

FÍSICA GERAL 1

Mecânica

HÉLIO TEIXEIRA COELHO

Professor Titular, Universidade Federal de Pernambuco

FÍSICA GERAL 1

Mecânica

HÉLIO TEIXEIRA COELHO

Professor Titular, Universidade Federal de Pernambuco

FÍSICA GERAL 1

Mecânica

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS. Proibida a reprodução total ou parcial, por qualquer meio ou processo, especialmente por sistemas gráficos, micro fílmicos, fotográficos, reprográficos, fonográficos e videográficos. Vedada a memorização e/ou recuperação total ou parcial em qualquer sistema de processamento de dados e a inclusão de qualquer parte da obra em qualquer programa jus cibernético. Essas proibições aplicam-se também às características gráficas da obra e à sua editoração.

Capa: *Guilherme Arcoverde*

Projeto gráfico: *Ricardo Santana da Cruz*

Revisão: *Renê Rodrigues Montenegro Filho e Luis Silva*

Impressão e acabamento: *Editora Universitária/UFPE*

Editora associada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Catálogo na fonte:

Bibliotecária Liliane Campos Gonzaga de Noronha, CRB4-1702

C672f Coelho, Hélio Teixeira.
 Física geral 1 : mecânica / Hélio Teixeira Coelho. – Recife :
 Editora UFPE, 2014.
 vi, 261 p. : il.

 Inclui Bibliografia.
 Inclui Índice.
 ISBN 978-85-415-0584-0 (broch.)

 1. Física – Estudo e ensino. 2. Mecânica – Estudo e ensino. 3.
 Ensino à distância. I. Título.

 530 CDD (23.ed.) UFPE (BC2014-193)

Editora  UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 | Várzea, Recife - PE CEP: 50.740-530
Fones: (0xx81) 2126.8397 | 2126.8930 | Fax: (0xx81) 2126.8395
www.ufpe.br/edufpe | livraria@edufpe.com.br

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Frutuoso Coelho de Araujo e a Nadir Teixeira de Carvalho Coelho, com amor, respeito e admiração.

APRESENTAÇÃO

O lançamento de mais um novo livro-didático em disciplina tão fundamental para a formação acadêmico-científica da nossa juventude, reveste-se de especial significado, sendo recebido por todos nós, alunos e professores, com satisfação e grande expectativa para que seu uso seja coroado de pleno êxito. Tal fato representa a concretização de um hercúleo esforço individual do autor – enfrentando um desafio não trivial –, resultante de sua experiência didática, adquirida no exercício de suas atividades como professor e pesquisador, ao longo de vários anos. Sintetiza, portanto, a expressão maior de sua criatividade na área do ensino com dimensão pedagógica, buscando expor o conteúdo da disciplina, segundo sua visão didática, da melhor forma possível de transmitir o conhecimento. Isto é o que caracteriza a publicação do presente livro escrito pelo professor Hélio Teixeira Coelho.

Este livro integra o primeiro volume de uma coletânea de quatro volumes abordando toda a matéria do curso padrão de física básica ministrado no ciclo geral e básico nas universidades brasileiras. Neste primeiro volume, denominado FÍSICA GERAL 1, o assunto focado é a Mecânica, que constitui o primeiro degrau de aprendizagem da física teórica. A coletânea dos quatro volumes previstos integra o projeto de desenvolvimento de livros-textos-didáticos promovido pela coordenação do curso de Licenciatura de Matemática, do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza (DM-CCEN) para o Programa de Ensino à Distância da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

O material exposto neste volume abrange toda a mecânica dita clássica, apresentados em doze capítulos, sequenciados didaticamente de modo consistente com a complexidade dos temas abordados, coerentemente subsidiados com a apresentação dos elementos matemáticos necessários para a compreensão do texto, constituindo-se na programação a ser vista durante o primeiro semestre escolar do curso de física geral.

O estudo da Mecânica representa o primeiro passo para a compreensão da física que, segundo definição atualizada, é a ciência da natureza que investiga e descreve as leis que regem todo o universo, tendo por base seus constituintes e suas interações. Desta forma, o aprendizado rigoroso – sem ambiguidade – dos conceitos de espaço, tempo, velocidade, aceleração, massa, forças conservativas e dissipativas, trabalho e energia, momento linear, momento angular, campo central, as simetrias da natureza e as leis de conservação, são ingredientes fundamentais na construção da física contemporânea e imprescindíveis para o entendimento de vários fenômenos físicos reais com os quais nos deparamos cotidianamente. Neste sentido, o livro escrito pelo professor Hélio Coelho, não só apenas ensina a mecânica clássica de forma clara e precisa, como também estimula o leitor a compreender a trajetória da evolução do conhecimento científico desde a Grécia antiga, até aos mais recentes avanços da física moderna, por meio das criativas e bem elaboradas seções intituladas Pausa para descontração.

Neste contexto, cabe aqui reconhecer que a rica trajetória profissional vivenciada pelo professor Hélio Coelho, deu-lhe o cabedal de experiência, conhecimento e motivação para consolidar esta relevante contribuição ao ensino básico da física, ao escrever o presente livro. O professor Hélio graduou-se em Engenharia Elétrica em 1964, pela então Escola de Engenharia da UFPE. Após realização de curso de especialização em Ciência e Tecnologia Nuclear, no Instituto de

Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN) no Estado de São Paulo, parte em 1967 para a Universidade da Pensilvânia, na Filadélfia, EEUU, onde conclui o mestrado (1967 – 1968) e o doutorado (em 1971), em Física Nuclear Teórica, partindo em seguida para programa de pós-doutorado (1972 – 1973), na Universidade de Frankfurt, na Alemanha. O então jovem doutor Hélio Coelho retorna à Recife em 1974, para integrar o grupo de pesquisadores que desde 1971 se encontrava fundando o atual Departamento de Física (DF) da UFPE. O professor Hélio tornar-se, assim, o primeiro pernambucano com doutorado no exterior que retorna a sua terra natal, e aqui desenvolve toda sua carreira científica, contribuindo até a presente data, para a construção e consolidação do conceituado DF/UFPE.

Assim, ao cabo destes intensos anos de trabalho, o professor Hélio nos presenteia com este elegante livro.

Parabéns Professor Hélio!

Ivon Fittipaldi
Professor Titular
Universidade Federal de Pernambuco

PREFÁCIO

Este livro foi escrito visando leitores especialmente do *Programa de Ensino à Distância*. São alunos do curso básico de ciências exatas (matemática, física, química, etc.), mas pode também ser usado por estudantes de engenharia ou por leitores interessados em ciências. O assunto tratado é a *mecânica* e faz parte do primeiro de uma série de quatro volumes. Contém o material padrão utilizado no ciclo básico pelas universidades.

Cada capítulo foi concebido com uma seção inicial na qual apresenta ao leitor um resumo do assunto a ser abordado. Na continuação, geralmente, ao final são apresentados um ou mais problemas simples, chamados *Paradinhas*, onde o leitor ao tentar resolvê-los, mostrará se entendeu a seção lida, de modo a poder progredir com segurança. São também apresentados *Exemplos* resolvidos e discutidos em uma ou mais seções imediatamente anteriores. Ao final de cada capítulo, uma seção intitulada *Pausa para descontração*, foi adicionada, podendo abordar temas, ou históricos, ou de filosofia científica, ou científicos, relacionados ao capítulo. Isto certamente levará o leitor a uma maior reflexão sobre o assunto abordado. Ao final do capítulo, além de um *Resumo*, teremos *Questões conceituais*, abordando os assuntos tratados. Algumas das questões poderão ter um nível mais aprofundado, sem, no entanto, exigirem cálculos elaborados. Finalmente, um conjunto de *Problemas* foi adicionado no final com diferentes graus de dificuldades sobre o assunto abordado.

Tivemos um cuidado especial ao escrever a *mecânica* de modo a usar o formato da lógica criada por *Aristóteles*, a qual foi seguida por Euclides na elaboração dos *Elementos de Geometria*. Este formato é até hoje utilizado em todas as ciências exatas. Desta maneira o leitor poderá entender melhor como a ciência foi construída.

Algumas noções de matemática, necessárias à leitura bem sucedida do texto são apresentadas de imediato. São chamadas de *Digressão matemática* e tratam de temas como vetores, matrizes, etc.

O material contido neste livro é normalmente dado nos cursos de física geral num primeiro semestre escolar, admitindo-se cada semana com seis horas de aula. Como a física é uma ciência experimental, pressupõe-se que no decorrer de seu ensino seja ministrado um curso de laboratório. Material áudio-visual será também disponibilizado para um melhor rendimento no curso.

Os temas *Sistemas inerciais* e *Gravitação* normalmente fazem parte da *mecânica*. No entanto, vão ser tratados somente no volume 2, do contrário tornariam o volume 1 inviável para ser coberto em um semestre.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos à *Coordenação do Curso de Licenciatura de Matemática no Programa de Ensino à Distância da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)* pelo convite para

escrever este livro. Agradecimentos especiais ao professor Dr. Fernando Antonio Nóbrega Santos do Departamento de Matemática (DM) da UFPE.

Gostaria de agradecer aos professores abaixo relacionados pelos comentários e sugestões:

Professor Dr. Renê Rodrigues Montenegro Filho, Departamento de Física (DF), UFPE;
Professor Dr. César Zen, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul;
Professor Dr. Remo Ruffini, Universidade de Roma “La Sapienza” e presidente do Centro Internacional de Astrofísica Relativística (ICRANet);
Professor Dr. Hugo Celso Perez Rojas, ICIMAF, Havana, Cuba;
Professor William Artiles, DM-UFPE;
Professora Dr^a Helen Houry, Departamento de Energia Nuclear, UFPE;
Professor Dr. Leonardo Didier Coelho, Escola de Engenharia, UFPE;
Professor Dr. José Roberto Cavalcanti, Escola Politécnica, Universidade de Pernambuco (UPE);
Professor Dr. Michel Vallières, Drexel University, USA;
Professor Dr. Tapan K. Das, Universidade de Calcutá, Índia;
Professor Dr. André Vilela, Escola Politécnica, UPE.

Agradecimentos a Ricardo Santana da Cruz pela paciência e eficiência na digitação do texto;
Agradecimentos especiais ao doutorando Luis Silva pela revisão do texto e finalmente, ao Dr. Cristiano Bastos pelo fornecimento de dados sobre reações químicas.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

Comentários e sugestões para o aprimoramento de próximas edições deste livro devem ser enviados à Licenciatura em Matemática, modalidade Ensino à Distância através o endereço eletrônico ead@dmat.ufpe.br

CAPÍTULO 1

COMEÇANDO COM ALGUMAS DEFINIÇÕES

1-1 O que é física?

Num sentido mais amplo, a física pode ser definida como a ciência da natureza. Ciência significa conhecimento. Ela investiga as leis do universo através de seus constituintes e suas interações. Tem na matemática a linguagem natural para tornar dedutiva e quantitativa esta investigação. Por não conhecermos ainda todas as leis básicas da física e nem mesmo toda a matemática avançada necessária para descrevê-las, se torna impossível gerar uma ciência pronta, ou seja, dada as definições, as leis e a matemática, ter-se os resultados de deduções, como na geometria Euclidiana, por exemplo.

A física é constituída por várias teorias científicas, tais como a mecânica, o eletromagnetismo, a termologia, etc., onde cada uma tem suas próprias leis, dentro do sistema de lógicas pioneiramente criadas por Aristóteles ainda na Grécia antiga, e que devido a seu sucesso, ainda hoje é utilizado em todas as teorias científicas. Isto é mostrado no final deste capítulo, na seção **Pausa para descontração**. Todas estas teorias constituem o que se chama de física teórica. No entanto, existe também uma física experimental, que por suas características próprias, verifica, através da experimentação, a veracidade ou não de cada teoria proposta. É bom salientar que a física teórica e a física experimental são entendidas como indissociáveis, ou seja, não constituem ramos distintos da física. Cada uma delas tem seu próprio método científico.

Coube ao filósofo da ciência Karl Popper (1902 – 1994), após estudos aprofundados, propor a adoção de um **critério de refutabilidade ou falseabilidade**, segundo o qual, a característica precípua para que uma teoria venha a ser considerada científica, é que as suas afirmações sejam passíveis de refutações. No caso da física ela não pode ser também imune à comprovação experimental. A física usada atualmente e já conhecida no final do século XIX, e que não utilizava os conceitos que surgiram no início do século XX (como a mecânica quântica e a relatividade restrita), passou a ser conhecida como física clássica. Esta física utiliza situações numa escala macroscópica, tais que efeitos quânticos e/ou relativísticos sejam desprezíveis. A mecânica quântica, a relatividade e todas as teorias científicas da física clássica passaram pelo crivo do critério de Popper. Não apresentam até hoje qualquer resultado experimental em desacordo com a teoria correspondente. Vale salientar que na teoria da relatividade, os corpos podem se deslocar a grandes velocidades (próximos à velocidade da luz). Já na mecânica quântica, estudos são conduzidos no microcosmo (átomos, moléculas, núcleos atômicos, partículas elementares, etc.). Certamente, existem critérios matemáticos precisos, de se passar de uma teoria mais geral e aprofundada, normalmente na escala microscópica, para uma teoria clássica a ela relacionada. São estudos a serem vistos mais para frente.

Vale aqui salientar que a matemática não é uma ciência experimental. O teste de sua validade não é o experimento, mas possíveis refutações às proposições de sua teoria.

No volume I deste curso de física básica vamos estudar a mecânica clássica.

1-2 A relação da física com outras ciências

A física é hoje presente em praticamente todos os domínios do conhecimento humano, possivelmente por sua natureza fundamental e sua precisão na descrição dos fenômenos naturais a que se propõe. Nas ciências básicas como a química, a biologia, a astronomia, só para citar algumas, ou nas ciências aplicadas, como as engenharias e a medicina, são exemplos em grandes áreas de estudo, onde a física tem contribuído cada vez mais.

Com o advento da mecânica quântica, a química deixou de ser uma ciência meramente empírica. A estrutura atômica da matéria passou a ser precisamente explicada com o auxílio da teoria quântica, tendo na interação eletromagnética a força dominante nos diversos processos químicos. Assim sendo, sua relação com a física se tornou mais forte.

Na astronomia, a descrição precisa dos movimentos dos corpos celestes do sistema solar é algo que remonta do renascimento, utilizando as leis básicas da mecânica. Com a evolução da astronomia, novas áreas foram criadas, como a astrofísica. Nela, estrelas, galáxias e outros corpos, bem como muitos fenômenos celestes, são todos estudados, usando-se a teoria da relatividade e a mecânica quântica. Para situações mais específicas, outras áreas, como a física nuclear, são usadas.

Na biologia, estamos ainda num processo inicial de relacionamento, haja vista a dificuldade ainda presente de formulá-la nos moldes criados pelos gregos, tendo a geometria euclidiana como modelo. Certamente, estudos como aquele com a molécula DNA (abreviatura de ácido desoxirribonucléico), presente no processo da hereditariedade dos seres vivos, ou no conhecimento mais preciso do vírus da AIDS, ou no estudo cada vez mais aprofundado da neurociência, só para citar alguns exemplos recentes, atestam cada vez mais uma relação com a física. Por que isto? Porque em todos eles a força eletromagnética está presente, bem como, técnicas sofisticadas utilizadas na física experimental. Não é por acaso que nos dois primeiros anos da universidade, os alunos têm disciplinas sobre as diversas áreas da física.

Na medicina cada vez mais se utiliza equipamentos altamente sofisticados, tendo na física aplicada (física médica) o suporte fundamental.

Enfim, eis alguns exemplos marcantes desta relação que cada vez mais se fortalece.

Para finalizar esta seção, vale à pena ressaltar que como a matemática não é uma ciência empírica, a física se relaciona com ela para dispor de uma ferramenta rigorosa e poderosa, na descrição quantitativa dos fenômenos naturais.

1-3 Manipulando grandezas em física

A física precisa, devido à sua concepção, da medição de grandezas físicas, tais como, o comprimento, o tempo, entre outras. Entretanto, existe um número muito grande de tais grandezas. Fortunadamente, a maioria delas não é independente. É o caso mais simples da velocidade, definida como a razão entre as grandezas comprimento e tempo. Assim sendo, após aprofundados estudos e através de um acordo internacional, foram selecionados o menor número possível de **grandezas fundamentais**. Tal acordo aconteceu na 14ª Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, Paris, 1971, como base da criação do **Sistema Internacional de Unidades** ou **SI** (Système International). Para o estudo da mecânica, bastam três destas grandezas: comprimento, tempo e massa.

Cada grandeza fundamental é definida em termos de um **padrão**. Qualquer outra medida desta grandeza é com ele comparada. Uma unidade segue-se a cada medida daquela grandeza. Por exemplo, o comprimento de certa mesa é 15m, o que indica que ela é 15 vezes maior que o padrão e cuja unidade é o metro, com o símbolo m.

Tabela 1-1**Unidades de três grandezas básicas do SI**

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo da Unidade
Comprimento	metro	m
Tempo	segundo	s
Massa	quilograma	kg

A escolha dos padrões deve ser tal que eles sejam **acessíveis** e **invariantes**. Ao usarmos, por exemplo, a palma da mão aberta como um padrão de comprimento, com a morte, ou com um acidente da pessoa, este padrão não é mais acessível, além de variar de pessoa para pessoa, não sendo, pois, invariante.

Tabela 1-2**Prefixos para Unidades do SI**

Fator	Prefixo*	Símbolo	Fator	Prefixo*	Símbolo
10^{24}	iota-	Y	10^{-1}	deci-	d
10^{21}	zeta-	Z	10^{-2}	centi-	c
10^{18}	exa-	E	10^{-3}	mili-	m
10^{15}	peta-	P	10^{-6}	micro-	μ
10^{12}	tera-	T	10^{-9}	nano-	n
10^9	giga-	G	10^{-12}	pico-	p
10^6	mega-	M	10^{-15}	femto-	f
10^3	quilo-	k	10^{-18}	atto-	a
10^2	hecto-	h	10^{-21}	zepto-	z
10^1	deca-	da	10^{-24}	iocto-	y

* Os prefixos mais usados estão em negrito

Notação científica

Dependendo da magnitude de uma dada grandeza em física, se usa potências de 10 para expressá-las. Isto é o que se chama de **notação científica**. É o caso, por exemplo,

$$5.300.000 \text{ habitantes} = 5,3 \times 10^6 \text{ habitantes,}$$

$$0,0000032 \text{ s} = 3,2 \times 10^{-6} \text{ s} = 3,2 \text{ ms,}$$

$$1,5 \times 10^9 \text{ watts} = 1,5 \text{ GW,}$$

onde foi usada a notação da Tabela 1-2.

Abaixo destacamos alguns tópicos importantes na manipulação de grandezas que aparecem na resolução numérica de problemas.

Digressão matemática 1-1**Potenciação, ângulos e sistemas de coordenadas****Potenciação**

São úteis as seguintes regras de potenciação:

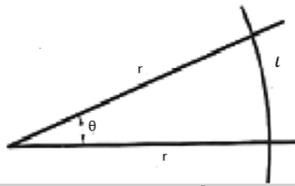
$$a \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

$$a^{-1} = 1/a, \quad (a \neq 0),$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

onde a , α e β são grandezas quaisquer. A Tabela 1-3 fornece vários símbolos matemáticos utilizados neste livro.

Ângulos



A medida de ângulo mais usual é o grau, que equivale a $1/360$ do percurso completo em torno da circunferência. Para ângulos menores, podemos usar graus, minutos (') e segundos (''), com $1' = 1^\circ/60$ e $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$; ou indicar os graus como um número decimal. Uma medida de ângulo mais útil é o radiano (rad). Um ângulo em radiano é definido como

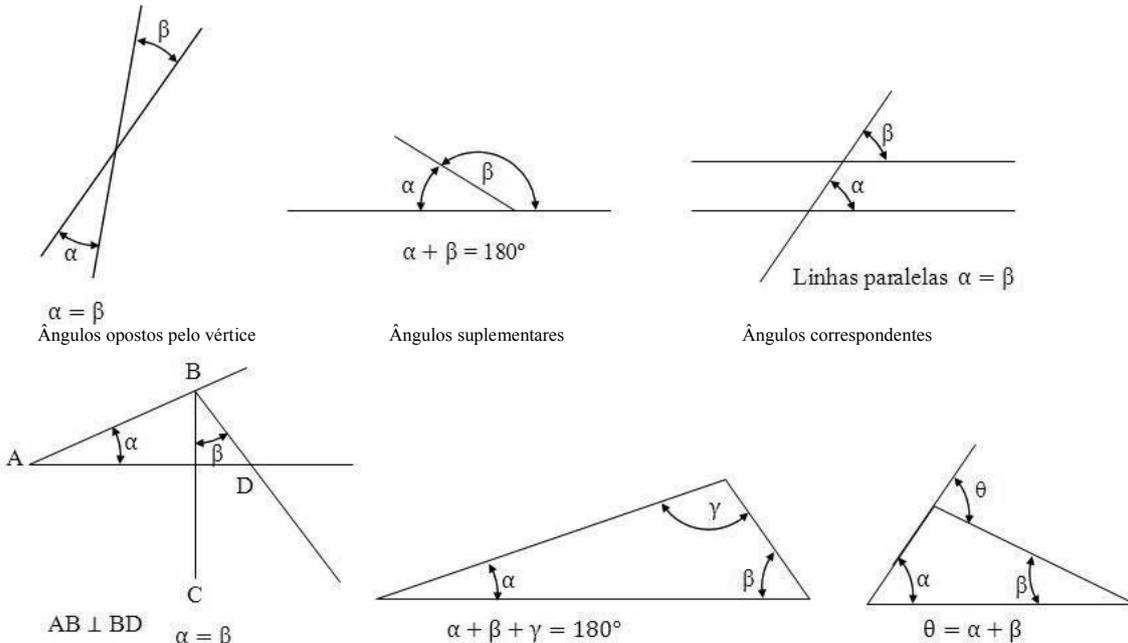
$$\theta = \frac{l}{r} \tag{D1-1}$$

De acordo com a figura, l é o comprimento de um arco de circunferência e r seu raio. O ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário.

Como o ângulo medido em radianos é a razão de dois comprimentos, ele é adimensional. A relação entre radianos e graus é obtida de uma regra de três simples:

$$\begin{cases} 360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad} \\ x \rightarrow 1 \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ.$$

Informações úteis com ângulos



Ângulos que têm lados respectivamente perpendiculares são iguais

Três sistemas de coordenadas ortogonais

Coordenadas cartesianas ortogonais

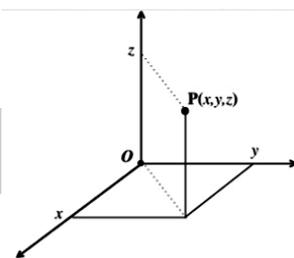
P é definido por suas coordenadas x , y , z .

Coordenadas esféricas

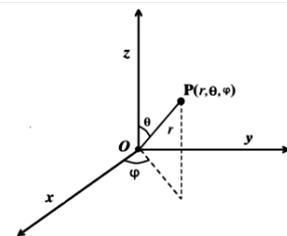
$$P \begin{cases} x=r \text{ sen } \theta \cos \varphi, \\ y=r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \\ z=r \cos \theta, \end{cases}$$

onde $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

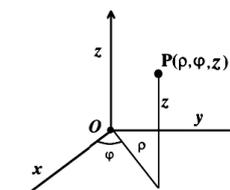
Coordenadas cilíndricas



Coordenadas cartesianas



Coordenadas esféricas



Coordenadas cilíndricas

$$P \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

onde $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Tabela 1-3

Símbolos matemáticos

\pm	mais ou menos	\geq	é maior ou igual a
∞	Infinito	\cong	aproximadamente igual a
\neq	é diferente de	\approx	quase igual a (assintótico)
\sim	é de ordem de	\equiv	idêntico a
\rightarrow	leva à	\forall	para todos, qualquer que seja
\Rightarrow	Acarreta	\gtrsim	maior ou equivalente a
\times	sinal de multiplicação	\lesssim	menor ou equivalente a
$!$	Fatorial	\nexists	não contém elemento de
\propto	é proporcional a	\exists	contém elemento de
$<$	é menor que	\therefore	portanto
\ll	é muito menor do que	$:$	logo
$>$	é maior que	$\frac{dx}{dt}$	derivada de x em relação a t
\gg	é muito maior que	$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x em relação a t
\leq	é menor ou igual a	Σ	somatório

Mudanças de unidades

Considere a situação de um carro que se move com velocidade $v = 60 \text{ mph}$ em New York. Aqui no Brasil, tal velocidade poderia ser expressa em m/s e teria o seguinte valor

$$v = 60 \text{ mph} = 60 \text{ mi/h} = 60 \times \frac{(1 \text{ mi})}{(1 \text{ h})}.$$

A estratégia para mudar de unidades é a seguinte: Para cada grandeza, isolada entre parênteses, colocamos seus valores equivalentes nas novas unidades, no caso, metro (m) e segundo (s).

Assim

$$v = 60 \times \frac{1,61 \times 10^3 \text{ m}}{3,6 \times 10^3 \text{ s}} = 26,833... \text{ m/s} \approx 26,8 \text{ m/s}. \quad (1-2)$$

A estratégia é a mesma para situações mais complexas.

Exemplo 1-1

Um carro atravessa um quarteirão linear de 500 m em Philadelphia em 10s. A velocidade limite nesta área é de 60 mph. a) O motorista infringiu a lei? Caso o resultado seja favorável, o motorista teria direito a refutar tal decisão? Analise esta situação à luz do critério de Popper.

Solução:

a) Vamos resolver o problema nas unidades usadas no Brasil. A velocidade, v , do carro é dada por

$$v = \frac{d}{t} = \frac{500 \text{ m}}{10 \text{ s}} = 500 \times \frac{10^{-3} \text{ km}}{(10/3600) \text{ h}} = 50 \times 36 \times 10^2 \times 10^{-3} \text{ km/h} = 180 \text{ km/h}.$$

Já $v_{\text{lim}} = 60 \text{ (mi)/h} = 60 \times 1,61 \text{ km/h} = 96,6 \text{ km/h}$.

Como $v > v_{\text{lim}}$, o motorista infligiu a lei!

b) A decisão gerada no item a) foi obtida através do uso da física. Como sabemos, a física é constituída de teorias científicas, todas com assertivas sujeitas a possíveis refutações, além de comprovações experimentais. Assim

sendo, de acordo com o critério de Popper, precisaria que a física usada na lei contivesse algum erro para que o motorista viesse a ter razão, e este não é o caso.

Algarismos significativos

Na situação analisada mais acima, a velocidade $v = 26,8 \text{ m/s}$ (Eq. (1-2)), foi aproximada de uma dízima periódica $26,8333\dots \text{ m/s}$. Este valor fornece a velocidade só com um dígito para que sua precisão não seja superior ao valor correspondente em mph. Os dígitos que aparecem na resposta são chamados de **algarismos significativos**. Pretendemos usá-los nos resultados finais de cálculos neste livro. Nos arredondamentos devemos ter o mesmo número de algarismos do dado de **menor precisão** no problema em questão.

Um erro, às vezes, comum entre estudantes é confundir algarismos significativos com **casas decimais**. Considere os tempos $25,8\text{s}$, $3,81\text{h}$ e $0,000124\text{s}$. Todos têm três algarismos significativos, mas têm uma, duas e seis casas decimais, respectivamente.

Arredondamentos

Em cálculos numéricos muitas vezes temos que fazer alguns arredondamentos. No exemplo acima (Eq. (1-2)), tivemos que dar a resposta só com três algarismos significativos. Assim para os demais dígitos à direita ($333\dots$), onde todos são menores que 5, a convenção é que podemos descartá-los, e manter os três algarismos significativos. No entanto, se tivéssemos uma resposta, como $26,853 \text{ m/s}$, onde os dígitos a serem descartados começam com um dígito maior ou igual a 5, o último dígito dos algarismos significativos é acrescido de uma unidade. Assim $26,853 \text{ m/s} \approx 26,9 \text{ m/s}$.

Exemplo 1-2

Arredonde para quatro algarismos significativos os números $17,3213$ e $21,505$.

Solução:

De acordo com a regra acima, o primeiro número será $17,32$ e o segundo $21,51$.

Ordem de grandeza

São estimativas rápidas feitas em ciência e tecnologia. Para tal, os números analisados das grandezas devem ser escritos em notação científica, mas com a potência de 10 correta. Por exemplo, $a = 1,4 \times 10^3 \text{ m}$ e $b = 3,2 \times 10^3 \text{ m}$, ambos têm a mesma ordem de grandeza 10^3 .

Já para $c = 1,4 \times 10^3 \text{ m}$ e $d = 7,8 \times 10^3 \text{ m}$, as ordens de grandeza são 10^3 para c e 10^4 para d , haja vista que $7,8$ é maior que 5 e próximo a 10.

Vantagens das soluções literais de problemas

Uma estratégia sábia para a solução de problemas evitando erros de arredondamentos cumulativos além de outros erros numéricos é resolver os problemas em forma literal, e só substituir por números na etapa final.

1-4 Análise dimensional

Existe na física uma tática muito útil e poderosa para checar de imediato se uma dada fórmula matemática poderia estar correta. É o que se chama de **análise dimensional**. Este procedimento é feito onde cada grandeza física é tratada só por sua natureza. Por exemplo, não importa se uma dada distância é expressa em metros ou pés. No caso, a distância tem dimensão de comprimento. Para efeito deste livro nos interessa somente especificar três grandezas fundamentais, comprimento, massa e tempo, representadas por símbolos L, M e T, respectivamente. Usaremos a notação $[\alpha]$ para denotar a procura das dimensões da grandeza física α . Por exemplo, as dimensões de velocidade v são escritas $[v] = L/T$ e as dimensões de volume $[V] = L^3$, etc. Este procedimento é um primeiro teste para verificar se uma dada expressão pode estar correta ou não. Isto ocorre se as dimensões nos dois lados da equação forem as mesmas.

Tabela 1-4

Dimensões de Quantidade Físicas

Quantidade	Símbolo	Dimensão
Área	A	L^2
Volume	V	L^3
Velocidade	v	L/T
Aceleração	a	L/T^2
Força	F	ML/T^2
Pressão (F / A)	p	M/LT^2
Massa Específica (M / V)	p	M/L^3
Energia	E	$M/L^2/T^2$
Potência (E / T)	P	$M/L^2/T^3$

Exemplo 1-3

Um estudante mostrou que o período de oscilação de um pêndulo de comprimento l num local de aceleração da gravidade g é dado pela fórmula

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dimensionalmente esta fórmula está correta?

Solução:

O fator numérico 2π é adimensional e não é considerado em análise dimensional. Para o segundo membro tem-se que $[g] = \frac{L}{T^2}$ e $[l] = L$.

Assim

$\left(\frac{L/T^2}{L}\right)^{1/2} = \frac{1}{T}$, que não corresponde ao valor T do primeiro membro. Logo, a fórmula está incorreta.

Exemplo 1-4

Verifique se a equação $v^2 = v_0^2 + 2ax^2$ está correta dimensionalmente, onde v e v_0 são velocidades em instantes diferentes, a é aceleração e x uma distância.

Solução:

As dimensões de v^2 e v_0^2 são iguais $(L/T)^2$. Já a tem dimensão L/T^2 e x tem L. Assim ax^2 tem a dimensão $(L/T^2) \times (L^2) = L^3/T^2$, diferente das dimensões de v^2 e v_0^2 . A equação está, pois, incorreta.

1-5 Tempo

No SI a unidade de tempo é o **segundo** (s). Historicamente foi definida em termos da rotação da Terra e era igual a (1/60) (1/60) (1/24) do dia solar médio. Vejamos rapidamente como a aferição do tempo evoluiu com o tempo.

O tempo na antiguidade

Na antiguidade medidas do tempo eram feitas usando-se vários tipos de “relógios”. Em torno de 3.000 AC surgiu o **relógio solar** no Egito. Ele baseava-se no movimento aparente do sol pela abóbada celeste e na conseqüente deslocação da sombra projetada pela iluminação de uma haste

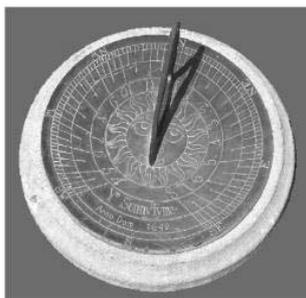


Figura 1 - 1 Relógio solar

vertical sobre uma escala graduada horizontal, na forma de quadrante. O seu inconveniente é só funcionar durante o dia. Ainda nesta região e por volta de 1400 AC apareceram registros da existência do **relógio de água** (clepsidra, do grego, ladrão de água). Era constituído por um vaso com forma de um tronco de cone, onde se colocava água. Dispunha de um pequeno orifício na sua parte inferior, através do qual escoava a água para um recipiente abaixo,



Figura 1 - 2 Clepsidra encontrada no Egito em torno de 1400 AC. (Science Museum, Londres, Inglaterra)

contendo uma escala graduada vertical. Ao baixar o nível da água

na clepsidra e para compensar a diminuição do fluxo de água através do orifício, o diâmetro do vaso superior teria que decrescer, obrigando tal vaso a ter a forma do cone truncado, como visto na Figura 1-2 . Com base na velocidade de escoamento da água do vaso superior para o inferior, um intervalo de tempo era aferido. Mais tarde, o **relógio de areia** (ampulheta), baseado em princípio semelhante, foi também usado. Estes relógios foram disseminados ao longo do tempo nos períodos dos impérios Grego e Romano.

O tempo na idade média

Na Europa, na idade média surgem, os primeiros relógios totalmente mecânicos. Para o funcionamento contínuo deles, existiam sistemas adequados de se “dar corda”. Em 1292 é construído o relógio da catedral de Canterbury. Na Figura 1- 3 é mostrado um relógio mecânico do século XIV (Museu Mainfränkisches, Würzburg, Alemanha).

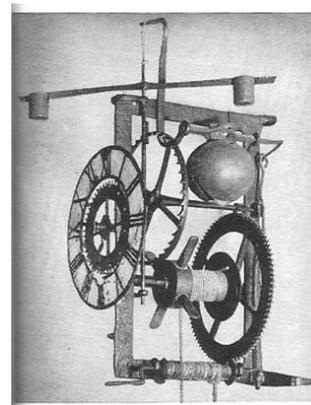


Figura 1 - 3 Relógio mecânico

O tempo no renascimento



Figura 1 - 4 Carrilhão (Museu Victoria and Albert, Inglaterra)

Em torno de 1582, Galileu observou em uma solenidade tediosa na catedral de Pisa que um longo lustre levemente oscilava. Notou ele, ao comparar os períodos de oscilação do referido lustre com o ritmo de seu pulso, que estes períodos permaneciam praticamente os mesmos, independentemente dos tamanhos decrescentes dos arcos de oscilação. É o que se chama de isocronismo. Veremos nos próximos capítulos que este período só depende basicamente do comprimento do pêndulo (ver também o Exemplo 1-3). Mais tarde, em torno de 1658, o físico e astrônomo Christiaan Huygens, através de estudos sobre a cicloide, aperfeiçoou o relógio de pêndulo, tornando-o rigorosamente isócrono. Assim os famosos carrilhões foram possíveis de serem construído, com excelente precisão. Um exemplar pode ser visto na Figura 1- 4.

O tempo na era dos piratas

Qualquer ponto P sobre o globo terrestre pode ser localizado através da interseção de duas circunferências neste ponto. A primeira obtida da interseção da superfície terrestre com um

plano paralelo ao plano do equador, e passando por P, chamada de **paralelo**. A segunda obtida, da interseção da superfície terrestre com um plano passando por P e pelos polos Norte (N) e Sul (S) terrestres, chamada de **meridiano**.

Este procedimento já era conhecido na antiguidade, haja vista, os mapas do astrônomo grego Ptolomeu. O equador marca o paralelo com zero de latitude. Outros paralelos podem ser determinados, por exemplo, através do esquema mostrado na Figura 1-5. Ao se procurar a latitude em P, mede-se o ângulo θ , entre, a direção da estrela Polar (\star) que é uma estrela fixa, e a vertical em P.

A latitude é representada por λ e vale

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (\text{em rad}), \quad (1-3)$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ rad, já λ varia de

0 e $-\pi/2$ rad, ao norte (sinal +) ou ao sul (sinal -) do Equador. Cada meridiano

pode ser estabelecido pelo conhecimento de um ângulo, ϕ , chamado de longitude, o qual é medido a partir do meridiano de Greenwich (G), por passar por esta cidade próxima à Londres (ver Figura 1-5), a qual teve um papel histórico importante na aferição do tempo. O grande problema é a medição de ϕ , que está relacionada a medidas do tempo. A razão disto vem do fato que como a Terra leva 24 horas para completar uma rotação de 360° em torno do seu eixo, uma hora equivale a $1/24$ da rotação ou 15° . Imagine agora dois relógios, acertados no embarque em um navio, pela hora do porto. Dentro do navio um dos relógios é reajustado a cada dia no mar, quando o sol alcança o zênite. Assim cada hora de discrepância entre os dois relógios equivale a 15° de longitude.

No século XVIII a determinação da longitude se tornou um problema crucial. Na travessia do Atlântico, navios se perdiam, devido às tempestades, ou ataques frequentes por piratas. Vidas foram perdidas e a crescente riqueza das nações dependia de uma solução. O problema residia na não existência de cronômetros nesta época. Os relógios de pêndulos existentes deixavam de funcionar em mar aberto devido ao balanço dos navios.



Figura 1 - 6 Cronômetro

Em 1714, o parlamento inglês ofereceu o equivalente (em cotação atual), a US\$ 12 milhões, a quem resolvesse o problema. Muitos se candidataram a este prêmio. O relojoeiro inglês Jonh Harrison, pessoa altamente capaz, mas sem educação superior, devotou pensosamente quarentas anos do final de sua vida para resolvê-lo. Em 1773, já envelhecido e pouco antes de morrer, recebeu o prêmio das mãos do rei George III. O cronômetro estava assim inventado! Esta odisséia é contada em um dos livros sugeridos como **leitura adicional**, logo após a seção 1-8.

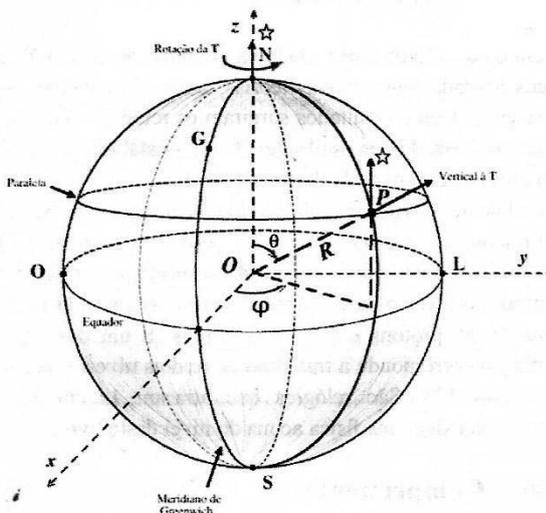


Figura 1 - 5 Paralelos e meridianos. O símbolo \star representa a estrela Polar que é praticamente fixa.

O tempo na era moderna

Com o advento da física moderna no início do século XX, o microcosmo passou a ser estudado mais acuradamente. Novas teorias, novas descobertas, levaram o mundo a um patamar mais

avançado. Como resultados surgiram os relógios elétricos e em seguida os relógios de pulso de quartzo, baseado nas oscilações de um cristal de quartzo, submetido a um campo elétrico, com precisão da ordem de 1s de atraso por mês.

Atualmente, são usados relógios altamente precisos, baseados na radiação atômica de elementos químicos. O **segundo** no SI é definido como 9.192.631.770 oscilações da luz (de um comprimento de onda especificado) emitida por um átomo de césio 133 (lembre que período de tempo é o inverso da frequência correspondente). O césio 133 ou Cs^{133} é o átomo cujo núcleo tem $Z=55$ prótons e $N=78$ nêutrons. É um dos vários isótopos do césio existentes. Esta radiação corresponde à transição entre dois níveis hiperfinos de energia do estado fundamental do césio 133. São relógios que atrasam 1s em 3×10^{10} anos! Uma explicação mais detalhada, exige uma física acima do nível deste livro.

1-6 Comprimento

Como já vimos no SI, o metro (m) é a unidade de comprimento. Foi logo após a revolução francesa, em 1789, que se criou o metro, através do então estabelecido comitê de reforma do sistema de pesos e medidas. O metro foi assim definido como a décima milionésima parte da distância do pólo norte ao equador, através do meridiano que passa por Paris. Por que esta definição? Com efeito, tome como raio da Terra $R = 6,371 \times 10^6$ m, e ainda sabendo que a distância polo norte-equador, tomada ao longo daquele meridiano é

$$R/2 = 10,007543 \times 10^6 \text{ m} \approx 10^7 \text{ m}, \text{ então, } \left(\frac{1}{10 \times 10^6}\right) \times 10^7 \text{ m} = 1,0 \text{ m},$$

o que justifica a maneira acima de como fora escolhida para definir o metro. Certamente, este não é um processo prático e preciso. Assim em 1889 foi substituído pela distância entre duas ranhuras gravadas em uma barra de uma liga de platina – irídio, mantida a uma determinada temperatura. Esta barra do metro padrão foi mantida no Bureau de Pesos e Medidas, próximo à Paris e replicada para várias partes do mundo. Com o tempo, este procedimento se mostrou ultrapassado devido à precisão exigida, cada vez mais, pela ciência.

Como, atualmente, as medidas da velocidade da luz no vácuo são extremamente precisas, é possível utilizar para c uma grandeza **definida**, de valor exato $c = 299.792.458$ m/s. Assim o metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz no vácuo em $1/299.792.458$ segundos.

Exemplo 1-5

Primeira determinação do raio da Terra por Eratóstenes no século III AC.

Solução:

Em Siene (hoje Assuã, no Egito, no dia do solstício de verão (21 de junho) os raios solares eram exatamente verticais. Nenhuma sombra era criada em uma vareta vertical ali colocada. Já na cidade de Alexandria(A), situada aproximadamente no mesmo meridiano de Siene(S), uma pequena sombra é criada em outra vareta, conforme esquematizado na Fig. 1-7.

O cálculo do raio R da Terra é feito pela simples leitura de θ (em graus), ou seja, do ângulo que os raios solares faziam com a vareta em Alexandria. Pela regra de três simples

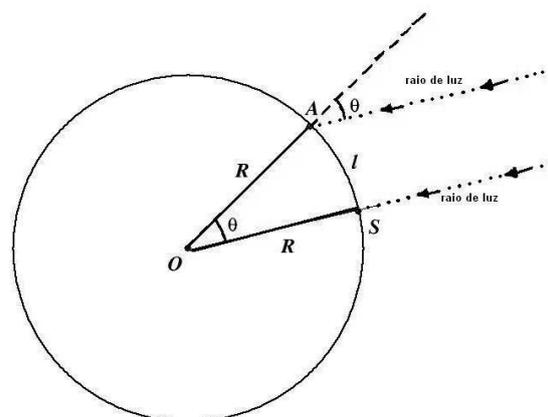


Figura 1 - 7 Método usado por Eratóstenes para determinação do raio da Terra.

$$\begin{cases} 2\pi \text{ rad} \rightarrow 360^\circ \\ \frac{l}{R} \text{ rad} \rightarrow \theta^\circ \end{cases} \Rightarrow R = \frac{360l}{2\pi \theta}, \quad (1-4)$$

onde l é a distância (já conhecida na época) entre Alexandria e Siene. Os valores usados por Eratóstenes foram

$\theta = 7,2^\circ$, $l = 5 \times 10^3$ stadia, onde 1 stadium ≈ 157 m, o que dá $R \approx 6,2 \times 10^6$ m, que é uma ótima estimativa!

Exemplo 1-6

Um ano-luz é a distância que a luz percorre no vácuo durante um ano. Considerando que a velocidade da luz no vácuo é de $3,0 \times 10^5$ km/s, quanto vale em km, um ano-luz?

Solução:

Em um ano, temos 365 dias $\times 24$ horas/dia $\times 60$ min/hora $\times 60$ segundos/min = 31536000 segundos $\approx 3,2 \times 10^7$ segundos. Um ano-luz, que é a distância que a luz percorre no vácuo durante um ano é então dado por $3,0 \times 10^5$ km/s $\times 3,2 \times 10^7$ s = $9,6 \times 10^{12}$ km.

1-7 Massa

O Quilograma Padrão

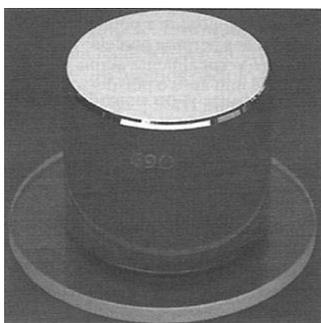


Figura 1 – 8 Quilograma padrão

O padrão de massa do SI é um cilindro de platina-irídio mantido no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, nas proximidades de Paris, ao qual foi atribuída, por acordo internacional, a massa de 1 quilograma. Cópias precisas desse padrão existem em laboratórios de padronização em outros países. As massas de outros corpos podem ser determinadas comparando-as com uma dessas cópias.

Um Segundo Padrão de Massa

Por razão de maior precisão, foi criado um segundo padrão de massa. Hoje é usado o átomo de carbono, do isótopo 12 (isto é, ele tem 6 prótons e 6 nêutrons no núcleo, e tem como símbolo C^{12}), ao qual, por acordo internacional, foi atribuída uma massa em unidades de massa atômica (u). A relação entre as duas unidades é a seguinte:

$$1 u = 1,6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}, \quad (1-8)$$

com uma incerteza de ± 10 nas duas últimas casas decimais. Experimentalmente, com razoável precisão, as massas de outros átomos podem ser determinadas em relação à massa e C^{12} .

