso" na resolução dos problemas propostos.

## Decisões didáticas em um caso de "sucesso"

A sequência de problemas (Cf. Figura 8) foi proposta a uma dupla de alunos, visando colocar à prova seus conhecimentos sobre a simetria axial. Para isto, o nível de complexidade dos problemas foi paulatinamente aumentado.

**Figura 8 - Sequência didática 1**

| | |
|---|---|
| **Problema inicial:** Eixo vertical, segmento obliquo, interseção vazia e ângulo qualquer  | **Problema 1:** eixo oblíquo, segmento horizontal, interseção vazia e ângulo qualquer  |
| **Problema 2:** eixo obliquo, segmento não perpendicular ao eixo de simetria com uma extremidade sobre este eixo  | **Problema 3:** o eixo horizontal é, perceptivelmente, uma mediatriz; segmento dado  |

Fonte: Tahri (1993, p.170-173).

Na escolha do *problema inicial* para realizar o primeiro diagnóstico, os professores estimaram que a verticalidade do eixo podia ser um elemento facilitador. No entanto, a resposta correta poderia significar que os alunos utilizaram propriedades corretas da simetria axial (perpendicularidade e igualdade da distância de um ponto e sua imagem ao eixo de simetria ou equidistância) ou a mobilização da concepção paralelismo, que também conduz a resposta correta.

Assim, face ao sucesso dos alunos, os professores decidiram modificar os valores das variáveis "orientação do eixo de simetria" e "orientação do segmento", propondo o *problema 1* no qual o eixo é oblíquo e o segmento horizontal à borda do papel (ou ao monitor do computador). O objetivo era testar se o procedimento utilizado na resolução do *problema inicial* estava associado à "concepção paralelismo".

Os professores constataram, entretanto, que os alunos utilizaram o mesmo procedimento e, diante disto, decidiram propor um problema ainda mais complexo a fim de testar a estabilidade dos procedimentos mobilizados na resolução dos dois problemas e, consequentemente, do conhecimento sobre a simetria axial. Assim, propuseram o *problema 2* em que o segmento dado tem uma das extremidades sobre o eixo de simetria. Observando que os alunos também resolveram corretamente este problema, os professores decidiram propor o *problema 3* que julgavam ser de grande complexidade, tendo em vista que o segmento é globalmente invariante (o eixo de simetria é, perceptivelmente, a mediatriz do segmento dado). Tahri (1993) relata que com esta decisão os professores objetivaram levar os alunos para além da "algoritmização" do procedimento de resolução, de modo que eles se interrogassem sobre o significado da noção de simetria axial favorecida por esta invariância global.

Observa-se na sequência didática proposta que a lógica subjacente às decisões tomadas pelos professores para tornar o problema mais complexo consistiu em trabalhar com a propriedade de invariância dos pontos sobre o eixo de simetria, visto que as resoluções do *problema inicial* e do *problema 1* não exigiam a utilização desta propriedade. Porém, para resolver o *problema 2* o aluno precisava utilizá-la, reduzindo o procedimento de construção para apenas uma extremidade do segmento. Diante do "sucesso" dos alunos, os professores optaram pela invariância do segmento no *problema 3*, fazendo a hipótese que isto poderia colocar os alunos em situação de conflito ao pensarem que uma construção é sempre necessária para resolver um problema deste tipo. Porém, isto não ocorreu porque a dupla de alunos também respondeu corretamente este problema.

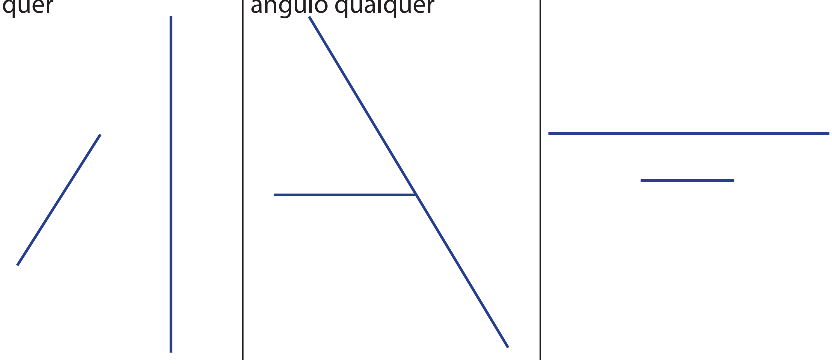
A realização de todas as etapas da sequência didática, sem dificuldades aparentes, permitiu aos professores confirmar que o conceito de simetria axial foi construído pelos alunos.