Surpreendentemente, sabe-se que volumes iguais de gases diferentes, na mesma pressão e temperatura, têm o mesmo número de objetos (que podem ser, ou átomos, ou moléculas, ou íons, etc.). Isto é decorrente das leis de Newton, como veremos no volume II, na termologia. Admite-se que estes gases têm densidades naturalmente baixas, de tal forma que seus objetos estejam suficientemente afastados uns dos outros de modo que eles não interajam entre si. A partir de resultados experimentais, este número, chamado de número de Avogadro, em homenagem a Amadeo Avogadro (1776-1856), seu criador, foi estabelecido como $A = 6,02 \times 10^{23}$ objetos. Para lidar com número tão grande de objetos, a química e a termologia utilizam outra unidade, o **mol**. O **mol** é definido de modo que a massa de um mol de átomos de C^{12} seja exatamente 12g. Assim sendo,

1 mol de C^{12} contém $6,02 \times 10^{23}$ átomos de C^{12} ;

1 mol de moléculas de H_2O contém $6,02 \times 10^{23}$ moléculas de H_2O ;

1 mol de íons NO_3^- contém $6,02 \times 10^{23}$ moléculas NO_3^- ; e assim por diante.

Os químicos usam pesos moleculares que são as massas em gramas de um mol de moléculas.

Assim ao invés de se medir o número de objetos em unidades, se mede em termos de seu número de mols. É algo similar ao que fazemos no nosso dia-a-dia quando selecionamos 1 dúzia (ou 12) de ovos, 1 cento (ou 100) de laranjas ou 1 resma (ou 500) de folhas de papel, etc., para indicar quantidades maiores de objetos.

Exemplo 1-7

Um mol de moléculas de oxigênio O_2 possui massa aproximadamente igual a 16g e nas condições normais de temperatura e pressão ocupa um volume de 22,40 l. Quantos átomos de oxigênio existem em 4,48 l de O_2 ? Admita baixa densidade do gás.

Solução:

1 mol ocupa o volume de 22,40 l. Sendo assim, em 4,48 l de O_2 temos $4,48/22,40 = 1/5$ mols de O_2 . Como em um mol temos $6,02 \times 10^{23}$ moléculas de O_2 , em 1/5 mols temos $1,2 \times 10^{23}$ moléculas de O_2 . Como em cada molécula de O_2 temos dois átomos de oxigênio, em 4,48 l de oxigênio temos $2 \times 1,2 \times 10^{23} = 2,4 \times 10^{23}$ átomos de oxigênio.

1-8 Pausa para descontração:
A ciência ocidental tem sua origem na Grécia antiga

Temos uma admiração pela Grécia antiga, porque foi lá onde nasceu a ciência ocidental há mais de 2500 anos. Dois filósofos gregos desta época, Platão e Aristóteles, considerados hoje como os maiores da antiguidade tiveram um papel fundamental neste processo. O primeiro foi o fundador de uma instituição que durou quase mil anos e que passou a ser conhecida como a **Academia de Platão**. Ela em muito se assemelhava às universidades de nossos dias. A filosofia de Platão era baseada no mundo das ideias, onde a razão era seu método de argumentação. O verdadeiro conhecimento era por ele chamado de **episteme**, o qual deveria ter como atributos sua natureza geral e universal, além de ser sistematizado. Geral por não ser particular e universal, por ser verdadeiro em qualquer parte do universo. Finalmente, sistematizado, por ser organizado. Aristóteles foi discípulo de Platão. Dele mais tarde passou a discordar pela criação de uma filosofia mais **empírica**.



Figura 1 – 9 Platão. A mão direita levantada com o indicador na vertical simboliza o mundo das ideias de sua filosofia.

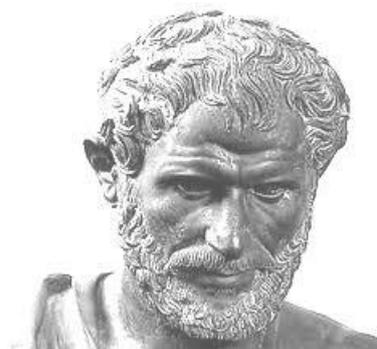


Figura 1 – 10 Busto de Aristóteles

Aristóteles acreditava que só da experimentação se poderia construir uma ciência. Ainda assim, foi o primeiro a criar um sistema de lógicas. O filósofo Euclides, também membro daquela **academia**, foi quem escreveu, utilizando tais lógicas, tratados cobrindo tópicos variados, entre eles, os famosos **elementos**, mais conhecidos hoje como **geometria euclidiana**. Estes livros são considerados os mais antigos tratados gregos existentes, dos quais mais da metade se perdeu no tempo. Eles estão divididos em treze livros. Os seis primeiros são sobre geometria plana, os três seguintes sobre aritmética e os três últimos versam sobre geometria no espaço. Euclides era considerado um

ótimo professor e de ter um caráter bondoso, o que facilmente atraía grande público para suas aulas. Estes atributos ajudaram-no também a disseminar sua obra. Nesta época, Platão já havia morrido e Atenas vivia seu apogeu, tendo como liderança importante, Alexandre o Grande. Ele fora educado por Aristóteles. Creditam-se a ele muitas das informações sobre matemática e astronomia, entre outras, trazidas de suas andanças pela China e Índia, e que foram bem utilizadas pela ciência grega. Em torno de 300 A.C. Alexandre morre e um período de disputas entre os generais do exército grego se instala. A parte egípcia do império era então comandada firmemente por Ptolomeu I. Homem de visão, funda em Alexandria uma escola nos moldes da Academia de Platão. É lá onde é erguida uma das sete maravilhas do mundo antigo, o **farol de Alexandria**. Esta escola era dotada entre outras coisas de uma extraordinária biblioteca. Para lá foram contratados, com bons salários, os melhores cérebros da época, entre eles, Euclides. Seu papel foi essencialmente, o ensino.



Figura 1 – 11 Uma provável imagem de Euclides

As imagens de Platão e Euclides não são rigorosamente conhecidas até hoje. A de Platão, na Figura 1-9, é tirada do afresco **Escola de Atenas**, pintado por Raphael, no Vaticano, com o rosto emprestado de Leonardo da Vinci. Já a de Euclides, muitas vezes é inspirada na imagem do mesmo afresco, com o rosto emprestado de Bramante, famoso arquiteto do renascimento que ampliou parte do Vaticano.

A geometria euclidiana começa com uma lista de 23 definições. Define o que é ponto, reta, etc. Em seguida são dados cinco **axiomas** (ou noções comuns; por exemplo, “o todo é maior que a parte”) e finalmente, **cinco postulados**, os quais são menos óbvios e dizem respeito ao assunto em discussão, no caso, à geometria plana. Este conjunto, forma de acordo com o sistema de lógicas criado por Aristóteles, a **lógica formal ou menor** da obra. Em seguida vem a parte dedutiva da obra, chamada de **lógica maior ou metodológica**, onde os métodos, teoremas, etc. são apresentados.

Vale aqui salientar que se olhando a obra de Euclides com olhos de hoje, ela apresenta várias falhas, mas é considerada, assim mesmo, notável. Devido ao seu estrondoso sucesso através dos séculos, foi o **método científico** por ele utilizado o inspirador para todas as ciências até os nossos dias. Com o passar dos tempos, verificou-se que outros matemáticos em suas obras, fundiram os axiomas com os postulados. Veremos que na criação da mecânica por Newton, axiomas não mais aparecem. Esta mecânica utiliza na sua elaboração o sistema de lógicas da geometria de Euclides, começando com as definições, seguidas dos três postulados, conhecidos como leis de Newton.

Em suma, na construção de um conhecimento científico (episteme), como a física, devemos seguir um **método científico**:

- i) Começamos com a **observação**, através de fatos experimentais, inerentes a esta ciência, seguidas das **definições** numa ordem lógica;
- ii) Através da **imaginação**, motivadas pela observação, criam-se os **postulados** ou as leis aplicáveis a tais conceitos;
- iii) **Proposições lógicas** são daí deduzidas, tendo a matemática, como a ferramenta natural para fornecer o rigor e a exatidão necessárias.

Os itens i) e ii) formam a **lógica formal ou menor** da teoria e o item iii) a **lógica maior**.

O critério de Popper é o teste final de validade da teoria científica proposta. No caso de uma teoria física, esta teoria também não pode ser imune à comprovação experimental.

Toda teoria científica em física tem um domínio de validade. Por exemplo, na teoria da relatividade a massa de um corpo varia com sua velocidade. Já na mecânica de Newton, isto não ocorre, haja vista que as velocidades envolvidas são muito menores que a velocidade da luz, c . A teoria da relatividade é assim mais ampla, englobando a mecânica de Newton, que é limitada a velocidades bem menores que c .

Tabela 1-6

O Alfabeto Grego: suas letras são bastante utilizadas como símbolos matemáticos.

Alfa	A		Ni	N	ν
Beta	B	β	Csi	Ξ	ξ
Gama	Γ	γ	Ômicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ, ε	Rô	P	ρ
Zeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Teta	Θ	θ	Ípsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	φ, ϕ
Capa	K	κ	Qui	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mi	M	μ	Ômega	Ω	ω

Material extra-curricular sugerido

1- *Como vejo o mundo*

Albert Einstein, Ed. Nova Fronteira, 1981

Este é um livro onde o famoso cientista fala sobre o social, o político, o cultural, o econômico e certamente sobre a ciência de uma forma brilhante.

2- *Platão e Aristóteles – os caminhos do conhecimento*

Marco Zingano, Odysseus Ed., 2002

Obra acessível a estudantes sobre dois dos maiores filósofos que influenciaram tanto o desenvolvimento da Ciência.

3- *Longitude*

Dava Sobel, Ed. Ediouro, 1997

Um livro muito interessante sobre a história de um gênio solitário, sem nenhuma educação superior que resolveu um difícil problema científico do século XVIII.

Resumo

Física

A física pode ser definida, num sentido mais amplo, como a ciência da natureza.

A física está presente direta ou indiretamente em grande parte das diversas atividades profissionais do mundo contemporâneo.

Critério demarcatório entre conhecimentos científico e não científico (Critério de Popper ou da refutabilidade)

A característica precípua para que uma teoria venha a ser considerada científica é que as suas assertivas sejam passíveis de refutações.

Além do mais como a física é uma ciência de natureza experimental, ela não pode também estar imune à comprovação experimental.

Grandezas físicas

Comprimento, tempo, velocidade são exemplos de grandezas físicas. A medição de cada grandeza chamada de **quantidade física** gera um **número** seguido de uma **unidade** correspondente.

Grandezas fundamentais

Na mecânica são o comprimento, o tempo e a massa. Os padrões referentes a essas grandezas devem ser **acessíveis** e **invariáveis**.

Notação científica

Por conveniência, esta notação utiliza potência de 10 para números, ou muito grandes, ou muito pequenos.

Mudança de unidades

O processo pode ser feito em maneira encadeada onde as unidades são tratadas como se fossem quantidades algébricas, até que apenas as unidades desejadas apareçam.

Ordem de grandeza

Um número arredondado à potência de 10 mais próxima.

Análise dimensional

É o processo utilizado em uma equação, onde as várias grandezas que lá aparecem são expressas em termos de grandezas fundamentais. A cada grandeza fundamental se associa um símbolo matemático. Na mecânica, comprimento \rightarrow L, tempo \rightarrow T e massa \rightarrow M. Se a equação estiver correta, pelo menos dimensionamente, os seus dois membros devem ter a mesma expressão matemática dimensional.

Comprimento

De acordo com o SI, o metro (m) é a unidade de comprimento, definido como a distância percorrida pela luz em $1/c$ segundos.

Tempo

O segundo (s) é definido em termos das oscilações da luz emitida por uma fonte do átomo de Cs¹³³.

Massa

O quilograma (kg) de acordo com o SI é definido de um padrão de massa de platina – irídio. Um segundo padrão de massa usado na escala microscópica é definido em termos do átomo de C¹².

Método científico

O método científico é o processo utilizado para construir uma teoria científica e também de utilizá-la. De acordo com ele, uma teoria científica deve conter:

i) as definições e os postulados, formando este conjunto o que se chama de **lógica formal**; ii) os métodos de operacionalizar tal teoria, conjunto este chamado de **lógica maior**. Certamente, esta teoria deve estar sujeita ao critério de Popper.

Toda teoria científica em física tem um domínio de sua validade.

Questões conceituais

- 1) Em certas embalagens de alimentos, encontramos informações nutricionais para cada 100g de alimento. Muitas delas dizem que são livres de gorduras trans. Se as informações estiverem arredondadas para uma casa decimal, é possível que o alimento contenha gordura trans? Justifique.

- 2) No filme *Super Size me*, o diretor e ator Morgan Spurlock passou 30 dias se alimentando exclusivamente em um restaurante *fast-food* americano. Considerando que em cada refeição ele comeu um sanduíche com 500 kcal, uma porção de batatas fritas com 230 kcal, um refrigerante com 220 kcal e um sorvete com 250 kcal, e que as necessidades diárias de um adulto são de 2000 kcal, responda:
- Quantas calorias, ele ingeriu além do necessário, durante os trinta dias?
 - Considerando que a cada 5 kcal ingeridas além do necessário, ele ganha aproximadamente 1 g de massa corpórea, quantos kg ele ganhou em 30 dias?
- 3) Imagine dois meridianos quaisquer cortando o equador terrestre em dois pontos, P e Q. A partir do polo Norte, N, formam-se dois arcos NP e NQ, e no equador o arco PQ. Como resultado, tem-se um triângulo NPQ sobre a esfera terrestre. Compare-o com um triângulo ABC desenhado sobre uma mesa plana.
- É correto afirmar que a soma dos ângulos internos de cada um destes triângulos é igual a 180° ?
 - Tendo em vista a resposta do item anterior, como fica a geometria euclidiana, admitida como uma teoria científica, sujeita ao critério de Popper?

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)** Um carro percorre 2500m pela Avenida Caxangá em 1min 40seg. Sabendo-se que a velocidade máxima permitida é de 80 km/h e que a tolerância dos radares é de 20% da velocidade máxima, responda:

- O motorista infringiu a lei?
- O motorista deveria ser multado?

2)* Uma das piscinas da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) possui 25m de largura, 50 m de comprimento e 2m de profundidade. Quando tempo será necessário para encher a piscina com um conta-gotas a uma taxa de 1 ml por segundo.

3)* a) Se a torneira de um domicílio passar a noite mal fechada, vazando a uma taxa de 2 ml por segundo, quantos litros de água serão desperdiçados em duas horas? b) E se em uma cidade com 100 mil domicílios isto ocorrer uma vez por dia em cada domicílio, quantos litros de água serão desperdiçados?

4)* a) Se você passar 30min por dia navegando no Facebook, quantos dias por ano você gastará no Facebook? b) E ao final de quantos anos, você terá passado mais de um mês (30 dias) no Facebook?

5)* Um maratonista profissional dá em média 180 passadas por minuto. a) Se ele é capaz de correr 1 km em 3min, qual é o comprimento de cada passada? b) Quantas passadas ele dará ao correr 42 km de uma maratona?

6)** Um relógio mecânico atrasa 10 segundos por dia, enquanto um relógio eletrônico atrasa apenas 1 segundo por dia. a) Supondo que os dois relógios fossem iniciados simultaneamente, depois de quanto tempo a diferença entre os horários dos relógios será de um minuto? b) Após quanto tempo os relógios marcarão novamente o mesmo horário?

7)* Uma célula animal típica tem um diâmetro médio de $20 \mu\text{m}$ onde ela foi aproximada a uma esfera. Acredita-se que a espécie humana possua pelo menos 100 trilhões de células. Qual é o volume ocupado por todas as células do corpo humano?

8)* Gastamos em média, 120 calorias por hora de estudo. Quantos minutos deveríamos estudar para queimar 504 calorias, que é a mesma quantidade de calorias que o *Big Mac* possui?

9)* Considerando que um típico bom estudante da UFPE passa uma hora por dia em ônibus, que o semestre letivo tem 16 semanas, que ele terá 4 anos de graduação, 2 anos de mestrado e 4 anos de doutorado, quanto tempo ele perderá no ônibus ao longo desses 10 anos?

10) * Sabe-se que um homem médio possui 5 l de sangue. Motoristas flagrados excedendo o limite de 0,2 gramas de álcool por litro de sangue pagarão multa, perderão a carteira de motorista por um ano e ainda terão o carro apreendido. Uma lata de cerveja possui 1,0 g de álcool. Quantas latas de cerveja são possíveis de se beber sem que se seja multado no teste do bafômetro?

11)** Considere que uma folha de papel tem 0,074 mm, e que a distância média da Terra à Lua é de 370.000 km. a) Quantas folhas de papel deveriam ser utilizadas para termos uma pilha de papel da Terra à Lua? b) Se tivéssemos um mol de folhas de papel, quantos mols de papel da Terra à Lua deveriam ser usados?

12)* Na expressão $F = -kx$, F representa uma força e x um comprimento. Se a fórmula dimensional da força é MLT^{-2} , qual é a fórmula dimensional de k?

CAPÍTULO 2

MOVIMENTO RETILÍNEO

2-1 Movimento

Através do uso do método científico pretendemos continuar no processo de construção da mecânica, introduzindo novos conceitos e definições. Vamos começar a estudar o movimento. Historicamente, foi um longo processo penoso para o homem sistematizar o movimento de um corpo no espaço. Na Grécia antiga o mundo era melhor descrito quando os objetos estavam em repouso. Daí o grande desenvolvimento da geometria euclidiana. Acreditavam então que, se um dado objeto começasse a se movimentar, este deveria naturalmente regressar a um dos cinco elementos fundamentais da natureza do qual lhe era predominantemente constituído: terra, água, ar, fogo e éter. Por isso, a fumaça sobe, enquanto corpos sólidos caem. Mas como quantificar tais ideias? Por exemplo, na queda de um corpo? Para eles, os mais pesados cairiam com maior rapidez. A Terra era considerada como centro do universo. Ao seu redor giravam a Lua, o Sol e alguns dos planetas, então conhecidos, todos segundos eles formados de elementos gasosos. Estas ideias perduraram na humanidade por cerca de 20 séculos e foram incorporadas, mais tarde, pela Igreja como dogmas. Com o início do renascimento (mais ou menos no tempo em que o Brasil estava sendo descoberto), estes dogmas começaram, sorrateiramente, a serem questionados. Estes questionamentos resultaram de trabalhos anteriores criados por filósofos gregos e posteriormente por pioneiros como Copérnico (1473-1543) e Kepler (1571-1630). Mais tarde, da notável contribuição de Galileu (1564-1642). Uma ciência mais robusta começara a triunfar frente às ideias obscurantistas da época. Galileu foi o grande criador de muitos dos temas deste livro. Em particular, de praticamente tudo o que vai ser tratado neste capítulo, referente ao movimento. Este grande cientista foi considerado por Einstein como o pai da física e da ciência moderna. Além do mais, é considerado como o criador do método experimental na física. Vale aqui salientarmos como as suas ideias revolucionárias influenciaram outras áreas da atividade humana.

Com efeito, já no fim da idade média, a pintura, além de usar técnicas aprimoradas na produção de tintas, já havia incorporado a perspectiva, esta resultante da evolução da matemática. Tais pinturas se tornaram mais realistas, apesar de somente fornecer uma ainda estática das coisas. A ideia de movimento foi pioneiramente explorada, por exemplo, no quadro a “Batalha das Amazonas” pelo pintor flamengo Peter Paul Rubens (1577-1640), conforme visto na Figura 2-1.



Figura 2 - 1 Batalha das Amazonas, Peter Paul Rubens (1577-1640). Pintor Flamengo.

Neste capítulo vamos nos deter no movimento **unidimensional**, ou seja, **retilíneo**. Este movimento pode ser ao longo de uma linha reta, **horizontal**, ou **vertical**, ou mesmo **inclinada**. Deste estudo, vamos gerar novas definições de grandezas que serão úteis não só na construção

da mecânica, como também na física como um todo. O objeto em movimento aqui considerado será tratado como **pontual**, ou seja, como uma **partícula**, já que todas as suas partes, por hipótese, se movem numa mesma direção e com a mesma velocidade. Imagine o leitor na filmagem de uma bola em movimento retilíneo, onde cada instante fica gravado no filme, numa série de quadros estáticos. Após a revelação, o filme em movimento, nos dá também uma imagem da bola em movimento. Este é basicamente o processo que vamos estudar aqui. A **partícula** é a bola, o seu **movimento** é retilíneo e a **série de situações da bola** (suas posições, as variações de sua rapidez) formam uma área conhecida na mecânica como **cinemática**, ou seja, o estudo do movimento, como tal, sem nos determos nos agentes causadores deste movimento. No exemplo da bola, o agente causador do movimento poderia ter sido um chute ou algo similar.

2-2 Posição e deslocamento

Conforme visto na digressão matemática 1-1, a localização no espaço de um objeto depende de suas coordenadas, medidas relativas a algum ponto de referência, normalmente a origem (ponto 0 vista nas figuras). No caso de um movimento unidimensional, precisamos de um eixo x , com uma origem e dois sentidos, o sentido positivo e o sentido negativo, conforme ilustrado na Figura 2-2. A unidade utilizada está também indicada na figura.

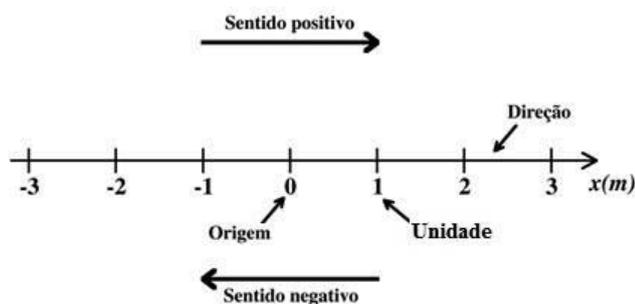


Figura 2 – 2 Eixo x com origem e a indicação de direção e dos sentidos positivo e negativo, além da unidade.

A posição de certo ponto P que se desloca ao longo do eixo x , é dada através da coordenada x , que por sua vez é função do tempo t . A equação paramétrica resultante $x = x(t)$, fornece esta posição a cada instante. Note que o tempo na mecânica clássica não é uma coordenada; é na realidade um parâmetro variável, daí o nome acima de equação paramétrica.

A variação de x para duas posições sucessivas quaisquer, é chamada de deslocamento Δx , e definida por

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (2-1)$$

Quando $\Delta x > 0$, o deslocamento se faz no sentido positivo; quando $\Delta x < 0$, o deslocamento se faz no sentido negativo. Observe que Δx é na realidade uma **grandeza vetorial**, já que é caracterizada por um **módulo** (ou seu valor absoluto), uma **direção** (a linha reta) e um **sentido** (sentido +, ou sentido -, como mostrado na Figura 2-2).

Digressão matemática 2-1

Vetores I

Definição Elementar: Vetor é uma entidade caracterizada por um módulo (ou magnitude), uma direção e um sentido. A definição de vetor não especifica sua posição, que é arbitrária.

Exemplos: deslocamento, velocidade, aceleração, etc. Já, temperatura, massa, tempo são chamadas de escalares. Elas não satisfazem à definição acima.

Notação

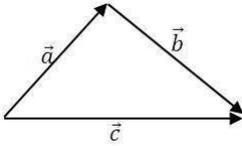
\vec{A} , \vec{a} , ..., são exemplos de vetores (não esqueça da seta).

B, b, são exemplos de escalares.

Propriedade 1: Representação geométrica de vetores

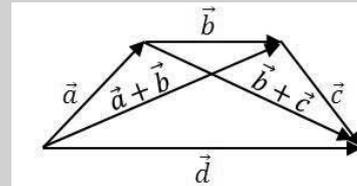
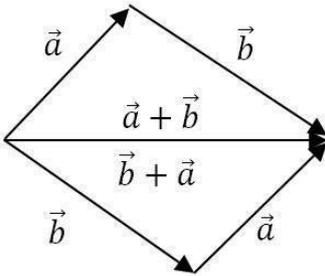
Vetor \vec{a} :  Setas (ou flecha) com comprimento proporcional à sua grandeza.

Propriedade 2: Lei do triângulo para adição de vetores



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Propriedade 3: Lei do paralelograma para adição de vetores



$$\vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

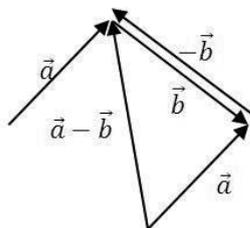
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

Propriedade 4: Duas propriedades da adição de vetores

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ lei comutativa.

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ lei associativa.

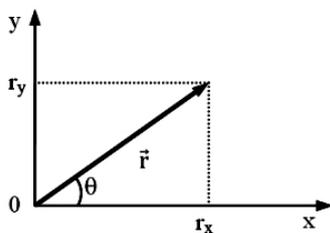
Propriedade 5: Subtração de vetores



$$\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-\vec{b})$$

Componentes de vetores

Uma componente de vetor é sua projeção sobre um eixo.



Em duas dimensões (2D), o vetor posição \vec{r} tem duas componentes, r_x e r_y , dadas por

$$\begin{cases} r_x = r \cos \theta, \\ r_y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (D2 - 1)$$

onde $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

As coordenadas r e θ são chamadas de **coordenadas polares**.

Em três dimensões (3D), \vec{r} tem três componentes, r_x , r_y e r_z dadas por (ver Digressão matemática 1-1):

$$\begin{cases} r_x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ r_y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ r_z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (D2 - 2)$$

onde $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

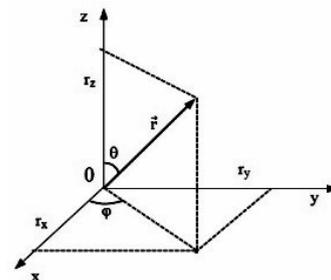


Figura D2-1 Coordenadas Esféricas

! *Cuidado!* θ varia de 0 a π e não a 2π , para evitar duplicidades. Verifique!

! *Atenção!* O caso acima se refere ao vetor posição, porém se aplica a qualquer outro tipo de vetor.

Módulo de um vetor

Em 3D, \vec{a} tem sempre três correspondentes, a_x , a_y , e a_z . Seu módulo a (sem a seta, pois agora queremos saber sua magnitude), é definido como

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (D2 - 3)$$

Para saber sua orientação no espaço, precisamos conhecer os ângulos θ e ϕ (em 2D, só de θ , através de $\text{tg } \theta = a_y/a_x$).

2-3 Velocidade média

Supondo que certo objeto P se desloque a uma velocidade não uniforme (um carro acelerado, por exemplo), podemos então definir uma **velocidade média** entre dois instantes quaisquer t_1 e t_2 com $x(t_1) = x_1$ e $x(t_2) = x_2$, por

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2 - 2)$$

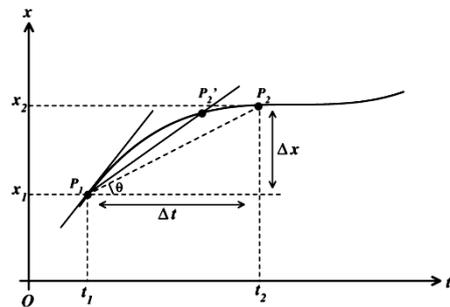


Figura 2 – 3 Interpretação geométrica da velocidade média.

Certamente, a definição acima inclui o caso trivial de se ter para P uma velocidade uniforme. Nesta situação, a velocidade média coincide com a velocidade uniforme.

A equação dimensional de velocidade é LT^{-1} e no SI a velocidade é expressa nas unidades m/s. Pela Figura 2-3, $\bar{v} = \text{tg } \theta$, meça a inclinação da reta que liga P_1 a P_2 .

Esta é a visão geométrica da velocidade média. Para se ter uma visão mais realista do movimento, esta velocidade deve ser calculada para intervalos de tempo cada vez menores.

Exemplo 2-1

Considere a tabela abaixo do movimento de uma bicicleta ao longo de uma estrada retilínea:

t (s)	0	1,0	2,0	3,0	...
x (m)	1,0	4,0	7,0	10,0	...

- a) Desenhe o gráfico $x \times t$.
- b) Que conclusões referentes ao movimento pode-se tirar deste gráfico?

Solução:

a) O gráfico é mostrado na Figura 2-4. É uma reta $x = a + bt$, onde a e b são constantes a serem determinadas. Para $t = 0$, $x = 1,0 \Rightarrow a = 1,0$. O parâmetro b representa a tangente do ângulo de inclinação da reta, ou seja, $\text{tg } \theta = \frac{9,0}{3,0} = 3,0 \Rightarrow x = 1,0 + 3,0 t$.

b) É fácil verificar que para dois tempos quaisquer t_j e t_i , onde supõe-se $t_j > t_i$, tem-se que $\Delta t = t_j - t_i > 0$, os quais correspondem respectivamente, a dois comprimentos percorridos x_j e x_i , onde $x_j > x_i$, o que fornece $\Delta x = x_j - x_i > 0$. Ora, isto implica dizer que o referido movimento retilíneo se dá no sentido positivo do eixo x .

A velocidade média do movimento é dada por

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{tg } \theta = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{3,0 \times 10^{-3} \text{ km}}{\left(\frac{1}{3600}\right) \text{ h}} \approx 7,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

a qual é constante. Daí o movimento ser uniforme.

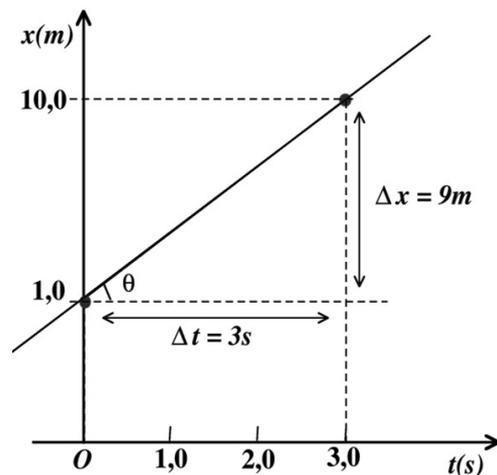


Figura 2 – 4 Gráfico x versus t do Exemplo 2-1

Exemplo 2-2

Saindo de Recife num passeio ao campo, um motorista percorre 10 km, numa estrada reta a uma velocidade de 50 km/h. Daí pára por ter um pneu furado. Na troca do pneu gasta 15 minutos. Segue, então, viagem por mais 10 km, e após 10 minutos chega ao seu destino.

- a) Desenhe o gráfico x versus t do movimento do carro.
- b) Qual a velocidade média neste percurso?

Solução:

a) No gráfico, os pontos a e b representam a parada e a saída do carro, respectivamente, para a troca do pneu. Já c representa o ponto de chegada ao destino. O carro pára em a, após um tempo

$$t_a = \frac{10 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = \frac{1}{5} \text{ h.}$$

Permaneço parado por

$$10 \text{ min} = \frac{10}{60} \text{ h} = \frac{1}{6} \text{ h.}$$

Logo, o tempo total de viagem, Δt , é a soma

$$\Delta t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \text{ h} = \frac{37}{60} \text{ h.}$$

b) Como o percurso total é de 20 km a velocidade média é finalmente dada por

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20 \text{ km}}{\frac{37}{60} \text{ h}} = 32,43 \text{ km/h.}$$

Esta velocidade é a tg θ mostrada na Figura 2-5.

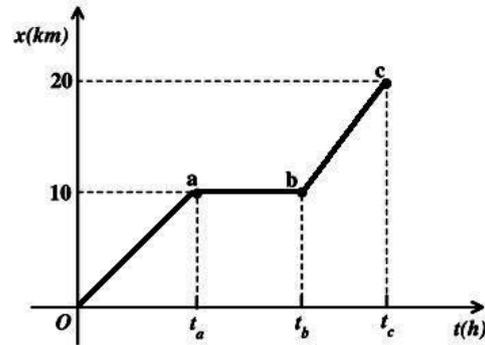


Figura 2 – 5 Gráfico x versus t referente ao Exemplo 2-2.

Paradinha 2-1

Um aluno caminha em linha reta a 3 km/h, todos os dias, de sua casa à escola, distante 2,5 km. As aulas começam às 8 h, mas ele sai de casa às 7 h. de modo a ter lá algum tempo extra para conversar com os amigos. Ao sair de casa e após caminhar 1,0 km encontrou um amigo que havia se acidentado. Para socorrê-lo teria que dispor de 20 minutos. Após o socorro, de quanto teria que aumentar sua velocidade, de modo a alcançar a escola em tempo limite de pegar o início da aula?

2-4 Velocidade instantânea

Imagine na Figura 2-3 o ponto P_2 se aproximando cada vez mais do ponto P_1 . Isto implica dizer que Δt é cada vez menor. Assim a velocidade média se aproxima de um valor limite, ou seja, de uma velocidade num único ponto $P = P_1 \equiv P_2$, chamada de **velocidade instantânea**, v , no ponto P. Este processo matemático é a definição da derivada de x em relação a t, ou simbolicamente,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt} \tag{2-3}$$

Em qualquer instante t, v mede a inclinação da tangente à curva naquele ponto P. Esta é a interpretação geométrica da velocidade instantânea. A velocidade é também uma grandeza vetorial, haja visto ter módulo, direção e sentido. Note que $dx/dt > 0$ num ponto, indica que x está crescendo com t, enquanto $dx/dt < 0$, indica o contrário, ou seja, que x está decrescendo com t. Já $dx/dt = 0$ num ponto, indica que este ponto é um extremante da posição (um máximo, ou um mínimo). A derivada segunda d^2x/dt^2 , calculada neste ponto, indica um máximo, se ela for negativa, ou um mínimo, se for positiva.

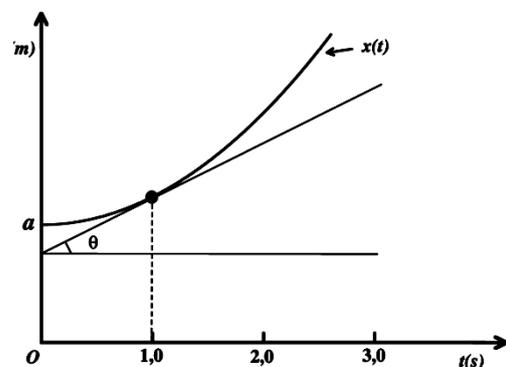


Figura 2 – 6 Gráfico x versus t referente ao Exemplo 2-3.

Exemplo 2-3

A posição de uma partícula que se move sobre um eixo x é dada pela equação $x = a + bt^2$, onde $a > 0$, $b > 0$ são constantes, com x em metros e t em segundos.

- a) Qual sua velocidade em $t = 1,0$ s?
- b) Como a velocidade varia?

Solução:

- a) $v = \frac{dx}{dt} = 2bt$.
Para $t = 1,0$ s, $v = 2b > 0$.
- b) Como $b > 0$, v é crescente e é representado por uma reta, com inclinação $\text{tg } \theta = 2b > 0$.

Exemplo 2-4

Na Grécia antiga, o filósofo Zênon de Eleia viveu a pouco mais de cinco séculos antes de Cristo. Ele propôs um paradoxo, conhecido como *Paradoxo de Aquiles* (o famoso corredor grego) e a *Tartaruga*. O paradoxo consistia de uma corrida de Aquiles (A) com uma Tartaruga (T). Da origem O de uma escala, A partiu, e T de um ponto 1. Imagine que a unidade de comprimento corresponderia hoje a um km. T teve uma vantagem sobre A de 1,0 km. Suponha que A era dez vezes mais rápido que T, e que percorria 1,0 km a cada hora. O argumento utilizado pelo Zênon era que quando A estivesse no ponto 1, T estaria mais a frente, e assim sucessivamente, em intervalos cada vez menores, mas em número crescente indefinidamente, de modo que A nunca alcançaria T. a) Onde está a falácia deste paradoxo? b) A e T, eventualmente, encontrar-se-iam?

Solução:

a) Mesmo para uma pessoa do povo, o senso comum o levava a crer que eventualmente, A iria alcançar T. Mas para o filósofo Zênon, o movimento dos objetos é um fenômeno irreal e contraditório, consistindo sempre em uma mera ilusão dos sentidos. Assim usando argumentos matemáticos da época, que indicavam que jamais A poderia alcançar T. Daí o paradoxo! Ou seja, Zênon tinha uma opinião contrária à comum.

Vamos discutir este exemplo à luz da ciência hoje e verificar quais problemas existiam na época do filósofo para gerar tal controvérsia. As equações do movimento para A e T são respectivamente,

$$x_A = v_A t, \tag{2-4}$$

$$x_T = x_0 + (v_A/10)t, \tag{2-5}$$

onde $x_0 = 1,0$ km, é a vantagem de T em relação a A e $v_T = (1/10) v_A$. Tirando o valor de t da primeira equação e substituindo na segunda, obtém-se

$$x_T = x_0 + 0,1 x_A.$$

A tabela abaixo pode facilmente ser construída, onde $x_T - x_A$ representa as vantagens sucessivas de T sobre A, as quais diminuem. A distância S percorrida por T é a soma da última coluna da tabela. Ou seja,

t (h)	x_A (km)	x_T (km)	$x_T - x_A$
1,0	1,0	1,1	0,1
1,1	1,1	1,11	0,01
1,11	1,11	1,111	0,001
⋮	⋮	⋮	⋮

$$S = \sum(x_T - x_A) = 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots =$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \tag{2-6}$$

S é uma progressão geométrica de razão $q = 1/10$, com um número infinito de termos, cuja soma é conhecida (vide Digressão matemática 2-2). A soma da Equação (2-6) vale então,

$$S = \frac{1/10}{1 - (1/10)} = \frac{1}{9}$$

A matemática grega da época não sabia como lidar com infinitésimos, nem tão pouco com somas infinitas convergentes. A noção de infinito era então desconhecida pelos matemáticos gregos. Também um estudo matemático sistematizado do movimento não existia neste período. Hoje se vê que o paradoxo de Zênon é na realidade, um pseudo paradoxo!

a) O tempo de encontro de A com T é obtido igualando as Equações (2-4) e (2-5):

$$v_A t = x_0 + 0,1 v_A t$$

$$\therefore t = \frac{10 x_0}{9 v_A} = \frac{10}{9} \text{ h.}$$

Digressão matemática 2-2

Progressão geométrica infinita

A série infinita, também chamada de progressão geométrica infinita, $S = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}$, se $-1 < q < 1$.

Paradinha 2-2

Uma partícula move-se obedecendo à equação $x = A \sin(\pi t/2)$, onde A é uma constante positiva com dimensão de comprimento.

- a) Esboce o gráfico $x \times t$, onde x é medido em metro e t em segundo.
- b) Esboce o gráfico $v \times t$.

2-5 O problema inverso

Até aqui vimos como calcular a velocidade instantânea de um objeto, conhecendo-se a sua equação paramétrica, $x = x(t)$. É só calcular a derivada de $x(t)$, ou seja, $v(t) = dx/dt$. O problema inverso consiste no oposto: conhecendo a função $v(t)$ num intervalo $[t_1, t_2]$, calcular

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1).$$

Ora,

$$v(t) = dx/dt \Rightarrow dx = v(t) dt, \text{ portanto}$$

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t') dt'. \quad (2-7)$$

Como sabemos do cálculo infinitesimal, o segundo membro da Equação (2-7), é uma integral definida, e como tal, corresponde a um processo limite, definido por

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t') dt' = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t'_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N v(t'_i) \Delta t'_i \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Área entre a curva da velocidade} \\ \text{e o eixo do tempo, de } t_1 \text{ a } t_2 \end{array} \right] \quad (2-7)'$$

Poderíamos também obter a função $x(t)$, bastando para isto fazer a troca $t_2 \rightarrow t$, na Equação (2-7), onde t é um tempo geral qualquer no intervalo, desde que se conheça $x(t_0) \equiv x_0$ num tempo $t_0 \equiv t_1$. Logo,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (2-8)$$

Na concepção de integral definida, note que a variável t' no integrando assume infinitos valores no intervalo aberto (t_0, t) e assim não pode ser igual ao t do limite superior da integral. Este limite é um valor fixo dado, apesar de poder ser qualquer.

Exemplo 2-5

Uma partícula percorre uma reta, cujo gráfico $v \times t$ é mostrado na Figura 2-8.

- a) Calcular o deslocamento da partícula dois segundos após ela ter iniciado seu movimento.
- b) Qual o gráfico $x \times t$ da partícula?
- c) Qual a velocidade média da partícula entre 0 e 2 segundos?

Solução:

a) O deslocamento, conforme visto acima, é dado pela área hachurada na Figura 2-8. Logo,

$$\Delta x = x(2.) - x(0.) = \int_{t=0}^{t=2.0} v(t') dt' = (\text{área hachurada}) =$$

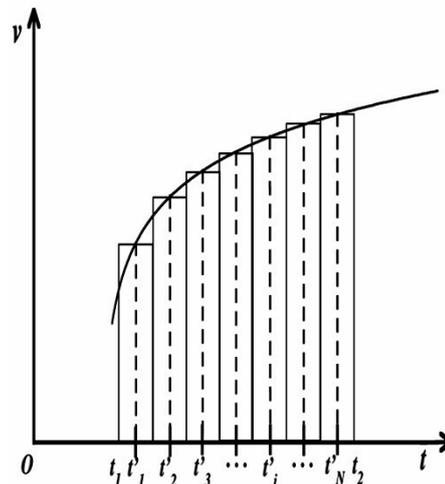


Figura 2-7 Processo de cálculo do problema inverso

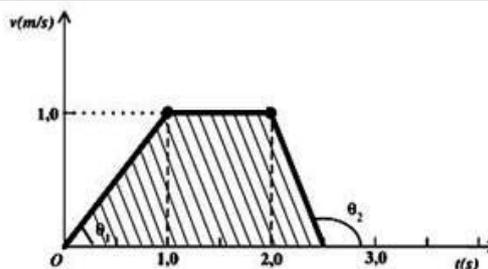


Figura 2-8 Gráfico v versus t do Exemplo 2-5

$$= \frac{1}{2}(1,0 \times 1,0) + (2,0 - 1,0) \times 1,0 = \frac{1}{2} + 1,0 = 1,5\text{m.}$$

b) O gráfico consiste de três intervalos. Cada intervalo tem uma equação correspondente para $v(t)$. Precisamos calculá-las para, finalmente, obter $x(t)$.

Intervalo $[0,1.]:$

$$v(t) = (\text{tg } \theta_1)t, \text{ onde } \text{tg } \theta_1 = \frac{1,0}{1,0} = 1,0 \Rightarrow v(t) = t, 0 \leq t \leq 1,0.$$

Intervalo $[1.,2.]:$

$$v(t) = 1,0, \quad 1,0 \leq t \leq 2,0.$$

Intervalo $[2,0,2,5]:$

$$v(t) = (\text{tg } \theta_3)t + c, \text{ onde } \text{tg } \theta_3 = \frac{1,0}{2,0 - 2,5} = -2,$$

$$\Rightarrow v(t) = -2t + c,$$

onde c é uma constante a ser determinada.

$$\text{Para } t = 2,5, v = 0 \Rightarrow c = 5,$$

$$\therefore v(t) = -2t + 5, \quad 2,0 \leq t \leq 2,5$$

Logo, $x(t)$ é uma função também definida em intervalos correspondentes.

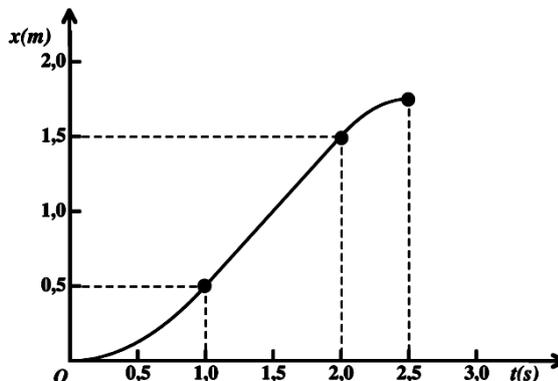


Figura 2-9 Gráfico de $x \times t$ do Exemplo 2-5

1º intervalo:

$$x(t) = x(0.) + \int_0^t v(t') dt' = 0. + \int_0^t t' dt' = \frac{t'^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2º intervalo:

$$x(t) = x(1,0) + \int_{1,0}^t dt' = x(1,0) + t' \Big|_{1,0}^t = x(1,0) + (t - 1).$$

$$x(1.) \text{ é obtido de } x(t) \text{ no intervalo } 0 \leq t \leq 1, \text{ e vale } x(1.) = \frac{1}{2} \therefore x(t) = t - \frac{1}{2}, \quad 1. \leq t \leq 2.$$

3º intervalo:

$$x(t) = x(2.) + \int_{2,0}^t v(t') dt' = 1,5 + \int_{2,0}^t (-2t' + 5) dt' = 1,5 - 2 \frac{t'^2}{2} \Big|_{2,0}^t + 5t' \Big|_{2,0}^t = 1,5 - (t^2 - 4,0) + 5(t - 2,0) = -t^2 + 5t - \frac{9}{2}, \quad 2,0 \leq t \leq 2,5.$$

Em resumo,

$$x(t) = \begin{cases} t^2/2 & , \quad 0, \leq t \leq 1, \\ t - 1/2 & , \quad 1. \leq t \leq 2., \\ -t^2 + 5t - 9/2 & , \quad 2. \leq t \leq 2.5. \end{cases}$$

Logo $x(t)$ é uma função contínua, possuindo derivadas contínuas nos pontos $t = 1,0$ e $2,0$ segundos. O gráfico está representado na Figura 2-9

$$c) \bar{v} = \frac{x(2.) - x(0.)}{2. - 0.} = \frac{1,5 - 0.}{2. - 0.} = \frac{3}{4} \text{ m/s.}$$

Paradinha 2-3

Dois trens 1 e 2, se movem sobre um mesmo trilho em sentidos opostos. Os maquinistas são imediatamente alertados para pararem seus trens, quando eles estão separados por 200 m. As velocidades em m/s de desaceleração são dadas pelas equações $v_1 = 40 - 8t$ e $v_2 = -30 + (15/2)t$.

Qual é a separação entre os trens quando ambos estiverem parados?

2-6 Aceleração

Em muitas situações de um movimento, a velocidade pode aumentar continuamente, ou diminuir continuamente. Podemos sentir claramente tais variações. Nossos corpos são naturalmente sensíveis a estas mudanças nas velocidades. Precisamos, pois, definir uma grandeza que quantifique este processo de variação com o tempo da velocidade. Definimos aceleração média no intervalo $[t_1, t_2]$ como

$$\bar{a} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (2 - 9)$$

Como $t_2 > t_1$ então, $\bar{a} > 0$ se $v(t_2) > v(t_1)$, e $\bar{a} < 0$ se $v(t_2) < v(t_1)$.

Em analogia com a velocidade instantânea, podemos definir aceleração instantânea como

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt} \quad (2 - 10)$$

No SI aceleração é dado em m/s^2 e tem como expressão dimensional LT^{-2} .

Num gráfico $v \times t$, a interpretação geométrica da aceleração é a tangente à curva no ponto t .

O problema inverso também existe e é dado por

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t') dt' \quad (2 - 11)$$

onde Δv corresponde à área entre a curva de $a(t)$ e o eixo do t , no intervalo $[t_1, t_2]$. Analogamente a $x(t)$, o cálculo da velocidade num tempo t qualquer pode ser obtido da equação acima fazendo $t_2 \rightarrow t$, $t_1 \equiv t_0$, e $v(t_0) \equiv v_0$. Assim

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (2 - 12)$$

Exemplo 2-6

No Exemplo 2-5, esboce o gráfico $a \times t$. e descreva o movimento.

Solução:

A função $v(t)$ é dada por

$$v(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 \leq t \leq 1,0, \\ 1,0 & , \quad 1,0 \leq t \leq 2,0, \\ -2t + 5 & , \quad 2,0 \leq t \leq 2,5. \end{cases}$$

Como $a(t) = dv/dt$, devemos calcular as derivadas em cada intervalo acima. O resultado, é fácil de obtê-lo, ou seja,

$$a(t) = \begin{cases} 1,0 & , \quad 0 \leq t < 1,0, \\ 0 & , \quad 1,0 < t < 2,0, \\ -2,0 & , \quad 2,0 < t < 2,5. \end{cases}$$

O gráfico $a \times t$ pode ser mostrado na Figura 2-10.

Note que a função $v(t)$ não tem derivadas iguais, à esquerda, e à direita, de $t = 1,0$. Ou seja, suas tangentes têm inclinações distintas. A mesma coisa ocorre em $t = 2,0$ s. Daí $a(t)$ ter descontinuidades de saltos finitos nestes pontos, conforme mostrado na Figura 2-10. A função $a(t)$ não é assim definida nos pontos $t=1,0, 2,0, 2,5$ s. No intervalo $[0,1,0)$ o objeto se acelera, não tem aceleração no intervalo $(1,0, 2,0)$ e finalmente desacelera até parar, no intervalo $(2,0, 2,5)$. Ele para após percorrer $3/2$ m (item a, do Exemplo 2-5), mais o correspondente à área da Figura 2-10, entre 2,0 e 2,5 segundos, ou seja, $\frac{1}{2} (1,0 \times 0,5) = \frac{1}{4}$ m.

Assim, a distância percorrida até parar é

$$\Delta x = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \text{ m} = 1,75 \text{ m}.$$

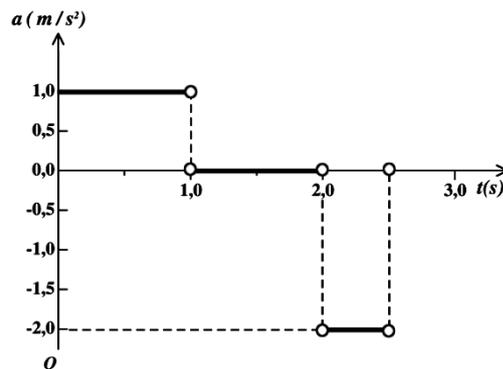
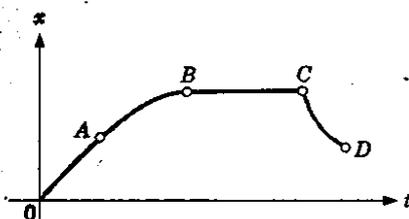


Figura 2 - 10 Gráfico de $a \times t$ do Exemplo 2-6

Paradinha 2-4

A figura ao lado mostra o gráfico $x \times t$ para um objeto em movimento retilíneo. Para cada intervalo, indique se a velocidade do objeto aumenta (+), diminui (-) ou é nula (0). Idem para sua aceleração.



2-7 Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Quando $a(t)$ for constante, o movimento é dito uniformemente acelerado. Ou seja,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{constante.} \quad (2 - 13)$$

Usando a Equação (2 - 12)

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(t') dt' = v_0 + a(t - t_0), \quad (2 - 14)$$

onde $v(t_0) \equiv v_0$. Chamado $v = v(t)$ obtém-se

$$v = v_0 + a(t - t_0). \quad (2 - 15)$$

Usando a Equação (2-15) na Equação (2-8), obtemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t' - t_0)] dt' = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad (2 - 16)$$

onde $x_0 = x(t_0)$. Chamado $x(t) \equiv x$, obtém-se finalmente,

$$x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2. \quad (2 - 17)$$

O gráfico correspondente à Equação (2-17) é uma parábola.

A eliminação de $t - t_0$ nas equações (2-15) e (2-17), gera uma terceira equação, útil na solução de problemas. Da Equação (2-15), obtém-se

$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{a},$$

que substituída na Equação (2-17), fornece

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = \frac{1}{a} (v v_0 - v_0^2) + \\ &+ \frac{1}{2a} (v^2 + v_0^2 - 2v_0 v) = \frac{1}{a} (v v_0 - v_0^2) + \frac{1}{2a} (v^2 + v_0^2 - 2v_0 v) = \frac{1}{2a} (v^2 - v_0^2) \end{aligned}$$

ou finalmente,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

O movimento é dito uniforme quando $a = 0$.

Esta expressão é conhecida como equação de Torricelli.

Exemplo 2-7

O sistema de segurança de um trem a uma velocidade $v_0 = 100,0$ km/h detecta a presença estranha de uma locomotiva na mesma linha reta e no mesmo sentido, deslocando-se a uma velocidade. $v = 40,0$ km/h.

O trem tem os freios imediatamente acionados quando sua separação da locomotiva é de $d = 0,5$ km.

a) Qual a aceleração constante mínima do trem para evitar a colisão?

b) Esboce as curvas $x(t)$ para a locomotiva e para o trem na situação do item a) e para o caso de colisão.

Solução:

a) Mesmo quando o freio é acionado no trem em $t = 0$, a locomotiva continua a se deslocar, obedecendo à equação, (2 - 19)

$$x' = v't + d,$$

e o trem, às equações

$$v^2 = v_0^2 - 2a x, \quad (2 - 20)$$

$$v = v_0 - at,$$

$$(2 - 21)$$

onde a é a desaceleração (daí o sinal negativo) a ser calculada. Para não haver colisão, a *mínima* desaceleração no ponto em que os dois quase se tocam deve exigir

$$x' = x \text{ e } v = v'. \text{ Assim a Equação (2-21) fornece } t = (v_0 - v')/a, \text{ que levada na Equação (2-19), dá}$$

$$x' = d + v'(v_0 - v')/a. \quad (2 - 22)$$

Substituindo na Equação (2-20) temos finalmente (com $x = x'$ e $v = v'$),

$$a = \frac{1}{2d}(v_0 - v')^2 \quad (2 - 23)$$

Valores numéricos.

$$(100. -40.)^2 / (2 \times 0,5) \text{ km/h}^2 = 3600 \text{ km/h}^2 =$$

$$= \frac{3600 \times 10^3}{36^2 \times 10^4} \text{ m/s}^2 = 0,28 / \text{s}^2 \text{ que é o módulo da desaceleração.}$$

b) A Equação (2-19) para a locomotiva corresponde a uma reta representada na Figura (2-11). Já o trem obedece à equação,

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

onde $a = 0,28 \text{ m/s}^2$. Na Figura (2-11), o movimento do trem é representado por uma parábola, com concavidade voltada para baixo, haja vista o sinal negativo da aceleração. No caso limite de não haver colisão, a reta deve tangenciar a parábola no ponto onde o trem, por um triz, “toca” a locomotiva. Isto implica dizer

que a declividade da reta neste ponto,

$\frac{dx'}{dt} = v'$, deve ser igual à declividade da parábola no mesmo ponto ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - at = v_0 - a \left(\frac{v_0 - v'}{a} \right)_{v=v'} = v'.$$

São, pois iguais!

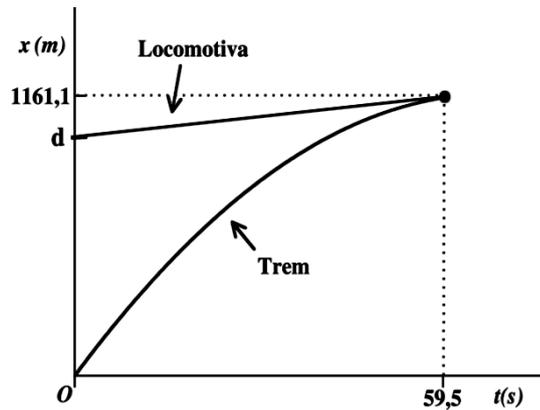


Figura 2 – 11 Gráfico referente ao Exemplo 2-7.

Paradinha 2-5

Já que as desacelerações da paradinha 2-3 são constantes, resolva agora aquele problema, porém usando diretamente as equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado.

2-8 Queda livre dos corpos

Uma simples observação indica que qualquer corpo lançado verticalmente sempre cai em direção a terra. Além do mais, se verifica experimentalmente, que esta queda é feita com uma **aceleração constante**, conhecida como aceleração da gravidade, cujo módulo é representado pela letra g . Esta aceleração não depende da massa do objeto, nem de seu formato. Agentes externos poderiam alterar este fato, como por exemplo, a existência de vento no local. Em suma g é o mesmo para todos os corpos, desde que a queda seja no vácuo.

Na prática g varia ligeiramente com a latitude e com a altitude. Para distâncias próximas à superfície da terra e ao nível do mar, os valores de g são tomados neste livro como aproximadamente iguais a $9,8 \text{ m/s}^2$, a menos que se diga o contrário. É esperado também imaginar que g varie em outros astros do universo, por estes terem outras massas, formas e densidades, se comparados com a Terra.

Na solução de problemas, para corpo em queda livre, podemos usar as equações do movimento uniformemente acelerado, mas tendo em mente algumas observações importantes: i) o eixo do movimento é agora o eixo vertical y (em vez de x) com sentido positivo orientado para cima;

ii) a aceleração $a = -g$. Já a velocidade pode ser positiva (na subida do corpo), ou negativa (na descida do corpo), ou nula.

Exemplo 2-8

Um garoto, do alto de um penhasco de altura h do solo, lança verticalmente uma bola com velocidade inicial v_0 . Em seguida, lança verticalmente para baixo outra bola com velocidade inicial v_0 . Alguma das bolas alcançará o solo com maior velocidade? Despreze a resistência do ar.

Solução:

A 1ª bola obedece às equações

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2-24)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gy. \quad (2-25)$$

Ao atingir uma altura y_1 , sua velocidade final se anula. Usando a Equação (2-25), obtemos

$$y_1 = v_0^2 / 2g. \quad (2-26)$$

Na sua volta, parte do repouso, e depois de cair de uma altura $y_1 + h$, terá uma velocidade v , obtida da equação (2-25):

$$v^2 = 0 - 2g \left(-\frac{v_0^2}{2g} - h \right) = v_0^2 + 2gh.$$

A 2ª bola é jogada para baixo da beira do penhasco, com velocidade inicial v_0 . Usando a Equação (2-25),

$$v^2 = v_0^2 - 2g(-h) = v_0^2 + 2gh,$$

que dá o mesmo valor daquele da 1ª bola!

Exemplo 2-9

Três pequenas contas com furos descem ao longo de segmentos de arame liso AB, AC e CB, todos conectados entre si, e situados numa mesma vertical e além do mais, inscritos numa circunferência de raio R , conforme visto na Figura 2-12. Quem chega mais rápido no final de cada um destes segmentos?

Solução:

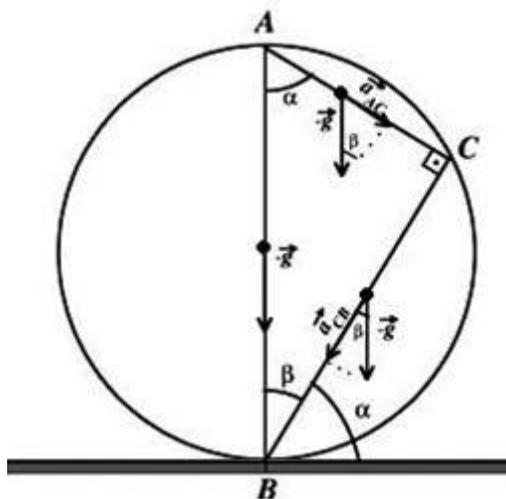


Figura 2-12 Referente ao Exemplo 2-9

Da geometria sabemos que o triângulo ABC é retângulo, com $\hat{C} = 90^\circ$.

Trecho AB:

Na queda livre o corpo percorre

$$AB = 2R, \text{ ou } 2R = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{R/g}.$$

Trecho AC:

O corpo percorre este trecho ao longo de um plano inclinado.

A sua aceleração, \vec{a}_{AC} , resulta da projeção da aceleração \vec{g} , na direção AC, ou seja, em módulo,

$$a_{AC} = g \sin \beta = g \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = g \cos \alpha.$$

(Há outra componente de \vec{g} , normal à AC, mas que não contribui no escorregamento do objeto).

A distância AC é dada por

$$AC = 2R \sin \beta = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2R \cos \alpha.$$

Como

$$AC = \frac{1}{2} a_{AC} t^2,$$

então, usando os valores de a_{AC} e AC, obtém-se

$$t = 2\sqrt{R/g}.$$

Trecho CB:

Analogamente,

$$CB = 2R \cos \beta,$$

$$CB = \frac{1}{2} a_{CB} t^2$$

$$a_{CB} = g \cos \beta$$

e conseqüentemente,

$$2R \cos \beta = \frac{1}{2} g \cos \beta t^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{R/g}.$$

Os tempos, pois são iguais nos três trechos!

Exemplo 2-10

Um pequeno objeto é lançado verticalmente até alcançar após 2,5 s uma altura de 25 m a partir da superfície de outro astro do sistema solar.

- a) Qual a aceleração da gravidade deste local?
 b) Qual a velocidade inicial do objeto?

Solução:

- a) As Equações do movimento para este objeto são

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (2 - 27)$$

$$v_y = 0 = v_0 - g t \Rightarrow t = v_0 / g. \quad (2 - 28)$$

Substituindo a Equação (2-28) na Equação (2-27), teremos

$$y = v_0 (v_0 / g) - \frac{1}{2} g (v_0 / g)^2 = \frac{1}{2} g (v_0 / g)^2 = \frac{1}{2} g t^2.$$

Usando os valores numéricos, obtemos,

$$25,0 = \frac{1}{2} g 2,5^2 \Rightarrow g = 8,0 \text{ m/s}^2 < 9,8 \text{ m/s}^2$$

na Terra.

- b) $v_0 = g t = 8,0 \times 2,5 = 20,0 \text{ m/s}.$

Paradinha 2-6

Dois corpos caem de uma mesma altura de 50 m com um segundo de intervalo. Qual será a distância que os separará quando o primeiro tocar o solo?

2-9 Pausa para descontração:

Galileu Galilei

Galileu Galilei nasceu em Pisa, cidade da Toscana, a 15 de fevereiro de 1564 (neste mesmo ano nasceu também William Shakespeare na Inglaterra, a 23 de abril). Pertenceu Galileu a uma família sem muitos recursos, mas que descendia de nobres da cidade de Florença. Foi educado em bons ginásios e colégios, onde aprendeu grego, latim e matemática. Em casa estudou música com o pai, além de ter tido uma sólida educação católica e doméstica. Seu pai foi um excelente músico, tendo pertencido ao grupo que criou em Florença a ópera italiana em 1600, com a primeira apresentação de **Euridice**. Em 1581 com 17 anos, por sugestão do pai, ingressou na Univesidade de Pisa para estudar medicina. Sua paixão, no entanto, era o estudo da matemática, que conheceu com mais profundidade naquela universidade. Após quatro anos de estudo, Galileu abandonou a universidade sem concluir o curso. Além de carismático e brilhante, tinha uma personalidade marcante, fácil de fazer amigos e algumas vezes de inimigos. Com a fama de ótimo professor e de excelente matemático, dava aulas particulares desta disciplina, donde tirou seu sustento por algum tempo. Sua fama continuou crescendo e em 1589 obteve um posto na Universidade de Pisa. Neste período desenvolveu um termômetro rudimentar. Iniciou também o estudo da queda dos corpos. Estes estudos representaram a entrada de Galileu no campo da física e na criação do método experimental. Certamente, o que torna este processo fundamental é a utilização, pela primeira vez, do método científico, tendo a matemática como ferramenta natural. No estudo da queda livre dos corpos, Galileu derrubou a velha teoria aristotélica de que os objetos de pesos diferentes caem com velocidades diferentes.

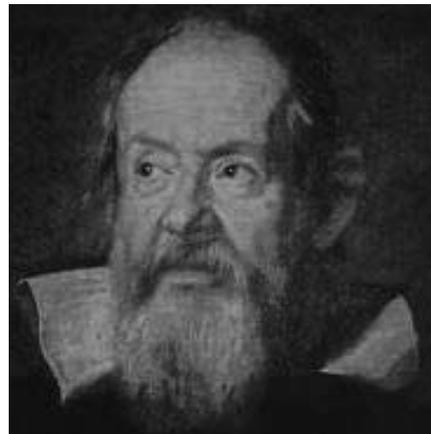


Figura 2 –13 Galileu Galilei.

Com a morte de seu pai em 1592, Galileu deixou Pisa e devido a excelente reputação que já gozava, fora convidado a assumir a cátedra de matemática na Universidade de Pádua, na região da República de Veneza. Passou a ganhar mais e segundo relato seu, feito na velhice, foi em Pádua, onde viveu seus melhores dias. Nesta cidade conheceu Marina Gamba e com ela compartilhou uma vida privada durante doze anos, sem nunca terem morado juntos. Tiveram três filhos, Virginia, Livia e Vincenzio. Galileu nunca se casou o que em parte complicou a vida dos filhos devido à pressão da Igreja que nunca vira com bons olhos aquele relacionamento, para ela, espúrio.

No renascimento um grande desafio científico era a falta de um conhecimento mais aprofundado do céu para se poder navegar com mais segurança em mar aberto. Em 1604 uma nova estrela apareceu no céu, gerando muita celeuma. Galileu certamente, se interessou pelo fato, chegando a dar três conferências sobre o assunto. Hoje sabe-se que se tratava de uma super nova ou uma estrela terminal. Ele conhecia bem a astronomia grega antiga, e as ideias de Aristóteles, chegando a contragosto, a utilizá-las para fazer *horóscopos* (em astrologia) para os nobres, o que lhe rendia um bom dinheiro. Para Aristóteles, a Terra era algo privilegiado e diferente dos demais astros celestes. Segundo ele, existia uma região **sublunar** (abaixo da Lua) que era **mutável** (coisas aí podiam mudar), e o mundo **supralunar** (além da Lua), que era **imutável e perfeito**. A Igreja, através de Santo Agostinho (354-430), e posteriormente, de São Tomás de Aquino (1225-1274), procurou conciliar a tradição filosófica grega, muito em moda à época, com a sua doutrina. Os referidos santos procuraram assim montar uma sólida estrutura filosófica, então inexistente na Igreja, que explicasse as coisas do mundo à luz da fé cristã. Santo Agostinho utilizou a filosofia de Platão, enquanto São Tomás de Aquino a de Aristóteles. A nova estrela trouxe a Galileu mais uma grande discordância com as ideias de Aristóteles, pois claramente o céu podia ser mutável.

Na Holanda, uma grande descoberta fora feita que mudaria o mundo. Em 1608 Hans Lippershey inventou um telescópio refrator. Galileu logo em seguida o aperfeiçoou. Através dele, iniciou um ciclo de grandes descobertas, tais como, as observações de montanhas na Lua, descobertas das luas de Júpiter, e finalmente, as descobertas das manchas solares! Tais fatos iam de encontro às sagradas escrituras e aos dogmas da Igreja, então vigentes. Destas descobertas resultaram as obras de Galileu, “*O Mensageiro Sideral*”, publicada em 1610, e “*Cartas sobre manchas solares*”, em 1613. Neste ano, prevendo problemas crescentes com a Igreja, achou mais seguro enviar as filhas para um convento, mesmo a contragosto delas. Sua filha mais velha, Virginia, recebeu mais tarde o nome religioso de Sórora Maria Celeste (1600-1634), nome este escolhido para homenagear o seu pai querido, amante da astronomia. Como escreveu Galileu, “*ela era uma mulher de fino espírito, singular bondade e ternamente apegada a mim*”. Foi ela que ao longo de sua vida, ajudava-o na sua volumosa correspondência e na sua vida privada. Muitas destas cartas chegaram aos nossos dias o que ajudaram, em muito, traçar um perfil mais preciso deste homem e cientista extraordinário que foi.

Em 1632 Galileu publicou o “*Diálogo sobre os dois principais sistemas do mundo: o ptolomaico e o copernicano*”. O primeiro sistema do mundo, tratado nessa obra é o sistema geocêntrico, onde a Terra é tomada como o centro do universo e ao seu redor circundam a Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Tal modelo é devido a Ptolomeu (130 DC) e foi adotado pela Igreja. O segundo é devido a Copérnico (1473-1543) e tem o Sol como o centro do universo. Mesmo na Grécia antiga, Aristarco (280 AC) já havia considerado hipótese similar, mas por razão desconhecida, foi esquecida com o tempo. Nos dois livros, Galileu imagina um diálogo entre três personagens, *Salviati* (possivelmente ele próprio), *Segredo* (um personagem ponderado e inteligente) e *Simplicio* (alguém simplório, onde defendia as ideias de Aristóteles e consequentemente as ideias conservadoras da Igreja e da sociedade). Através destes diálogos, Galileu mostra, brilhantemente, como eram obsoletas as teorias de Aristóteles sobre a física e a astronomia.

Em 1633 começa seu julgamento por heresia, pelo Santo Ofício da Inquisição. É conhecido o envolvimento, nem sempre bem sucedido, da Igreja em assuntos extra-religiosos. O julgamento de Galileu é um bom exemplo marcante disto. Galileu, como bom católico que era, tinha também dentro da Igreja influentes seguidores. É do seu amigo, o então bibliotecário do Vaticano, Cardeal Cesare Baronio, a seguinte frase “*A Bíblia é um livro sobre como se vai para o Céu, e não sobre como vai o Céu*”. Certamente, ambos compartilhavam deste pensamento.

A fim de evitar uma prisão em cárcere, Galileu foi obrigado a abjurar publicamente, à teoria copernicana. Ao final diz-se que ele teria pronunciado em voz baixa e embargada a famosa frase, referindo-se à Terra: “*Eppur si muove!*” (“No entanto, se move!”). O *Diálogo* foi proibido e entrou para o Índice Mundial de Livros proibidos pela Igreja.

Ainda em 1633 a sentença final saiu e Galileu foi condenado e obrigado a viver em reclusão em sua própria casa em Arcetri, sem mais poder estudar, falar, ou mesmo, se reunir com qualquer pessoa para tratar de assuntos que atingissem as sagradas escrituras. Mesmo assim, ainda explicou a razão da Lua sempre apresentar a mesma face para Terra além de descobrir o fenômeno de **libração** (oscilação) lunar. Sua filha Sórora Maria Celeste faleceu logo em 1634 traumatizada pela condenação de seu pai. Após esta fase ficou cego. Através de seu filho Vincenzio é que ele conseguiu continuar com suas pesquisas, que se voltariam mais para a física. Nesta fase projetou e seu filho construiu um relógio de pêndulo. Em 1638 publicou sua segunda obra prima, “*Dois novas ciências*”. Nesta obra ele estuda a **estática** e a **dinâmica**. O movimento, a inércia, e vários outros temas relevantes são ali abordados, o que dariam subsídios fundamentais para a obra extraordinária futura de Newton, a criação da mecânica.

Galileu, mesmo nesta fase de reclusão, nunca deixara de receber seus amigos (que eram muitos) para discutir ciência ou simplesmente socializar. Além do bom músico que era, tinha pendores culinários excelentes. Em jantares agradáveis, utilizando muitas vezes frutas, verduras e ervas finas de seu quintal, preparava pratos deliciosos. Antes de encerrar, vamos conhecer um típico cardápio de um de seus possíveis jantares:

- Como entrada, mozzarella de leite de búfala cortada em cubinhos, regada com azeite, orégano e uma pitada de sal;
- Salada verde da horta (não levava tomate, que ainda não era utilizada na Itália) e molho de vinagre com ervas finas, à parte;
- Cordeiro assado em forno de lenha, com batatas;

- Como sobremesa, doce de cidra e bolo sienense;
- Vinho tinto do bom;
- Licores.

Que tal tentar! Consulte a internet para maiores detalhes.

Galileu morreu tranquilamente em Arcetri, a 8 de janeiro de 1642, tendo ao seu lado, seu filho, seu ex-aluno Vincenzo Viviani e Evangelista Torricelli (1608-1647). Foi uma comoção mundial. Neste mesmo ano nasceu Newton. Seu algoz-mor (outrora amigo), o papa Urbano VIII, morreu dois anos depois. Sua morte, ao contrário, gerou uma explosão de ódio da população, tendo sua estátua no pátio do Collegio Romano derrubada. Este, certamente, não foi um papa querido pelo povo!

Material extra-curricular sugerido

Livros:

1- A Filha de Galileu

Dava Sobel, Ed. Companhia das Letras, 2000

Esta biografia de Galileu Galilei é inspirada nas cartas, pouco conhecidas, que sua filha mais velha escreveu-lhe ao longo de duas décadas.

2- Grandes Debates da Ciência

Hal Hellman, Editora UNESP, 1999

O livro descreve dez das maiores contendas científicas nos últimos 500 anos, tais como, o papa Urbano VIII contra Galileu, Newton contra Leibniz, entre outros.

Filme ou DVD:

“O nome da rosa”, de Jean Jacques Annaud. Baseado no famoso livro, porém denso de Umberto Eco. No filme se mostra como a **experiência** e o **raciocínio lógico** são utilizados para demonstrar ideias, num mosteiro medieval, onde crimes estranhos ocorriam, em pleno período da inquisição. Faz lembrar algo que Galileu vivenciou? Assista ao filme!

Resumo

Posição A posição x de uma partícula sobre um eixo x localiza a partícula em relação à **origem**, ou ponto zero, do eixo. A posição é positiva ou negativa, dependendo do lado da origem em que a partícula está, ou zero se a partícula encontra-se na origem. O **sentido positivo** em um eixo é o sentido dos números positivos crescentes; o sentido oposto é o **sentido negativo**.

Deslocamento O deslocamento Δx de uma partícula é definido pela mudança em sua posição:

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2 - 1)$$

O deslocamento é uma grandeza vetorial.

Velocidade Média Quando uma partícula se deslocou de uma posição x_1 para uma posição x_2 durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, sua velocidade média durante esse intervalo é definida como

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (2 - 2)$$

O sinal algébrico de \bar{v} indica o sentido do movimento já que \bar{v} é uma grandeza vetorial. A velocidade média não depende da distância real que uma partícula percorre, mas sim das suas posições inicial e final.

Em um gráfico de x versus t , a velocidade média para um intervalo de tempo Δt é igual à inclinação da linha reta que une os pontos sobre a curva que representam as duas extremidades do intervalo.

Velocidade Instantânea A velocidade instantânea v de uma partícula em movimento é definida como

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (2 - 3)$$

A velocidade instantânea, em um certo instante de tempo pode ser determinada como a inclinação do gráfico de x versus t .

Problema inverso

O deslocamento Δx pode ser calculado através da integral definida

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t') dt' = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N v(t'_i) \Delta t'_i \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Área entre a curva da velocidade} \\ \text{e o eixo do tempo, de } t_1 \text{ a } t_2 \end{array} \right] \quad (2 - 7)'$$

A função $x(t)$ que fornece a posição num instante geral qualquer t pode ser obtida pela Equação

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt' \quad (2 - 8)$$

onde x_0 e t_0 , são respectivamente a posição e o tempo iniciais, da partícula.

Aceleração Média A aceleração média é definida como a razão entre a variação em velocidade Δv e o intervalo de tempo no qual essa variação ocorre:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2 - 9)$$

O sinal algébrico indica o sentido de \bar{a} já que \bar{a} é uma grandeza vetorial.

Aceleração Instantânea A aceleração instantânea a é definida

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Em um gráfico de v versus t , a aceleração a em qualquer instante t é igual à inclinação da curva no ponto que representa t .

Problema inverso

Análogo à velocidade, podemos obter Δv pela equação

$$\Delta v = v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t') dt' \equiv \left[\begin{array}{l} \text{Área entre a curva da aceleração} \\ \text{e o eixo do tempo, de } t_1 \text{ a } t_2 \end{array} \right] \quad (2 - 11)$$

e $v(t)$ pela equação

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t') dt' \quad (2 - 12)$$

Aceleração Constante As equações abaixo descrevem o movimento de uma partícula com aceleração constante:

$$v = v_0 + a(t - t_0), \quad (2 - 15)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \quad (2 - 17)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2 - 18)$$

Aceleração de Queda Livre É o caso de um objeto subindo ou caindo livremente próximo à superfície da Terra. As equações para aceleração constante descrevem este movimento. Observações: (1) o movimento refere-se ao eixo vertical y com $+$ orientado verticalmente para cima; (2) trocamos a por $-g$, onde g é o módulo da aceleração de queda livre. Próximo à superfície da Terra, tomaremos neste livro $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (ou outro valor, caso se mencione).

Questões conceituais

- 1) Um objeto se desloca em linha reta com velocidade crescente. Pode acontecer de sua aceleração diminuir continuamente? Explique.
- 2) Em qual intervalo de tempo a partícula dos Exemplos 2-5 e 2-6 tem a maior variação de velocidade?
- 3) É verdadeiro ou falso? Justifique a sua resposta!
 - a) Se $a = 0, \forall t$, então, ela não pode estar se movendo.
 - b) se $a = 0, \forall t$, então, sua curva $x \times t$ deve ser uma reta.
 - c) Se $a \neq 0$, em um certo t , a partícula pode estar momentaneamente em repouso neste instante.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Um motorista percorre metade de um percurso com uma velocidade v_1 e a outra metade com uma velocidade v_2 . Qual é a velocidade média do seu percurso? Compare \bar{v} com a média aritmética das velocidades.

2)* Um motorista percorre uma distância d , n vezes, cada distância com uma velocidade, v_1, v_2, \dots, v_n . Qual é a velocidade média do percurso?

3)* A posição de uma partícula que se move em linha reta é dada por $x(t) = 2t - 3t^2 + t^3$, onde x está com metros e t em segundos. Qual

- a posição do objeto em $t = 4$ s?
- o deslocamento do objeto entre $t = 1$ s e $t = 4$ s?
- a velocidade média para o intervalo de tempo entre $t = 1$ s e $t = 4$ s?
- é a velocidade instantânea para cada instante de tempo t ?
- é a aceleração da partícula para o instante $t = 2$ s?

4)* Duas partículas, A e B, movem-se em movimentos retilíneo uniforme e no mesmo sentido. Suas velocidades têm módulos respectivamente iguais a 15 m/s e 10 m/s. No instante $t = 0$, a partícula B encontra-se 100m a frente da partícula A.

- Em que instante A alcança B?
- A que distância da posição inicial de A ocorre o encontro?

5)* Um caminhão A, movendo-se com velocidade constante, leva 4 s para ultrapassar um outro caminhão B, também com velocidade constante. Sendo o comprimento de cada caminhão de 10m, qual é a diferença de velocidade entre os caminhões A e B?

6)** Em um cruzamento de 15,0m de largura, o sinal amarelo fica ligado durante 3,0 s.

- Sabendo que a aceleração máxima de um carro que se encontra a 30,0 m do cruzamento é de $3,0 \text{ m/s}^2$, qual a velocidade mínima que o carro precisa ter na mudança de sinal para atravessar o cruzamento?
- Que velocidade máxima o carro pode ter para que ele ainda possa parar antes de atingir o cruzamento sabendo que o carro pode ser freado com uma desaceleração de $5,0 \text{ m/s}^2$.

7)** A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo x é dado por $x = x_0(1 - e^{-kt})$, onde x_0 e k são constantes positivas com dimensões de comprimento e inverso de tempo, respectivamente.

- Esboce os gráficos $x \times t$, $v \times t$ e $a \times t$.
- Determine a distância percorrida pela partícula de $t = 0$ a $t = +\infty$.
- Calcule $a(t)$. É constante ou variável?
- Mostre que a é negativamente proporcional a v .

8)* Um carro movendo-se a 144 km/h encontra-se a 120m de uma barreira quando o motorista aciona os freios. O carro colide na barreira 4 s depois.

- Qual a desaceleração constante do carro antes do impacto?
- Com que velocidade o carro está se deslocando quando sofre o impacto?

9)* Um objeto é abandonado do alto de uma ponte de 125m de altura. O objeto cai em um barco que estava a 10m de distância do local do impacto quando o objeto foi abandonado. Qual a velocidade do barco?

10)** a) Mostre que a distância percorrida por um objeto em queda livre durante o último segundo de sua queda é dada por $\Delta h = g(t - \frac{1}{2})$.

b) Para uma queda de 125m, que percentual da altura total foi percorrida durante o último segundo da queda?

11)** Dois objetos caem em queda livre de uma mesma altura, só que com uma diferença de um segundo.

Quanto tempo depois os objetos estarão distantes 10 m um do outro?

12)* Considere o gráfico $v \times t$ da figura ao lado, que representa a velocidade de um veículo em função do tempo.

- Qual a distância percorrida entre 0 e 12 s?

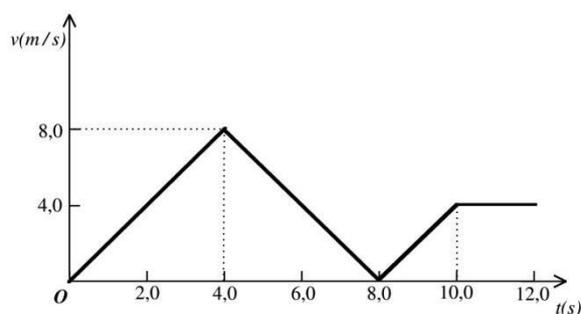


Figura 2 –14 Referente ao problema 12

b) Esboce o gráfico da desaceleração em função do tempo.

13)*** Dois corpos atirados no vácuo do mesmo ponto, de baixo para cima, segundo a vertical com a mesma velocidade inicial v_0 . Mostre que o intervalo de tempo, Δt , que deve decorrer entre a saída do 1º corpo e a do 2º, para que o encontro de um com o outro se efetue no meio da altura máxima que o 1º corpo alcança, é dada por

$$\Delta t = \frac{v_0}{g} \sqrt{2}.$$

14)*** Três objetos são deixados cair do topo C de uma cunha retangular CAB apoiada numa superfície plana horizontal, conforme a figura. Um dos objetos cai verticalmente e leva um tempo t para alcançar a superfície plana. Os outros dois objetos escorregam, sem atrito, até alcançarem a superfície plana nos pontos A e B, nos tempos t_A e t_B , respectivamente. Mostre que

$$t^2 = \frac{1}{2} t_A t_B \sin 2\alpha.$$

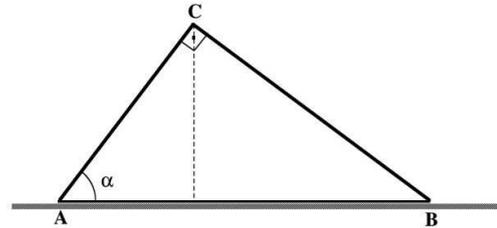


Figura 2 –15 Referente ao problema 14

15)* Demonstrar que no movimento da queda de um corpo no vácuo, os espaços percorridos durante os segundos sucessivos crescem segundo uma progressão aritmética.

16)*** Sabendo que a velocidade do som no ar é $v_s = 330$ m/s e que ao abandonarmos uma pedra do alto de um poço escutamos o barulho 2 s depois, qual é a profundidade do poço?

17)*** Um balão sobe verticalmente a 90 m por minuto. Em dado momento, deixa cair uma granada que explode ao tocar o solo e o ruído da explosão chega ao balão 12 s depois da saída da granada. Calcular a altura do balão quando a granada saiu do mesmo. Desprezar a resistência do ar e tomar 340 m/s para a velocidade do som.

CAPÍTULO 3

MOVIMENTO EM DUAS E EM TRÊS DIMENSÕES

3-1 Movimento no Plano e no Espaço

Dando continuidade ao estudo de movimento de um corpo, vamos agora nos deter nos casos mais gerais e complexos, no plano (duas dimensões ou 2D) e no espaço (três dimensões ou 3D). O lançamento de um objeto no espaço, como um chute numa bola (desprezando a ação do vento) ou de um objeto amarrado a um barbante e girando em uma circunferência, são exemplos de movimentos em 2D. Já o movimento em 3D, lembra o caso de um avião no espaço, ou de um foguete lançado em Alcântara (base militar brasileira no Maranhão de lançamentos de foguetes), ou mesmo de um busca-pé no São João. Este capítulo ensina, por exemplo, a lidar com situações descritas acima. Faz parte do acervo importante da construção da mecânica clássica.

Digressão matemática 3-1

Vetores II

Vetores unitários

Vetor **unitário** é um vetor adimensional, de módulo igual à unidade (1), com direção e sentido bem definidos e designado por $\hat{u} = \vec{u}/u$, onde u é o módulo do vetor \vec{u} , dado por

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (\text{D3} - 1)$$

Os vetores unitários neste livro que indicam os sentidos positivos dos eixos x , y e z , são representados por \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} , respectivamente. São também denominados **versores**. O acento circunflexo, no lugar da seta, é usado só para indicar um versor.

Num sistema de coordenadas conhecido como dextrógiro, mostrado na figura ao lado, estão indicados \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} . É chamado de dextrógiro, pois se o leitor apontar os dedos **indicador** (direção $+x$), **médio** (direção $+y$) e **polegar** (direção $+z$) da mão direita, formará um sistema de coordenadas cartesianas tri-ortogonal.

Como consequência, qualquer vetor \vec{a} pode assim ser escrito

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}. \quad (\text{D3} - 2)$$

A utilização dos versores cria uma forma analítica de lidar com vetores, evitando a representação geométrica que não é prática, nem precisa, na solução de problemas

Adição analítica de vetores

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} s_x = a_x + b_x + c_x \\ s_y = a_y + b_y + c_y \\ s_z = a_z + b_z + c_z \end{cases} \quad (\text{D3} - 3)$$

Multiplicação de um escalar por um vetor

O produto de um escalar por um vetor é um novo vetor. Assim se λ for um escalar, $\vec{s} = \lambda \vec{a} \Rightarrow s_x = \lambda a_x$, $s_y = \lambda a_y$ e $s_z = \lambda a_z$.

! Atenção! Note que a_x , por exemplo, não é um vetor. É uma componente ao longo do eixo x , do vetor \vec{a} , que é um escalar. Porém multiplicado pelo versor \hat{x} , gera $a_x \hat{x}$, que é uma grandeza vetorial!

Outras operações com vetores serão dadas em capítulos posteriores.

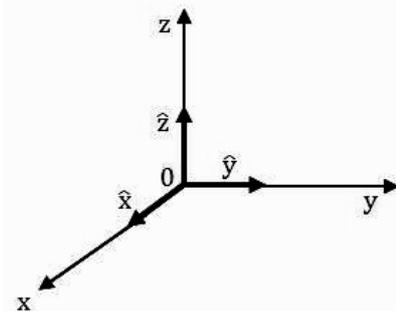


Figura D3-1 Os versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} num sistema de coordenadas cartesianas.

Vetores e sistemas de coordenadas

Situações físicas envolvendo a manipulação com vetores podem ser feitas através do uso de um sistema de coordenadas. O resultado, porém, deve ser independente da escolha do sistema de coordenadas. Uma dada escolha é utilizada somente com o intuito de simplificar a solução de um problema.

3-2 Vetores posição e deslocamento

A posição de um ponto P no espaço é caracterizada por suas coordenadas x , y e z . Se este ponto se move, então, $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$. O vetor posição, \vec{r} , é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas escolhido até P, onde está a partícula, e é definido como

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}. \quad (3-1)$$

Para uma mudança de posição do ponto P, da posição \vec{r}_1 para a posição \vec{r}_2 , um deslocamento $\Delta\vec{r}$ é gerado e é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (3-2)$$

O vetor $\Delta\vec{r}$ é chamado de deslocamento.

Exemplo 3-1

Um nêutron sofre um deslocamento $\Delta\vec{r} = 2,0\hat{x} - 3,0\hat{y} + 4,0\hat{z}$, partindo com o vetor posição $\vec{r}_f = 1,0\hat{y} - 2,0\hat{z}$, em metros. Qual era a posição inicial do nêutron?

Solução:

Como $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, e aqui $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}_f$ e $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_i$. Logo,
 $\vec{r}_i = \vec{r}_f - \Delta\vec{r} = 1,0\hat{y} - 2,0\hat{z} - (2,0\hat{x} - 3,0\hat{y} + 4,0\hat{z}) =$
 $= 2,0\hat{x} + (1,0 - 3,0)\hat{y} + (-2,0 + 4,0)\hat{z} = 2,0\hat{x} - 2,0\hat{y} + 2,0\hat{z}.$

Paradinha 3-1

No exemplo 3-1, qual o módulo do vetor deslocamento?

3-3 Vetores velocidade média e velocidade instantânea

A generalização da Equação (2-2) para 3D é fácil de se obter, ou seja,

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (3-3)$$

que é a definição de vetor **velocidade média**.

No limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, o que corresponde a $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$, tem-se a definição do vetor velocidade instantânea, ou seja,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3-4)$$

A direção da velocidade instantânea de uma partícula num ponto é sempre tangente à sua trajetória neste ponto.

A figura 3-1 ilustra esta situação.

A Equação (3-4) tem como componentes escalares de \vec{v} ,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt} \text{ e } v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Assim sendo,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}.$$

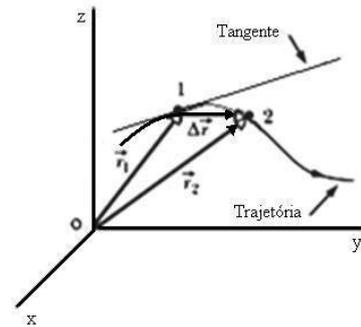


Figura 3-1 Direção de \vec{v} no ponto 1 dada pela tangente.

Exemplo 3-2

A posição de um foguete de São João é dada por $\vec{r} = 3\hat{x} - t^2\hat{y} + 2t\hat{z}$, com t em segundos e \vec{r} em metros.

Qual sua velocidade em $t = 1$ s?

Solução:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2t\hat{y} + 2\hat{z}, \quad \forall t.$$

Para $t = 1,0$ s, $\vec{v} = -2\hat{y} + 2\hat{z}$.

3-4 Vetores aceleração média e aceleração instantânea

Similarmente, ao caso de 1D, podemos definir o vetor **aceleração média** como

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \tag{3-5}$$

onde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Já o vetor **aceleração instantânea** é definido como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3-6}$$

Como $\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$, então

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{x} + \frac{dv_y}{dt} \hat{y} + \frac{dv_z}{dt} \hat{z} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z},$$

equações que resultam de simples derivação em relação ao tempo.

Se \vec{a} for **constante**, as equações abaixo são válidas

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0), \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_0)^2, \end{aligned} \tag{3-7}$$

para o movimento uniformemente acelerado.

Paradinha 3-2

- Obtenha as equações em 2D e 3D equivalentes às Equações (2-8) e (2-12).
- Obtenha as expressões da Equação (3-7).

Exemplo 3-3

Uma partícula se move tal que seu vetor posição é dado por $\vec{r} = \hat{x} + 2t^2 \hat{y} + t \hat{z}$, para t em segundos e \vec{r} em metros. Obtenha

- Sua velocidade; b) Sua aceleração.

Solução:

a) Como \vec{r} varia com t , então,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4t \hat{y} + \hat{z}.$$

b) Sua aceleração é dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4 \hat{y}. \text{ Note que } \vec{a} \text{ é constante.}$$

Exemplo 3-4

Um objeto é empurrado num assoalho liso e plano, com uma aceleração $\vec{a} = 4,0 \hat{x} - 2,0 \hat{y}$, em m/s^2 . Sua velocidade inicial é dada por $\vec{v}_0 = 8,0 \hat{x} + 6,0 \hat{y}$, em m/s . Qual é a velocidade deste objeto quando ele alcança o maior valor da sua coordenada y ?