## Decisões didáticas em um caso de "insucesso"

Para exemplificar um caso de "insucesso", apresentamos a seguinte sequência didática proposta pelos professores:

**Figura 9 - Sequência Didática 2**

| **Problema inicial**: eixo de simetria vertical, segmento obliquo; a interseção vazia e ângulo qualquer | **Problema 1**: eixo oblíquo, segmento horizontal, segmento toca o eixo de simetria e ângulo qualquer | **Problema 2**: eixo de simetria horizontal, segmento horizontal e interseção vazia |
|---|---|---|



Fonte: Tahri (1993, p.173-175).

Analisando a resposta dos alunos ao *problema inicial* (Cf. *Figura 9*), os professores identificaram um procedimento de construção global e incorreto, que reenvia à "concepção paralelismo". Tahri (1993) afirma que os professores tiveram uma postura diferente diante dos alunos que não conseguiram resolver corretamente o *problema inicial*, como se assumissem a responsabilidade pelos erros cometidos pelos alunos. Sendo assim, a sequência didática proposta expressava a clara intenção de guiar os alunos a passar de uma concepção errônea à concepção correta de simetria axial.

Os professores propuseram o *problema 1* no qual o segmento tem uma extremidade sobre o eixo de simetria. A escolha das variáveis e valores tinha por objetivo transformar a tarefa de construir o simétrico do segmento em outra que tem por característica a utilização da "ferramenta círculo" do *Cabri Géomètre*. Com esta decisão, os professores buscaram levar os alunos a descobrir e utilizar esta ferramenta, passando de um procedimento global a um analítico. Os alunos, de fato, utilizaram procedimentos analíticos, embora estivessem associados à "concepção simetria central". As variáveis didáticas e valores escolhidos podem ter favorecido a mobilização de tal concepção. Mesmo assim, os professores consideraram que houve uma evolução importante no que se refere à passagem de um procedimento global a um analítico. Em seguida, foi proposto o *problema 2* cujas variáveis favorecem a utilização da ferramenta "reta perpendicular" do *Cabri*: o segmento e o eixo de simetria são paralelos e horizontais à borda do papel (ou do monitor do computador). Os alunos, mais uma vez, corresponderam às expectativas dos professores.

Observa-se nesta sequência didática que diante de uma situação de "insucesso", a primeira intenção dos professores foi desestabilizar o procedimento incorreto utilizado pelos alunos para, em seguida, guiá-los passo-a-passo na evolução de uma concepção errônea (paralelismo) à concepção correta (simetria ortogonal). No processo de evolução o aluno pode mobilizar outras concepções (intermediárias), a concepção simetria central no caso do exemplo em pauta. Com acentuamos em Lima (2006, 2009), no processo de passagem de uma concepção inicial à concepção correta (do ponto de vista do saber de referência) há diversas etapas constituídas por problemas e concepções que permitem a evolução.

## Considerações Finais

Apresentamos uma reflexão sobre as noções de modelo e modelização a partir de ferramentas teóricas que vêm sendo utilizadas, em particular, nas pesquisas em Didática da Matemática. Para tanto, fizemos uma breve incursão sobre as principais teorias neste domínio, com ênfase na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1998) que se constitui em um potencial modelo teórico para estudar a relação didática que se estabelece entre o conhecimento, o professor e o aluno. Os três modelos de decisões didáticas apresentados foram construídos com a finalidade de compreender a atividade de professor nesta relação.

A análise das duas sequências didáticas sobre a construção da imagem de um segmento com relação a um eixo, por simetria axial, dá indícios importantes de como os professores tomam suas decisões quando estão diante de repostas corretas e incorretas dos alunos. Além disto, os exemplos apresentados revelam a validade do modelo proposto por Tahri (1993), em termos de diagnóstico e de decisões didáticas tomadas pelos professores.

Destacamos, no entanto, que a pesquisadora estudou, especificamente, a problemática da construção de um segmento com relação a um eixo de simetria e, consequentemente, o modelo de decisão didática que construiu está restrito aos problemas desta classe. Assim, na continuidade desta pesquisa realizamos uma modelização de decisões didáticas[53] (LIMA, 2006, 2009) sobre esta noção matemática, utilizando figuras mais complexas (figuras formadas por segmentos e polígonos) em termos de variáveis didáticas e de valores a elas atribuídos. Uma vez trabalhando com estas figuras emergiram outros procedimentos de resolução e elementos de concepções, além daqueles que foram evidenciados pelos estudos de Grenier (1988) e Tahri (ibid.).