Solução:

Note que \vec{a} é constante. Assim são válidas as equações:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{e} \quad v_y = v_{0y} + a_y t,$$

e também

$$x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad \text{e} \quad y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2.$$

Conforme visto no curso de cálculo, no estudo de máximos e mínimos, o maior valor de y é obtido de $dy/dt = 0$, ou

$$v_{0y} + a_y t = 0 \Rightarrow t = -v_{0y}/a_y = +\frac{6,0}{2,0} = 3,0\text{s}.$$

Com este valor se calcula v_x e v_y :

$$v_x = 8,0 + 4,0 \times 3,0 = 20\text{m/s},$$

$$v_y = 6,0 + (-2,0)(3,0) = 0.$$

Assim, após 3s, ele alcança a velocidade

$$\vec{v} = (20 \text{ m/s}) \hat{x}.$$

3-5 Movimento de projéteis

Como uma aplicação importante das Equações (3-7), vamos considerar o movimento de projéteis no espaço. Por projétil, entendemos qualquer objeto balístico ou não, lançado no espaço. Vamos analisar lançamentos nas seguintes situações:

- i) Próximo à superfície da Terra, por considerá-la plana e com aceleração da gravidade constante g (um projétil balístico intercontinental, por exemplo, foge ao nosso estudo já que a curvatura da Terra tem que ser considerada);
- ii) Os efeitos do ar são desprezíveis, o que torna o movimento bidimensional, ocorrendo inteiramente em um plano vertical.

Considerando as duas hipóteses acima, aplicadas a um dado projétil, podemos decompor sua aceleração \vec{a} nas duas direções x e y , $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y}$, com $a_x = 0$ e $a_y = -g$, já que somente a aceleração da gravidade (constante) atua na direção y . Vamos imaginar também que o lançamento é feito no tempo $t = 0$, com uma velocidade inicial \vec{v}_0 , formando um ângulo θ_0 com o eixo dos x . Isto equivale a dizer que existem duas componentes de \vec{v}_0 ,

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \tag{3-8}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0, \text{ onde } \text{tg } \theta_0 = v_{0y}/v_{0x}.$$

Como conseqüência, as Equações (3-7) podem ser usadas, nas direções x (horizontal) e y (vertical).

Componente horizontal do movimento

Como $a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x}, \forall t$. Ou seja, a componente x de \vec{v} é constante ao longo deste eixo. Já a posição do objeto ao longo do eixo x é dada por

$$x = x_0 + v_{0x} t, \text{ ou } x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \tag{3-9}$$

Componente vertical do movimento

Como $a_y = -g$, então,

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \text{ sen } \theta_0 - gt, \quad (3 - 10)$$

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \text{ sen } \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (3 - 11)$$

Tirando o valor de t da Equação (3-10) e substituindo-o na Equação (3-11), obtemos uma equação tipo Torricelli,

$$v_y^2 = (v_0 \text{ sen } \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (3 - 12)$$

Equação da trajetória

Tirando o valor de t na Equação (3-9) e substituindo-o na Equação (3-11), obtemos facilmente

$$y - y_0 = (\text{tg } \theta_0)(x - x_0) - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \right] (x - x_0)^2. \quad (3 - 13)$$

A Equação (3-13) é do tipo $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, onde α , β e γ são constantes, e, portanto, $y(x)$ representa uma **parábola**.

Em muitos problemas, o lançamento do projétil é feito na origem do sistema de coordenadas, o que implica $x_0 = y_0 = 0$. Isto torna a equação acima mais simples.

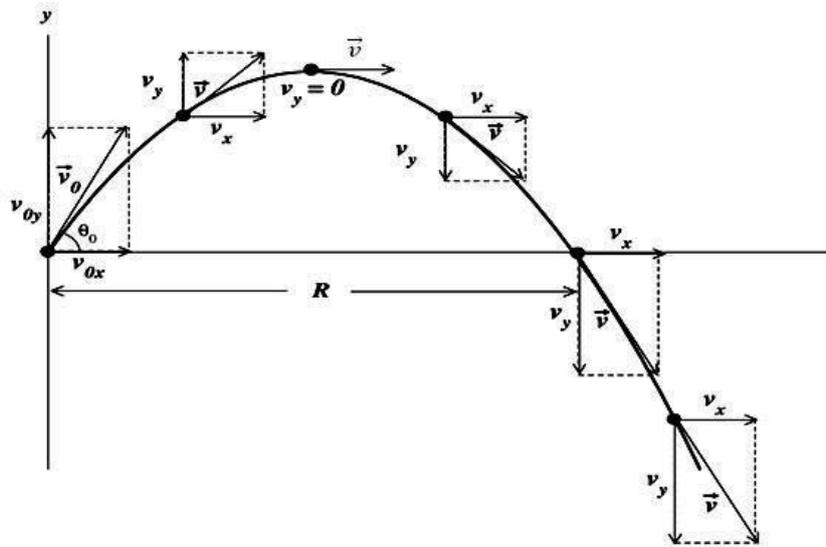


Figura 3-2 A trajetória de um projétil mostrando as componentes da velocidade em diferentes tempos.

Alcance horizontal

Por **alcance horizontal**, R (R de **Range** em inglês, que significa alcance), entendemos a projeção ao longo do eixo x da distância percorrida pelo projétil até ele ter retornado à sua altura de lançamento. Para encontrar este valor, basta fazer $x - x_0 = R$ na Equação (3-9), e $y - y_0 = 0$ na Equação (3-11), obtendo

$$R = (v_0 \cos \theta_0) t,$$

$$0 = (v_0 \text{ sen } \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t entre estas duas equações, chegamos a

$$R = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \text{sen } 2\theta_0, \quad (3 - 14)$$

onde usamos a identidade trigonométrica $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$.

Uma consequência imediata da Equação (3-14) é que R é máximo quando $\sin 2\theta_0 = 1$, o que equivale a $\theta_0 = 45^\circ$.

Atenção! Observe que a Equação (3-14) foi obtida admitindo que a altura final é igual à altura de lançamento. No entanto, situações diferentes da ilustrada aqui podem ocorrer. Assim sendo, não é bom memorizar fórmula nenhuma no caso específico do lançamento de projéteis. É bom frisar que as equações acima foram derivadas para ilustrar situações mais comuns que aparecem na resolução de problemas.

Exemplo 3-5

Um projétil é disparado com velocidade inicial $v_0 = 40,0$ m/s, direcionado num ângulo $\theta_0 = 60^\circ$ com a horizontal, de modo a atingir um alvo P, a uma altura h, que é atingido $t = 6$ s após seu lançamento. Encontre:

- a) A altura h; b) a velocidade do projétil, imediatamente, antes de atingir P; c) a altura máxima H alcançada pelo projétil.

Solução:

- a) Na Equação (3-11) tome $y_0 = 0$ e faça $y = h$

$$h = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= 40,0 \times \sin 60^\circ \times 6,0 - \frac{1}{2} 9,8 \times 6,0^2 = 31,4 \text{ m}$$

- b) As componentes da velocidade são dadas por

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 40,0 \cos 60^\circ = 40,0 \times \frac{1}{2} = 20,0 \text{ m/s,}$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - g t = 40,0 \sin 60^\circ - 9,8 \times 6,0 = -24,16 \text{ m/s,}$$

e conseqüentemente

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{20,0^2 + 24,16^2} = 31,36 \text{ m/s}$$

- c) A altura máxima ocorre quando $v_y = 0$, ou seja,

$$v_0 \sin \theta_0 - g t = 0 \Rightarrow t = v_0 \sin \theta_0 / g.$$

Conseqüentemente,

$$H = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta_0 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right) \sin^2 \theta_0.$$

Após substituições numéricas, obtém-se $H = 61,2$ m.

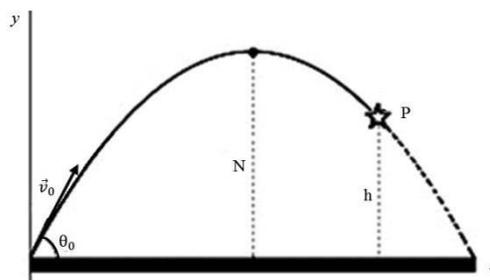


Figura 3-3 Referente ao Exemplo 3-5

Exemplo 3-6

Dois projéteis são lançados com a mesma velocidade inicial v_0 , mas com ângulos de lançamento $\theta_0 = 45^\circ + \Delta\theta_0$ e $\theta_0 = 45^\circ - \Delta\theta_0$, respectivamente.

Mostre que seus alcances são iguais.

Solução:

Os alcances são obtidos das equações

$$R_{\pm} = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \sin 2(45^\circ \pm \Delta\theta_0) = \frac{v_0^2}{g} \sin (90^\circ \pm 2\Delta\theta_0)$$

Como $\sin (90^\circ \pm 2\Delta\theta_0) = \sin 90^\circ \cos (2\Delta\theta_0) \pm \sin (2\Delta\theta_0) \cos 90^\circ = \cos (2\Delta\theta_0)$, então,

$$R_{\pm} = \frac{v_0^2}{g} \cos (2\Delta\theta_0) \Rightarrow R_+ = R_- !$$

Exemplo 3-7

Numa área plana de treinamento, um canhão dispara balas com velocidade inicial de 100,0 m/s, para atingir um alvo a 500,0 m. Qual deve ser o ângulo, com relação à horizontal, para que as balas devam ser disparadas para atingir o alvo?

Solução:

O alvo deve estar no alcance do canhão. Assim sendo,

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{Rg}{v_0^2} \right)$$

Usando os valores numéricos

$$\theta_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{500 \times 9,81}{100} \right) = \frac{29,4^\circ}{2} \quad \text{ou} \quad \theta_0 = 14,7^\circ$$

! Atenção! A função trigonométrica $\arcsin \alpha$ sempre possui outra solução, $180^\circ - \arcsin \alpha$, situada no 2º quadrante.

Conseqüentemente, uma solução é $\theta_0 = 14,7^\circ$, e a outra $\theta_0 = \frac{1}{2} (180^\circ - 29,4^\circ) = 75,3^\circ$. O canhão apontado em qualquer um destes dois ângulos atinge o alvo!

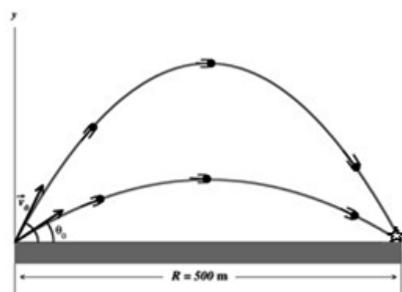


Figura 3-4 Referente ao Exemplo 3-7

Paradinha 3-3

A velocidade de lançamento de um projétil é duas vezes sua velocidade em sua altura máxima. Qual o ângulo de lançamento?

3-6 Movimento circular uniforme

Outro movimento bidimensional muito importante na física é o movimento circular. Se o módulo da velocidade do objeto que gira em torno de um ponto fixo for constante, ele é chamado de uniforme. É um movimento periódico, pois ele está se repetindo após decorrido um certo tempo, T . Este tempo T , é chamado de período do movimento.

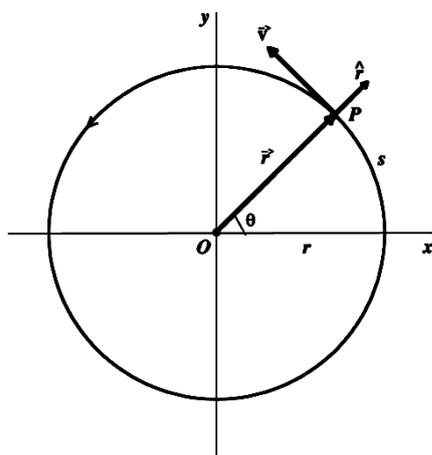


Figura 3-5. Movimento circular uniforme de P.

Na física este movimento está presente da escala microscópica à macroscópica. O movimento da Terra em torno de seu eixo, ou dela em torno do Sol, são exemplos de movimentos aproximadamente circulares. Em torno de nós, nas rodas dos carros, na indústria, etc., este movimento está também presente. No mundo das partículas elementares, temos grandes aceleradores circulares, cujas órbitas de partículas, como prótons, descrevem trajetórias circulares.

Imagine um ponto P girando em torno de O, no sentido anti-horário, que é o sentido tomado como positivo na matemática. A trajetória é uma circunferência de raio r , conforme ilustrado na Figura. A cada instante t , a localização de P pode ser feita pelo vetor posição $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, em coordenadas cartesianas, ou através de suas coordenadas polares, r e θ .

Conforme pode ser visto na Digressão matemática 2-1, existe uma correspondência entre as coordenadas cartesianas e polares, $(x,y) \rightleftharpoons (r,\theta)$, pois $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Desta correspondência, se espera também existir uma correspondência entre os versores nestes dois sistemas de coordenadas. O vetor posição \vec{r} tem como versor \hat{r} , conforme mostrado na Figura 3-5, e que aponta radialmente para fora. Já a coordenada θ , teria que ser uma grandeza vetorial para possuir um versor correspondente. Para θ ser uma grandeza vetorial teria que satisfazer a definição e as propriedades de vetores, dadas na Digressão 2-1. Ora, ela tem *módulo*, que é sua magnitude. A *direção* pode ser tomada como o eixo de rotação. Este é um ponto delicado que vai ser compreendido no Capítulo sobre rotações, mas à frente. Já o *sentido*, poderia ser associado ao sentido de rotação. Convenciona-se que a rotação, vista a partir da extremidade da

seta do vetor, daria o sentido anti-horário (convencionado como positivo). Olhemos, no entanto, a Figura D3-2. Um livro em pé, situado no plano z y, sofre duas rotações sucessivas. A primeira, de $\theta_1 = 90^\circ$, em torno do eixo x, e em seguida outra rotação de $\theta_2 = 90^\circ$ em torno do eixo z. Se a primeira tivesse sido em ordem inversa, isto é, primeiro em torno do eixo z ($\theta_2 = 90^\circ$), e depois em torno do eixo x ($\theta_1 = 90^\circ$), os resultados finais, como podem ser vistos, seriam distintos. Isto indica que a operações de soma não comutam ($\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$). Já a figura logo abaixo, indica que à proporção que o ângulo de rotação decresce, os resultados finais tendem a se aproximarem. Ou seja, as operações de soma tendem a comutar, exatamente, como para os vetores ($\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$). Para valores finitos de θ , esta grandeza se comporta como um escalar. Entretanto, pasme o leitor, valores infinitesimais de θ , $\Delta\theta$, se comportam como grandezas vetoriais, $\overline{\Delta\theta}$! Nestes casos, deve existir um versor $\hat{\theta}$, normal a \hat{r} , e na direção e sentido, indicado na Figura 3-5. Note que a dupla (\hat{x}, \hat{y}) é fixa em O, enquanto $(\hat{r}, \hat{\theta})$ é móvel no plano x y.

Digressão matemática 3-2

Vetores III

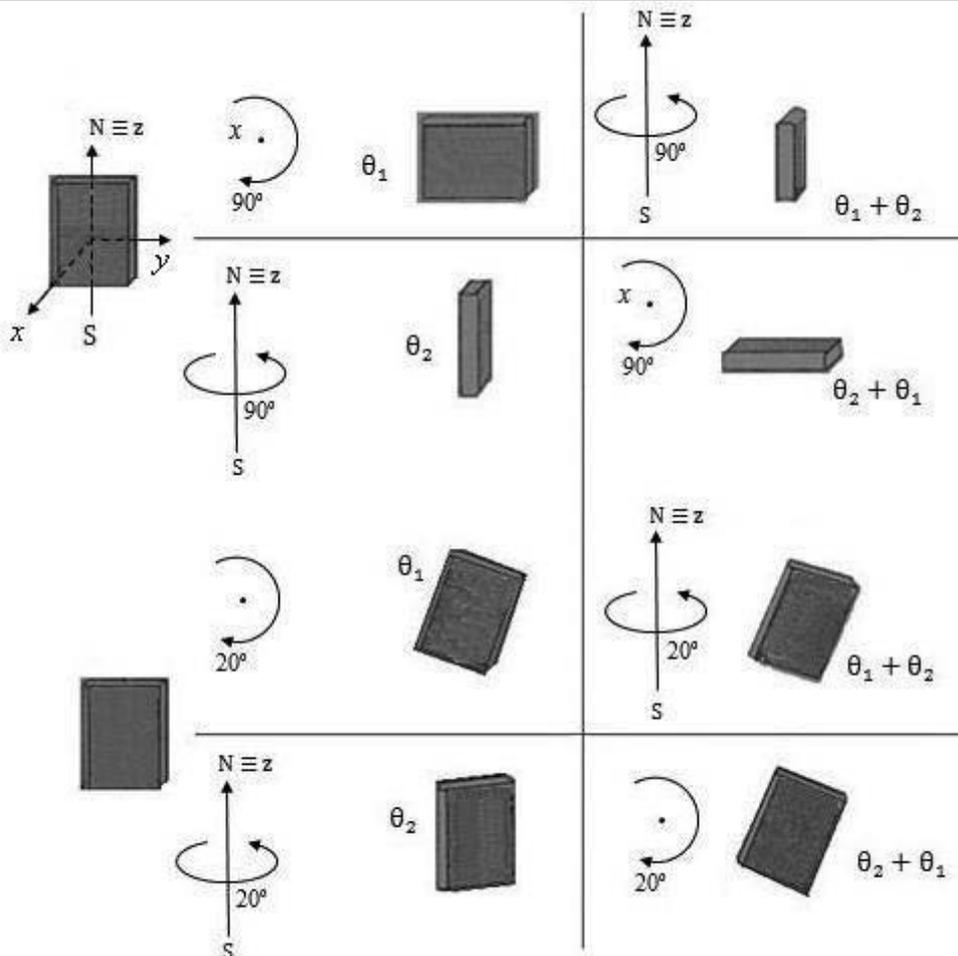


Figura D3-2. Operações de rotação em um livro. À medida que os ângulos tornam-se muito pequenos, as operações finais tornam-se mais próximas uma da outra.

Multiplicação de matrizes

Definição: Uma matriz C é o produto de uma matriz A por uma matriz B, se e somente se,

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}, \tag{D3 - 1}$$

ou seja, se o elemento ij de C for igual à soma dos produtos das componentes da i -ésima linha de A pelos da j -ésima coluna de B .

Fica assim claro que A tem o mesmo número de colunas n que B tem de linhas. Estas matrizes podem ser inclusivas retangulares.

Exemplo:

Considere as duas matrizes quadradas 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Logo, seguindo a definição acima}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times (-1) \\ 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades:

- i) Em geral, multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, $AB \neq BA$.
- ii) $(AB)C = A(BC) \rightarrow$ propriedade associativa
- iii) $A(B+C) = AB + AC \rightarrow$ propriedade distributiva

Matriz coluna e matriz linha:

Alguns tipos de matrizes têm importância especial. É o caso da **matriz coluna**. Ela pode ser representada como

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Analogamente, a matriz formada por uma linha e n colunas, é chamada de **matriz linha**. Sua representação é dada por

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n].$$

Obviamente, se A é agora uma matriz $n \times n$ e B uma matriz coluna de n componentes, e C uma matriz linha de n componentes, então AB e CA são operações que seguem a definição acima de multiplicação de matrizes.

Já o leitor pode verificar que BA e AC não são operações definidas.

É, muitas vezes conveniente representar um vetor por uma matriz coluna, ou seja,

$$v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplos:

1) Verifique que a operação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ não é definida.}$$

2) Idem para

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [1 \ 0].$$

3) Mostre que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prova matemática de que $\Delta\theta$ é um vetor

Vamos provar matematicamente o que foi apresentado acima e ilustrado na Figura D3-2.

A rotação de um ângulo θ de um ponto P , por exemplo, em torno de um eixo qualquer, é equivalente a fixar P e girar o eixo no sentido oposto.

Assim, para facilitar, consideremos uma rotação finita, θ (sentido anti-horário), do eixo z . As novas coordenadas de um ponto $P(x,y,z)$ que aparecem na FiguraD3-2, passam

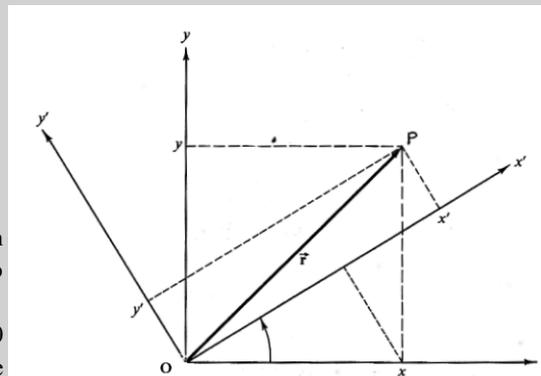


Figura D3-3. Rotação das coordenadas xy em torno de z .

$$\begin{cases} x' = \cos \theta x + \sin \theta y, \\ y' = -\sin \theta x + \cos \theta y, \\ z' = z, \end{cases} \quad (D3 - 2)$$

que podem ser escritas, por conveniência, em forma compacta através do uso de matrizes. Ou seja,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z(\theta)} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\vec{r}} \quad (D3 - 3)$$

A matriz R_z atua como um operador que aplicado à matriz coluna, representando o vetor posição $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ a transforma em outra matriz coluna representando o novo vetor posição $\vec{r}' = x' \hat{x}' + y' \hat{y}' + z' \hat{z}'$.

Imagine agora se a rotação tivesse sido feita em torno do eixo x. A matriz $R_x(\theta)$ deveria ser

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (D3 - 4)$$

Verifique você mesmo este resultado!

Calculamos agora os produtos matriciais $R_z(\theta) R_x(\theta)$ e $R_x(\theta) R_z(\theta)$. São eles

$$R_z(\theta) R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \\ -\sin \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_x(\theta) R_z(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \\ \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

onde os resultados são distintos.

Imaginemos agora que em lugar de uma rotação finita θ , tenhamos uma rotação infinitesimal $d\theta$. Basta que, nas rotações acima, façamos a troca $\theta \rightarrow d\theta$. Notemos que a matemática nos fornece as séries

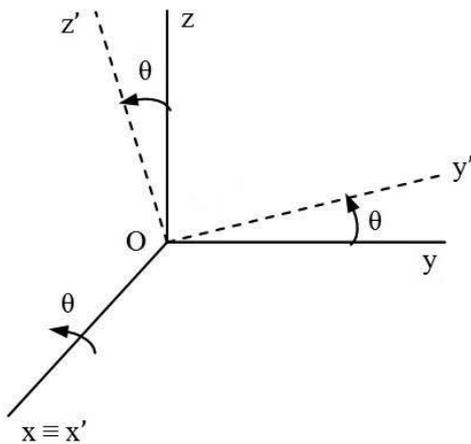


Figura D3-4. Rotação das coordenadas zy em torno do eixo dos x.

$$\sin(d\theta) = d\theta - \frac{1}{3!} d\theta^3 + \dots \approx d\theta,$$

$$\cos(d\theta) = 1 + \frac{1}{2!} d\theta^2 + \dots \approx 1,$$

para valores pequenos de $d\theta$ em radianos.

Como conseqüência,

$$R_z(d\theta) \cong \begin{bmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_x(d\theta) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que nesta situação

$$R_z(d\theta) R_x(d\theta) = R_x(d\theta) R_z(d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & d\theta & 0 \\ -d\theta & 1 & d\theta \\ 0 & -d\theta & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, para ângulos infinitesimais, as operações comutam, na adição, como para vetores! Assim, $\Delta\theta$ pode ser tratado como vetor, CQD(ou Como Queríamos Demonstrar).

Vale salientar que os novos conceitos acima

expostos, tais como: i) ângulos infinitesimais, que se comportam como vetores; ii) a existência do versor $\hat{\theta} \perp \hat{r}$; e finalmente, iii) a direção $\vec{d\theta}$ ao longo do eixo das rotações, podem parecer, no mínimo, exóticos, para um leitor iniciante, porém eles tornar-se-ão mais sólidos em capítulos posteriores.

Regra da mão direita

Como visto acima, o deslocamento angular para ângulos muito pequenos, se comporta como um vetor, $\vec{\Delta\theta}$. Da variação com o tempo de $\vec{\Delta\theta}$, se pode definir velocidade angular, como um processo limite da razão do vetor $\vec{\Delta\theta}$ pelo escalar

Δt , ou seja,

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} \right), \quad (D3 - 5)$$

Assim sendo, $\vec{\omega}$ é também uma grandeza vetorial, dirigida, como $\vec{\Delta\theta}$, ao longo do eixo de rotação. Também o é a **aceleração angular**, $\vec{\alpha}$, a ser vista mais adiante. O sentido de $\vec{\omega}$ é obtido com a utilização de uma regra simples conhecida como **regra da mão direita**. Quando os dedos da mão direita acompanharem o movimento de rotação de um objeto, o polegar apontará o sentido de $\vec{\omega}$. Na situação ilustrada na Figura D3-4, o movimento é no sentido anti-horário, convencionado como positivo, e $\vec{\omega}$ aponta para cima (direção z). Se o movimento de rotação for no sentido horário, $\vec{\omega}$ apontaria no sentido oposto. Quando rotações ocorrem em torno de um eixo fixo (por exemplo, eixo x, ou y, ou z), não precisamos tratar $\vec{\omega}$ (ou $\vec{\alpha}$) como grandezas vetoriais. Basta tratá-los simplesmente como escalares, mas

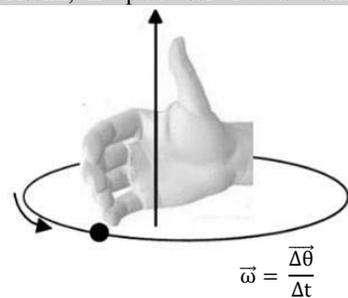


Figura D3-5. Regra da mão direita para indicar o sentido de $\vec{\omega}$

com o devido sinal positivo, se a rotação for no sentido anti-horário, e sinal negativo, se a rotação for no sentido horário.

Na Figura 3-5 é fácil escrever que

$$s = r \theta. \quad (3 - 15)$$

Para um arco infinitesimal $\overline{\Delta s}$, teremos $\overline{\Delta s} = r \overline{\Delta \theta}$. Nesta situação, o arco $\overline{\Delta s}$, aproximadamente, se confunde com a corda $\overline{\Delta r}$. Logo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} \right) = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{\Delta \theta}}{\Delta t} \right),$$

ou

$$\boxed{\vec{v} = r \vec{\omega}}, \quad (3 - 16)$$

onde $v = |\vec{v}|$, sendo $\vec{v}(t)$ tangente à circunferência em P. É também claro que $\vec{v} = \overline{ds}/dt$.

Já $\vec{\omega}$ é chamada de **velocidade angular** e é medida em rad/s.

Note que \vec{v} pode ser escrito como

$$\vec{v} = v \hat{\theta}, \quad (3 - 17)$$

e assim em notação vetorial,

$$\boxed{\vec{v} = r \omega \hat{\theta}} \quad (3 - 18)$$

Período e frequência

O tempo necessário para P dar uma volta completa é chamado de **período** e é representado por T. Assim sendo,

$$\boxed{T = 2\pi r / v.} \quad (3 - 19)$$

No SI, T é medido em segundos.

O inverso do período é chamado de **frequência**, ou seja,

$$\boxed{f = 1 / T.} \quad (3 - 20)$$

A frequência corresponde ao número de rotações por unidade de tempo, ou também s^{-1} .

É fácil verificar que $\omega = 2\pi f$.

Paradinha 3-4

Calcule a velocidade angular média de cada um dos três ponteiros de um relógio.

3-7 Aceleração Centrípeta

Suponha que P está em movimento circular, então apesar de o ponto P ter o módulo de sua velocidade \vec{v} constante, ela varia em direção ponto a ponto na trajetória. Assim sendo, P está sujeito a uma aceleração que passaremos a calculá-la. Este cálculo pode ser feito com auxílio da Figura 3-6, comparando os triângulos OPP' e O'QQ'.

Estes dois triângulos isósceles são semelhantes por terem comum, $\Delta\theta$.

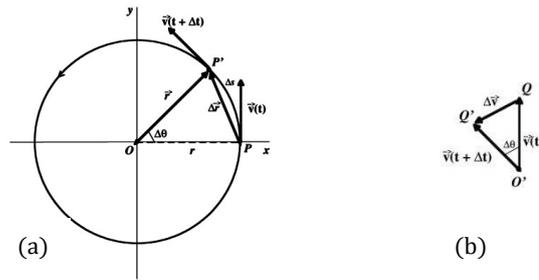


Figura 3-6. (a) Variação da velocidade no movimento circular. (b) Gráfico correspondente dos vetores velocidade.

Logo, desta semelhança, podemos escrever

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}, \quad \text{onde } \Delta r = v \Delta t.$$

Daí, no processo limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, se obtém

$$a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{r},$$

que é chamada de **aceleração centrípeta**. A razão do nome é que neste processo limite, $\Delta \vec{v}$ tende a se orientar cada vez mais na direção de O, oposto ao versor \hat{r} . Logo,

$$\boxed{\vec{a}_c = - \left(\frac{v^2}{r} \right) \hat{r}} \quad (3 - 21)$$

A análise dimensional mostra que

$$\frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = L T^{-2},$$

tem dimensão de aceleração.

Exemplo 3-8

Uma partícula se move em uma circunferência horizontal de raio r. Obtenha diretamente a expressão da sua aceleração centrípeta, derivando em relação ao tempo, a expressão do vetor velocidade, admitindo que $v = |\vec{v}|$ não varia com o tempo.

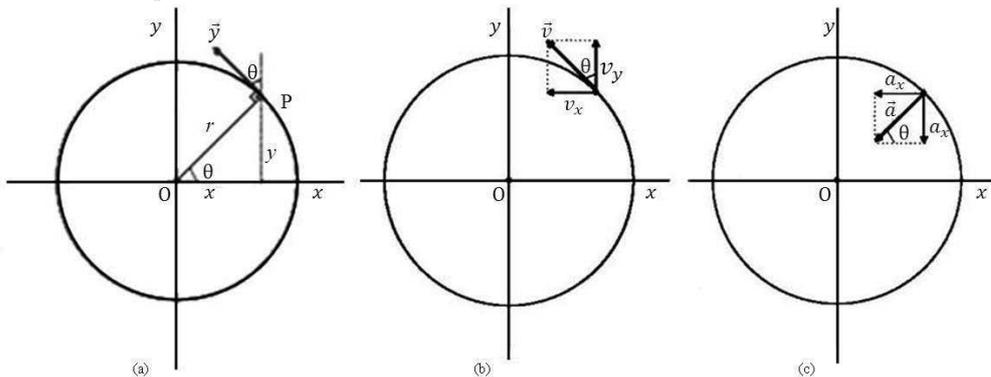


Figura 3-7. (a) Posição e velocidade de P em um instante t, (b) A velocidade \vec{v} e suas componentes. (c) A aceleração \vec{a} e suas componentes.

Solução:

Pela Figura 3-7, podemos escrever que

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} = \left(-v \frac{y}{r} \right) \hat{x} + \left(+v \frac{x}{r} \right) \hat{y},$$

onde $\text{sen } \theta = y/r$ e $\text{cos } \theta = x/r$.

A aceleração pode ser calculada através da derivada em relação ao tempo de \vec{v} :

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy}{dt} \right) \hat{x} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx}{dt} \right) \hat{y} = \left(-\frac{v}{r} v_y \right) \hat{x} + \left(\frac{v}{r} v_x \right) \hat{y},$$

já que $v = |\vec{v}|$, $r = |\vec{r}|$, \hat{x} e \hat{y} não variam com t .

Com $v_x = -v \sin \theta$ e $v_y = v \cos \theta$, então,

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{x} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{y}$$

$$\therefore a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{v^2}{r}$$

A direção de \vec{a} é dada por

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \theta' = \theta.$$

Assim

$$\vec{a} \equiv \vec{a}_c = -\left(\frac{v^2}{r}\right) \hat{r}, \quad \text{CQD.}$$

Exemplo 3-9

Um boneco é colocado no tempo $t_1 = 1,0$ s em um carrossel girando. A velocidade do boneco neste instante é $\vec{v}(t_1) = \hat{x} + 2\hat{y}$, em m/s. Já sua velocidade em t_2 passa a ser $\vec{v}(t_2) = -\hat{x} - 2\hat{y}$, em m/s.

- Qual o módulo da aceleração média do boneco no intervalo de tempo $t_2 - t_1$?
- Qual o módulo da aceleração centrípeta do boneco? É ela diferente do valor do item (a)?

Se for, explique.

Solução:

- No intervalo $\Delta t = t_2 - t_1 = 1$ s, a velocidade do boneco é reversa. A aceleração média neste intervalo é obtida da equação

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = (-\hat{x} - 2\hat{y}) - (\hat{x} + 2\hat{y}) = -2\hat{x} - 4\hat{y}, \text{ m/s}^2,$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m/s}^2.$$

- Como em 1 s, o boneco se encontra diametralmente oposto à sua posição em t_1 , $T = 2\Delta t = 2$ s.

O raio onde se encontra o boneco é obtido da equação $r = vT/2\pi$, onde

$$v = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m/s}. \text{ Daí } r = \sqrt{5}/\pi = 0,71 \text{ m}.$$

$$\text{Assim } a_c = v^2/r = \frac{5}{0,71} = 7,04 \text{ m/s}^2.$$

Certamente, $\bar{a} \neq a_c$, pois, a_c é um cálculo de uma aceleração instantânea, de valor preciso, ao contrário de \bar{a} , que é uma estimativa de uma grandeza.

Exemplo 3-10

Uma pedra amarrada a um barbante é feita girar em torno de um ponto fixo, num plano horizontal, a uma altura $h = 2,0$ m do solo, com um raio de $r = 1,0$ m. De súbito, o barbante se rompe e a pedra sai voando, caindo a uma distância horizontal $d = 8,0$ m da vertical passando pelo ponto onde a pedra é solta.

Qual a aceleração centrípeta da pedra durante seu movimento circular?

Solução:

Durante o seu movimento circular, a pedra estava sujeita a uma aceleração centrípeta $a_c = -v_0^2/r$, onde v_0 é a velocidade tangencial da pedra no instante em que ela é solta do barbante, conforme mostrado na Figura 3-8. Começa aí então um movimento parabólico da pedra até ela cair a uma distância d da vertical $O'y$. Nesta trajetória, a pedra está sujeita às duas equações do seu movimento:

$$x = d = v_0 t,$$

$$y = h = \frac{1}{2} g t^2.$$

Eliminando t entre estas equações, obtem-se v_0 , ou seja,

$$v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{g d^2}{h}$$

e conseqüentemente,

$$a_c = -\frac{1}{2} (gd^2/hr).$$

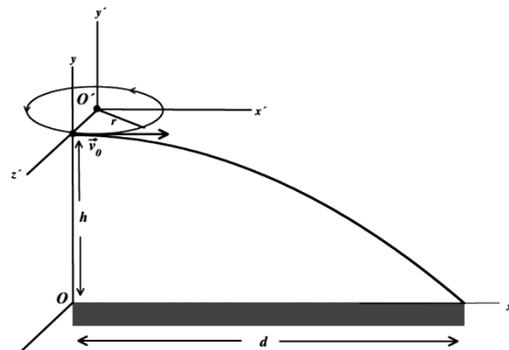


Figura 3-8. Referente ao Exemplo. 3-10. A velocidade \vec{v}_0 é tangente à circunferência horizontal e P.

Substituindo os valores numéricos, obtém-se $a_c = -156,8 \text{ m/s}^2$.

Paradinha 3-5

- a) Calcule a aceleração centrípeta da Terra em sua órbita em torno do Sol, supondo-a circular. Tome o raio da órbita $r = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ e o período da rotação de Terra = 365 dias.
 b) Calcule a aceleração centrípeta da Lua em sua órbita em redor da Terra, supondo-a circular. Tome o raio da órbita como $r = 3,8 \times 10^8 \text{ m}$ e o período de rotação da Lua em torno da Terra como $T = 27,3$ dias. Compare este resultado com aquele do item (a).

3-8 Movimento circular não uniforme

Admitindo agora que o módulo da velocidade \vec{v} do objeto em movimento não é mais constante, e sabendo que $\vec{v} = v\hat{\theta}$, então podemos calcular sua aceleração,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{\theta} + v \frac{d\hat{\theta}}{dt}.$$

Note que dv/dt é sua aceleração tangencial, a_t , mas não sabemos o que é $d\hat{\theta}/dt$.

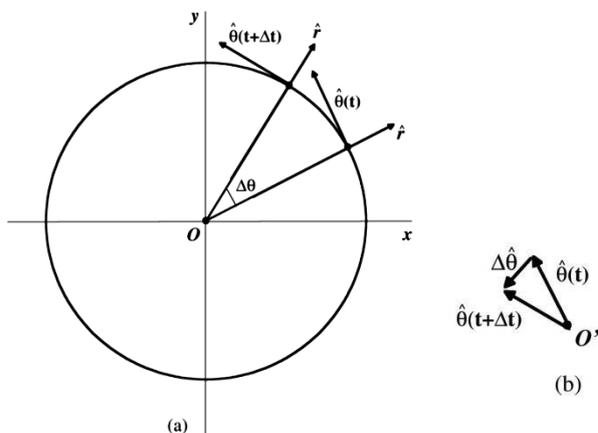


Figura 3-9 (a) Versor $\hat{\theta}$ em dois instantes próximos. (b) Diagramas dos versores.

Pela Figura 3-9, vê-se que $\hat{\theta}(t + \Delta t)$ e $\hat{\theta}(t)$ não são em geral ortogonais, mas mesmo assim temos que calcular $\Delta\hat{\theta}$, para em seguida calcular

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\hat{\theta}}{\Delta t} \right).$$

Prova da natureza vetorial de $\Delta\hat{\theta}$

O primeiro passo é mostrar que $\Delta\hat{\theta}$ é um vetor e não um versor, ou seja,

$$|\Delta\hat{\theta}| = |\hat{\theta}(t + \Delta t) - \hat{\theta}(t)| \neq 1.$$

Com efeito, utilizando a Figura 3-10 e projetando os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$ sobre os eixos cartesianos x e y, obtemos as equações

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \text{sen } \theta \hat{y}, \tag{3-22}$$

$$\hat{\theta} = -\text{sen } \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y},$$

ou em forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}. \tag{3-22}'$$

Da segunda Equação (3-22) podemos escrever $\hat{\theta}(t)$ para dois instantes quaisquer, t_2 e t_1 ,

$$\hat{\theta}(t_2) = -\text{sen } \theta_2 \hat{x} + \cos \theta_2 \hat{y},$$

$$\hat{\theta}(t_1) = -\text{sen } \theta_1 \hat{x} + \cos \theta_1 \hat{y},$$

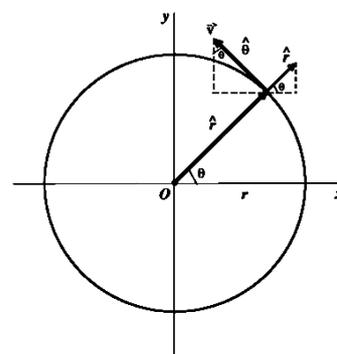


Figura 3-10. Projeção dos versores \hat{r} e $\hat{\theta}$ nos eixos x e y.

onde por conveniência usamos $t_2 = t + \Delta t$ e $t_1 = t$, e $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Subtraindo estas equações, obtemos

$$\hat{\theta}(t_2) - \hat{\theta}(t_1) = -(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \hat{x} + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \hat{y}.$$

Agora é fácil calcular $|\Delta\hat{\theta}|$, ou seja,

$$|\hat{\theta}(t_2) - \hat{\theta}(t_1)| = \sqrt{(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)^2} = 2 \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \neq 1.$$

Nesta derivação usamos duas identidades trigonométricas:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (3 - 23)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{2}.$$

Logo, $\Delta\hat{\theta}$ não é um versor, mas um vetor.

Cálculo da aceleração total

Conforme a Figura 3-9, à proporção que $\Delta t \rightarrow 0$, o vetor $\Delta\hat{\theta}$ tende a se orientar na direção do ponto O, e daí podemos escrever que

$$\frac{\Delta\hat{\theta}}{\Delta t} \rightarrow -\hat{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = -\hat{r} \frac{d\theta}{dt} = -\omega\hat{r}.$$

Finalmente,

$$v \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -v\omega\hat{r} = -v \frac{2\pi}{T} \hat{r} = -v \frac{2\pi}{2\pi r/v} \hat{r} = -\left(\frac{v^2}{r}\right) \hat{r} \equiv \vec{a}_c.$$

Quanto à aceleração tangencial podemos ainda escrever

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha, \quad (3 - 24)$$

onde α é conhecida como **aceleração angular**.

Em resumo,

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = (r\alpha)\hat{\theta} - \left(\frac{v^2}{r}\right)\hat{r} \quad (3 - 25)$$

Duas observações se fazem necessárias:

- i) Se v for constante, então $dv/dt = 0$ e, portanto, apenas \vec{a}_c estará presente;
- ii) Se o movimento não for circular, mas ao longo de uma trajetória curva, as expressões acima ainda são válidas, mas com a ressalva de que r passa a ser o raio de curvatura instantâneo da curva. Este procedimento está acima do nível deste curso.

3-9 Movimento circular uniformemente acelerado

Este movimento ocorre quando a aceleração angular $\alpha = d\omega/dt$ é constante. Nesta situação, podemos aplicar os mesmos procedimentos utilizados no Capítulo 2, através do uso da Equação (2-12), com o cuidado aqui de fazer as correspondências $a \rightarrow \alpha$ e $v \rightarrow \omega$. Assim sendo,

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0). \quad (3 - 26)$$

Analogamente, com o auxílio da Equação (2-8), e como o uso da correspondência $x(t) \rightarrow \theta(t)$,

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha(t - t_0)^2. \quad (3 - 27)$$

Com a eliminação de t entre as Equações (3-26) e (3-27), chegamos à Equação de Torricelli:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha (\theta - \theta_0). \quad (3 - 28)$$

Exemplo 3-11

Uma roda A de raio $r_A = 10$ cm é acoplada por uma correia C à roda B de raio $r_B = 25$ cm. A roda A parte do repouso com a aceleração $\alpha = \pi/3$ rad/s².

Determine o tempo para que B atinja a velocidade de 100 rpm, supondo que C não deslize.

Solução:

Como C não desliza,

$$v_A = v_C = v_B.$$

Além do mais, usando a Equação (3-18)

$$v_A = r_A \omega_A \text{ e } v_B = r_B \omega_B.$$

Isto implica que

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B, \text{ ou } \omega_B = (r_A/r_B) \omega_A.$$

Como pela Equação (3-24), $\omega = \alpha r$, então,

$$\alpha_B = (r_A/r_B) \alpha_A. \quad (3 - 29)$$

Por outro lado, usando a Equação (3-26), podemos escrever

$$\omega_B = \omega_{0B} + \alpha_B t = \alpha_B t, \text{ pois } \omega_{0B} = 0. \quad (3 - 30)$$

Comparando as Equações (3-29) e (3-30), obtemos

$$\omega_B = \left(\frac{r_A}{r_B}\right) \alpha_A t \Rightarrow t = (r_B/r_A)(\omega_B/\alpha_A),$$

que é o tempo pedido.

Usando os valores numéricos e notando que

$$\omega_B = 100 \text{ rpm} = 100 \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = (10\pi/3) \text{ rad/s},$$

então,

$$t = \frac{25}{10} \times \left(\frac{10\pi}{3}\right) \frac{3}{\pi} = 25 \text{ s}.$$

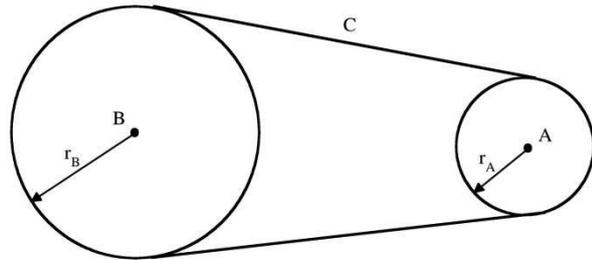


Figura 3-11. Referente ao Exemplo 3-11

Exemplo 3-12

Uma partícula partindo do repouso gira em torno de um ponto fixo com uma aceleração constante. Após um certo tempo, a aceleração resultante desta partícula, faz um ângulo de 60° com sua aceleração tangencial. Determine de quanto ela girou até atingir esta situação.

Solução:

O ângulo pedido é dado por $\theta = (1/2) \alpha t^2$, já que $\theta_0 = 0$ e $\omega_0 = 0$. Não conhecemos α nem t . Mas da Equação (3-25)

$$\vec{a} = a_c \hat{r} + a_t \hat{\theta}, \text{ onde}$$

$$a_t = \alpha r, \text{ e } a_c = -v^2/r = -(\omega r)^2/r = -\omega^2 r.$$

Da Equação (3-28), podemos escrever $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta = 2\alpha\theta$.