Para realizar esta modelização utilizamos a formalização proposta pelo *Modelo cK¢* desenvolvido por Balacheff (1995, 2001). Esse modelo preconiza que uma concepção C é caracterizada pelo quádruplo (P, R, L, Σ), onde P é um conjunto de problemas, R é um conjunto de operadores, L é um sistema de representação e Σ uma estrutura de controle que assegura a não contradição da concepção C.

Os estudos aqui apresentados apontam a pertinência da construção e da utilização de modelos teóricos nas pesquisas, para auxiliar na compreensão de fenômenos de natureza didática que envolvem a relação entre o conhecimento, o professor e o aluno.

---

53 Disponível em https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00208015/document. Acessado em 29/11/2015.

## Referências


ARAUJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 291 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2009.

BALACHEFF, N. Les connaissances, pluralité des conceptions: le cas des mathématiques. **Les Cahiers Leibniz**, n. 19, 2001.

BALACHEFF, N. Conception, Connaissance et Concept. **Didactique et Technologies Cognitives en Mathématiques** - Séminaires 1994-1995. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1995.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. Tese (Doutorado em Didactique Des Disciplines Scientifiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.

BELLEMAIN, F. **Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie**: Cabri-géomètre. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier - Grenoble I, UJF, Grenoble, 1992.

BITTAR, M. **Les vecteurs dans l'enseignement secondaire - aspects outil et objet dans les manuels - étude de difficultés d'élèves dans deux environnements**: papier-crayon et Cabri-géomètre II. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.

BLOCH, I. Peut-on analyser la pertinence des réactions mathématiques des professeurs dans leur classe? Comment travailler cette pertinence, en formation, dans des situations à dimension adidactique? **Actes du Séminaire National des Didactiques des Mathématiques**. Mars 2005, Paris, 2005.

BRONCKART, J. P. **Théories du langage.** Une introduction critique. 4. ed. Bruxelles: Dessart & Mardaga, 1995.

BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques,** [Textes rassemblés et préparés par N. BALACHEFF, M. COOPER, R. SUTHERLAND, V. WARFIELD]. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1998. (coleção Recherches en Didactique des Mathématiques).

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 309-336,1990.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherche en didactiques des mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G; CENTENO, J. Rôle da la memoire didactique de l'enseignant. **Recherches en Didactique des Mathématiques** – RDM, v.11, n. 23, p. 197-210, 1991.

CAPLAT, G. **Modélisation cognitive et résolution de problèmes**. INSA, Lyon: Polytechniques et Universitaires Romandes, 2002.

CHARNAY, R.; MANTE, M. De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de re-médiation, **Repères-IREM**, n. 7, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques,** v. 19, n. 2, p. 221-266,1999.

CHEVALLARD, Y. **Le concept de rapport au savoir.** Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et d'informatique, Université de Grenoble 1, 1989.

COMITI, C., GRENIER, D., MARGOLINAS, C. Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. Arsac et al. (Ed.) **Différents types de savoirs et leur articulation**, p. 93-129. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1995.

GRENIER, D. Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier - Grenoble I, LSD2-IMAG, Grenoble, 1988.

HENRY, M. Les premiers apprentissages en géométrie et en probabilités : des processus de modélisation comparables. **Didactique et technologies cognitives en mathématiques, Séminaires DidaTech**, n. 178. Grenoble: Eberhard, M.. Institut IMAG, 1997, p. 5-36.

LABORDE, C. Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. In: CONGRÈS INTERNATIONAL SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES – ICME, 7, 1992, Québec. **Anais...** Québec: *ICME 7*, 1992.

LIMA, I. Uma reflexão sobre a atividade do professor de Matemática a luz da Teoria das Situações Didáticas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 5, p. 46-55, 2012.

LIMA, I. **De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs**: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. 1. ed. Paris: Edilivre, 2009. Collection Universitaire.

LIMA, I. De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs: étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale. Thèse (Doctorat en Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006.

LIMA, I.; TRGALOVÁ, J. Diagnóstico de concepções e decisões didáticas: um estudo de caso no contexto da simetria axial. Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM), 5., 2005, Porto. **Anais...** Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

LE MOIGNE, J. L. La modélisation des systèmes complexes. Dunod, 1990.