Logo, usando a expressão acima para θ , encontramos

$$\omega^2 = (\alpha t)^2 \Rightarrow a_c = -r(\alpha t)^2.$$

No instante t ,

$$a_c = a \text{ sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Desta última relação podemos escrever

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} a_c = -\frac{2}{\sqrt{3}} r (\alpha t)^2.$$

Como $a^2 = a_c^2 + a_t^2$, podemos usar os resultados acima e obter

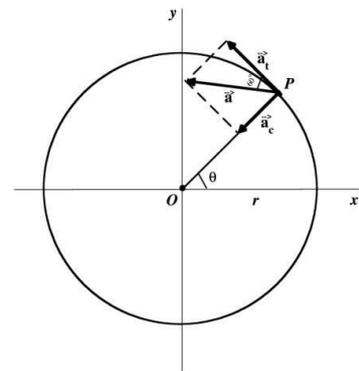


Figura 3-12 Referente ao Exemplo 3-12.

$$r^2(\alpha t)^4 = \frac{3}{4} [r^2 (\alpha t)^4 + (\alpha r)^2] \Rightarrow \alpha t^2 = \sqrt{3}.$$

O ângulo pedido θ é assim dado por

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad.}$$

Paradinha 3-6

Uma roda parte do repouso em $\theta_0 = 0$ e gira com uma aceleração angular dada por $\alpha(t) = 20 t^3 - 12 t^2$, em rad/s^2 . Calcule $\theta(t)$

3-10 Movimento Relativo

Consideramos duas partículas P_1 e P_2 nas posições mostradas na Figura (3-13). Seus vetores posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , medidos em relação à O , no referencial xyz . O deslocamento relativo \vec{r}_{21} de P_2 em relação a P_1 , no instante t , é dado por

$$\vec{r}_{21}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t). \quad (3-29)$$

Derivando em relação ao tempo a Equação (3-29), obtemos

$$\vec{v}_{21}(t) = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t). \quad (3-30)$$

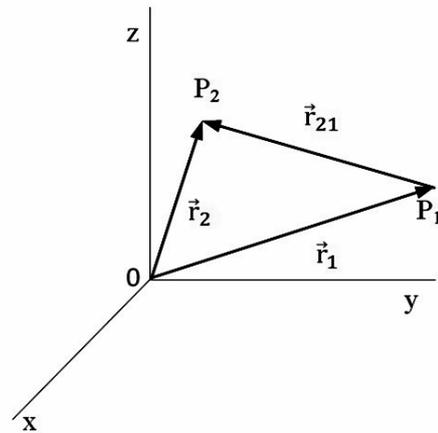


Figura 3-13 Deslocamento relativo de P_2 em relação a P_1 .

que é a velocidade relativa de P_2 em relação a P_1 . Tudo se passa como se \vec{v}_{21} fosse a velocidade de P_2 num referencial com origem na partícula P_1 .

Derivando a Equação (3-30) em relação ao tempo e admitindo que \vec{v}_{21} seja constante, concluímos que P_1 e P_2 têm a mesma aceleração.

Exemplo 3-13

Uma partícula A se desloca em relação a outra partícula B com uma velocidade relativa dada por $\vec{v}_{AB} = 2\hat{x} + \hat{y}$. Já B se desloca em relação a outra partícula C com uma velocidade dada por $\vec{v}_{BC} = -\hat{x} - 2\hat{y}$. Determine a velocidade de A em relação a C.

Solução:

$\vec{v}_{AB} = a\hat{x} + b\hat{y}$, sendo $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, e

$\vec{v}_{BC} = c\hat{x} + d\hat{y}$, sendo $\vec{v}_{BC} = \vec{v}_B - \vec{v}_C$.

Daí podemos escrever

$\vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} = \vec{v}_A - \vec{v}_C = \vec{v}_{AC}$,

ou seja,

$\vec{v}_{AC} = \hat{x} - \hat{y}$.

Exemplo 3-14

Um marinheiro despenca do mastro de um navio que se move em águas tranqüilas, a uma velocidade v , paralelas à praia. Um observador da praia afirma que o marinheiro na sua queda não cairia ao pé do mastro. Ele está certo?

Solução:

A partir do instante em que o marinheiro começa a cair, ele tem a mesma componente horizontal de sua velocidade v_x , sempre **igual** à velocidade do navio, v , de tal maneira que a velocidade do marinheiro **relativa** ao navio é nula. Assim a

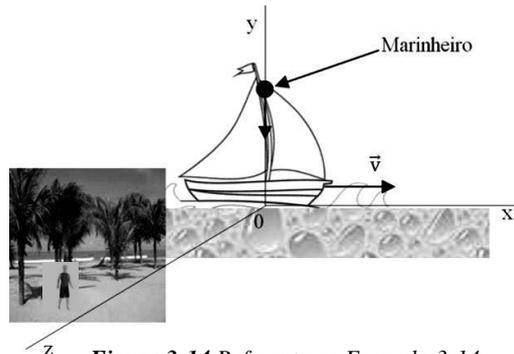


Figura 3-14 Referente ao Exemplo 3-14

velocidade do marinheiro em queda continuaria sendo vertical. Como consequência, ele caiu ao pé do mastro. O observador estava errado!

Paradinha 3-7

Gotas de chuva caem verticalmente com velocidade \vec{v}_g em relação ao solo. Um carro em movimento retilíneo uniforme se desloca horizontalmente com velocidade \vec{v}_c . No interior do carro se observa que gotas escorregam sobre uma janela lateral segundo um ângulo θ com a horizontal. Calcule este ângulo.

3-11 Pausa para descontração:

A Europa na época de Newton*

**Esta seção foi escrita em colaboração com o professor Andrea Sorgenti da Società Dante Alighieri – Comitato di Recife.*

Como era a Europa no período do nascimento de Isaac Newton (1642-1727)? Quais os acontecimentos mais importantes nesta época? Quais as ideias marcantes?



Figura 3-15 Europa com o tratado de Vestfalia

A primeira metade do século XVII foi marcada na Europa por um período interminável de guerras, que embora com diferentes fases e diferentes participantes, constituíram a assim conhecida “Guerra dos Trinta Anos”. Ela começou em 1618 e terminou em 1648 com o tratado de Vestefalia. As causas destas guerras variaram de natureza religiosa, dinástica, expansão territorial, a interesses comerciais.

No início do século XVI, a mudança de mentalidade das sociedades europeias repercutiu no campo religioso. As ideias renascentistas valorizaram o homem e suas realizações. A expansão comercial permitira o confronto de valores e culturas diversas e provocaram um “repensar” crítico do mundo, até então dominado pelo clero romano. Com a *Reforma Protestante Luterana* (1517) e depois *Calvinista*, por volta de (1540), as novas doutrinas não reconheciam mais o primado da Igreja Católica, e a partir da separação das Igrejas, Romana e Inglesa, por obra do rei Henrique VIII (1534), surgiram muitas novas igrejas, por exemplo, os *Huguenotes* na França, os *Puritanos* na Inglaterra, os *Presbiterianos* na Escócia e os *Reformistas* nos Países baixos. A Igreja Católica reagiu com a *Contra Reforma*, que no Concílio de Trento (1515-1563), rejeitou e condenou as ideias do Protestantismo, reafirmou os dogmas da religião católica e restaurou os nefandos tribunais da Santa Inquisição que julgavam atos e pensamentos contrários à fé católica e que tanto peso tiveram no combate às ideias científicas e humanistas.

A primeira metade do século XVII foi também época de reforçamento das monarquias absolutistas, seguindo uma tendência já iniciada no século XVI, onde ficou mais importante a figura do rei, centro de todos os poderes, do legislativo ao judiciário, do executivo ao religioso. O rei passa a ser o senhor absoluto e símbolo nacional. Ele era quem fazia as leis, aplicava a justiça, cuidava das finanças e estabelecia a hierarquia de funcionários, enfim, era ele a fonte de todos os poderes. Os fatores indutores principais deste processo foram, entre outros de caráter religioso e de direito-administrativo. Por exemplo, a criação de exércitos nacionais permanentes, sob o comando direto do rei e não mais da nobreza, mas com o apoio da burguesia, que via na unificação e nas padronizações político-administrativas,

um meio eficaz para ampliar seus ganhos comerciais. Com a criação de um território unificado, onde só o estado cobrava impostos, e a existência somente de uma mesma moeda, era possível aumentar os lucros da burguesia.

A França teve um período interminável de lutas religiosas sanguinárias (1562-1598), entre católicos, apoiados por Felipe II da Espanha, e huguenotes, apoiados pela rainha anglicana Elizabeth I da Inglaterra. O episódio mais trágico desta guerra foi a famosa *Noite de São Bartolomeu* (24 de agosto de 1572) quando foram mortos nas ruas de Paris mais de 2000 huguenotes. Estas lutas finalmente terminaram com o *Édito de Nantes* (1598) que dava liberdade religiosa para todos. Foi assinado pelo rei Henrique IV, chefe do partido protestante, mas que depois de assumir o trono, se tornou católico e iniciou a dinastia dos *Bourbons* que governaria a França até 1792, ano da Revolução Francesa. Esta dinastia foi marcada pelos reinados de Luis XIII (1610-1643), e principalmente pelo de Luis XIV (1643-1715), o *Rei-sol*, o símbolo máximo do poder absoluto. Neste período, o arquiteto do absolutismo francês e da liderança francesa na Europa foi o *Cardeal Richelieu*, primeiro ministro de Luis XIII de 1642 a 1648. Em política externa envolveu a França em várias guerras, principalmente com a Áustria e a Espanha enquanto que em política interna, sua administração foi assinada por reformas úteis nas finanças, no exército e na legislação (*código Michau*). Foi o criador do absolutismo real, pôs fim aos privilégios provinciais, com a centralização administrativa e a instituição de intendentés. Fundou a *Académie Française*, a associação composta por proeminentes pessoas em assuntos relativos à língua francesa e que inspirou também nossa Academia Brasileira de Letras. Sua política de tributação, entre as mais altas, necessária para financiar as contínuas guerras, criou um estado de revolta endêmico em diversas províncias. Seu sucessor foi o *Cardeal Mazarin*, que havia se preparado para dar continuidade à sua política. Regeu a França até a maior idade de Luis XIV, em 1661. Com o *Rei-sol*, a França esteve no auge do seu esplendor, com um moderno exército que dominava a Europa, depois das vitórias contra a Espanha e a Áustria. Em política interna, perseguiu os protestantes e muitos deles deixaram o país. Foi ele quem mandou construir o palácio de *Versailles*, onde morou e no qual trabalhavam mais de quatro mil funcionários. Muito importante no reinado de Luis XIV, foi o ministro da fazenda, *Colbert*, que aperfeiçoou o sistema de cobranças de impostos e exerceu um rígido controle fiscal procurando conter os excessivos gastos. Estimulou a vida econômica francesa, apoiou o comércio internacional e as manufaturas trazendo para a França indiscutíveis benefícios. Ao final do reinado do *Rei-sol* a França havia se sobressaído diante das nações europeias, porém sua economia estava em bancarrota, pois os gastos excessivos haviam arruinado o país.

Da Áustria, através da dinastia dos *Hasburgo*, saíram a partir do século XVI, todos os imperadores do *Sacro Império Romano*, o qual era formado por diferentes estados (Saxônia, Turígia, Francônia, Baviera, etc.), muitas vezes em luta entre si. Os Hasburgos, com uma hábil política de casamentos, estavam presentes em praticamente todos os palácios reais da Europa e até do mundo. Isto ajudava na diplomacia deste Império. Vale salientar que ainda no final da vida de Newton, esta dinastia deu à Áustria uma grande imperatriz, Maria Thereza (1717-1780), responsável por importantes reformas sociais na Europa, entre elas a educação fundamental compulsória. Foi ela a mãe de Maria Antonieta (1717-1780) que se casou com Luis XVI da França. A imperatriz do Brasil monárquico Maria Leopoldina, descende diretamente daquela grande imperatriz austríaca. No início desta dinastia, o monge *Martinho Lutero* publicou suas 95 teses em 1517, desafiando a Igreja de Roma e dando início à Reforma protestante. O *Luteranismo* tornou-se então a religião oficial de muitos estados alemães após 1530. Conflitos religiosos resultantes desta divisão no império geraram a *Guerra dos Trinta Anos*, a qual devastou boa parte dos territórios alemães. A população nestes estados foi reduzida em cerca de 30%. O tratado de *Vestefalia* (1648) acabou com esta guerra, mas o império estava de fato dividido em inúmeros principados independentes.

A Itália era muito dividida e não desenvolveu uma forma de estado absoluto, como a maioria dos demais na Europa. A influência da Igreja Católica contra uma unificação era muito grande e muitas vezes o Papa apoiava potências estrangeiras contra as cidades italianas.

Outras potências surgiram e se afirmaram entre os séculos XVI e XVII, como a Dinamarca, a Suécia, a Noruega, todas elas dominadas por soberanos absolutos, desejosos de expandirem seus territórios e suas influências.

Dois estados que neste período tiveram um forte desenvolvimento econômico e demográfico foram a Holanda e a Inglaterra, que se firmaram como potências marítimas e obtiveram uma hegemonia econômica. A Holanda, por exemplo, em pouco tempo, havia se tornado uma grande potência marítima. Com uma frota de 20 mil embarcações, dominava o oceano e concentrava enorme quantidade de capital em seus bancos, tornando-se o maior centro monetário da Europa. A Inglaterra, sob o reinado de Henrique VIII (1509-1547) havia conhecido uma nova religião, o *Anglicanismo*, que reconhecia o rei como chefe supremo da Igreja e do Estado. Foi resultado da recusa do Papa de conceder ao rei o divórcio de sua então esposa, *Catarina de Aragão*, irmã do rei da Espanha. Este fato provocou a ruptura entre a Igreja Romana e a Inglesa, onde esta última ficou com as terras do Vaticano na Inglaterra, e não mais pagou os dízimos obrigatórios à Igreja de Roma. Em 1558, subiu ao trono *Elizabeth I*, jovem rainha que se esforçou para assegurar a paz religiosa e preservar seu país do fanatismo religioso que explodia em todo o continente europeu. Ela firmou a igreja anglicana na Inglaterra, mas deu voz aos católicos no parlamento. Esta rainha deu início à ascensão da Inglaterra como potência mundial. Foi ela a responsável pelo fim da superioridade espanhola nos mares, transformando a Inglaterra na nação mais lucrativa com a política mercantilista. Nos campos, surgiu uma nova classe

de ricos proprietários, que investiram grandes capitais para ajustar a agricultura às novas exigências da indústria. Eles não se contentavam em produzir para o próprio consumo, queriam também produzir para vender. Após o reinado de Elizabeth I, várias reformas foram feitas, entre elas, o fortalecimento do Parlamento. Uma nova política econômica foi também estabelecida. Qualquer pessoa tivesse recursos suficientes poderia iniciar uma atividade produtiva e comerciar livremente em qualquer região de sua escolha. Isso estimulou grandemente a produção agrícola e manufatureira e fez com que a Inglaterra conseguisse reunir condições favoráveis para ser a pioneira na *Revolução Industrial*.

Como era a vida na Europa no dia-a-dia das pessoas?

A sociedade europeia era dividida em várias classes sociais havendo uma grande separação entre elas. A mais alta classe era formada pela *nobreza*, a qual levava uma vida de privilégios e total ausência de trabalho, sempre empenhada em festas, vida na corte, intrigas e libertinagem. A classe mais baixa era formada por camponeses, que viviam praticamente na miséria. Entre estas duas classes havia os proprietários de terra e a burguesia, normalmente vivendo nas cidades. Com o início da revolução industrial, principalmente, na Inglaterra, a burguesia se tornou cada vez mais forte, e uma nova classe de operários mais qualificados começou a aparecer.

As condições sanitárias na Europa nesta época eram terríveis, havendo, periodicamente surtos de peste bubônica, as quais dizimavam populações inteiras em muitas regiões.

A ciência no início do século XVII já tinha alcançado certo grau de desenvolvimento. Na *Itália* surgiu a ciência moderna, com as contribuições fundamentais de *Galileu*. A matemática já atingia então, certo nível avançado. Ainda na Itália, destacou-se *Torricelli* (1608-1647).

Na *França*, vale enfatizar a criação da geometria analítica, por *René Descartes* (1596-1650). Ao que parece, esta criação se deveu a uma observação de Descartes ao movimento de uma mosca no teto de seu quarto. Para descrevê-lo, ele imaginou que as posições sucessivas da mosca poderiam ser obtidas através de um engenhoso método conhecido como *sistema de coordenadas cartesianas*. O passo seguinte foi introduzir a análise matemática na geometria, gerando assim, a *geometria analítica*, tão fundamental na matemática e na física. Contribuições variadas de *Pierre de Fermat* (1601-1665), a criação da *geometria projetiva* por *Girard Desargues* (1591-1661), e o desenvolvimento da *análise combinatória e as probabilidades* por *Blaise Pascal* (1623-1662), além de outras contribuições, deram à França um destaque fundamental.

Na *Inglaterra*, a ciência também estava em plena ascensão e foram vários os cientistas que contribuíram neste período. O mais famoso foi *John Wallis* (1616-1703), com estudos sobre as *seções cônicas*. Outro nome famoso foi *Isaac Barrow* (1630-1677), com o *método das normais e tangentes à curvas*. Ele tornou-se em 1664 o primeiro *Lucasian Professor*, cátedra criada em Cambridge, sendo sucedido com sua morte, por Isaac Newton.

Nos países baixos (*Holanda, Dinamarca, Bélgica*), houve também grande progresso com um destaque importante do holandês *Christiaan Huygens* (1629-1695), com contribuições em física e matemática. São importantes suas contribuições na teoria ondulatória da luz e na astronomia, nas descobertas dos satélites de Saturno. Realizou importantes pesquisas sobre o pêndulo, além de ter inventado o relógio de pêndulo. Foi ele quem deu uma expressão quantitativa à *força centrípeta*. Mesmo estrangeiro se tornou membro da *Royal Society* de Londres.

Na *Alemanha* nascia, um pouco depois de Newton, outro gênio que influenciaria, em muito, a ciência, *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716). Sua criação maior foi o *cálculo infinitesimal*, creditada também a Newton.

(Esta seção foi escrita em colaboração com o professor *Andrea Sorgenti da Società Dante Alighieri – Comitato di Recife*).



Figura 3-16 René Descartes

Material extra-curricular sugerido

Filme ou DVD

“*Descartes*”, um filme de Roberto Rossellini, de quase três horas. Com legenda em português, mostra um retrato fascinante da vida de Descartes e de sua busca incessante pelo conhecimento. É um filme obrigatório para todos os interessados em filosofia e ciência.

Resumo

Vetor posição

É definido como

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

e aponta da origem do sistema de coordenadas para a partícula.

Vetor deslocamento

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (3 - 2)$$

Velocidade média

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3 - 3)$$

Velocidade instantânea

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3 - 4)$$

Aceleração média

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (3 - 5)$$

Aceleração instantânea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3 - 6)$$

Se \vec{a} for constante,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} (t - t_0), \quad (3 - 7)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} (t - t_0)^2,$$

Movimento do projétil (desprezando a resistência do ar)

Nesta situação, os movimentos, horizontal e vertical, são independentes. Note que $a_x = 0$ e $a_y = -g$. A equação de trajetória é representada por uma parábola:

$$y - y_0 = (tg \theta_0)(x - x_0) - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \right] (x - x_0)^2. \quad (3 - 13)$$

O alcance horizontal R é a distância horizontal desde o ponto de lançamento até o ponto no qual a partícula retorna à mesma altura da qual foi lançada e é dada por

$$R = \left(\frac{v_0^2}{g} \right) \text{sen } 2\theta_0, \quad (3 - 14)$$

Movimento circular uniforme

Aquele onde a velocidade tangencial \vec{v} (ou a velocidade angular da partícula ω), é constante.

Velocidade tangencial

$$\vec{v} = r \omega \hat{\theta},$$

sendo r o raio da circunferência e ω a velocidade angular.

Período (T) e frequência (f)

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{T}. \quad (3 - 19)$$

Aceleração centrípeta

$$\vec{a}_c = - \left(\frac{v^2}{r} \right) \hat{r}. \quad (3 - 21)$$

Movimento circular não uniforme

Neste caso \vec{v} não é constante. A aceleração total é agora composta de duas partes e é dada por

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = (r\alpha) \hat{\theta} - \left(\frac{v^2}{r} \right) \hat{r}. \quad (3 - 25)$$

No caso de $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ ser constante, o movimento é dito **uniformemente acelerado** e é dado pelas Equações (3 - 26) a (3 - 28).

Movimento relativo

Para duas partículas P_1 e P_2 em movimento, com vetores posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , respectivamente, existe uma velocidade relativa

$$\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1,$$

onde tudo se passa como se \vec{v}_{21} fosse a velocidade de P_2 num referencial com origem na partícula P_1 . Esta é a ideia, de **movimento relativo**. Considerando a velocidade \vec{v}_{21} constante, isto acarreta $\vec{a}_2 = \vec{a}_1$.

Questões conceituais

1) Um avião voa horizontalmente com uma velocidade constante V , a uma altura h do solo. Logo abaixo e no mesmo plano vertical do avião se encontra um canhão que dispara uma bala, com velocidade inicial v_0 a um ângulo θ_0 com a horizontal, com o intuito de atingi-lo.

É possível haver colisão para $v_0 < V$?
Justifique sua resposta.

2) É possível se fazer uma curva: a) com aceleração nula? Explique.
b) Com velocidade tangencial crescente e aceleração angular constante?
Justifique sua resposta.

3) Uma pedra presa a um barbante gira com velocidade tangencial crescente, em uma circunferência horizontal no sentido anti-horário, conforme a Figura 3-17.

Dos vetores mostrados nesta figura, quais poderiam representar:

- a) a velocidade da pedra?
- b) a sua aceleração?
- c) o seu vetor posição?
- d) o sentido inicial da trajetória da pedra se o barbante fosse rompido?

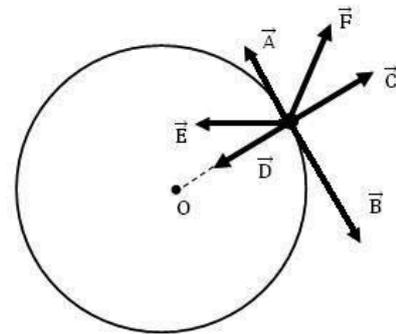


Figura 3-17 Questão 3

— $x(t)$
- - - $y(t)$

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* As coordenadas de uma partícula em movimento são dados por $x(t) = \alpha t^2$ e $y(t) = \beta t^2$, onde α e β são constantes.
a) Qual a velocidade da partícula? b) E sua aceleração?

2)* A Figura 3-18 mostra os deslocamentos x e y versus t de uma partícula. Existe um intervalo de tempo, incluindo a partida, tal que a velocidade média da partícula seja zero?

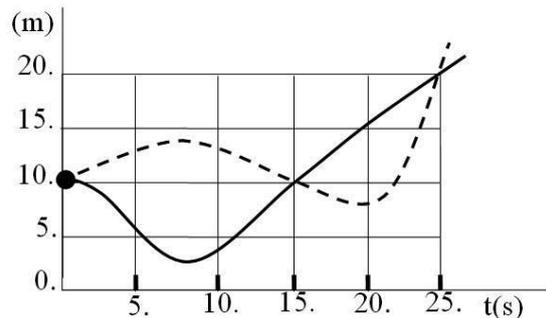


Figura 3-18 Problema 2.

3)* O vetor posição de uma partícula P com respeito a um ponto estacionário O é dado por $\vec{r}(t) = \alpha \sin \omega t \hat{x} + \beta \cos \omega t \hat{y}$, onde α e β são

constantes. Qual a equação da trajetória de P?

4)* O vetor posição de um objeto A é dado por $\vec{r}(t) = \alpha t \hat{x} - \beta t^2 \hat{y}$, onde α e β são constantes positivas. Ache

- a) a equação da trajetória, $y(x)$, de A;
- b) a velocidade $\vec{v}(t)$ e a aceleração $\vec{a}(t)$;
- c) a velocidade média no intervalo $[0,t]$.

5)** Um ciclista passa pelo ponto A mostrado na Figura 3-19 com velocidade $\vec{v} = v_0 \hat{x}$, sendo $v_0 = 3,0$ m/s. Do ponto B, no mesmo instante, e a uma distância $d = 30$ m de A sai outro ciclista com velocidade inicial nula e aceleração constante $a > 0$. Admitindo $\theta = 60^\circ$, calcule o valor da aceleração a para que haja uma colisão em P.

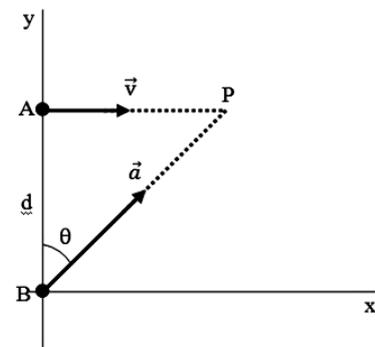


Figura 3-19 Problema 5

6)* A velocidade de lançamento de um projétil é duas vezes sua velocidade em sua altura máxima. Encontre o ângulo de lançamento θ_0 .

7)* Uma bola é lançada horizontalmente de uma altura de 100 m do solo com uma velocidade de 20 m/s. Calcule:

- a) o tempo que a bola leva para alcançar o solo;
- b) a que distância horizontal coberta isto corresponde;

- c) a velocidade com que a bola alcança o solo e sua direção em relação à vertical.
- 8)* Um objeto projetado com a mesma velocidade a ângulos diferentes têm o mesmo alcance R. Se t e t' forem os tempos de voo, prove que $R = \frac{1}{2} g t t'$.
- 9)** Um canhão dispara dois projéteis, sucessivamente, com uma mesma velocidade inicial v_0 , mas a ângulos de lançamentos diferentes, θ_1 e θ_2 . Ache o intervalo de tempo entre os disparos para que haja uma colisão no ar dos projéteis.
- 10)** Uma bola caindo livremente de uma altura h' conhecida, atinge um plano inclinado a uma altura h do solo. Do impacto, a direção da velocidade da bola neste instante torna-se horizontal. Para que valor h/h' a bola levará um tempo máximo para atingir o solo?
- 11)** Uma escadaria é formada de três degraus. Cada degrau tem 20 cm de altura e 20 cm de largura. Ache a mínima velocidade horizontal de uma bola no plano horizontal do degrau superior que rolando deve alcançar diretamente o plano horizontal do degrau inferior.
- 12)*** Uma bola é lançada com uma velocidade inicial $v_0 = 2\sqrt{hg}$ tal que ela quase bate em dois obstáculos verticais de altura h separados por uma distância $d = 2h$.
- a) Mostre que o ângulo θ_0 de lançamento é 60° .
- b) Mostre que o intervalo de tempo gasto pela bola entre os obstáculos é $\Delta t = 2\sqrt{h/g}$.
- 13)* Uma partícula se move em movimento circular horizontal de raio 1,0 m, tal que seu deslocamento angular obedece à equação $\theta(t) = \theta_0 + t + t^2$, onde θ_0 é uma constante e θ é medido em radianos.
- a) Qual a velocidade angular inicial da partícula?
- b) Qual a aceleração total da partícula após 1,0 s de sua partícula?
- 14)** Uma partícula está em movimento circular uniforme com velocidade v . Qual a variação em sua velocidade após girar de um ângulo de 90° ?
- 15)* Um carro se move a 50 m/s numa estrada circular de raio 500m. O motorista resolve então aumentar a velocidade a uma taxa de 2 m/s^2 . Qual a nova aceleração total?
- 16)* Imagine o rio Capibaribe com uma largura média d , que corre de Oeste a Leste a uma velocidade v . Um homem no lado Sul do rio, capaz de nadar a uma velocidade v em águas paradas, quer cruzar o rio no menor tempo possível.
- a) Em que direção ele deve nadar?
- b) Em que direção ele deve nadar para alcançar o ponto diretamente oposto ao ponto de partida?
- 17)* Gotas de chuva caem a um ângulo de 45° com a vertical. A velocidade de vento é de 30 m/s na direção horizontal. Calcular a altura da nuvem.
- 18)* Um avião sai de Brasília com direção norte para alcançar Belém, voando a uma velocidade de 900 km/h. Durante o trajeto encontra um vento que sopra a 50 km/h na direção nordeste, formando um ângulo de 30° com a direção norte. Qual a velocidade do avião em relação ao vento?
- 19)* Neve está caindo verticalmente com uma velocidade constante de 10 m/s. Com que ângulo em relação à vertical, os flocos de neve parecem cair para um passageiro de um carro viajando a 60 km/h uma estrada reta e horizontal?
- 20)** Uma partícula se move em uma circunferência com aceleração tangencial constante $a_t = 1,0 \text{ m/s}^2$. Qual é sua aceleração total no momento em que cobriu 10% da circunferência após iniciar o movimento.
- 21)* Numa primeira aproximação, as órbitas da Terra (T) e de Marte (M) em torno do Sol (S) podem ser consideradas circulares, coplanares e concêntricas, além destes planetas girarem num mesmo sentido. Os períodos de revolução deles em torno do Sol são respectivamente, $T_T = 365,3$ dias e $T_M = 687$ dias. Seja T_{TM} o período relativo necessário para Marte fazer uma revolução em torno da Terra. Mostre que $1/T_{TM} = (1/T_T) - (1/T_M)$. Calcule T_{TM} .

CAPÍTULO 4

AS LEIS DE NEWTON

4-1 Finalizando a construção da mecânica clássica

O objetivo deste capítulo é concluir a construção da mecânica clássica, como idealizada por seu criador, Isaac Newton (1642-1727). Esta mecânica por este motivo é também conhecida por *mecânica newtoniana*, e com ela se dá início a criação da Física, como ciência exata. Newton dedicou uma parte da sua vida a esta tarefa quando se ausentou de Londres, fugindo de um surto de peste bubônica que ora assolava nesta parte da Inglaterra. Refugiou-se na fazenda de sua família, no interior daquele país. Newton era um homem bem preparado notadamente em seus conhecimentos em matemática, onde dominava os *Elementos* de Euclides (ou hoje conhecida como *geometria euclidiana*), a álgebra, a trigonometria, além de toda a matemática que era criada à época. Conhecia a fundo as obras de Galileu, Huygens, Descartes, Wallis só para citar alguns exemplos.

Neste capítulo vamos seguir o caminho relativamente próximo ao desenvolvido em sua magistral obra “*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*”. Ficou conhecida como “*Principia*”, pois foi originalmente escrita em latim, (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) língua oficial então usada (uma tradução em inglês e publicada pela Encyclopedia Britannica, Inc., “*Mathematical Principles of Natural Philosophy*”, 1978, pode ser utilizada). No entanto, vamos utilizar o formalismo da matemática atual, pois à época de Newton, a matemática ainda estava num estágio bem longe do que se conhece hoje, desde o seu conteúdo até à falta de uma notação padrão. O cálculo vetorial, por exemplo, ainda não existia, daí o método geométrico clássico ser utilizado à exaustão, tornando a obra mais difícil de ser lida nos dias atuais.

Para começar, Newton seguiu o modelo introduzido por Aristóteles na construção de uma teoria científica. Este modelo foi utilizado pela primeira vez por Euclides na criação da geometria euclidiana. Nos *elementos*, primeiro são dadas as *definições*, em seguida *axiomas* e finalmente, os *postulados*. Com a evolução da matemática, no entanto, os axiomas foram paulatinamente incorporados aos postulados. O procedimento continua sendo utilizado nas teorias na física e na matemática. O conjunto (definições + postulados) faz parte de qualquer teoria, formando o que se chama de *lógica formal*, conforme já visto no capítulo 1 e em particular na seção 1-8.

Na construção da mecânica, devotamos os três primeiros capítulos para gerarmos a maioria das *definições*, segundo o modelo mencionado acima, mas com a utilização de uma linguagem matemática atual e uma abrangência maior nos comentários, de modo a tornar o texto mais didático. Estes tipos de comentários são também conhecidos como *escólios*. Através destas definições, naturalmente, foi criada uma área dentro da própria mecânica chamada de *cinemática*. Ela descreve o movimento dos corpos sem a preocupação do conhecimento do agente (força, por exemplo) que o cria. Similar atuação, também ocorre na formulação da geometria euclidiana, onde já com o uso das definições, se pode de imediato, criar muitos teoremas e resolver problemas sem o uso dos postulados.

4-2 Uma revisita às definições e aos escólios

Para um entendimento completo da mecânica clássica, foi necessário definirmos e/ou desenvolvermos os seguintes conceitos:

Comprimento, tempo e massa (Capítulo 1).

O *tempo* na mecânica clássica é tomado como algo que flui naturalmente sem relação com qualquer coisa externa. Não é considerado uma coordenada (como o são xyz , num sistema de coordenadas cartesianas), mas um parâmetro. No entanto, para corpos com velocidades próximas à da luz ($v \sim c$), tem sua descrição feita através da mecânica relativística, onde o tempo passa a ser uma quarta coordenada, gerando grandes implicações físicas.

A *massa* é uma grandeza escalar e é uma característica intrínseca de um corpo, conforme indicado pelos experimentos. Ela está necessariamente associada à existência de um corpo. Ainda persiste a falta de uma conceituação física mais precisa para a massa. Da teoria da relatividade restrita, sabe-se, por exemplo, que no vácuo, quando sujeita a altas velocidades ($v \sim c$), ela varia com v , ou seja $m(v) = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, onde m_0 é a massa de repouso do corpo. Se $c \rightarrow \infty$, recai-se na mecânica newtoniana, onde $m = m_0$. As unidades de massa foram estudadas no Capítulo 1.

Vetor posição, velocidade e aceleração (se referem ao movimento, Capítulos 2 e 3).

Queda livre dos corpos movimento de projéteis e movimento num plano inclinado (Capítulos 2 e 3).

Galileu foi possivelmente o primeiro a estudar matematicamente a queda livre dos corpos, o movimento de projéteis e o movimento num plano inclinado. A interação à distância, sem contacto entre os corpos, foi também objeto de estudo por parte de Galileu. Estes assuntos foram mais tarde incorporados por Newton em sua obra.

Movimento circular e aceleração centrípeta (Capítulo 3).

O movimento circular foi pioneiramente estudado por Christian Huygens (1629-1695). Foi ele quem primeiro deu uma expressão quantitativa à força centrípeta. Newton estendeu estes estudos, incorporando curvas quaisquer, e aí se faz necessário o conhecimento do raio de curvatura da curva num ponto, obtido da geometria analítica.

Movimento relativo (Capítulo 3).

A extensão do estudo do movimento relativo vai dar origem ao conhecimento mais aprofundado dos referenciais inerciais, a ser visto no Capítulo 12 deste livro. De novo, Galileu deu uma contribuição fundamental neste assunto.

Para completar o elenco acima, precisamos ainda de mais três conceitos: *quantidade de movimento, força impressa a um corpo e inércia*.

Quantidade de movimento.

“**Quantidade de movimento**, \vec{p} , é definida como $\vec{p} = m \vec{v}$.” Esta grandeza de natureza vetorial, será de grande utilidade, principalmente, na formulação da segunda lei de Newton. Ela foi inicialmente proposta pelo cientista francês René Descartes (1591-1650) como o nome de **momento** (do latim *momentum*, com plural, *momenta*, que significa *pequena quantidade*).

Força impressa.

“*Força impressa é uma ação exercida sobre um corpo, de modo a mudar seu estado, ou de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme*”. Será útil na formulação da 1ª lei de Newton. Esta força consiste somente na ação, e não mais permanece no corpo quando a ação termina.

Inércia.

É a propriedade da matéria que pode ser expressa como a resistência que esta oferece à mudança de seu *estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme*. Associado a esta matéria, existe uma massa, m , chamada de *massa inercial*.

Para sabermos se um objeto está em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme, temos que observá-lo de um referencial que esteja em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme. Este referencial se chama *referencial inercial*. Aqui na Terra esta tarefa parece, a princípio, difícil, já que a mesma está em rotação em torno de seu eixo, e também em torno do Sol. Já de um referencial ligado a uma estrela “fixa”, se tem uma excelente aproximação de um referencial inercial. Estas estrelas, situadas a distâncias maiores que 10^{16} m de nós, mantêm praticamente as mesmas posições relativas na abóbada celeste. Daí o nome de estrelas fixas. É fácil verificar que um referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial, é também inercial. Isto decorre da Equação (3-30). Assim dispondo de um referencial inercial ligado às estrelas fixas, automaticamente, podemos dispor de uma infinidade de outros mais. Numa escala de laboratório, os movimentos de rotação da Terra afetam muito pouco os movimentos usuais lá, conforme revelam dados experimentais. Daí poderem, em uma boa aproximação, ser considerados como referenciais inerciais.

4-3 A Primeira Lei de Newton

“Todo corpo persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele”.

Desde a antiguidade se pensava que para manter um corpo em movimento retilíneo uniforme era necessário a existência de uma força atuando sobre ele. À primeira vista, parecia razoável se pensar assim. No entanto, experimentos realizados mostraram o contrário. Um corpo impulsionado sobre uma pista plana, praticamente sem atrito (como uma pista de gelo), deslizaria “indefinidamente”, sem diminuir a velocidade, mesmo se esta pista fosse cada vez maior. A primeira lei da mecânica é o resultado de muitas observações. Galileu foi o primeiro cientista a introduzir o conceito de *inércia* e que mais tarde induziu Newton a finalmente criar a lei acima. Esta 1ª lei é também chamada de *lei de inércia*. A massa m de um corpo é a medida de sua inércia.

As leis de Newton só são válidas em um referencial inercial. Para efeitos práticos, em nível de laboratório, ou em dimensões corriqueiras entre nós, o solo é frequentemente considerado um referencial inercial. Este assunto será discutido com mais cuidado no Capítulo 12 deste livro.

Exemplo 4-1

Um disco metálico bem pequeno é carregado com uma carga elétrica e mantido isolado. É então, impulsionado com uma velocidade \vec{v} para seguir uma trajetória, retilínea numa pista de gelo, horizontal, plana e bem polida. Outra carga elétrica é simultaneamente, acionada no ponto de partida do disco.

O disco teria sua velocidade modificada ao longo da trajetória? Como ficaria a 1ª lei de Newton neste caso?

Solução:

Ao partir, o disco ficará sujeito a uma força elétrica criada entre as duas cargas. Isto afetará o *movimento* do disco, alterando sua velocidade \vec{v} .

A 1ª lei não se aplica neste caso, já que existe uma força atuando sobre o disco.

4-4 A Segunda Lei de Newton

“A variação da quantidade de movimento é proporcional à força impressa, e tem a direção da força”.

Ela, entretanto, tem uma versão mais conhecida:

“A força é a taxa de variação temporal da quantidade de movimento”.

Podemos apresentar esta lei em forma de equação,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4-1)$$

onde \vec{p} é a quantidade de movimento do corpo.

Como $\vec{p} = m\vec{v}$, e se supormos que m não varia com o tempo, então $d\vec{p}/dt = m d\vec{v}/dt$, o que implica que

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (4-1)'$$

que é a forma mais conhecida, porém não é a mais geral desta lei fundamental. Temos aqui o início da *dinâmica* dentro da mecânica newtoniana. A força agora faz parte do processo, ao contrário da *cinemática*, onde a causa do movimento não era *considerada*. Cada equação acima, por si só, não define \vec{F} . A natureza de \vec{F} deve ser conhecida, a priori, no problema estudado. Ela pode advir de uma interação à distância (como de uma força gravitacional), ou mesmo, de uma interação de contacto. A massa m corresponde à **massa inercial** do corpo considerado.

Escóliosi) *Sistema inercial.*

É bom enfatizar que a 2ª lei, bem como a 1ª, só são válidas num referencial inercial.

ii) Se $\vec{F} = 0$, então, $\vec{a} = 0$, o que implica que a partícula está em repouso, ou em movimento retilíneo uniforme.

iii) *Domínio da validade da mecânica clássica*

É bom enfatizar que a Equação (4-1) é a mesma para partículas no domínio relativístico ($v \sim c$). Já no domínio microscópico, nem ela, nem a Equação (4-1), em geral, se aplicam. A mecânica quântica é então a teoria utilizada. Certamente, existem processos matemáticos de relacionarem estas teorias entre si.

iv) *Derivadas de ordem superior*

Na mecânica newtoniana só intervêm deslocamentos, velocidades e acelerações. Grandezas, como $d^2\vec{a}/dt^2$, ou de ordem superior, não são necessárias de se considerar.

v) *Princípio da superposição de forças*

Devido aos formatos das Equações (4-1), ou (4-1)', conclui-se que \vec{F} é uma grandeza vetorial, já que m é um escalar. Havendo várias forças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, atuando sobre uma mesma partícula, existirá uma força resultante aplicada sobre a mesma, dada por

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (4-2)$$

exatamente, como visto, para vetores em geral. Este resultado é conhecido como *princípio da superposição de forças*, e é um *resultado de comprovação experimental*. O efeito produzido por cada força é independente do efeito, produzido pelas outras forças.

vi) *Solução analítica*

Na solução de problemas, a Equação (4-1)' é equivalente a três equações, uma para cada componente: $F_x = m a_x$, $F_y = m a_y$ e $F_z = m a_z$. Note que para várias forças atuando sobre m , \vec{F} é dado pela Equação (4-2). Assim, a componente x da aceleração, é dada pela soma das componentes x da força (e assim, analogamente, para as demais componentes, y e z). Nesta soma não entram componentes ao longo de qualquer outro eixo. As digressões matemáticas sobre vetores, presentes nos Capítulos 2 e 3, são importantes.

vii) *Unidades*

No SI a força é medida em Newton (N). Sua definição é obtida da Equação (4-1)':

$$1\text{N} = (1\text{kg}) \times (1\text{m/s}^2) = 1\text{kg} \cdot \text{m/s}^2. \quad (4-3)$$

A Tabela 4-1 fornece algumas unidades de força em outros sistemas de unidades

Tabela 4-1

Unidades na Segunda Lei de Newton (Equação (4-1)')			
Sistema	Força	Massa	Aceleração
SI	Newton N	quilograma	m/s ²
CGS*	Dina	grama (g)	cm/s ²
Britânico	libra (lb)	slug	ft/s ²
*dina = 1 g . cm/s ²			
*1b = 1 slug.ft/s ²			

4-5 Algumas forças especiais

A Força Gravitacional

É uma força atrativa exercida por um corpo sobre outro. Em geral o corpo é a Terra (ou algum outro astro de porte no Universo). No caso da Terra, a força, \vec{F}_g , atuando num corpo aqui na Terra é dirigida para baixo, em direção ao solo, o qual é considerado, aproximadamente, um referencial inercial.

Esta força é do tipo que atua à distância, sem nenhum toque com o outro corpo. Esta questão de ação à distância foi para Newton um grande problema não resolvido. Só bem mais tarde, com o advento da mecânica quântica, é que este problema foi explicado. Outros tipos de interação à distância aparecem na física, como as forças eletromagnéticas.

Peso ou Força - Peso

Na Equação (4-1)' substituindo a aceleração \vec{a} , pela da gravidade, \vec{g} , teremos a força gravitacional.

O *peso* P de um corpo é o módulo desta força (também chamada de força – peso), dada por

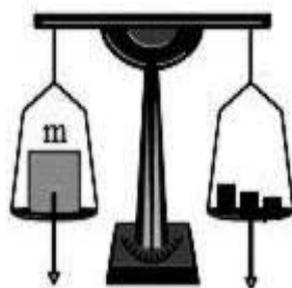


Figura 4-1. Balança de braços iguais

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

(4 – 4)

onde m é a **massa inercial** do corpo. Por esta fórmula se pode notar a diferença entre peso e massa. A medida do peso depende da aceleração gravitacional local, enquanto que a massa m é uma característica do corpo, sendo pois invariante. A força – peso atua sobre a massa m sem que haja contato direto com a Terra, agente responsável pela força.

Através de uma *balança de braços iguais*, vista na Figura 4-1, pode-se determinar m. Coloca-se o corpo de massa m em um prato da balança, e no outro prato coloca-se corpos cujas massas m_1, m_2, \dots são conhecidas. Quando se atinge o equilíbrio, ou seja, os dois lados se equilibram, as massas sobre os pratos se igualam, e daí determinamos $m = m_1 + m_2 + \dots$. Determinado m e conhecendo-se o g local da medida, pode-se obter o peso $P = mg$.

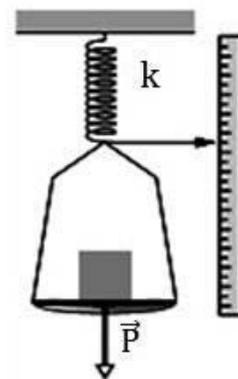


Figura 4-2. Dinamômetro

Força elástica

A medida direta do peso de um corpo pode ser feita ainda por um *dinamômetro*, ou uma *balança de mola*, cujo princípio é o da medida de distensão de uma mola calibrada, conforme visto na Figura 4-2. Quando uma mola é esticada ou comprimida de uma pequena distância x, a partir de sua posição de equilíbrio, verifica-se que a força que ela exerce obedece à equação

$$F = -kx$$

(4 – 5)

onde $k > 0$ é chamada de constante elástica da mola e depende de seu material. Esta relação é conhecida como Lei de Hooke, e será discutida com mais detalhes nos Capítulos seguintes.

Atrito



Figura 4-3 A força de atrito \vec{A} se opõe à tendência de um corpo de escorregar sobre uma superfície.

A força que resiste ao movimento de um corpo é chamada de força de atrito. Ela atua entre o corpo e a superfície do movimento. Detalhes maiores serão discutidos no próximo capítulo. Esta força, neste livro, será representada por \vec{A} , é dirigida ao longo da superfície, e tem o sentido oposto à tendência do movimento, conforme ilustrado na Figura 4-3.

Tensão

Esta força, \vec{T} , atua através de uma corda ou de cabo esticado, sob tensão (daí seu nome) ao tentar puxar um dado corpo. Se a massa da corda for desprezível, a corda puxa tanto o corpo quanto a mão, com a força \vec{T} . Similar situação ocorre, mesmo que a corda utilize uma polia (de massa desprezível e sem atrito), conforme ilustrado na Figura 4-4. No capítulo sobre rotação voltaremos a tratar de polias mais realistas.

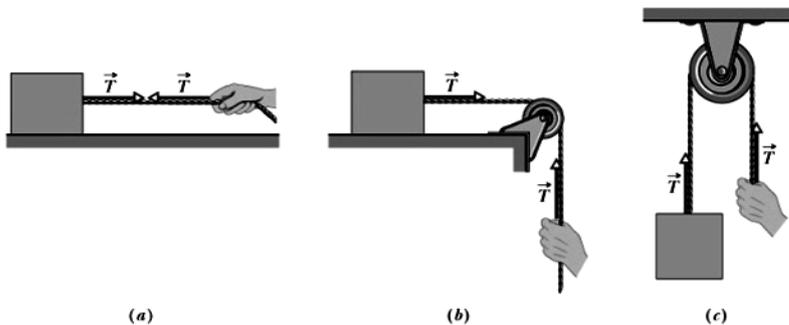


Figura 4-4 A corda esticada está sob tensão. Se a sua massa for desprezível, a corda puxa tanto o corpo quanto a mão com uma força de módulo T , mesmo que a corda passe por uma polia sem massa e sem atrito, como em (b) e (c)

4-6 Estratégia de uso da Segunda Lei

É de valia usar alguns procedimentos que facilitam a resolução de problemas. São eles compostos de três etapas neste processo:

Armação do problema

- i) Certifique-se que você entendeu bem o enunciado do problema.
- ii) Identifique todas as forças externas que atuam sobre o corpo.
- iii) Identifique, se possível, a orientação do vetor aceleração do corpo. Isto ajudará na escolha de um sistema inercial de coordenadas mais adequado.

Solução do problema

i) Isolar o corpo

O corpo é aquele onde as forças de interesse atuam. Às vezes, para economizar espaço, o corpo é substituído por um ponto.

ii) Diagrama de forças do corpo isolado

Colocar todas as forças atuando no corpo. As forças são representadas por setas.

iii) Escolha de um sistema de coordenadas que se pareça mais adequado

Após analisar bem o diagrama, deve ser escolhido um sistema de coordenadas que pareça mais adequado, de modo a facilitar as contas na solução do problema.

iv) Usar a 2ª lei para o diagrama, com as forças projetadas sobre o sistema de coordenadas escolhido.

v) Resolver as equações resultantes.

Discussão do problema

Ao final da solução das equações do problema é interessante analisar o resultado. As unidades estão corretas? Existe algum resultado particular ou singular que mereça comentar? Situação interessante pode ser obtida e/ou analisada?

Observação:

Quando se tem um sistema de corpos deve-se isolar cada corpo que compõe o sistema e colocar todas as forças externas que atuam em cada um deles. Para cada corpo, usar o procedimento acima. (Notar que existem forças internas em todo corpo, mas que se anulam entre si, de modo que não geram nenhuma força resultante adicional).

Os exemplos abaixo vão esclarecer melhor estes procedimentos.

Exemplo 4-2

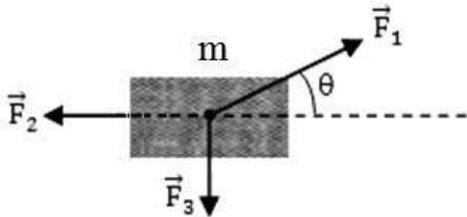


Figura 4-5 referente ao Exemplo 4-2

Deseja-se se arrastar uma caixa de massa $m = 2,0$ kg sobre um assoalho horizontal com atrito desprezível. É aplicada uma força $F_1 = 20$ N, com inclinação θ relativamente à horizontal, de modo a vencer uma outra força $F_2 = 6$ N que atua no corpo horizontalmente. Como o deslocamento seja ao longo da direção de \vec{F}_2 , uma terceira força \vec{F}_3 é adicionada, conforme mostrado na figura.

- a) Qual deve ser o valor de \vec{F}_3 de modo ao corpo se deslocar com a aceleração de $2,0 \text{ m/s}^2$.
- b) Qual a força resultante neste caso?
- c) Qual deve ser o valor de \vec{F}_3 para se ter um movimento

retilíneo uniforme, com a velocidade de 20 m/s ?

Solução:

Armação do problema

Primeiro devemos isolar o corpo m e colocar todas as forças externas atuando sobre ele. Isto está feito na Figura 4-6. Em seguida devemos escolher um sistema inercial de coordenadas adequado preso ao solo. A aceleração de m é ao longo do eixo dos x . A Figura 4-6 ilustra a escolha.

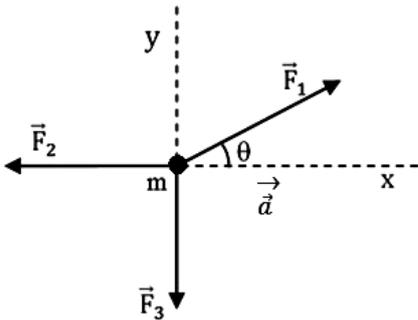


Figura 4-6 Diagramas de forças e sistema de coordenadas escolhido do Exemplo 4-2.

Solução do problema

Usando o diagrama mostrado na Figura 4-6, podemos agora usar a 2ª lei, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a}$, que projetada ao longo do eixo x e do eixo y , fornece o sistema de equações:

$$\begin{cases} F_1 \cos \theta - F_2 = ma, & (4-6) \\ F_1 \sin \theta - F_3 = 0, & (4-7) \end{cases}$$

pois pelo enunciado, só deve existir movimento na direção de \vec{F}_2 , ou do eixo x , e daí a aceleração $a_x = a$. Na direção y não há movimento. Não conhecemos θ nem F_3 .

- a) Da Equação (4-6), obtém-se $\cos \theta = (ma + F_2)/F_1 = (2,0 \times 2,0 + 6) / 20 = 1/2 \Rightarrow \theta = 60^\circ$.

Sabe-se que $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$. Usando a Equação (4-7), obtém-se,

finalmente,

$$F_3 = F_1 \sin \theta = 20 \times \sqrt{3}/2 \cong 17,3 \text{ N.}$$

b) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (F_1 \cos \theta - F_2) \hat{x} + (F_1 \sin \theta - F_3) \hat{y} = (20 \times \frac{1}{2} - 6) \hat{x} = 4\hat{x}$, em newtons.

c) Basta fazer nos resultados acima $a = 0$, o que nos dá

$$\cos \theta = F_2/F_1 = 6/20 = 3/10 = 0,3 \Rightarrow \theta \cong 72,5^\circ,$$

e daí $F_3 = F_1 \sin \theta = 19 \text{ N}$.

Isto vale para o corpo em repouso, ou se deslocando, com qualquer velocidade constante, ao longo do eixo x .

Discussão da solução

Observe que \vec{F} é a força resultante, atuando ao longo do eixo x , como esperado.

Exemplo 4-3

Uma corrente flexível e uniforme possui comprimento l . Sua densidade linear, definida como sua massa por unidade de comprimento, é constante. A corrente passa por uma pequena roldana, de massa desprezível e rolando sem atrito, conforme a Figura 4-7. Ela é liberada da posição de repouso, pendendo para o lado, com um comprimento y , e sobe no outro lado, com um comprimento $l - y$.

Determine a aceleração da corrente.

Solução:

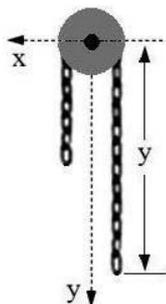


Figura 4-7 referente ao Exemplo 4-3. Atenção com a orientação positiva dos eixos.

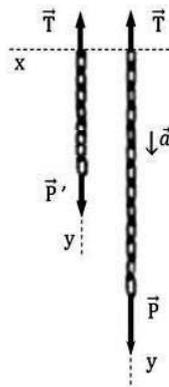


Figura 4-8 Diagrama das forças atuando, nas partes esquerda e direita da corrente. A aceleração é também mostrada.

Daqui para frente vamos ser mais sintéticos e objetivos na solução de cada problema.

O sistema inercial de coordenadas y e x é aqui por conveniência, rodado duas vezes de 90° , no sentido anti-horário de modo que o sentido positivo do eixo y aponte como mostrado na Figura 4-7. A etapa seguinte é isolar as porções da corrente, à direita e à esquerda. Teremos dois diagramas de forças, conforme pode ser visto na Figura 4-8. A última etapa é usar a segunda lei para cada diagrama. Note que a tensão \vec{T} , é a mesma nos dois diagramas já que a roldana não tem atrito. \vec{P} é o peso da porção da direita da corrente, enquanto \vec{P}' é o da porção à esquerda num certo instante t . Logo,

$$\begin{cases} P - T = \frac{d}{dt} (mv), \\ P' - T = - \frac{d}{dt} [(M - m)v], \end{cases}$$

onde M é a massa total da corrente e m (y) na porção à direita da mesma. O sinal negativo da segunda derivada é devido ao sentido da quantidade de movimento na porção da corrente à esquerda. Aqui, claramente, é um caso de massa variável. Se λ é a densidade linear de massa, então temos $P = \lambda y g$ e $P' = \lambda (l - y)g$.

Substituindo estes valores acima e multiplicando a 2ª equação por -1 , obtemos

$$\begin{cases} \lambda gy - T = \frac{d}{dt} (mv) \\ -\lambda gl + \lambda gy + T = -Ma - \frac{d}{dt} (mv), \end{cases}$$

Somando estas equações, teremos

$$2\lambda gy - \lambda gl = Ma.$$

Como também $\lambda = M/l \Rightarrow a(y) = (2y - l) g/l$, que é o valor pedido.

Observe que a aceleração não é constante.

Note, por outro lado, que para $y = 0$, $a(0) = -g$ e para $y = l$, $a(l) = g$, como esperado.

Paradinha 4-1

Sob a ação de duas forças, uma partícula se move com velocidade constante \vec{v} . Se uma das forças \vec{F}_1 é conhecida, é possível se determinar a outra?

4-7 A Terceira Lei de Newton

“A toda ação corresponde a uma reação igual e contrária, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos”.

Na 3ª lei existe presente simultaneamente, em dois corpos distintos, um par de forças: ação e reação. Qualquer uma delas pode ser chamada de ação, restando a outra ser denominada de reação. Vejamos dois exemplos:

Dois blocos A e B sobre um assoalho se tocam. No ponto de contacto, isto significa que A e B interagem através de duas forças horizontais, a força de A sobre B, \vec{F}_{AB} , e a força de B sobre A, \vec{F}_{BA} . Pela 3ª lei, as forças \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{BA} têm o mesmo módulo, $F_{AB} = F_{BA}$, mas têm sentidos opostos, ou seja, $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$, daí o sinal negativo presente na relação vetorial. Quer as caixas estejam em repouso ou em movimento, esta lei é válida.

Num outro exemplo, imagine um bloco em repouso sobre um assoalho horizontal em algum ponto na Terra. Neste caso, atuando sobre o bloco deve existir, naturalmente, a força (gravitacional) da Terra (atraindo, o bloco), a qual existe mesmo sem o contacto do bloco com o assoalho, gerando seu peso \vec{P} . Uma outra força oriunda do contacto do assoalho (parte da Terra) com o bloco, \vec{F}_{AB} , chamada corriqueiramente de força normal, \vec{N} , deve existir.

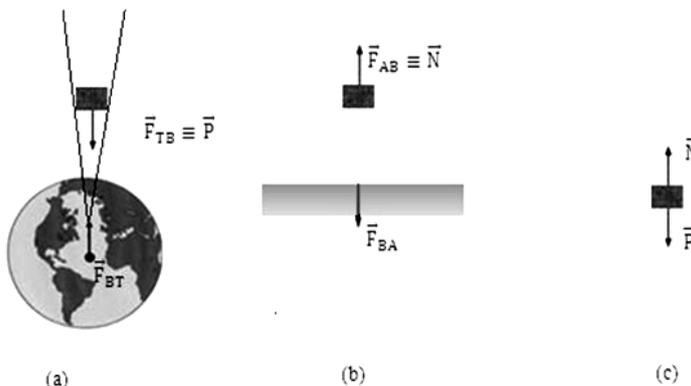


Figura 4-9 (a) Par de forças da 3ª lei de para a interação Bloco – Terra. (b) Par de forças de ação da 3ª lei para a interação Assoalho – Bloco. (c) Diagrama de forças de ação atuando no Bloco isolado.

Assim $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$, onde $\vec{F}_{AB} \equiv \vec{N}$. Isolando os corpos, teremos o diagrama de forças, ilustrado na Figura 4-9. Note

que \vec{N} não é uma força de reação ao peso \vec{P} . Isto pode ser entendido através do caso de um bloco, num plano inclinado, onde necessariamente $\vec{N} \neq \vec{P}$ (ver Figura 4-10).

A medida do peso de um corpo pode ser feita normalmente quando o mesmo não acelera verticalmente. Já a medida com uma balança em um elevador acelerado é afetada por esta aceleração. O resultado desta medida é chamada de *peso aparente*, e é o valor da força normal $|\vec{N}|$ aferida pela balança. Este valor $N \neq P = mg$.

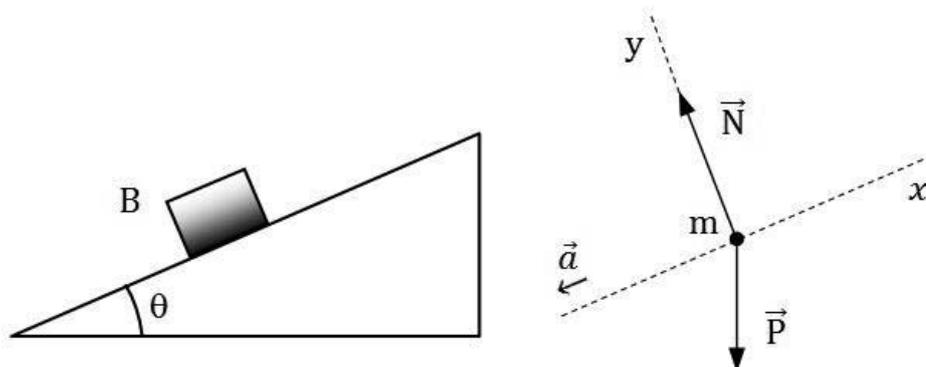


Figura 4-10 Bloco B em um plano inclinado sem atrito e o diagrama de forças de ação atuando sobre o bloco. Um sistema de coordenadas fixo no plano inclinado é escolhido no início da descida do bloco.

Paradinha 4-2

Imagine na Figura 4-9 que o bloco esteja no assoalho de um elevador que começa a subir, com certa aceleração. Neste caso, para o bloco, $\vec{N} - \vec{P}$, aumenta, diminui, ou não muda?

Paradinha 4-3

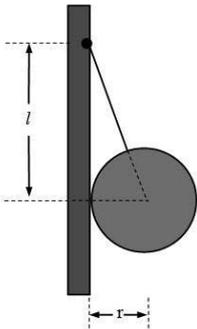
Com que aceleração o bloco da Figura 4-10 desliza ao longo do plano inclinado?

4-8 Usando as Leis de Newton

A seguir vamos dar uma série de exemplos ilustrando a aplicação das três leis de Newton. A estratégia de uso da 2ª lei pode ser expandida incluindo as forças da 3ª lei. Somente a solução de muitos problemas nos torna familiarizados com o uso da dinâmica na nossa vida cotidiana.

Exemplo 4-4

Na Figura 4-11 tem-se uma esfera uniforme de massa m e raio r mantida na mesma posição por uma corda inextensível e de peso desprezível, presa a uma distancia l , acima do centro da esfera. Ache a tração na corda e a força que a parede exerce sobre a esfera.



Solução:

Isolando a esfera, podemos desenhar todas as forças de ação presentes atuando sobre ela. São elas: seu peso \vec{P} ; a força exercida pela parede sobre a esfera, \vec{N} , e a força de tração \vec{T} sobre a corda, transmitida sobre a esfera. Um sistema inercial de coordenadas adequado está mostrado na figura.

Usando a 2ª lei de Newton, projetada sobre os eixos x e y , teremos

$$\begin{cases} X \rightarrow T \sin \theta - N = 0 \Rightarrow T \sin \theta = N, \\ Y \rightarrow T \cos \theta - P = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg. \end{cases}$$

Os símbolos X e ΣY indicam as equações do eixo x e y , respectivamente.

Dividindo estas duas equações, chega-se que $\tan \theta = N/mg$.

Figura 4-11.

Usando uma conhecida identidade trigonométrica

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

e notando que $\tan \theta = r/l$, chegamos a $\cos \theta = l/\sqrt{r^2 + l^2}$.

Finalmente, $T = \frac{mg}{\cos \theta} = \frac{mg}{l} \sqrt{r^2 + l^2}$ e $N = mg r/l$.

Não precisamos conhecer *a priori* o sentido de \vec{N} . Imagine que \vec{N} tivesse sentido contrário ao da figura. Refaça a solução e você vai obter $N = -mgr/l$. Logo, o sentido da figura é o correto. Note que todas as forças se dirigem ao centro de simetria da esfera, ou seja, seu centro. Este é um assunto a ser discutido mais tarde.

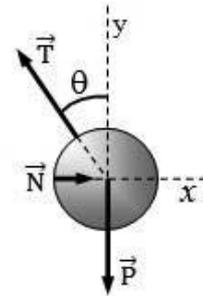


Figura 4-12. Forças de ação atuando sobre a esfera e o sistema de coordenadas escolhido

Exemplo 4-5

Liga-se por uma corda, passando por uma polia (peso desprezível e sem atrito), um bloco de massa m_1 que se encontra sobre uma superfície horizontal sem atrito, a um bloco suspenso, de massa m_2 . a) Qual a aceleração do sistema? b) Qual a tração na corda?

Solução:

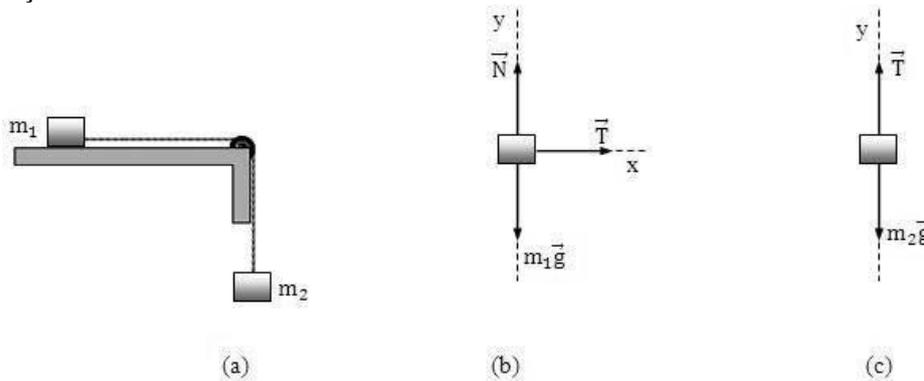


Figura 4-13. (a) Diagrama referente ao Exemplo 4-5. (b) e (c): Diagramas de forças e sistemas de coordenadas escolhidos para m_1 e m_2 , respectivamente.

Utilizando a 2ª lei de Newton para m_1 e m_2 dos itens (b) e (c) da Figura 4-13, teremos respectivamente,

$$m_1 \rightarrow \begin{cases} X \rightarrow T - m_1 a & , \\ Y \rightarrow N - m_1 g & 0, \end{cases} \quad (4-8)$$

$$m_2 \rightarrow \Sigma Y \rightarrow m_2 g - T = m_2 a. \quad (4-10)$$

Substituindo o valor de T da Equação (4-8) na Equação (4-10), obtemos $m_2 g - m_1 g = m_2 a \Rightarrow a = m_2 g / (m_1 + m_2)$.

Daí, o valor de T é então,

$$T = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g.$$

Exemplo 4-6

Liga-se, por uma corda inextensível e de peso desprezível, passando por uma polia sem atrito, um corpo de massa M , que está sobre um plano inclinado de ângulo θ , a um segundo bloco de massa m , suspenso pela corda, como visto na figura. a) Qual a aceleração de cada um dos corpos? b) Qual a tração na corda?

Solução:

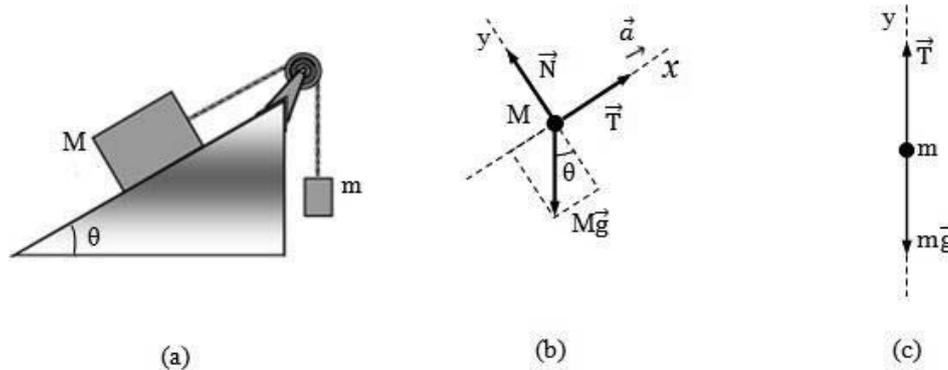


Figura 4-14. (a) Exemplo 4-6 (b) e (c): Diagramas de forças para os corpos M e m , respectivamente.

a) Usando a 2ª lei de Newton para M e m , tem-se respectivamente,

$$M \rightarrow \begin{cases} \Sigma X \rightarrow T - Mg \sin \theta & Ma, \\ \Sigma Y \rightarrow N - Mg \cos \theta & 0. \end{cases} \quad (4-11)$$

$$m \rightarrow \Sigma Y \rightarrow T - mg \quad -ma \quad (4-12)$$

$$m \rightarrow \Sigma Y \rightarrow T - mg \quad -ma \quad (4-13)$$

Estamos supondo que M suba o plano inclinado.

Substituindo o valor T da Equação (4-11) na Equação (4-13), obtemos

$$Ma + Mg \sin \theta - mg \quad -ma \Rightarrow a = \left(\frac{m - M \sin \theta}{m + M} \right) g.$$

b) Da Equação (4-11), tira-se T e usando o valor de a obtido, chegamos a

$$T = Ma + Mg \sin \theta = \frac{mMg(1 - \sin \theta)}{m + M}.$$

Se $\theta = 0$, recai-se no Exemplo 4-5. Observe que $a > 0 \Leftrightarrow m > M \sin \theta$.

Exemplo 4-7

Uma força de 4,54 N é exercida horizontalmente sobre um bloco de 27,2 kg, o qual por sua vez, empurra um bloco de 18,2 kg como visto na figura. Se os blocos estão sobre um plano horizontal sem atrito, qual a força que um bloco exerce sobre o outro?

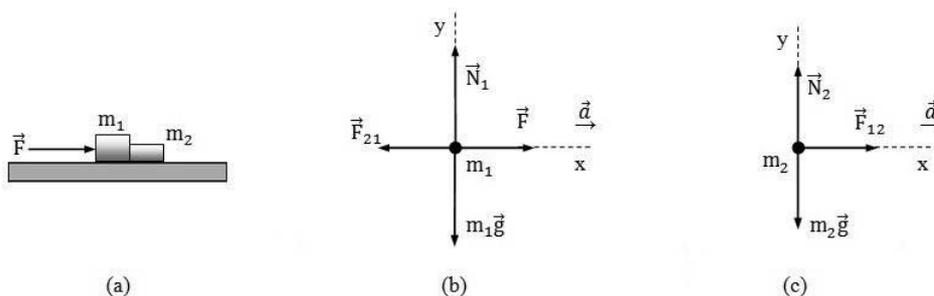


Figura 4-15. Referente ao Exemplo 4-7. (b) e (c) são os diagramas de forças para m_1 e m_2 , respectivamente.

Solução:

Pela 3ª lei de Newton $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Usando a 2ª lei de Newton, teremos para cada corpo:

$$m_1 \rightarrow \Sigma X \rightarrow F - F_{21} = m_1 a \quad (4 - 14)$$

$$m_2 \rightarrow \Sigma X \rightarrow F_{21} = m_2 a \quad (4 - 15)$$

Da Equação 4-15, $a = F_{21}/m_2$, que substituído na Equação 4-14, fornece

$$F_{21} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F.$$

Substituindo pelos valores numéricos, teremos

$$F_{21} = \frac{18,2 \times 4,54}{45,4} = 1,82 \text{ N.}$$

Como $F_{21} > 0$, isto significa que o sentido de \vec{F}_{21} , mostrado na Figura 4-15 (b), está correto.

Note neste exemplo que $a = F_{21}/m_2 = F/(m_1 + m_2)$, ou seja, tudo se passa como se \vec{F} agisse sobre uma única caixa de massa $m_1 + m_2$.

Exemplo 4-8

- Um pequeno parafuso cai do teto de um elevador que sobe com uma aceleração constante $a = 1,2 \text{ m/s}^2$. Qual a aceleração do parafuso observada por uma pessoa em repouso no solo?
- E por um observador dentro do elevador?
- Se a massa total do observador mais o elevador for $m = 2000 \text{ kg}$, qual a tensão no cabo do elevador?

Solução:

Como o elevador está acelerado, então ele não é um referencial inercial. O solo o é. Tomemos o eixo $+y$ deste referencial como mostrado na Figura 4-16. Seja $0'y'$ o eixo dos $+y'$ no referencial não inercial do elevador. Pela figura, a posição do parafuso P num instante qualquer da sua queda, obedece à relação,

$$y = y' + 00', \quad (4 - 16)$$

onde y é a ordenada do vetor posição do parafuso em relação ao referencial inercial e y' em relação ao referencial não inercial. Derivando a Equação (4-16) duas vezes em relação ao tempo, teremos,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a' + a, \quad (4 - 17)$$

onde $a' = \frac{d^2y'}{dt^2}$ é a aceleração do parafuso em relação ao chão do elevador,

e $a = \frac{d^200'}{dt^2}$ é a aceleração do elevador em relação ao solo. Já $\frac{d^2y}{dt^2}$ é a aceleração vista do solo com a qual o parafuso cai, ou seja a aceleração da gravidade, $-g$.

Assim, podemos responder agora as questões.

a) A aceleração do parafuso observada do solo é $-g$.

b) Usando a Equação (4-17),

$$a' = -(a + g).$$

Substituindo os valores numéricos,obtemos

$$a' = -11,0 \text{ m/s}^2.$$

c) Usando a 2ª lei de Newton no referencial inercial,

$$T - mg = ma,$$

$$\Rightarrow T = m(a + g),$$

onde foi desprezada a massa do parafuso na presença de m . Usando os valores numéricos,

$$T = 22 \text{ kN.}$$

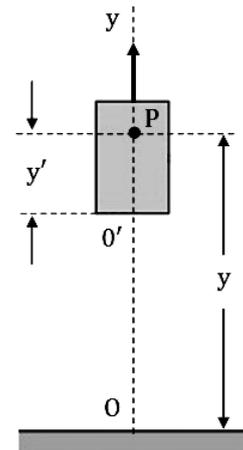


Figura 4-16

Exemplo 4-9

Um bloco de massa m , está pendurado ao teto de uma sala por uma mola de massa desprezível, gerando um certo alongamento. Outro bloco, de massa fm , onde $f > 0$ é uma dada fração, é adicionado ao bloco anterior. Qual o alongamento adicional relativo da mola, com respeito ao primeiro alongamento?

Solução:

O bloco m pendurado pela mola dará a ela um alongamento x , de tal modo que no seu equilíbrio vertical, temos

$$kx - mg = 0 \Rightarrow x = mg/k.$$

Com mais um bloco adicionado, um alongamento total, x' , ocorrerá na mola, de tal modo, que no equilíbrio vertical, temos

$$kx' - (f+1)mg = 0 \Rightarrow x' = (f+1)mg/k.$$

Assim, o alongamento adicional da mola é dado por

$$\Delta x = x' - x,$$

e seu valor relativo ao primeiro alongamento será finalmente, dado por

$$\frac{\Delta x}{x} = [(f+1) - 1](mg/k) / (mg/k) = (f+1) - 1 = f.$$

Paradinha 4-4

Um corpo de massa m se move ao longo de um plano horizontal sem atrito, onde sua velocidade é dada por $v = A \cos \omega t$, onde A e ω são constantes.

- Qual a força resultante que atua sobre o corpo num instante t ?
- Qual a força, quando a coordenada do corpo for x ?

4-9 Pausa para descontração:**Isaac Newton**

Newton nasceu em Woolsthorpe, Lincolshire, Inglaterra no natal de 1642, ano da morte de Galileu. Seu pai, um pequeno fazendeiro, morreu poucos meses antes de seu nascimento e sua mãe, três anos depois, voltou a se casar. Sua



Figura 4-17. Quadro retrata Newton realizando experiência sobre a decomposição da luz branca.

avó materna então teve a tarefa de criá-lo. Estes fatos, ao que parece transtornaram-no profundamente para o resto de sua vida. Na escola, de início não foi um bom aluno, mas na adolescência tornou-se o primeiro de classe. Seus interesses eram primordialmente voltados para pequenos engenhos mecânicos. Por não ter vocação para a vida no campo, foi mais tarde, em 1661, enviado à Trinity College, Cambridge. Seus interesses por matemática e mecânica já eram conhecidos. No início de 1663 Newton sofreu uma mudança interior profunda. Após escrever no seu caderno de anotações de aula na universidade “Amicus Plato, amicus Aristoteles, magis amica veritas” (Sou amigo de Platão, sou amigo de

Aristóteles, mas a verdade é minha melhor amiga), sua concepção de pensar mudou. Newton se afastou da forma tradicional de estudar e passou a questionar tudo o que havia aprendido. Inspirado por seu famoso professor Isaac Barrow, foi cada vez mais incentivado a se aprofundar na leitura dos *elementos* de Euclides, até finalmente ler a *geometria* de Descartes. Daí para frente se familiarizou com toda a matemática então produzida na Europa. Próximo a se graduar, em 1665, na universidade, ele já havia concluído os estudos sobre o teorema binominal inclusive para desenvolvimentos em série e os primeiros passos para criação do cálculo infinitesimal. Newton também se familiarizou com os trabalhos de Wallis sobre séries infinitas e o método de exaustão criado por Eudócio na Grécia antiga. Esse método levou Arquimedes, mais tarde, ao cálculo de π . Neste período, assolou a peste bubônica na Inglaterra, de Londres a Cambridge, que o forçou a voltar para sua fazenda em Lincolshire. Foi exatamente, neste período, que descobriu a teoria gravitacional. A famosa estória da maçã que teria caído sobre sua cabeça e que nunca teve qualquer comprovação histórica, ao que parece foi uma coisa inventada. Na fazenda ainda continuou seus estudos em ótica, química e matemática. De volta à Universidade Cambridge em 1667, Newton foi eleito “fellow” e antes de completar vinte e sete anos, foi honrado com o título de professor Lucasiano de matemática, sucedendo seu amigo e professor, Dr. Barrow. As cátedras em Cambridge levam o nome de seu criador ou patrocinador e não propriamente da matéria lecionada. A cátedra lucasiana, por exemplo, foi criada por Henry Lucas, professor do St. John’s College e membro do parlamento, com apoio do rei. Seus interesses em ótica e astronomia também

aumentaram neste período. Entre 1672 e 1676 comunicou à Royal Society suas descobertas em *ótica*, mas só em 1704 publicou todo o seu trabalho nesta área. Em 11 de janeiro de 1672 seu nome foi aprovado como membro da Royal Society. Sua obra prima, que o deixou famoso, os “*Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*” (mais conhecida como os “*Principia*”) foi escrita em latim (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*) em menos de dois anos e publicada em 1687. Esta obra foi financiada por seu amigo, o rico e bonito astrônomo Halley, depois que a Royal Society alegou impossibilidade financeira de costear-la. Ela é formada de três livros, que tratam sobre a mecânica, a gravitação, acústica, fluidos e a astronomia (a mecânica contém basicamente o que estudamos nestes quatro capítulos. Já a gravitação, fluidos e acústica, farão parte do volume II do curso de Física Geral). A astronomia consiste no estudo do sistema solar e são descritos cálculos das órbitas dos planetas, satélites, cometas, etc. Faz parte do 3º livro dos “*Principia*”.

A obra de Newton o tornou famoso em toda a Europa. Em 1689, Christiaan Huygens (1629-1695), o então mais famoso cientista holandês na Europa, veio visitá-lo para se familiarizar mais com suas pesquisas. Em sua célebre *Horologium Oscillatorium*, continham estudos sobre a lei da força centrípeta para movimentos circulares, o movimento pendular, o princípio da conservação da energia cinética, entre outros resultados. Newton conhecia bem sua obra. Huygens era na época o maior especialista em ótica. Acreditava ele que a luz seguia um modelo ondulatório. Huygens de início mostrou muito entusiasmo pelas ideias de Newton, mas tornou-se depois um grande opositor.

Ainda durante a escrita dos “*Principia*”, Newton começou a se envolver cada vez mais com a administração da universidade. Ele chegou a fazer parte de seu conselho universitário. Como professor, detestava dar aula. Dava aulas em latim, na maioria das vezes sem alunos, por serem consideradas chatas, mas isto, não o perturbava. Em 1692 adoeceu seriamente, o que o afastou da vida acadêmica.

Após seu convalescimento, não mais retornou à universidade e passou a trabalhar para o governo, onde ocupou com sucesso, um cargo importante na Casa da Moeda. Neste período enviou para a morte na torre de Londres cerca de uma centena de pessoas consideradas culpadas por crimes financeiros.

Newton era tido como uma pessoa de temperamento forte. Tinha também um temperamento rancoroso e vingativo para os seus desafetos. Possuía algumas esquisitices, como sua fixação pela cor roxa, usada, por exemplo, com extravagância em toda sua casa. Além disto, direcionou seus estudos em alquimia e profecias temas estes, considerados fora da lei na Inglaterra daquela época. Na alquimia lidou bastante com o tóxico mercúrio, o que possivelmente, o afetou seriamente na parte final de sua vida.

Teve em vida grandes amigos, como Halley, o arquiteto e matemático Sir Christopher Wren, o filósofo Locke, Lord Halifax, entre outros, mas também colecionou grandes inimigos, tais como o filósofo e matemático Hooke, Lucas, Linus, Leibniz, e outros.

Até ser aceito pela Royal Society, Newton levava uma vida de extrema reclusão intelectual em Cambridge. Quase não tinha contactos com outras pessoas, inclusive com pessoas de seu nível intelectual. Após ingressar na Royal Society, sentiu de imediato que um de seus membros, Robert Hooke, seria uma pessoa de difícil relacionamento com ele.

Robert Hooke (1635-1703) começou como assistente de Robert Boyle em Oxford, um dos fundadores da Royal Society. Foi Boyle quem mais tarde confiou-lhe a posição de Curador de Experiências em Londres, em 1662. Esta posição remunerada incluía a preparação e a supervisão de demonstrações nas reuniões da sociedade. Era considerado brilhante mas possuidor de um caráter controversal. Se envolvia com mil coisas ao mesmo tempo sem terminá-las, e só funcionava sob pressão. Sua maior obra, *Micrographia*, incluía teorias originais sobre a natureza da luz. Publicada em 1665, Newton a conhecia bem e o admirava na surdina. Hooke, ao contrário de Newton, era um boêmio, um fofoqueiro e frequentador de bares e prostíbulos. No campo científico, não tinha a profundidade necessária nem o domínio em suas pesquisas, mas por outro lado, tinha ideias brilhantes. Newton era o oposto ao que se referia à seriedade e o domínio na pesquisa. Ia até as últimas consequências, com determinação e segurança. A controvérsia entre os dois começou quando Newton tornou público seus estudos em ótica, assunto que Hooke conhecia bem. Hooke alegou que Newton não só se inspirara em sua *micrographia* como a usara para demonstrar sua teoria corpuscular da luz, oposta a sua, de natureza ondulatória. Em resposta a estas insinuações, Newton proferiu na Royal Society um discurso recheado de habilidades sarcásticas, contendo a famosa frase: “Se vi mais longe foi por estar de pé em ombros de gigantes”. Esta frase revela a malícia e a crueldade de Newton, pois na superfície parecia revelar um cumprimento a Hooke (supostamente chamado de “gigante”), mas queria dizer exatamente o contrário: Hooke era baixo, com deformidades, pálido e muito feio, para não dizer asqueroso. Mais tarde novas contendas apareceram entre os dois com os *Principia*. Eles tinham temperamentos distintos e se tornaram inimigos até a morte de Hooke.

Com Leibniz(1646-1716), teve grandes debates e processos referentes à autoria da descoberta do cálculo infinitesimal. Hoje se sabe que ambos o descobriram independentemente. Leibniz foi um brilhante filósofo racionalista e matemático. Teve também algumas incursões na física, principalmente, nas leis de conservação, assunto dos próximos capítulos. É considerado um filósofo holístico, que travou batalhas fortes contra a especialização excessiva. Além de ser autor independente do cálculo, foi o cientista da criação de notações matemáticas. Suas notações $a : b = c : d$, df/dx , dx , $\int f dx$, entre outras, se tornaram universais. Tal como Newton, nunca se casou e não tinha familiares próximos. Ambos eram religiosos. Leibniz era católico, enquanto, Newton era fortemente anti-católico, anglicano nas aparências, devido às exigências das leis inglesas da época, mas secretamente um alquimista, interessado na ideologia rosa-cruz. Newton se envolveu muito com o estudo do velho testamento até a sua morte. Um ponto criticável na sua obra à época era sobre o conceito de interação à distância, tema que sabiamente o evitava. Leibniz, como muitos cientistas do continente o atacou severamente por isto. Outro ponto de

discórdia entre os dois era sobre os conceitos de espaço e tempo. Para Newton, espaço e tempo eram entidades reais e absolutas que existiam independentes de Deus. Certamente, este era um ponto sensível e inadmissível para muitos. Leibniz chegou a considerar os *Principia* algo anticristão. Apesar de tantas controvérsias entre ambos, estes dois gênios deram contribuições fundamentais à ciência. Vale salientar que Leibniz foi um homem de um bom caráter, procurando sempre que possível, se envolver com causas nobres, muitas vezes, sem sucesso. Foi o caso de sua luta utópica de tentar conciliar o protestantismo com o catolicismo. Ao contrário de Newton, teve um final de vida solitário e pobre sendo seu funeral assistido apenas por seu único criado. Lembra o caso do músico Mozart.

A magistral obra de Newton aborda temas considerados fundamentais e à frente de seu tempo, como a interação à distância e a natureza corpuscular da luz, temas estes só esclarecidos integralmente com o advento, bem mais tarde, da mecânica quântica e da teoria da relatividade. Além disto, dá início à criação da física como uma ciência fundamentada na matemática, sem nenhuma concepção mística e independente de qualquer crença ou superstição.

Nos últimos trinta anos de sua vida, Newton produziu poucos trabalhos originais em ciência. Além da notoriedade como cientista, também se notabilizou como bom administrador. Foi o caso na casa da moeda e finalmente, como presidente da Royal Society, eleito em 30 de novembro de 1703, pouco depois da morte de Hooke. Neste posto permaneceu até sua morte e a governou com mão de ferro. No período de mais de vinte anos, deu à esta sociedade uma nova e ampla sede em Londres, além de torná-la uma entidade cada vez mais respeitada. No processo de mudança de sede, o único quadro existente de Hooke sumiu, sem que até hoje se tenha qualquer notícia de seu paradeiro!

Newton faleceu em 20 de março de 1727, aos 85 anos, e foi enterrado, em um funeral de Estado, na nave da Abadia de Westminster. Sua morte teve repercussão em toda a Europa. A fortuna líquida de Newton chegou a 32.000 libras, o que era suficiente para tornar muito rico qualquer pessoa naquela época. Ele foi certamente, um dos maiores gênios da humanidade e com seu grande amigo, o filósofo Locke, fizeram parte do empirismo inglês, cuja filosofia se baseava no fato de que todo conhecimento deriva da experiência.

Material extra-curricular sugerido

1- *Isaac Newton, o último feiticeiro,*

Michael White, Editora Record, 2000.

Ótima biografia sobre Newton. É escrito numa forma agradável de ler. Contém vários fatos, sobre sua vida íntimas, não tão familiares ao público em geral.

2- *Grandes Debates da Ciência,*

Hal Hellman, Editora UNESP, 1999.

Ler em particular o Capítulo 3: Newton contra Leibniz.

3- *O Mundo de Sofia: romance da história da filosofia,*

Jostim Gaardes, Cia das Letras Ed., 1995.

4- *From Galileo to Newton,*

A. Rupert Hall, Dover Publications, 1981.

Neste livro você pode testar seu inglês.

Resumo

Mecânica Newtoniana

Mesmo que mecânica clássica é o ramo da física que estuda o comportamento de sistemas submetidos à ação de uma ou mais forças.

Força

Forças são grandezas vetoriais. Seus módulos são definidos em termos da aceleração que elas provocariam em um corpo. O sentido de uma força é o sentido da aceleração que ela provoca. Forças são combinadas de acordo com as regras da álgebra vetorial. A *força resultante* sobre um corpo é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo.

Primeira Lei de Newton

“Todo corpo persiste em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja compelido a modificar esse estado pela ação de forças impressas sobre ele”.

Referenciais Inerciais

Na mecânica clássica um referencial inercial é definido como aquele que está em repouso com respeito a um espaço absoluto. Este espaço é tomado como as estrelas “fixas” distintas.

Um referencial em movimento retilíneo uniforme em relação a uma referencial inercial é, por sua vez, inercial.

As leis de Newton só são válidas para referenciais inerciais. Referenciais não inerciais são aqueles onde não vale as leis de Newton.

Massa

A massa de um corpo é a característica intrínseca desse corpo. Massas são grandezas escalares.

Segunda Lei de Newton

“A força é a taxa de variação temporal da quantidade de movimento”, ou seja,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (4 - 1)$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é a quantidade de movimento.

Terceira Lei de Newton

“A toda ação corresponde a uma reação igual e contrária, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos”.

Estratégias de uso das Leis de Newton**Armação do problema**

Entendimento do problema.

Solução do problema

- i) Isolar o(s) corpo(s).
- ii) Diagrama de forças do(s) corpo(s) isolado(s).
- iii) Escolha do(s) sistema(s) de coordenadas adequada(s).
- iv) Usar a segunda Lei de Newton.
- v) Resolver as equações.

Discussão da solução do problema**Questões conceituais**

- 1) Imagine que a força \vec{F} do Exemplo 4-7 seja agora aplicada no bloco m_2 mas em sentido oposto, e com o mesmo módulo. O módulo da força entre os dois blocos ainda permanece o mesmo? Justifique a resposta.
- 2) Em uma região do espaço sem gravidade, um astronauta empurra um bloco de massa m_1 com uma força \vec{F} . O bloco está em contacto com um segundo bloco de massa m_2 . Para o cálculo do módulo da força entre os dois blocos, existe algo em comum nos cálculos desta nova situação, com o Exemplo 4-7?
- 3) Em um jogo de futebol, uma bola de massa m é atirada com a aplicação de uma força \vec{F} conhecida. Desprezando a resistência do ar, é possível se determinar a trajetória desta bola em relação a algum referencial inercial? Justifique a resposta.
- 4) Imagine um astronauta de massa m numa região do espaço, aparentemente, sem peso. Sugira um tipo de equipamento que você poderia projetar para aferir m ?
- 5) Imagine no Exemplo 4-7 que tivéssemos vários blocos em contacto, de massas conhecidas, sendo a primeira ainda empurrada por \vec{F} . Para se calcular as forças entre os blocos é necessário se conhecer *a priori* seus sentidos corretos? Justifique a resposta partindo de situações mais simples já conhecidas.
- 6) Depois dos Estados Unidos, outros países estão também em processo de enviar voos tripulados à Lua e a Marte. Sabe-se que na Lua a aceleração da gravidade é cerca de $1/6$ da que vale na Terra. Imagine um astronauta de 70 kg.
 - a) Qual seu peso na Lua?
 - b) No treinamento para simular na Terra as condições na Lua, o astronauta é submerso em uma piscina cheia de água. Nesta simulação, qual a força de empuxo para cima exercida pela água sobre ele para se ter em Terra o ambiente da Lua?
- 7) Segundo o físico Albert Einstein, a teoria da relatividade geral, por ele criada, além de só ter dois postulados, eles independem de qualquer observação experimental. Já na mecânica de Newton, os seus três postulados têm origem experimental. Você compactua com a filosofia *empirista*, de que todo conhecimento científico é proveniente da experiência? Discuta esta matéria.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Conhecidos os ângulos $\alpha = 45^\circ$ e $\beta = 30^\circ$ e o peso $P = 90\text{ N}$, na Figura 4-18, calcular as tensões nos fios.

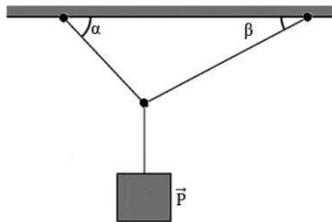


Figura 4-18

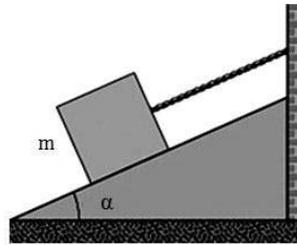


Figura 4-19

2)* Supondo desprezível o atrito entre o bloco de massa m e o plano inclinado de ângulo α , conforme mostrado na Figura 4-19, calcular:

- a) a força na corda presa a uma parede;
- b) a aceleração de m caso a corda se rompa.

3)* a) Um elevador se move para cima com aceleração a . Determine a força exercida por um passageiro de massa m no assoalho do elevador. b) E se o elevador descesse? c) E caso o cabo se rompesse?

4)* Um homem de massa $72,0\text{ kg}$ está em pé sobre uma balança em uma cabine de elevador. Calcular a leitura da balança, se a cabine acelera para cima à $a = 3,2\text{ m/s}^2$.

5)* Uma ou duas massas $m = 10\text{ kg}$ estão presas por um fio inextensível e de massa desprezível a um dinamômetro D em três situações mostradas na Figura 4-20. As polias têm atritos desprezíveis.

- a) Se o dinamômetro estiver graduado em unidades de peso, quais serão suas leituras nas três situações mostradas? b) E se estiver graduado em unidades de massa?

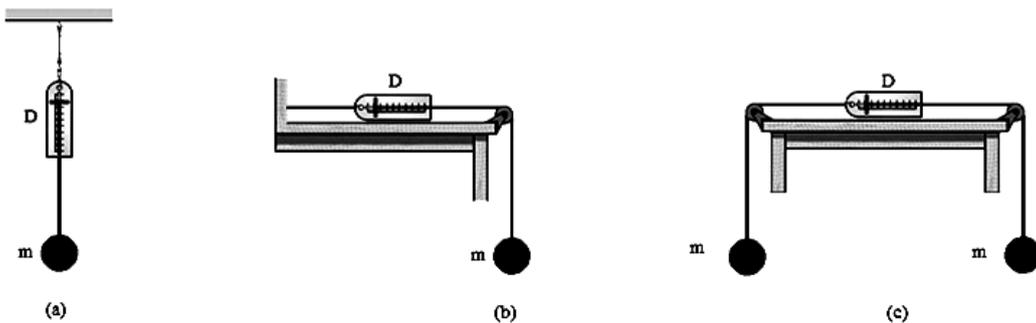


Figura 4-20

6)* Um bloco de massa $m = 0,5\text{ kg}$ repousa sobre um assoalho horizontal liso. Uma mola vertical, como mostrado na Figura 4-21, gera no corpo uma força uma força vertical para cima de $1,0\text{ N}$. Qual a força do bloco sobre o assoalho?

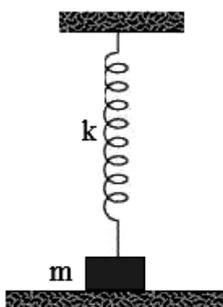


Figura 4-21

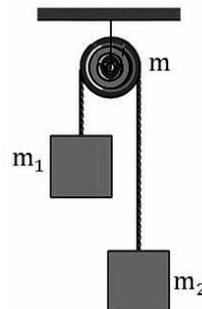


Figura 4-22

7)** Imagine uma polia de massa m suspendendo duas massas m_1 e m_2 , sendo $m_2 > m_1$, conforme mostrado na Figura 4-22. A corda inextensível e de massa desprezível que passa pela polia tem com ela atrito desprezível. O conjunto é conhecido como máquina de Atwood. Calcular as tensões nas cordas e a aceleração das massas.

8)** Um bloco de massa m_1 está sobre um plano liso, de atrito desprezível, e é puxado através de uma corda inextensível e de peso desprezível, pela massa m_2 , conforme mostrado na Figura 4-23. A corda passa sem atrito através de uma polia de peso desprezível. Calcular a aceleração das massas e a tensão na corda.

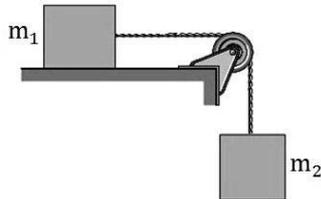


Figura 4-23

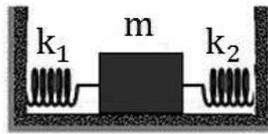


Figura 4-24

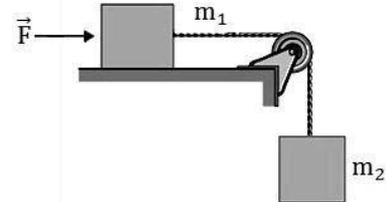


Figura 4-25

9)** Um balão de massa total M , devido ao elevado valor de M , está descendo verticalmente com uma aceleração a , apesar de ainda sujeito à força de empuxo. Qual o valor da massa m de um objeto que deve ser atrado fora para o balão voltar a subir com a mesma aceleração a ?

10)** Um bloco é lançado para cima sobre a superfície lisa de um plano inclinado, com velocidade inicial $v_0 = 5,1$ m/s. O ângulo do plano inclinado em relação à horizontal é de $\theta = 30^\circ$.

- Que distância o bloco subirá até parar no plano inclinado?
- Em que tempo fará este percurso?
- Que velocidade terá quando retornar ao ponto de seu lançamento?

11)** Um bloco de massa m e duas molas sem alongamentos e de constantes elásticas k_1 e k_2 , estão em repouso sobre uma superfície horizontal lisa conforme visto na Figura 4-24. O bloco é deslocado de uma pequena distância x e em seguida solto. Ache sua aceleração.

12)** Um elevador de 2000 kg é puxado para cima por um cabo. Do seu teto solta-se um parafuso com uma aceleração em relação ao elevador de $7,0 \text{ m/s}^2$ para baixo. Qual a tensão no cabo?

13)** Na Figura 4-25, a massa $m_1 = 3,0$ kg está sendo empurrada por uma força $|\vec{F}| = 2,5$ N e também puxada pela massa $m_2 = 1,0$ kg, pendurada por uma corda. A superfície de contacto com o bloco m_1 tem atrito desprezível. A polia tem massa e atrito desprezíveis. A corda que liga os blocos é inextensível e de massa desprezível.

- Qual a tensão na corda?
- Qual o maior valor de F para que a corda não fique frouxa?

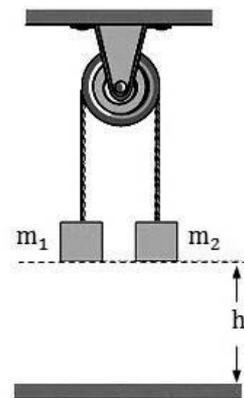


Figura 4-26

14)** Na Figura 4-26 imagine os blocos de massas, $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$, a corda que conecta os dois é considerada inextensível e de massa desprezível. A roldana tem massa e atrito desprezíveis. Os blocos estão inicialmente seguros à uma mesma altura do solo, $h = 10$ m.

- Ache a velocidade dos blocos quando m_2 atingir o solo.
- Neste mesmo instante, o bloco m_1 é solto da corda. Calcular o tempo que o mesmo atinge o solo.

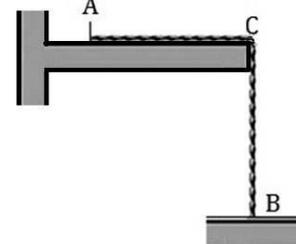


Figura 4-27

15)** Uma corrente de densidade uniforme de massa, tem comprimento l_0 e parte dela repousa sem atrito em uma ranhura retilínea horizontal. Uma fração de seu comprimento l , está pendurada livremente e toca num assoalho, em B, conforme mostrado na Figura 4-27. A um certo instante, a corrente é deixada livre e começa a cair. Ache a velocidade do ponto A da corrente quando esta deixar a ranhura em C.

CAPÍTULO 5

MAIS SOBRE AS LEIS DE NEWTON

Para um leitor menos avisado, a 2ª lei de Newton, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (ou para massas constantes, $\vec{F} = m\vec{a}$), pode parecer uma fórmula matemática bem acabada para a definição de força: Mas, rigorosamente falando, não o é. Ela por si só é uma lei incompleta, pois, depende da 1ª lei e da 3ª lei e pode ser pensada como uma moldura de um quadro: o quadro propriamente dito é antes pintado e posteriormente emoldurado. Assim, por exemplo, para um dado problema físico, onde várias forças de diferentes naturezas atuam sobre um corpo, o \vec{F} da 2ª lei de Newton é a resultante destas forças, bem como \vec{a} é a aceleração resultante. Esta força \vec{F} poderia resultar da atuação de forças de atrito, de forças de origem elétrica, etc. E isto só poderia ser calculado se conhecêssemos, a priori, as respectivas expressões matemáticas para cada uma destas forças presentes.

O objetivo principal deste capítulo é discutir o papel das forças básicas da natureza na derivação de alguns tipos de forças, mas comumente presentes em problemas da mecânica clássica e que naturalmente usam as leis de Newton.

5-1 As forças fundamentais da natureza

Um primeiro olhar em volta de nós nos faz imaginar que um número muito grande de forças distintas atuam nos vários corpos presentes. Lerdo engano, pois, modernamente, se sabe que todas estas forças são derivadas de apenas quatro tipos de interações fundamentais. São chamadas de fundamentais porque são as mais simples possíveis. Estas interações são a gravitacional, a eletromagnética, a forte e a fraca que passaremos a descrevê-las sucintamente.

Interação gravitacional

É a lei de Newton da gravitação universal. Duas partículas de massa m_1 e m_2 separadas por um deslocamento \vec{r} , são atraídas através de uma força, dada por

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (5-1)$$

onde G é a **constante universal**, dada no SI por

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2 \quad (5-2)$$

Pela ordem de grandeza de G é fácil entender que a força gravitacional é muito fraca para massas usuais, só assumindo valores respeitáveis para massas astronômicas.

Paradinha 5-1

- a) Qual o módulo da força de atração entre duas massas pontuais de 1 kg cada uma e separadas de um metro?
b) E para a Terra e a Lua separadas pela distância média usual de $3,82 \times 10^8 \text{ m}$?

A força gravitacional é de fato a mais fraca dentre as quatro forças fundamentais. Para corpos perto da superfície da Terra esta força é atrativa e dada por $-m\vec{g}$. Estes assuntos farão parte do volume 2 deste curso.

Interação eletromagnética

Desde a Grécia antiga as forças de origem elétrica são conhecidas qualitativamente. A forma quantitativa desta força só foi obtida em 1785 por Coulomb (1736-1806), para duas partículas

carregadas em repouso. Duas cargas de sinais opostos se atraem, ao passo que cargas de mesmo sinal se repelem. Já uma carga em movimento, na presença de um campo magnético, também gera uma força. São chamadas de forças eletromagnéticas que serão estudadas com a devida atenção mais adiante. Estas interações têm um papel crucial no microcosmo, mas podem também gerar forças importantes no macrocosmo. Como consequência, podem ser usadas na mecânica clássica, como veremos na seção seguinte.

Interação forte

Esta interação ocorre na escala nuclear, da ordem de 10^{-15} m = 1 F. No interior do átomo está seu núcleo constituído por prótons e nêutrons. A interação forte ou nuclear é a responsável pela coesão dos prótons e nêutrons no núcleo atômico. Um papel importante dos nêutrons é junto com os prótons, gerar um mecanismo de ligação no núcleo, já que só a presença dos prótons criaria uma repulsão eletrostática, devido às suas cargas positivas. Este mecanismo gera uma força de natureza muito complexa, acima do escopo deste livro. Devido ao seu curto alcance, ela só desempenha papel importante na escada nuclear.

Progressos recentes na física mostraram que, algumas partículas, como por exemplo, os nêutrons e prótons, também chamados de **nucleons**, são constituídos por partículas ainda menores, chamadas de **quarks**. No caso dos nucleons, por três quarks. Estas descobertas resultaram numa teoria quântica fundamental para as interações fortes, conhecida como **Cromodinâmica quântica**.

Interação fraca

Núcleos de algumas substâncias radioativas emitem elétrons, denominados de **radiação beta**. A interação dita fraca é a responsável por este processo, que só ocorre num alcance ainda menor do que o da interação forte. Sua intensidade é menor também, não apenas que a da interação forte, mas também que da interação eletromagnética.

As interações fracas bem como as interações fortes só podem ser tratadas pela mecânica quântica. Vale aqui destacar que mais recentemente progressos marcantes foram feitos na física para a unificação das interações eletromagnéticas e fracas, resultando nas interações eletrofracas. As interações eletromagnéticas e fracas não são nada mais que aspectos diferentes de uma mesma interação fundamental.

O físico-matemático Abdul Salam (1926-1996) de origem paquistanesa, vindo de um país do terceiro mundo, dividiu o prêmio Nobel de física com Sheldon Glashow e Steven Weinberg por suas contribuições para o desenvolvimento da teoria eletrofraca. Salam foi o primeiro físico muçulmano a ganhar o prêmio Nobel.

5-2 Forças clássicas originadas no microcosmo

Forças entre átomos ou moléculas dão origem a forças clássicas no macrocosmo, conforme veremos a seguir. De novo, a descrição rigorosa destes fatos só pode ser feita mediante a utilização da mecânica quântica.

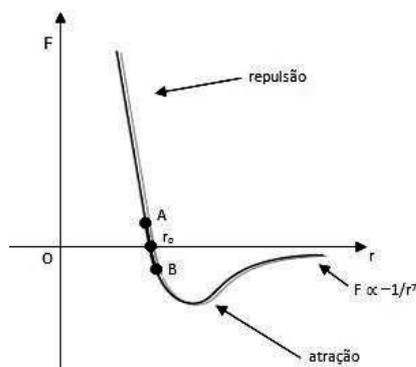


Figura 5-1. Força entre dois átomos em função da distância interatômica.

As forças mencionadas acima são de natureza eletromagnética, conforme mencionada na seção 5-1. Exemplos são muitos, como na molécula de água H_2O formada de íons positivos H^+ , e de íons negativos O^- , ou no sal de cloreto de sódio $NaCl$, com íons Na^+ e Cl^- , mantendo-se ligadas, devido à atração eletrostática entre íons de cargas opostas. Em cada um destes exemplos, as posições médias das cargas negativas e das cargas positivas **não** coincidem, gerando o que se denomina em física de um **dipolo**, ou seja, um sistema formado de duas cargas iguais, mas de sinais opostos, separadas por certa

distância. A presença próxima de outra molécula similar às mencionadas acima gera uma força **dipolo – dipolo**, relativamente grande.

Existem muitos sistemas neutros, perfeitamente simétricos, onde os centros das cargas negativas e positivas coincidem. É o caso para a molécula de oxigênio, O_2 . Moléculas sem dipolos são chamados de **apolares**, e têm todas as forças elétricas neutralizadas.

Em quaisquer dos casos acima mencionados, a força interatômica é ilustrada na Figura 5-1. Só através da mecânica quântica estes fatos podem ser comprovados matematicamente. Quando dipolos estão presentes, estas forças são ainda mais intensas. Pelo gráfico, pode-se verificar que quando átomos e moléculas se aproximam elas se repelem com uma grande repulsão ($r < r_0$). Já para $r > r_0$, elas se atraem com intensidade ,

$$F \propto -1/r^7$$

e decrescem para valores grandes de r . Note que r_0 é da ordem de grandeza de dois raios atômicos. As forças representadas pela Figura 5-1 são chamadas de forças de **Van der Waals**.

Em resumo, podemos afirmar que para distâncias $r < r_0$ existe uma forte repulsão entre átomos (e/ou moléculas), fato este responsável por evitar que um livro, colocado sobre uma mesa, penetre na mesma. Estas forças dão origem à força normal, \vec{N} , já vista no Capítulo anterior. A força de Van der Waals não é uma força fundamental, como é a gravitação, por exemplo. Ela foi criada matematicamente de forma empírica de modo a poder representar um processo altamente complexo que teria que se computar se todas as interações elétricas entre os elétrons e os prótons, presentes nas duas moléculas, quando colocadas próximas, tivessem de ser levados em conta.

Atrito entre superfícies secas

O atrito é o resultado de atuação das forças dos átomos da superfície de um corpo sobre os átomos da superfície do outro corpo. Mesmo considerando dois blocos metálicos altamente polidos e limpos, postos em contacto, ambas as superfícies ainda assim são irregulares ao nível atômico (ver Figura 5-2). Uma força ainda chamada de atrito persiste, mesmo quando o bloco é empurrado. Muitos átomos de uma superfície têm pontos de “contacto” com átomos da outra superfície. É bom destacar que na escala microscópica não existe um contacto de fato, mas chegam bem próximo. É o caso contrário de bolas de bilhar, por exemplo, quando se chocam. Assim nestes pontos de “contacto” ocorre instantaneamente um processo em que os átomos parecem grudar uns nos outros. Dá-se aí uma **solda a frio** destas superfícies. Se o bloco deslizante é empurrado, os átomos soldados são desgrudados aqui e novamente soldados adiante. Uma onda de vibração se forma, com a geração de calor em ambos os blocos, depois de decorrido algum tempo. Como na Figura 5-2, se duas superfícies quaisquer são postas em contacto, só os átomos mais altos se tocam e se soldam.

Estas soldas são responsáveis pelo chamado atrito estático, resultante da tentativa de deslizar o bloco superior, após a aplicação da força \vec{F} . Se \vec{F} for grande o suficiente, o bloco superior

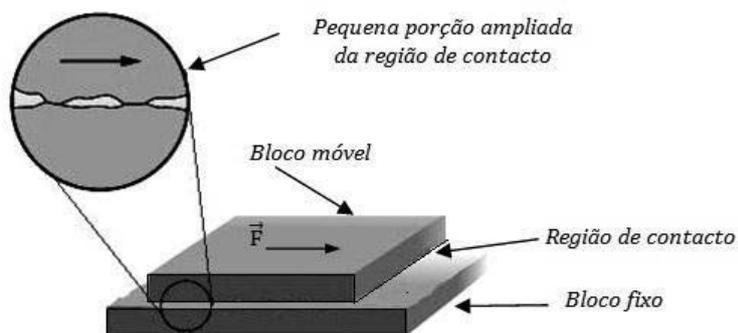


Figura 5-2. Contacto de um bloco móvel com outro fixo

começa a se mover após quebrar as soldas, num processo seguido à criação de novas soldas e suas quebras. Com o movimento, uma nova força de atrito é criada, chamada de **atrito cinético**.

No deslizamento do bloco superior muitas vezes produz-se sons. É também o caso quando se tenta abrir uma porta velha, com dobradiças enferrujadas, ou quando em muitas vezes, se arranha um giz ao se escrever numa lousa. Nem sempre são

sons agradáveis aos ouvidos. Mesmo com o polimento e limpeza cuidadosa das superfícies, o

atrito, ao contrário do que se imagina, pode aumentar. É que à luz do microcosmo, neste processo, as duas superfícies praticamente se tornam uma única superfície e se soldam. É o caso de se tentar deslizar uma pedra de gelo bem polida sobre outra, igualmente polida e bem congelada.

Lei de Hooke

De acordo com a Figura 5-1, se dois átomos forem comprimidos com pequenos deslocamentos para $r < r_0$, ou puxados com pequenos deslocamentos para $r > r_0$, então este trecho AB da curva da Figura 5-1, pode bem ser aproximado por um segmento de reta. Ou seja, nesta região, $F_m = -kr$, sendo r **pequeno**. Já k é uma constante de proporcionalidade, característica do material. É chamada de **constante elástica** da mola. O sinal negativo indica que F_m é uma força restauradora. Esta é a conhecida **Lei de Hooke** (1638-1703).

Um bom exemplo macroscópico deste comportamento é uma mola unidimensional. Ao tentarmos comprimi-la em torno da sua posição de equilíbrio, o deslocamento x é negativo, resultado numa força positiva, contrária à compressão. Já se tentarmos distendê-la, x será positivo, resultando numa força negativa, contrária à distensão. Nos dois casos $F_m = -kx$.

A lei de Hooke é uma lei empírica, mas que funciona razoavelmente bem para deslocamentos pequenos em torno do ponto de equilíbrio da mola.

Na Figura 5-3 está representada na forma usual, uma mola em três situações. Na primeira situação está relaxada e tem um comprimento x_0 . Na segunda situação ao ser distendida por uma força $F_m = -kx$, e finalmente na terceira situação, ao ser comprimida. Nestas duas últimas situações, geralmente $|x| < x_0$.

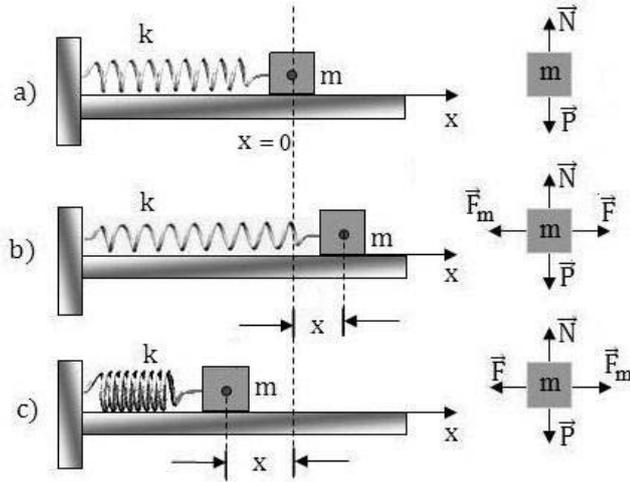


Figura 5-3 Uma mola horizontal: a) Quando a mola está frouxa, ela não exerce força sobre o bloco. b) Quando a mola está distendida, de modo que x é positivo, ela exerce uma força de magnitude kx no sentido de $-x$. c) Quando a mola está comprimida, de modo que x é negativo, ela exerce uma força de magnitude de sentido $+x$.

Paradinha 5-2

Duas molas de constantes elásticas k_1 e k_2 , são colocadas em série e depois em paralelas, conforme as figuras ao lado. Mostre que uma única mola equivalente, de constante k , pode ser calculada, sendo $k = k_1 + k_2$, para caso em série, e $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, para o caso em paralelo.

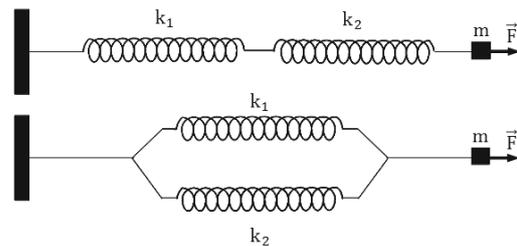


Figura 5-4 Molas em série e em paralelo

Exemplo 5-1

O sistema mostrado na Figura 5-5 está em repouso. Cada mola tem comprimento relaxado igual a $l_0 = 12$ cm. A massa $m = 0,1$ kg fez o sistema descer de uma distância $h = 5$ cm. Supondo desprezível as massas de cada mola, calcule a constante elástica da mola, k .

Solução:

Isolando m e usando a segunda lei de Newton ao longo do eixo y , obtemos

$$\sum Y \rightarrow mg - 2k \Delta l \cos \theta = 0,$$

onde Δl é o alongamento de cada mola. Logo,

$$mg = 2k \Delta l \cos \theta,$$

onde $\cos \theta = \frac{h}{l_0 + \Delta l}$, e

$$l_0 + \Delta l = \sqrt{h^2 + l_0^2}$$

Como resultado, tem-se

$$k = \frac{mg}{2h} \left[\frac{l_0}{\Delta l} + 1 \right]$$

Usando os valores numéricos, calculamos Δl ,

$$\Delta l = \sqrt{5^2 + 12^2} - 12 = 1,0 \text{ cm.}$$

Finalmente,

$$k = \frac{0,1 \times 9,81}{2 \times 5 \times 10^{-2}} \left[\frac{12}{1,0} + 1 \right] = \frac{9,81 \times 1,3}{10} = 127,5 \text{ N/m.}$$

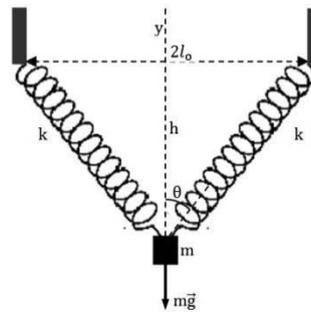


Figura 5-5 Sistema referente ao Exemplo 5-1

5-3 Propriedades macroscópicas do atrito

De acordo como o que foi visto até agora, as leis de atrito têm origem no microcosmo e só poderiam ser rigorosamente estudados com o auxílio da mecânica quântica. No entanto, estudos de natureza empírica têm sido utilizados, inicialmente, pelo francês, Amontons (1663-1705) e depois por outro francês, Coulomb (1736-1806). Destes estudos, resultou uma lei empírica simples e com relativo sucesso para o cálculo do atrito entre superfícies secas. Imagine um bloco seco, não lubrificado, colocado sobre uma superfície horizontal de material similar. Uma força \vec{F} horizontal é aplicada sobre o corpo de modo a fazê-lo vencer o atrito e poder deslizar. Neste procedimento, algumas etapas são normalmente vencidas: i) o corpo começa a se mover, pois \vec{F} é equilibrada pela força de atrito estático, \vec{A}_e , que tem sentido que se opõe ao movimento. ii) O módulo da força de atrito estático \vec{A}_e tem uma expressão empírica simples para seu valor máximo, dada por

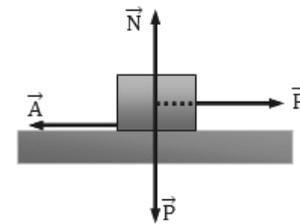


Figura 5-6. Forças atuando no bloco.

$$A_{e,\max} = \mu_e N \quad , \quad (5-3)$$

onde μ_e é o **coeficiente de atrito estático** e N é o **módulo** da força normal, conforme mostrada na figura 5-6. Assim, o corpo **não** desliza se $F \leq \mu_e N$.

iii) Se o corpo começar a deslizar ao longo da superfície, nota-se que a força de atrito, paulatinamente, começa a diminuir. Gera-se, então, um atrito dito cinético, dado pela expressão

$$A_c = \mu_c N \quad , \quad (5-4)$$

onde μ_c é **coeficiente de atrito cinético**.

Algumas propriedades

i) As equações (5-3) e (5-4) **não** são equações vetoriais. A força \vec{N} é normal à superfície, enquanto \vec{A}_e e \vec{A}_c são paralelas à superfície e têm sentidos contrários ao movimento. Nestas equações, têm-se presentes só os módulos dos vetores.

ii) μ_e e μ_c são adimensionais e dependem dos materiais da superfície e do bloco. São valores obtidos experimentalmente.

iii) μ_c não depende aproximadamente, da velocidade de contacto entre o bloco e a superfície.

iv) \vec{A}_e e \vec{A}_c não dependem da área de contacto entre o bloco e a superfície.

Para ilustrar melhor esta apresentação, consideremos agora

a situação de o bloco ser colocado sobre um plano inclinado, como mostrado na Figura (5-7). As

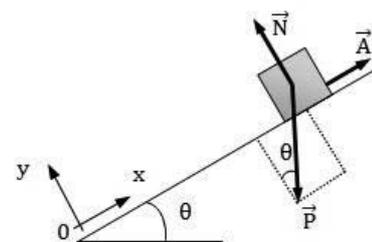


Figura 5-7. Bloco colocado sobre um plano inclinado com força de atrito

forças de ação atuando sobre o bloco são também mostradas na figura. Um sistema **inercial** adequado yx é escolhido, fixo na origem do plano.

Isolando o bloco, projetando as forças sobre os eixos dos x e dos y , respectivamente, e utilizando a 2ª lei de Newton, podemos escrever:

$$\Sigma X \rightarrow A_e - P \sin \theta = 0,$$

$$\text{onde } A_e = \mu_e N,$$

$$\Sigma Y \rightarrow N - P \cos \theta = 0.$$

Destas equações obtém-se, facilmente,

$$\boxed{\mu_e = \operatorname{tg} \theta_e} \quad (5 - 5)$$

Com este valor $\theta = \theta_e$, o escorregamento do bloco mal inicia. É uma forma de se medir μ_e . Após o início do movimento, $\mu_c < \mu_e$, e o movimento segue com velocidade constante, tal que

$$\boxed{\mu_c = \operatorname{tg} \theta_c} \quad (5 - 6)$$

Note que aqui $N \neq P$. Isto mostra que em geral o módulo da força de atrito é proporcional a N , que não é igual a P .

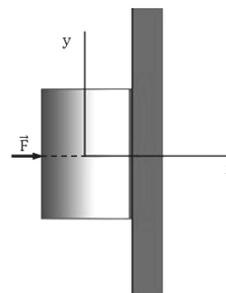


Figura 5-8. Bloco empurrado contra a parede vertical

Paradinha 5-3

Uma força horizontal de \vec{F} de módulo 10N empurra um bloco pesando 5,0 N contra uma parede vertical, conforme a Figura 5-8. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco é $\mu_e = 0,6$ e o coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0,4$. Suponha que inicialmente o bloco esteja em repouso.

a) O bloco irá se mover?

b) Calcule a força que a parede exerce sobre o bloco?

Exemplo 5-2

Um automóvel se move ao longo de uma estrada reta e horizontal com velocidade $v_0 = 60$ km/h. O motorista ao ver um acidente adiante aplica instantaneamente os freios e há um deslizamento dos pneus contra o pavimento. Se o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e o pavimento for $\mu_c = 0,4$, qual a mínima distância que o automóvel vem a parar?

Solução:

Devemos usar a equação de Torricelli,

$$v^2 = v_0^2 - 2 a x,$$

onde $v = 0$, pois o carro deve parar após percorrer a distância x .

Logo,

$$x = v_0^2 / 2a \quad (5 - 7)$$

Usando a 2ª lei de Newton ao longo dos eixos x e y , obtemos

$$\Sigma X \rightarrow -A_c = -ma, \text{ onde } A_c = \mu_c N,$$

$$\Sigma Y \rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = mg.$$

Destas duas últimas equações se conclui facilmente que

$$a = \mu_c g. \quad (5 - 8)$$

Das equações (5-7) e (5-8), obtém-se finalmente,

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_c g}.$$

Usando os valores numéricos,

$$x = \frac{60^2}{2 \times 0,4 \times 9,81} = 458,7 \text{ m.}$$

Exemplo 5-3

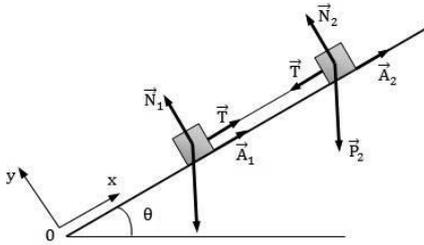
Dois blocos com pesos $P_1 = 3,6$ N e $P_2 = 7,2$ N são conectados por um fio inextensível e de massa desprezível e deslizam, com o fio esticado, para baixo, em um plano inclinado de $\theta = 30^\circ$.

O coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais leve e o plano inclinado é $\mu_1 = 0,10$ e entre o bloco mais pesado e o plano inclinado $\mu_2 = 0,20$. Supondo que o bloco mais leve desce na frente, encontre:

- a) o módulo da aceleração dos blocos;
 b) a tensão no fio.

Solução:

a) Certamente, a aceleração é comum para os dois blocos. Usando a 2ª lei de Newton para cada bloco isolado e projetando nas direções x e y, temos



$$\Sigma X \rightarrow \begin{cases} -T + A_2 - P_2 \text{ sen } \theta = -m_2 a & (5 - 9) \\ T + A_1 - P_1 \text{ sen } \theta = -m_1 a & (5 - 10) \end{cases}$$

$$\Sigma Y \rightarrow \begin{cases} N_1 - P_1 \text{ cos } \theta = 0 & (5 - 11) \\ N_2 - P_2 \text{ cos } \theta = 0 & (5 - 12) \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, obtém-se

$$a = \frac{g}{P_1 + P_2} [(P_1 + P_2) \text{ sen } \theta - (\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2) \text{ cos } \theta].$$

Figura 5-9 Referente ao Exemplo 5-3

Note que se fosse $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, então $a = g (\text{sen } \theta - \mu \text{ cos } \theta)$, que independe dos valores dos pesos.

Usando os valores numéricos, obtemos $a = 3,5 \text{ m/s}^2$.

b) Da Equação (5-10), obtemos

$$T = -m_1 a + P_1 \text{ sen } \theta - \mu_1 N_1 = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} (\mu_2 - \mu_1) \text{ cos } \theta,$$

após usar o resultado de a calculado acima. Substituindo pelos valores numéricos, obtemos $T = 0,21 \text{ N}$.

Note novamente que se fosse $\mu_1 = \mu_2$, então teríamos $T = 0$! Os dois blocos escorregam sem atrito, com igual velocidade.

Exemplo 5-4

Na Figura 5-10, um bloco desliza para baixo em uma calha de ângulo reto inclinada. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a calha é μ_c .

Qual a aceleração do bloco?

Solução:

Usando a 2ª lei de Newton para o bloco isolado,

$$\Sigma X \rightarrow -mg \text{ sen } \theta + \mu_c (2N) = -ma.$$

Note que $N_t = 2N \text{ cos } 45^\circ = N\sqrt{2}$. Logo,

$$\Sigma Y \rightarrow N_t - mg \text{ cos } \theta = 0.$$

Resolvendo o sistema, obtemos, finalmente,

$$a = g (\text{sen } \theta - \sqrt{2} \mu_c \text{ cos } \theta).$$

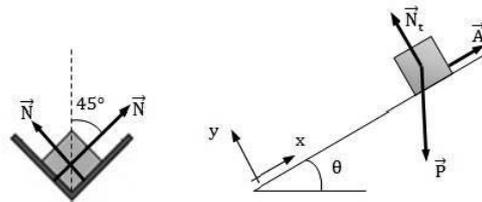


Figura 5-10 Forças presentes em um bloco deslizando para baixo em uma calha de ângulo reto inclinada.

5-4 Força de arrasto

Até aqui só estudamos o atrito entre duas superfícies secas. Seria também interessante e importante o estudo de um corpo em movimento passando através de um fluido. Este fluido poderia ser, por exemplo, o ar ou mesmo a água. No caso do ar, não faltam exemplos, como, no deslocamento de um avião ou de um trem de alta velocidade. A força que se instala neste processo contra o movimento do corpo é chamada de **força de arrasto**. É de se esperar que quanto mais alta for a velocidade do objeto maior será esta força. À primeira vista, pode-se pensar que esta lei não é simples. Mas de novo somos enganados! Esta lei empírica é simples. Para baixas velocidades, o módulo da força de arrasto, \vec{R} , é proporcional à velocidade, v do corpo. Já para altas velocidades, ela é proporcional a v^2 . Em geral, o módulo de \vec{R} é dado por

$$R = |\vec{R}| = c_1 v + c_2 v^2 \tag{5 - 13}$$

onde c_1 e c_2 são constantes ajustáveis que dependem basicamente da densidade volumétrica do fluido, da área da seção transversal de choque do corpo com o fluido (esta é a área “vista”, tomada perpendicularmente à velocidade \vec{v}). Esta lei não é uma lei fundamental, mas sim empírica, porque pode sofrer alterações com o estudo mais aprofundado de um dado problema. A natureza deste estudo é em geral bem complexa. Este assunto será revisitado no volume 2 deste curso.

Para objetos velozes no ar predomina o segundo termo, sendo $c_2=1/2C\rho S$, onde C é o **coeficiente de arrasto**, cujos valores típicos variam de 0,4 a 1,0, ρ é a densidade volumétrica do ar e S é a área da seção transversal de choque normal a \vec{v} . Para alcançar baixos valores de \vec{R} , o objeto deve minimizar S . Assim, aviões, trens de altas velocidades, bolas, etc., devem ter formatos os mais aerodinâmicos possíveis.

Exemplo 5-5

Velocidade terminal: Duas bolas esféricas de raios R e r , sendo $R > r$, são deixados cair do repouso de um helicóptero a uma altura de h do solo, num dia de vento calmo. Após certo tempo, a força de arrasto se iguala à força gravitacional e as bolas passam a cair com velocidade constante, chamada de **velocidade terminal**, v_t . Admitindo o mesmo coeficiente de arrasto para as duas bolas, determine:

- Qual das duas bolas alcança o solo com mais velocidade?
- Caso a queda não tivesse força de arrasto, que velocidades seriam estas?

Solução:

a) Para cada esfera, tem-se na queda

$$\frac{1}{2} C \rho S v^2 - mg = ma,$$

onde $m=\rho V$, sendo ρ é a densidade volumétrica da esfera e V seu volume. Ao atingir a **velocidade terminal**, $v = v_t$ e $a = 0$, o que implica

$$\frac{1}{2} C \rho_{\text{ar}} S v_t^2 - \rho V g = 0 \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2 V \rho g}{C \rho_{\text{ar}} S}} \quad (5 - 14)$$

Daí, obtém-se para cada esfera

$$v_t(R) = \sqrt{\frac{8\pi R^3 \rho g}{3C \rho_{\text{ar}} \pi R^2}} \quad \text{e} \quad v_t(r) = \sqrt{\frac{8\pi r^3 \rho g}{3C \rho_{\text{ar}} \pi r^2}}.$$

Dividindo estas duas relações

$$\frac{v_t(R)}{v_t(r)} = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Como $R > r \Rightarrow v_t(R) > v_t(r)$.

b) Sem força de arrasto, a qual funciona como uma força de atrito, as bolas cairiam em queda livre com aceleração g . Logo, $v = \sqrt{2gh}$, e atingiriam o solo à mesma velocidade, porém maior que $v_t(R)$ ou $v_t(r)$. Verifique isto!

5-5 Movimento circular uniforme

Imagine uma partícula de massa m presa por um fio inextensível e de peso desprezível, girando em torno de um ponto fixo O , como mostrado na Figura 5-11. Esta partícula vai estar sujeita a duas acelerações, uma tangencial $a_t = dv/dt$, e outra $a_c = -v^2/r$, chamada de centrípeta, e dirigida para O . A combinação vetorial das duas, gera a Equação (3-25). No caso de v constante, só resta a_c . Pela 2ª lei de Newton, m vai estar sob a ação de uma força, chamada de força centrípeta, e dada por

$$\vec{F} = -m(v^2/r) \hat{r}.$$

(5 - 15)

É enganosa a ideia de que m poderia estar sim sob a ação de outra força, chamada **força centrífuga**, igual e oposta à \vec{F}_c . Esta força, de fato, não existe. A razão é que com o rompimento instantâneo do fio que prende m faria com que m saísse pela tangente à circunferência, em vez de seguir a trajetória radial. Se seguisse a trajetória radial aí sim, comprovaria a existência de uma força centrífuga.

A seguir daremos vários exemplos que ilustram como a força centrípeta poderia estar presente em nosso dia-a-dia.

Exemplo 5-6

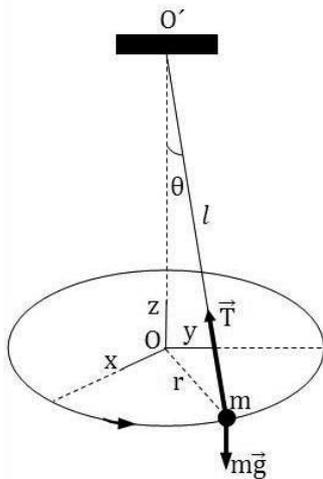


Figura 5-11 Pêndulo cônico

Pêndulo cônico: Uma partícula de massa m gira em movimento circular uniforme, descrevendo uma circunferência de raio r , suspensa por um fio inextensível e de massa desprezível, de comprimento l , preso a um ponto fixo O' , mostrado na figura. O fio descreve uma superfície cônica de ângulo de abertura θ . Calcule:

- a) o período de rotação de m ;
- b) a tensão no fio.

Solução:

a) Pela 2ª lei de Newton, m está sujeita a duas forças, seu peso $m\vec{g}$ e a tensão \vec{T} no fio. Ao longo da direção do seu peso (eixo dos z), temos $T \cos \theta - mg = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg$.

Ao longo da força centrípeta, a qual é dirigida para O , temos $T \sin \theta = m(v^2/r)$.

(Note que o sistema cartesiano **inercial** está centrado em O e não na massa m .)

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos

$$\tan \theta = v^2/rg \Rightarrow v^2 = rg \tan \theta.$$

O período de rotação é dado por $\tau = 2\pi r/v$. Logo,

$$\tau = \frac{2\pi r}{\sqrt{rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \sin \theta}{g \tan \theta}} \Rightarrow \tau = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}. \quad (5 - 16)$$

b) É fácil calcular que

$$T = mg/\cos \theta. \quad (5 - 17)$$

Exemplo 5-7

Rotor: Em muitos parques de diversão existe uma atração que consiste de um grande cilindro de raio R que pode girar em torno de seu eixo vertical, contendo um piso falso. Uma pessoa encostada na parede interna do cilindro é posta a girar com ele. Assim que ele atinge certa velocidade, o piso é baixado, mas a pessoa não cai, ficando presa à parede do cilindro. Suponha que o coeficiente de atrito entre a pessoa e o cilindro é $\mu = 0,4$.

- a) Qual a menor velocidade v do cilindro para que isto ocorra? Explique o fato.
- b) Se m for a massa da pessoa, qual a intensidade da força centrípeta que age sobre ela?
- c) Calcule os valores acima para $m = 70$ kg, $R = 2,5$ m e $\mu = 0,4$.

Solução:

a) A pessoa está normalmente sujeita ao seu peso. Para não deslizar para baixo, deve estar sob a ação de uma força de atrito estático \vec{A}_e para cima, exercida pela parede do cilindro. A força de atrito em módulo é igual a μN , onde $N = |\vec{N}|$, é a intensidade da força normal exercida pela parede do cilindro sobre m . Esta força normal é dirigida horizontalmente em direção ao eixo vertical do cilindro e é igual à força centrípeta $F_c = mv^2/R$, a que está sujeita m para seguir sua trajetória circular. Um sistema **inercial** de coordenadas está atrelado ao eixo do cilindro. Ao longo do eixo z ,

$$A_e - mg = 0,$$

onde $A_e = \mu N = \mu mv^2/R$.
Daí obtém-se facilmente, que

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu}},$$

que é o resultado pedido. Ele independe de m .

b) $F_c = mv^2/R$.

c) Substituindo pelos valores numéricos, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{9,81 \times 2,5}{0,4}} = 7,8 \text{ m/s},$$

$$F_c = 70 \times 7,8^2/2,5 = 1704 \text{ N}.$$

A pessoa sente uma sensação enganosa de que é empurrada radialmente para fora. Não esqueça que m está num referencial giratório (não inercial), daí tal sensação ilusória.

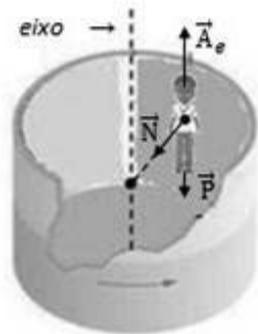


Figura 5-12 Rotor girando com uma pessoa contra sua parede interna.

Exemplo 5-8

Curvas em estradas: As duas figuras abaixo representam pistas circulares de raio r , sendo a primeira (i) plana horizontal, e a segunda (ii) com elevação θ . São utilizadas por carros de massa m , correndo à velocidade constante v . Na pista (i) supõe-se existir um atrito estático entre os pneus e a pista. Na pista (ii) supõe-se que este atrito seja desprezível.

- a) Calcular o coeficiente de atrito estático μ_e para a pista (i), supondo que o carro não desliza.
 b) Calcular o ângulo de inclinação θ da pista (ii) para evitar o deslizamento.

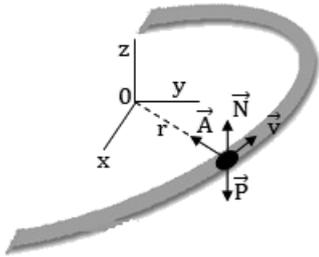


Figura 5-13 (i) Pista plana horizontal com atrito.

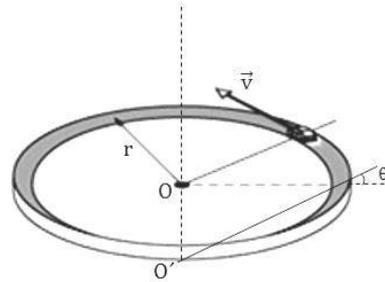


Figura 5-14 (ii) Pista com superelevação, mas com atrito desprezível.

Solução:

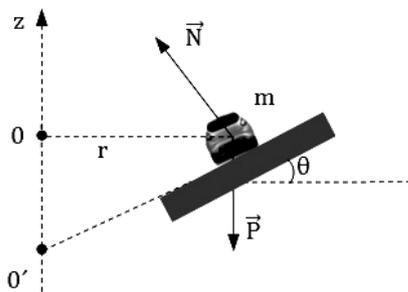


Figura 5-15 Corte lateral da pista (ii) com elevação θ

a) De acordo com o caso (i), ao longo do eixo dos z, pela 2ª lei de Newton,
 $N - P = 0 \Rightarrow N = mg$.
 Ao longo da radial

$$A_e = \mu_e N = F_c = mv^2/r,$$

ou seja,

$$\mu_e mg = mv^2/r \Rightarrow \mu_e = v^2/rg. \quad (5-18)$$

b) Ao longo do eixo z, pela 2ª lei de Newton, tem-se

$$N \cos \theta - P = 0 \Rightarrow N \cos \theta = mg. \quad (5-19)$$

Ao longo da radial, o módulo da projeção $N \sin \theta$ é igual ao módulo da força centrípeta, ou seja,

$$N \sin \theta = mv^2/r. \quad (5-20)$$

Dividindo a Equação (5-20) pela Equação (5-19), obtém-se

$$\text{tg } \theta = v^2/rg. \quad (5-21)$$

Nos dois casos os resultados são os mesmos. Mas há uma diferença física marcante. No caso (ii), a inclinação da pista, através de $\text{tg } \theta$, faz o papel do coeficiente do atrito μ_e do caso (i). No caso (i) há aquecimento e desgaste dos pneus devido basicamente ao atrito, enquanto que no caso (ii), o processo é mais eficiente e econômico. É por isso que é utilizado em curvas em rodovias e ferrovias.

Note também que a Figura (5-14) lembra a Figura (5-11) de um pêndulo cônico, daí os resultados idênticos para $\text{tg } \theta = v^2/rg$.

Exemplo 5-9

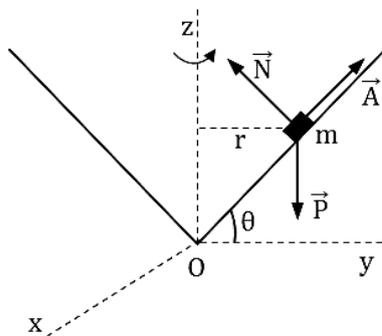


Figura 5-16 Rotor cônico.

Uma massa m pequena é colocada num rotor de formato cônico, conforme mostrado na figura abaixo. O rotor gira com velocidade v em torno de seu eixo vertical. A parede do cone forma um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito estático de m e o rotor é μ . A massa m está situada a uma distância r do eixo de rotação. Determine os valores máximos e mínimos de v para que m permaneça em repouso em relação à parede do rotor.

Solução:

Ao longo do eixo z do sistema inercial x, y, z , a 2ª lei de Newton fornece

$$N \cos \theta - P + A \sin \theta = 0,$$

$$\text{onde } A = \mu N.$$

Ao longo da radial \hat{r} , está presente a força centrípeta que atua sobre m . Seu valor é igual a

$$-mv^2/r = -N \sin \theta + A \cos \theta = -N \sin \theta + \mu N \cos \theta.$$

Logo, temos o sistema de equações,

$$\begin{cases} N \cos \theta + \mu N \sin \theta = mg, \\ N \sin \theta - \mu N \cos \theta = mv^2/r. \end{cases}$$

Destas duas equações, chegamos facilmente a

$$v^2 = rg \left(\frac{\operatorname{tg} \theta - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \theta} \right).$$

Os valores mínimos e máximos de v podem agora ser calculados.

v_{\min} corresponde a $v_{\min} = 0$ ou seja, a fazer $\operatorname{tg} \theta - \mu = 0 \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \theta$.

O rotor não precisa nem girar que m não escorrega.

v_{\max} corresponde a fazer $\mu = 0 \Rightarrow v_{\max}^2 = rg \operatorname{tg} \theta$.

Este último valor é equivalente àquele de uma estrada com curva e superelevada com declive θ , onde m também não escorrega.

5-6 Pausa para descontração:

*A Mecânica de Newton e sua Influência sobre a Formação da Física Teórica**

***Albert Einstein** (1879 - 1955). Prêmio Nobel de física de 1921 pela descoberta da lei do efeito fotoelétrico. Autor da teoria da relatividade.

Festejamos nestes dias o bicentenário da morte de Newton. Desejaria evocar a inteligência deste espírito perspicaz. Porque ninguém antes dele e mesmo depois abriu verdadeiramente, caminhos novos para o pensamento, para a pesquisa, para a formação prática dos homens do Ocidente. Evidentemente, nossa lembrança o considera como o genial inventor dos métodos diretores particulares. Mas também ele domina, ele e só ele, todo o conhecimento empírico de seu tempo. E revela-se prodigiosamente engenhoso para qualquer demonstração matemática e física, mesmo ao nível dos pormenores. Todas estas razões provocam nossa admiração. Contudo, Newton supera a imagem de um mestre que se tem dele. Porque ele se situa em um momento crucial do desenvolvimento humano. É preciso compreendê-lo de modo absoluto e nunca nos esquecermos. Antes de Newton, não existe nenhum sistema completo de causalidade física capaz de perceber, mesmo de maneira comum, os fatos mais evidentes e mais repetidos do mundo da experiência.

Os grandes filósofos da antiguidade helênica exigiam que todos os fenômenos materiais se integrassem em uma sequência rigorosamente determinada pela lei de movimentos dos átomos. Jamais a vontade de seres humanos poderia intervir, causa independente, nesta cadeia inelutável. Admitamos, no entanto, que Descartes, a seu modo, tenha retomado a busca desta mesma meta. Mas sua empresa consiste em um desejo cheio de audácia e no ideal problemático de uma escola de filosofia. Resultados positivos, incontestados e incontestáveis, elementos para uma teoria de uma causalidade física perfeita, nada disto existe praticamente antes de Newton.

Mas ele quer responder à clara pergunta: existe uma regra simples? Caso exista, poderei calcular completamente o movimento dos corpos celestes de nosso sistema planetário, com a condição de que o estado de movimento de todos esses corpos em dado momento seja conhecido? O mundo conhece as leis empíricas de Kepler sobre o movimento planetário. Baseiam-se nas observações de Tycho Brahe. Exigem uma explicação. Porque hoje se compreende o esforço imenso do espírito, pois, se tratava então, de deduzir leis a partir de órbitas empiricamente conhecidas. E poucas pessoas realmente apreciam a genial aventura de Kepler, quando conseguiu efetivamente determinar as órbitas reais de acordo com direções aparentes, isto é, observadas da Terra. Certamente, estas leis dão uma resposta satisfatória à questão de saber como os planetas se deslocam ao redor do Sol: forma elíptica da órbita, igualdade das áreas atravessadas em tempos iguais, relações entre semigrandes eixos e as durações de percurso. Mas essas regras não respondem à necessidade de explicação causal, porque são três regras logicamente independentes uma da outra, sem qualquer conexão interna. Assim, a terceira lei não pode, pura e simplesmente, ser aplicada numericamente a outro corpo central que não seja o sol! Por exemplo, não existe nenhuma relação entre a duração de percurso de um planeta ao redor do Sol e a de um satélite ao redor de seu planeta! O mais grave se revela aqui: estas leis dizem respeito ao movimento enquanto conjunto. Não respondem à questão: “como do estado de movimento de um sistema decorre o movimento que o segue imediatamente na duração?” Empreguemos nosso modo de falar atual. Procuramos integrais, e não leis diferenciais.

Ora, a lei diferencial constitui a única forma que satisfaz completamente à necessidade de explicação causal do físico moderno. E a concepção perfeitamente clara da lei diferencial continua a ser uma das façanhas de Newton. Não somente exigia a capacidade para pensar este problema, mas era preciso ultrapassar o formalismo matemático em seu estado rudimentar. Tudo devia ser traduzido de forma sistemática. Ora, Newton, ainda aqui, inventa esta sistematização no cálculo diferencial e no cálculo integral. Pouco importa discutir e saber se Leibnitz, independentemente dele, descobriu os mesmos métodos matemáticos ou não! De qualquer modo, Newton neste momento de seu raciocínio teve necessidade deles, porque estes métodos lhe são, com toda a certeza, indispensáveis para formular os resultados de seu pensamento conceptual.

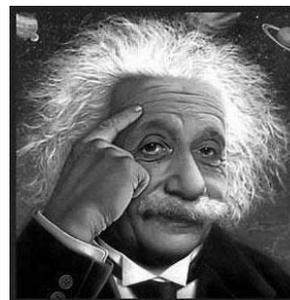


Figura 5-17. Albert Einstein (1879-1955).

O primeiro progresso significativo no conhecimento da lei do movimento fora feito já antes por Galileu. Ele conhece a lei da inércia e a da queda livre dos corpos no campo de gravitação da Terra: uma massa (ou mais precisamente um ponto material), não influenciada por outras massas, move-se uniformemente em linha reta. A velocidade vertical de um corpo livre cresce, no campo da gravidade, proporcionalmente ao tempo. Hoje poderíamos ingenuamente pensar que dos conhecimentos de Galileu, até à lei do movimento de Newton, o progresso era muito banal. E, no entanto, não se pode fazer pouco caso da seguinte observação: Galileu e Newton definem os dois enunciados, segundo sua forma, como movimento em seu conjunto. Mas a lei de Newton já responde à questão exata: como se manifesta o estado de movimento de um ponto material em um tempo infinitamente pequeno, sob a influência de uma força exterior? Porque foi unicamente, ao passar para a observação do fenômeno durante um tempo infinitamente pequeno (lei diferencial), que Newton conseguiu encontrar as fórmulas aplicáveis a quaisquer movimentos. Ele emprega a noção de força, que a estática já desenvolvera. Para tornar possível a ligação entre força e aceleração, introduz um novo conceito, o de **massa**. Apresenta uma bela definição, mas curiosamente não passa de aparência. Nosso hábito moderno de fabricar conceitos aplicáveis a quocientes diferenciais nos impede compreender que fantástico poder de abstração se exigia para chegar, por dupla derivação, à lei diferencial geral do movimento, onde este conceito de massa estava ainda por inventar.

Não havíamos ainda compreendido, mesmo com este progresso, a razão causal dos fenômenos de movimento. Porque o movimento somente é determinado pela equação do movimento quando a força aparece. Newton, provavelmente, condicionado pelas leis do movimento dos planetas, tem a ideia de que a força que age sobre uma massa é determinada pela posição de todas as massas situadas a uma distância suficientemente pequena da massa em questão. Logo que foi conhecida esta relação, Newton teve a compreensão completa dos fenômenos de movimento. Todo o mundo sabe então, como Newton, continuando a análise das leis do movimento planetário de Kepler resolve o dilema por meio da gravitação, descobre assim a identidade das forças motrizes, aquelas que agem sobre os astros, e as da gravidade. Eis a união da lei do movimento e da lei da atração, eis a obra-prima admirável de seu pensamento. Porque permite calcular, partindo do estado de um sistema que funciona em dado momento, os estados anteriores e posteriores, evidentemente, na medida em que os fenômenos se produzem sob a ação das forças da gravitação. O sistema de conceitos de Newton apresenta extrema coerência lógica, porque descobre que as causas de aceleração das massas de um sistema são somente as próprias massas.

Nesta base, que analiso em suas linhas gerais, Newton chega a explicar em pormenores os movimentos dos planetas, dos satélites, dos cometas, o fluxo e o refluxo, o movimento de precessão da Terra, soma de deduções de um gênio incomparável! A origem desta teoria particularmente estupenda, é a seguinte concepção: a causa dos movimentos dos corpos celestes é idêntica à gravidade. Agora, cotidianamente, a experiência o confirma. A importância dos trabalhos de Newton consiste principalmente na criação e na organização de uma base utilizável, lógica e satisfatória, para a mecânica propriamente dita. Mas estes trabalhos permanecem até o fim do século XIX o programa fundamental de cada pesquisador, no domínio da física teórica. Todo acontecimento físico deve ser traduzido em termos de massa, e estes termos são redutíveis às leis do movimento de Newton. A lei da força é a exceção. Em seguida era preciso alargar e adaptar este conceito ao gênero de fatos utilizados pela experiência. O próprio Newton tentou aplicar seu programa à ótica, imaginando a luz composta de corpúsculos inertes. A ótica da teoria ondulatória também empregará a lei do movimento de Newton, após ter sido aplicada a massas distribuídas de maneira contínua. A teoria cinética do calor baseia-se exclusivamente, sobre as equações do movimento de Newton. Ora, esta teoria não apenas forma os espíritos para o conhecimento da lei da conservação da energia, mas também serve de base para uma teoria dos gases, confirmada em todos os pontos, bem como uma concepção muito elaborada da natureza conforme o segundo princípio da termodinâmica. A teoria da eletricidade e do eletromagnetismo desenvolveu-se de igual maneira até nossos dias, inteiramente, sob a influência diretriz das ideias fundamentais de Newton (substância elétrica e magnética, forças agindo à distância). Até mesmo, a revolução operada por Faraday e Maxwell na eletrodinâmica e na ótica, revolução que constituiu o primeiro grande progresso fundamental das bases da física teórica depois de Newton, mesmo esta revolução se realiza integralmente dentro do esquema das ideias newtonianas. Maxwell, Boltzmann, Lord Kelvin não deixarão de se reportar aos campos eletromagnéticos e suas ações dinâmicas recíprocas a fenômenos mecânicos de massas hipotéticas repartidas de maneira contínua. Mas, por causa dos fracassos, ou, pelo menos, da falta de êxito destes esforços, nota-se, pouco a pouco, desde o fim do século XIX uma revolução das maneiras fundamentais de pensar. Agora a física teórica deixou o quadro newtoniano que, por quase dois séculos, conservava como guia científico intelectual e moral.

Do ponto de vista lógico, os princípios fundamentais de Newton pareciam tão satisfatórios, que um estímulo a qualquer inovação só poderia ser provocado pela pressão dos fatos da experiência. Antes de refletir sobre este poder lógico abstrato, devo recordar que o próprio Newton conhecia os lados fracos inerentes à arquitetura de seu pensamento, e sabe isto melhor ainda do que as gerações de sábios que o sucederão. Este fato me comove e provoca em mim uma admiração cheia de respeito. Por isso vou tentar meditar mais profundamente nesta evidência.

1. Nota-se constantemente o esforço de Newton por apresentar seu sistema de pensamento necessariamente condicionado pela experiência. Nota-se também que utiliza o mínimo possível de conceitos não diretamente ligados aos objetos da experiência. E, no entanto, coloca os conceitos: espaço absoluto, tempo absoluto! Em nossa época, muitas vezes, o censuram por isto. Mas, justamente, nesta afirmação, Newton se reconhece particularmente conseqüente consigo mesmo. Porque descobriu experimentalmente, que as grandezas geométricas observáveis (distâncias dos pontos materiais entre eles) e seu curso no tempo não definem completamente os movimentos no ponto de vista físico. Demonstrou este fato pela célebre experiência do balde. Portanto existe, além das massas e de suas distâncias variáveis no tempo, ainda alguma coisa que determina os acontecimentos. Esta “alguma coisa” ele a imagina como a relação com o “espaço absoluto”. Confessa que o espaço deve possuir uma espécie de realidade física, para que suas leis do movimento possam ter um sentido, uma realidade da mesma natureza que a dos pontos materiais e suas distâncias.

Este conhecimento lúcido de Newton indica evidentemente sua sabedoria, mas também a fragilidade de sua teoria. Porque a construção lógica desta arquitetura se imporia bem melhor, com certeza, sem este conceito obscuro. Porque então nas leis apenas encontraríamos objetos (pontos materiais, distâncias) cujas relações com as percepções permaneceriam perfeitamente transparentes.

2. Introduzir forças diretas, agindo à distância instantaneamente, para representar os efeitos da gravitação não concorda com o cunho da maioria dos fenômenos conhecidos pela experiência cotidiana. Newton responde a esta objeção. Declara que sua lei da ação recíproca da gravidade não ambiciona ser uma explicação definitiva, mas antes uma regra deduzida da experiência.

3. Ao fato singularmente notável de que o peso e a inércia de um corpo continuam determinados pela mesma grandeza (a massa), Newton não apresenta nenhuma explicação em sua teoria; mas a singularidade do fato não lhe escapava. Nenhum destes três pontos autoriza uma objeção lógica contra a teoria. Trata-se antes de desejos insatisfeitos do espírito científico, que mal suporta não poder penetrar totalmente, e por uma concepção unitária, nos fenômenos da natureza.

A teoria da eletricidade de Maxwell ataca e abala pela primeira vez a doutrina do movimento de Newton, considerada como programa de toda a física teórica. Verifica-se que as ações recíprocas, exercidas entre os corpos por corpos elétricos e magnéticos, não dependem de corpos agindo à distância e instantaneamente, mas são provocadas por operações que se propagam através do espaço com uma *velocidade finita*. Pela concepção de Faraday, estabeleceu-se que existe, ao lado do ponto material e de seu movimento, uma nova espécie de objetos físicos reais; dão-lhe o nome de “*campo*”. Procura-se imediatamente, concebê-lo, fundando-se sobre a concepção mecânica, como um estado (de movimento ou de constrangimento) mecânico de um fluido hipotético (o *éter*) que encheria o espaço. Mas esta interpretação mecânica, apesar dos esforços mais teimosos, não dá resultado. Então, viram-se obrigados, pouco a pouco, a conceber o “*campo eletromagnético*” como o elemento último, irredutível, da realidade física. H. Hertz conseguiu isolar o conceito de campo de todo o arsenal formado pelos conceitos da mecânica. Percebe sua função, e lhe devemos este progresso. Enfim, H. A. Lorentz pôde isolar o campo de seu suporte material. Com efeito, segundo H. A. Lorentz, o suporte do campo é figurado apenas pelo espaço físico vazio ou o éter. Mas o éter, já na mecânica de Newton, não foi purificado de todas as funções físicas. Esta evolução chega então, ao fim e ninguém mais acredita nas ações à distância diretas e instantâneas, nem mesmo no domínio da gravitação. E, no entanto, por falta de fatos suficientemente conhecidos, nenhuma teoria do campo foi tentada a partir da gravitação de modo unilateral! Assim o desenvolvimento da teoria do campo eletromagnético gera a seguinte hipótese. Já que se abandona a teoria de Newton de forças agindo à distância, explicar-se-á pelo eletromagnetismo a lei newtoniana do movimento, ou então, ela será substituída por uma lei mais exata baseada na teoria do campo. Tais tentativas, não chegarão, na verdade, a um resultado definitivo. Mas, doravante, as ideias fundamentais da mecânica deixam de ser consideradas como princípios essenciais da imagem do mundo físico.

A teoria de Maxwell-Lorentz vem dar fatalmente na teoria da relatividade restrita que, por destruir a ficção da simultaneidade absoluta, não pode se permitir à crença na existência de forças agindo à distância. Segundo esta teoria, a massa não é mais uma grandeza imutável, mas varia conforme seu conteúdo de energia, sendo-lhe mesmo equivalente. Por esta teoria, a lei do movimento de Newton só pode ser encarada como uma lei-limite válida para pequenas velocidades. Em compensação, revela-se nova lei do movimento; substitui a precedente e mostra que a velocidade da luz no vácuo existe, mas como velocidade-limite.

O último progresso do desenvolvimento do programa da teoria do campo é denominado teoria da relatividade geral. Quantitativamente, pouco modifica a teoria newtoniana, mas qualitativamente, provoca modificações essenciais nela. A inércia, a gravitação, o comportamento medido dos corpos e dos relógios, tudo se traduz na qualidade unitária do campo. E este mesmo campo se apresenta como dependente dos corpos (generalização da lei de Newton ou da lei do campo que lhe corresponde, como Poisson já o formulara). Assim, espaço e tempo se veem esvaziados de sua substância real! Mas, espaço e tempo, perdem seu caráter de absoluto causal (influenciando, mas não influenciado) que Newton foi obrigado a lhes atribuir para poder enunciar as leis então conhecidas. A lei de inércia generalizada substitui o papel da lei do movimento de Newton. Esta reflexão esquemática quer realçar como os elementos da teoria de Newton se integraram na teoria da relatividade geral e como os três defeitos, analisados acima, puderam ser corrigidos. No quadro da teoria da relatividade geral, a meu ver, a lei do movimento pode ser deduzida da lei do campo correspondente à lei das forças de Newton. Quando esta meta foi realmente atingida de modo completo, pôde-se verdadeiramente, raciocinar sobre a teoria pura do campo. A mecânica de Newton ainda prepara o caminho para a teoria do campo em um sentido mais formal. Com efeito, a aplicação da mecânica de Newton às massas distribuídas de maneira contínua provocou inevitavelmente, a descoberta e, em seguida, o emprego de equações à derivadas parciais. Depois, deram uma linguagem às leis da teoria do campo. Sob essa relação formal, a concepção de Newton sobre a lei diferencial, ilustra o primeiro progresso do desenvolvimento que passamos a ver.

Toda a evolução de nossas ideias sobre a maneira pela qual até agora imaginamos as operações da natureza pode ser concebida como um desenvolvimento das ideias newtonianas. Mas, enquanto se efetuava a organização estruturada da teoria do campo, os fatos da irradiação térmica, dos espectros, da radioatividade, etc., revelavam um limite na utilização de todo o sistema de ideias. E hoje, ainda, mesmo tendo nós obtido sucessos prestigiosos, mas esporádicos, este limiar se mostrou praticamente intransponível, com certo número de argumentos de valor; muitos físicos sustentam que, diante destas experiências, não apenas a lei diferencial, mas também a lei de causalidade, deram provas de seu malogro. Ora, a lei de causalidade até hoje se levantava como o último postulado fundamental de toda a natureza! Mas vai-se mais longe ainda! Nega-se a possibilidade de uma construção espaço-tempo porque não poderia ser coordenada de maneira evidente com os fenômenos físicos. Assim, por exemplo, um sistema mecânico é, de maneira constante, capaz somente de valores de energia discretos ou de estados discretos — a experiência prova-o por assim dizer diretamente! Parece então, e antes de tudo, que esta evidência dificilmente podia ser ligada a uma teoria de campo que funcionasse com equações diferenciais. E o método de Broglie-Schrödinger que, de certo modo, se

assemelha às características de uma teoria do campo, deduz a existência de estados discretos, mas fundando-se sobre as equações diferenciais por uma espécie de reflexão de ressonância. Ora, isto concorda de maneira estupenda com os resultados da experiência. Mas o método, por sua vez, malogra na localização das partículas materiais, em leis rigorosamente causais. Hoje, quem seria bastante louco para decidir de modo definitivo a solução do problema: a lei causal e a lei diferencial, estas últimas premissas da concepção newtoniana da natureza, terão de ser rejeitadas para todo o sempre?

Material extra curricular sugerido

Como Vejo o Mundo

Albert Einstein, Editora Nova Fronteira, 1981

É um texto em que A. Einstein volta os olhos para os problemas fundamentais do ser humano.

Resumo

Natureza do atrito

Das quatro forças fundamentais da natureza, só a força eletromagnética no microcosmo é responsável pela geração de atrito.

Atrito entre superfícies secas

Ao se tentar mover um corpo sobre uma superfície seca, através da aplicação de uma força \vec{F} , uma força de atrito é exercida pela superfície sobre o corpo. A força de atrito, \vec{A} , é paralela à superfície e está dirigida de modo a se opor ao deslizamento do referido corpo.

Propriedades da força de atrito

- i) Se o corpo não deslizar, $\vec{A} = \vec{A}_e \rightarrow$ **força de atrito estático.**
- ii) Se deslizar, $\vec{A} = \vec{A}_c \rightarrow$ **força de atrito cinético.**
- iii) Se $\vec{F} \leq \vec{A}_e$, o corpo não sai do lugar.
- iv) Verifica-se a lei empírica $A_e = \mu_e N$, onde A_e e N são os módulos das forças de atrito estático e da força normal da superfície sobre o corpo, respectivamente, e μ_e é o **coeficiente de atrito estático.**
- v). $A_{e,max} = \mu_e N$ (5 – 3)
- vi) Se o corpo deslizar, $A_c = \mu_c N$, onde μ_c é o **coeficiente de atrito cinético.**
- vii) μ_e e μ_c dependem da natureza dos materiais das superfícies de contacto.
- viii) A força de atrito não depende das áreas das superfícies de contacto.

Lei de Hooke

Uma mola de comprimento x_0 quando relaxada, ao ser distendida ou comprimida, fica sujeita a uma força $F = -kx$, sendo $x \ll x_0$, o deslocamento da mola. O coeficiente k é a **constante elástica da mola**. Muitas vezes, esta força é chamada de restauradora.

Força de arrasto

A resistência criada por um fluido ao deslocamento de um corpo através dele é chamada **força de arrasto**, e é representada por \vec{R} . Uma lei empírica aproximada existe para \vec{R} :

$$R = c_1 v + c_2 v^2, \quad (5 - 13)$$

onde o primeiro termo predomina para baixas velocidades e depende da viscosidade do fluido. Para velocidades mais elevadas, o termo dominante de R é proporcional a v^2 . Neste caso,

$$c_2 = \frac{1}{2} C \rho S,$$

onde C é o **coeficiente de arrasto**, determinado experimentalmente, ρ é a densidade volumétrica do fluido, e S é a área da seção reta tomada perpendicularmente à \vec{v} .

Movimento circular uniforme

Uma partícula de massa m ao se mover num arco circular de raio r , com velocidade tangencial constante v , sofre a ação de uma **força centrípeta**, dada por

$$\vec{F}_c = -(mv^2/r)\hat{r} \quad (5 - 15)$$

Questões conceituais

1) A interação forte é a mais intensa entre as quatro forças fundamentais. Por que ela não tem um papel fundamental na geração da força de atrito? Discuta este problema

- 2) Uma mola está relaxada e em repouso em sua posição de equilíbrio. Se a mola for distendida de uma pequena distância r , por que a força na mola não é proporcional a r^α , onde $\alpha \neq 1$? Justifique sua resposta.
- 3) Imagine que um pesquisador chegou à conclusão de que a força de atrito tem módulo dado por $A = \mu P$, onde P é o peso do corpo. Analise esta ideia considerando o corpo sobre um plano inclinado, com inclinação θ . Tome alguns valores especiais para θ . O que você conclui? Ele poderia também estar certo?
- 4) Uma nave lançada pela NASA alcança uma região de gravidade nula. Na nave um bloco de massa m é colocado sobre uma mesa, tocando-a. Pode existir atrito entre estes corpos? Justifique sua resposta.
- 5) Num rotor considere um sistema de coordenadas $x' y' z'$, com origem no corpo de massa m , situado contra a parede do cilindro em rotação. Nesse sistema, o corpo parece sentir a presença de uma força dirigida radialmente para **fora** (força centrífuga). Isto parece em contradição com o que foi visto na teoria. Quais os problemas com esta conceitualização? Justifique sua resposta.
- 6) Num dia chuvoso, um motorista de um carro se aproxima de um cruzamento a uma velocidade limite permitida só em dias secos. Neste instante, o semáforo se torna amarelo para ele. Ele deve: a) frear bruscamente; b) continuar à mesma velocidade; c) acelerar. Para diminuir a chance de uma colisão, confronte cada das três possibilidades acima com cada uma das opções abaixo e escolha, justificando, a melhor dobradinha (1 possibilidade + 1 opção):
 i) Há chance alta de o carro derrapar.
 ii) A duração do sinal amarelo é pequena e a velocidade do carro não é alta, logo, há chance alta de colisão.
 iii) O semáforo da rua transversal demora uns dois segundos a mais para abrir depois que o sinal dele fechar.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

- 1) * Um bloco de massa $m = 5\text{ kg}$ é pressionado contra uma parede vertical e sente dela uma força normal $N = 100\text{ N}$. O coeficiente de atrito estático é $\mu = 0,6$. Qual a força necessária para mover o bloco: a) horizontalmente? b) verticalmente para cima? c) verticalmente para baixo?
- 2) * Uma partícula de massa m começa a descer um plano inclinado de comprimento l e inclinação θ . O coeficiente de atrito entre a partícula e o plano inclinado é μ . Calcule:
 a) A velocidade de m no final do plano inclinado.
 b) A distância horizontal adicional, percorrida por m , admitindo ainda o mesmo μ neste novo percurso.
- 3)** Ache a força horizontal máxima, \vec{F} , aplicada ao bloco de massa M , tal que os dois blocos se movam juntos. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é μ . Considere a superfície plana horizontal com atrito desprezível.

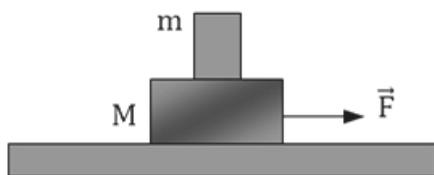


Figura 5-18 Referente ao problema 3.

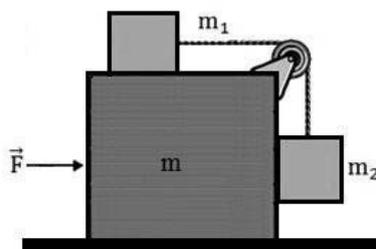


Figura 5-19 Referente ao problema 4.

- 4)* Um pequeno bloco de massa m repousa sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é μ . Se quer mover o bloco com a aplicação de uma força \vec{F} , de intensidade a menor possível. Qual deve ser \vec{F} (módulo, direção e sentido)?
- 5)** Um bloco escorrega para baixo num plano inclinado de inclinação $\theta = 45^\circ$ e comprimento 8 m . Ele leva dois segundos para cobrir esta distância. Qual o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano inclinado?
- 6)** Uma mola vertical totalmente relaxada, de constante elástica k , massa desprezível, tem comprimento l_0 , conforme mostrado na Figura 5-20. Ela está presa na parte superior. Na parte inferior tem um pequeno bloco de massa m , em repouso sobre uma superfície plana horizontal. O bloco é então deslocado horizontalmente de uma distância igual a l_0 . Qual deve ser o menor coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície para que m permaneça em repouso nesta sua nova posição?
- 7)* Um avião a jato voa a 1000 km/h e a uma altitude de 9 km , enquanto outro voa mais abaixo, a 450 km/h e a uma altitude de 5 km . As densidades do ar nestas altitudes são, respectivamente, $0,30\text{ kg/m}^3$ e $0,60\text{ kg/m}^3$. Os aviões

possuem a mesma área da seção transversal de choque, bem como o mesmo coeficiente de arrasto. Calcule a razão entre as forças de arrasto sobre estes aviões.

8)* Um pequeno bloco de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ desliza girando em uma circunferência de raio $r = 25 \text{ cm}$ sobre uma mesa, com atrito desprezível, enquanto está preso por um fio inextensível e de peso desprezível, a um outro bloco de massa $M = 2,0 \text{ kg}$, pendurado pelo fio que passa por um furo no centro da mesa, conforme mostrado na Figura 5-21. Que velocidade deve ter m para que M se mantenha em repouso?

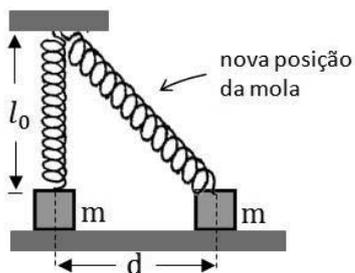


Figura 5-20 Referente ao problema 6.

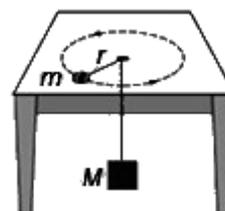


Figura 5-21 Referente ao problema 8.

9)** Uma curva horizontal numa estrada tem raio $R = 40 \text{ m}$. O coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada é $\mu = 0,6$. Qual a velocidade máxima que um carro pode ter para não derrapar?

10)* Uma curva circular inclinada numa estrada foi projetada para uma velocidade limite de tráfego de 60 km/h . O raio da curva é de 200 m . Neste caso, só a elevação da pista circular é suficiente para evitar derrapagem, sem a necessidade do atrito. Em dias chuvosos, esta velocidade cai para 40 km/h . Nesta situação, além da elevação já existente, é necessário existir atrito para evitar a derrapagem. Qual é o menor coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada para que o carro não derrape?

Despreze a frenagem produzida pela água dos pneus sobre os paralamas.

11)** Um trem num trecho da ferrovia transnordestina passa por uma curva de raio igual a 200 m , a uma velocidade de 60 km/h . A bitola (distância entre os trilhos) da linha é de $1,60 \text{ m}$. De que altura o trilho externo deve ser elevado de modo a minimizar a pressão que o trem exerce sobre ele?

12)*** Considere a Figura 5-19. Quais os valores mínimo e máximo da força \vec{F} , que aplicada constantemente a m , mantém em repouso em relação a ela as massas m_1 e m_2 . Desprezar os atritos na roldana e com a superfície horizontal plana. O fio que liga m_1 e m_2 é considerado inextensível e de peso desprezível.

CAPÍTULO 6

TRABALHO E ENERGIA

O leitor poderia imaginar a dificuldade de um engenheiro ao projetar um automóvel e ter que calcular todas as forças que agem sobre as milhares de peças que compõem o carro, usando só as leis de Newton. O desenvolvimento da física após a era Newton, abriu novos caminhos para tornar esta tarefa mais factível. A partir deste capítulo vamos introduzir alguns conceitos novos, entre eles o de **trabalho** e **energia**, que ajudarão nesta tarefa e que tiveram início com a revolução industrial na Inglaterra em meados do século XVIII. Neste período, mudanças fundamentais ocorreram na tecnologia, na economia, na sociedade e na cultura. Certamente, a física e a matemática tiveram um papel destacado neste processo. É o que veremos a seguir.

6-1 Energia

Nos dia de hoje ouvimos muito se falar sobre **energia**. Fala-se tanto assim porque parece existir algo que está presente em todos os fenômenos naturais conhecidos até agora. É uma certa quantidade numérica que se denomina energia, e que não se modifica nas múltiplas transformações que ocorrem na natureza. Parece um conceito abstrato, já que é um **número** que se conserva, e não algo concreto. Por exemplo, pode-se verificar experimentalmente que se um pequeno bloco é largado em A e começa a descer, sem atrito, num plano inclinado, é porque tem associado a ele, uma **energia** (traduzida, como veremos, por um número) lá no início da sua

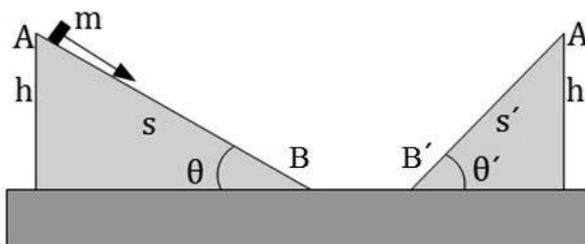


Figura 6-1. Corpo de pequena massa m descendo e depois subindo dois planos inclinados em atrito. Em todo este processo não há atrito e a energia é conservada.

descida e que paulatinamente é transformada numa **outra** forma de **energia** (com o mesmo número) em B, conforme visto na Figura 6-1. Na partida em A, a energia era associada ao corpo em repouso, mas em B, se transformou numa energia de movimento. Ambas as situações são formas de energia diferentes, mas traduzidas por um mesmo número. De B para B', m se desloca na horizontal, sem atrito, e nada externo atuando para

mudar esta energia de movimento. A partir de B', m começa a subir outro plano inclinado de mesma altura h, até atingir A', com a mesma energia de que partiu em A. Neste exemplo, a energia é um número que se conserva em todo o processo. Aliás, a energia sempre se conserva em todas as situações na natureza. É uma lei universal, e ao que parece não tem exceção. A descrição acima está colocada de uma forma muito qualitativa. No decorrer deste capítulo deveremos dar uma abordagem quantitativa. Será discutido o tipo de energia do movimento, chamada **energia cinética**, que pode ser gerada através de um mecanismo chamado **trabalho**, além de outros tipos de energia.

6-2 Trabalho e energia cinética

Imagine a situação da Figura 6-1 descrita acima. Vamos tentar descrevê-la matematicamente. No trecho AB, m chega em B com velocidade dada pelo uso da equação de Torricelli,

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 g \operatorname{sen} \theta s = 2 g h, \quad (6 - 1)$$

já que $v_A = 0$ (m parte do repouso de A). Como não há atrito no trecho BB', as únicas forças atuando sobre m são seu peso e a força normal \vec{N} que não mudam sua velocidade.

Consequentemente, $v_B = v_{B'}$. Após B' , m começa a subir o segundo plano inclinado e para a uma altura h' , ou seja,

$$0 = v_{B'}^2 - 2g \sin \theta' s' = v_B^2 - 2g h' \Rightarrow v_B^2 = 2g h'. \quad (6-2)$$

Comparando as Equações (6-1) e (6-2), conclui-se que $h' = h$.
Multiplicando por $1/2 m$ ambos os membros da Equação (6-1), obtemos

$$1/2 m v_B^2 = m g h = m(g \sin \theta) s = (ma)s.$$

Vamos analisar estas equações com cuidado. Todas elas conservam um mesmo número. No topo do plano inclinado, este número vale mgh . A partir daí uma força $F = m a = m(g \sin \theta)$ atua sobre o corpo que multiplicada pelo percurso fornece o mesmo número, que finalmente é mantido sob a forma de $1/2 m v_B^2$ no final da descida. Processo similar inverso ocorre, como é fácil verificar, na subida do segundo plano inclinado.

O termo $1/2 m v^2$ é chamado de **energia cinética** e é representado em geral pela equação

$$K = 1/2 m v^2. \quad (6-3)$$

Esta energia K está associada ao estado de movimento de um corpo. Sua unidade no SI (bem como de todas as demais formas de energia), é o **Joule (J)**, em homenagem ao cientista inglês James Prescott Joule (1818-1889) (apesar de poder lembrar um nome francês, deve ser pronunciado na forma do inglês). Assim

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2. \quad (6-4)$$

O termo mgh é chamado de **energia potencial gravitacional** e a ele voltaremos a falar mais adiante.

Já o termo $W = Fs$, responsável pela transformação de duas formas de energia mencionadas acima, é chamado de **trabalho**. O trabalho tem a mesma unidade de energia e é uma grandeza escalar.

Digressão matemática 6-1

Produto escalar e vetores

Produto escalar de dois vetores

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cong a b \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

onde os vetores são \vec{a} e \vec{b} e o produto entre dois indica a operação de produto escalar.

Operação com versores

É fácil verificar que

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$$

Algumas propriedades

i) Se $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$,

então, $a_x = \vec{a} \cdot \hat{x}$, $a_y = \vec{a} \cdot \hat{y}$, $a_z = \vec{a} \cdot \hat{z}$.

ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

iii) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (comutatividade)

iv) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

6-3 Expressão para o trabalho

Consideramos uma força \vec{F} atuando sobre um corpo de modo a deslocá-lo de uma distância d . Seja θ o ângulo entre os sentidos do deslocamento \vec{d} e da força \vec{F} . Assim $F \cos \theta$ é o componente da força ao longo do deslocamento do objeto. É conveniente definir o trabalho como

$$W = F d \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}, \quad (6-5)$$

que é o trabalho realizado por uma **força constante**.

Observações:

i) O corpo deve se comportar como um corpo rígido, não tendo partes móveis.

ii) Para $\theta < \pi/2 \text{ rad}$, $W > 0$ $\therefore \vec{F}$ tem uma componente vetorial no mesmo sentido que o deslocamento.

Para $\theta > \pi/2 \text{ rad}$, $W < 0$ $\therefore \vec{F}$ tem uma componente vetorial no sentido contrário

Para $\theta = \pi/2 \text{ rad}$, $W = 0$ $\therefore \vec{F}$ realiza um trabalho nulo, já que sua componente vetorial é normal ao deslocamento.

Unidades

No SI as unidades são as mesmas para K. Também, pela Equação (6-5)

$$1\text{J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \tag{6-6}$$

No sistema CGS (consulte a Tabela 4-1), seria $1 \text{ dina} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ erg}$. Como $1 \text{ N} = 10^5$ dinas, então $1 \text{ J} = 10^7 \text{ ergs}$.

Trabalho resultante realizado por várias forças

Quando várias forças atuam sobre um objeto, o trabalho resultante realizado sobre o objeto é a soma dos trabalhos realizados pelas forças individuais. Logo,

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{d} \tag{6-7}$$

Paradinha 6-1

No movimento circular uniforme de uma partícula qual o trabalho realizado pela força centrípeta sobre a partícula?

Exemplo 6-1

Uma força \vec{F} , não conhecida, puxa um corpo de massa m , ao longo de uma superfície horizontal plana, por uma distância d . Considere μ_c o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície. Calcular o trabalho realizado.

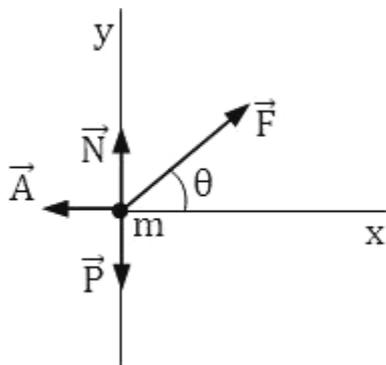


Figura 6-2. Forças atuando no corpo referente ao Exemplo 6-1.

Solução:

Projetando as forças sobre os eixos x e y respectivamente, e usando a 2ª lei de Newton, obtemos

$$\begin{cases} \Sigma X \rightarrow F \cos \theta - A = 0 \rightarrow F \cos \theta - \mu_c N = 0 \\ \Sigma Y \rightarrow N + F \sin \theta - P = 0 \rightarrow N = P - F \sin \theta \end{cases}$$

Eliminando N entre as equações acima, obtemos o valor de F

$$F = \frac{\mu_c mg}{\cos \theta + \mu_c \sin \theta}$$

O trabalho pedido é dado pela Equação (6-5), e assim usando a equação acima para F , chegamos finalmente a

$$W = \frac{\mu_c mg d}{1 + \mu_c \tan \theta}$$

Paradinha 6-2

Que valores de θ fornecem um máximo e um mínimo para o trabalho calculado no Exemplo 6-1?

6-4 Trabalho realizado por uma força unidimensional variável

Consideremos a força $\vec{F} = F(x) \hat{x}$. Vamos admitir que a força $F(x)$ unidimensional tenha um gráfico como mostrado na Figura 6-3. Os pontos x_i e x_f são os pontos iniciais e finais, respectivamente, de onde vamos calcular o trabalho realizado por $F(x)$. Dividimos a área sob a curva da Figura 6-3 em um grande número de retângulos de largura infinitamente pequena. Um retângulo genérico está mostrado, de largura Δx_j e altura média $F(x_j)$. Neste j -ésimo retângulo, o trabalho realizado pela força média constante $F(x_j)$, num j -ésimo intervalo Δx_j , é dado pela Equação 6-5, ou seja $\Delta W_j = F(x_j) \Delta x_j$,

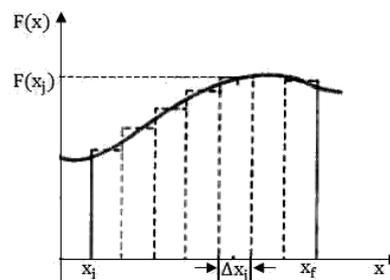


Figura 6-3. Gráfico de uma força unidimensional em função de x .

No intervalo de x_j a x_f , o trabalho total é aproximadamente, dado por

$$W \simeq \sum_{j=1}^N F(x_j) \Delta x_j ,$$

onde N é o número de retângulos infinitesimais considerados. No limite quando $N \rightarrow \infty$, teremos

$$W_{i \rightarrow f} = \lim_{\substack{\Delta x_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left[\sum_{j=1}^N F(x_j) \Delta x_j \right] .$$

Se este limite existir teremos a definição de uma integral definida no intervalo $[x_i, x_f]$, ou seja,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx . \quad (6 - 8)$$

Geometricamente, o trabalho é igual à área entre a curva de $F(x)$ e o eixo de x , entre os limites x_i e x_f .

6-5 Trabalho realizado pela força gravitacional

A força gravitacional, relativamente próxima à Terra, atuando sobre uma partícula de massa m , é dada por

$$\vec{F} = -mg \hat{y}$$

O trabalho realizado por esta força ao deslocar verticalmente esta partícula de y_i a y_f , é obtida pela Equação 6-8, aplicada na direção do eixo dos y , ou seja

$$W_{\uparrow} = \int_{y_i}^{y_f} (-mg) dy = -mg(y_f - y_i) = -mg h. \quad (6 - 9)$$

Se ao contrário, o corpo descesse,

$$W_{\downarrow} = +mg h. \quad (6 - 10)$$

Olhando os resultados à luz da Equação (6-5), já que $\vec{F} = -mg \hat{y}$ é uma força constante, vemos que $W_{\uparrow} > 0$, pois $\theta = \pi$ rd, enquanto $W_{\downarrow} > 0$, pois $\theta = 0$ rd. Os significados físicos destes resultados serão analisados mais adiante, à luz do conceito de energia cinética.

Exemplo 6-2

Calcular o trabalho realizado por uma força constante para elevar uma partícula de massa m a uma altura h , num plano inclinado sem atrito e à velocidade constante.

Solução:

Ao longo do eixo dos x , temos

$F - P \sin \theta = 0$, pois m se desloca com velocidade constante. Logo, $F = mg \sin \theta$. O trabalho realizado por F , que é uma força constante, é dado por

$$W = F d \cos 0 = mg \sin \theta \left(\frac{h}{\sin \theta} \right) = mg h.$$

É o mesmo valor dado pela Equação 6-10, já que aqui, \vec{F} e \vec{d} têm o mesmo sentido.

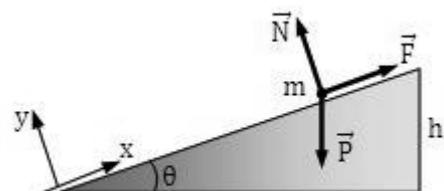


Figura 6-4. Referente ao Exemplo 6-2

6-6 Trabalho realizado por uma força elástica unidimensional

Vamos encontrar o trabalho realizado por uma mola quando um bloco de massa m , tratado como uma partícula, está a ela preso, de acordo com as situações mostradas na Figura 5-3. Algumas hipóteses são consideradas: i) desprezar a massa da mola considerando que ela é muito menor que m ; ii) a mola obedece à lei de Hooke; iii) não há atrito entre o bloco e o piso.

Nas situações b) e c) mostradas na Figura 5-3, a força atuando sobre a mola no ponto que se atrela o bloco é sempre contrária ao deslocamento e dirigida para a origem O. Esta força, pela lei de Hooke, é dada por

$$F_m(x) = -kx.$$

A força que atua sobre o bloco vale, segundo a lei de Newton $F(x) = -F_m(x)$.

Assim, o trabalho realizado pela mola ao ser deslocada da posição x_i para x_f é dado por

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F_m(x) dx = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -\frac{1}{2} k(x_f^2 - x_i^2). \quad (6 - 11)$$

Se x_i for tomado como origem ($x_i = 0$), então,

$$W_m = -1/2 kx^2. \quad (6 - 12)$$

Exemplo 6-3

Considere o sistema bloco + mola da Figura 5-3 b). Uma força $F(x) = 10x$ em newtons seria necessária para segurar o bloco em $x_1 = 20$ mm. Que trabalho é realizado sobre o bloco pela força elástica para distender a mola de 15 mm?