MARGOLINAS, C. La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activit´e mathématique en classe. SIMMT, E.; DAVIS, B. 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group / Groupe canadien d'´etudes en didactique des mathématiques 2004, 2004, Québec, Canadá. CMESG/GCEDM: Edmonton, p.3-21, 2005.

______. Situations, milieux, connaisssances. Analyse de l'activité du professeur. In: Dorier, J. L. et al. (Ed.). École d'Éte de Didactique des Mathematiques, 11., 2002, Grenoble. **Anais...** Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002.

______. Projet pour l'étude du rôle du professeur en situation. Séminaire de Didatech, 1997, Grenoble. **Anais...** Grenoble: Laboratoire Leibniz, 1997.

______. La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Org.) **Les débats de didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1995, p. 89-102.

______. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage – Éditions, 1993.

PERRIN-GLORIAN, M-J. Didactique des mathématiques. In Bressoux, P. et al. (Ed.) Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. **Rapport de recherche pour Cognitique,** Programme École et Sciences Cognitives. France: Ministère de la Recherche, 2002.

PIAGET, J. La psychogenèse des connaissances et sa signification épistémologique. Paris: Point Seuil, 1979.

PÍÉRON, M. Analyser l'enseignement pour mieux enseigner. Paris: Revue E.P.S, 1993.

SHULMAN, L. S., Those who understand. Knowledge growth. **Teaching, Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

TAHRI, S. **Modélisation de l'interaction didactique:** un tuteur hybride sur Cabri-Géomètre pour l'analyse de décisions didactiques. Tese (Doutorado em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 1993.

TELES, R. A. M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2007.

VERGNAUD, G. **Au fond de l'action, la conceptualisation**. Pédagogie d'aujourd'hui: Savoirs théoriques et savoirs d'action, 2. ed. Paris: P.U.F, 1998.

VERGNAUD, G. Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. **Recherche en didactique des mathématiques**, v. 2, n. 2, p. 215-232, 1981.

WALLISER, B. Systèmes et Modèles. Introduction critique à l'analyse de systèmes. Paris: Editions du Seuil, 1977.

## SOBRE OS AUTORES

### ALAIN BRONNER

Professor titular da Universidade de Montpellier, na área de Didática da Matemática e membro do Laboratório Interdisciplinar de Pesquisa em Didática, Educação e Formação (LIRDEF). Tem formação em Matemática e em Didática da Matemática (Agrégation de Matemática em 1986 e DEA em 1991). Defendeu sua tese de doutorado da Universidade Joseph Fourier em Grenoble, em 1997 e obteve a habilitação para orientar pesquisas (HDR) em 2007, pela Universidade de Montpellier 2. Desenvolve e orienta pesquisas em Didática da Matemática nos domínios do cálculo numérico e algébrico, grandezas e medidas, ambientes informatizados no ensino da álgebra e análise de práticas de ensino sobre esses domínios. Atua na formação de professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, nos domínios da Didática e da História da Matemática, bem como na formação de mestres e doutores em Didática da Matemática.

### IRANETE MARIA DA SILVA LIMA

Doutora em Matemática e Informática pela Université Joseph Fourier, com pós-doutorado em Didática da Matemática pelo Institut Français de l'Éducation -École Normale Supérieure de Lyon e em Educação, com ênfase em Educação do Campo, pela Universidade Federal do Pará (UFPA). É professora e pesquisadora da UFPE, atuando na Licenciatura em Pedagogia e no Mestrado em Educação Contemporânea do Centro Acadêmico do Agreste, no Mestrado e Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação. É representante da UFPE no Comitê de Educação do Campo de Pernambuco, coordenadora do Núcleo de Pesquisa, Extensão e Formação em Educação do Campo e do Programa Escola da Terra em Pernambuco. Líder do Grupo de Pesquisa Ensino, Aprendizagem e Processos Educativos. Pesquisa sobre o Ensino de Matemática e a Educação do Campo, com enfoque na formação de professores, nas concepções e conhecimentos de professores e alunos sobre noções matemáticas estudadas na Educação Básica.

**MARCELO CÂMARA DOS SANTOS**

Possui Doutorado em Sciences de L'education - Université de Paris X, Nanterre (1995), com Pós-Doutorado pelo Institut Universitaire de Formation de Maîtres de Rennes (2001) e Pós-Doutorado Sênior pela Université Laval (2010). É professor aposentado do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Pernambuco, colaborador do Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação (CAEd), da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Assessor da Secretaria de Educação de Pernambuco e Especialista do Ministério da Educação. Atua no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, no Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências da UFRPE e no Programa de Pós-Graduação Profissional em Gestão e Avaliação da Educação, da UFJF. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Métodos e Técnicas de Ensino, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Ensino de Matemática, formação de professores, avaliação e sequências didáticas.

**MARILENA BITTAR**

Professora Titular do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Foi coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS de 2006 a 2011 e de 2013 a 2016. Pesquisadora Produtividade Pesquisa do CNPq. Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier/ Grenoble I, França (1998) e Pós-Doutora em Educação Matemática pela Universidade Joseph Fourier. Desenvolve e orienta pesquisas em Didática da Matemática e em tecnologia educacional. Realiza parceria com pesquisadores franceses da Universidade Joseph Fourier desde 2002. É coordenadora do GT14 – Didática da Matemática, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática e líder do DDMat - Grupo de Estudos em Didática da Matemática.

**MIRÈNE LARGUIER**

Professora de Didática da Matemática na Faculdade de Educação de Montpellier e membro do Laboratório Interdisciplinar de Pesquisa em Didática, Educação e Formação (LIRDEF). Defendeu em 2009 sua tese de doutorado da Universidade de Montpellier e desenvolve pesquisas em Didática da Matemática sobre os domínios numérico e algébrico, incluindo o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em conexão com o domínio das grandezas e medidas. Atua na formação inicial de professores de Matemática da Educação Infantil ao Ensino Médio. Ensina e orienta dissertações no mestrado em Didática da Matemática da Universidade de Montpellier.

**PAULA MOREIRA BALTAR BELLEMAIN**

Doutora em Didática das Disciplinas Científicas - especialidade Didática da Matemática pela Universidade de Grenoble I - França (1996). Atualmente, é Professora Associada da Universidade Federal de Pernambuco. Tem experiência em Educação Matemática com ênfase no campo teórico da Didática da Matemática e mais especificamente Teoria dos Campos Conceituais, Teoria das Situações Didáticas, Engenharia Didática e Teoria Antropológica do Didático. As investigações que desenvolve e orienta têm dois focos principais. O primeiro, na qualidade de líder do grupo Pró-grandeza: ensino e aprendizagem das grandezas e medidas, diz respeito às questões de ensino, aprendizagem e formação de professores sobre conteúdos do campo das grandezas e suas medidas (análise de livros didáticos, diagnóstico dos conhecimentos dos alunos, análise de erros, construção e experimentação de sequências de aprendizagem). O segundo, no âmbito do Laboratório de Ensino da Matemática e Tecnologia (LEMATEC), é relativo à integração de tecnologias no ensino, na aprendizagem e na prática docente em Matemática.

**ROSINALDA AURORA DE MELO TELES**

Doutora em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Coordena o Programa de Iniciação à Docência (PIBID)/Pedagogia Campus UFPE/Recife.

Coordena o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: SEMEAR (Subsidiar o Ensino da Matemática Efetuando Aprofundadas Reflexões). Atualmente desenvolve Projeto de Colaboração Técnica na Unidade Acadêmica de Garanhuns da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UAG/UFRPE). Realiza pesquisas principalmente nas temáticas: análise de livros didáticos; fórmulas de área; imbricações entre campos conceituais; grandezas e medidas; ensino de Matemática no Ciclo de Alfabetização; jogos; formação inicial e continuada de professores.

| | |
|---|---|
| *Título* | INVESTIGAÇÕES EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA |
| *Organizadores* | Rosinalda Aurora de Melo Teles, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, Carlos Eduardo Ferreira Monteiro |
| *Projeto Gráfico/Capa* | Bruna Andrade |
| *Revisão de Texto* | Dos Organizadores |

| | |
|---|---|
| *formato* | Digital |
| *fontes* | Myriad Pro |
| *Editoração eletrônica* | TIC Editora UFPE |

Este livro visa divulgar investigações desenvolvidas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (Edumatec). Tem como foco a linha de pesquisa de Didática da Matemática, cujo objetivo é desenvolver estudos relativos ao funcionamento da sala de aula, buscando compreender os fenômenos didáticos relacionados ao ensino e à aprendizagem de Matemática, para todos os níveis de ensino e para a formação do professor que ensina Matemática. Os capítulos vinculam-se a estudos dos professores desta linha de pesquisa e seus orientandos, bem como de docentes convidados.

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE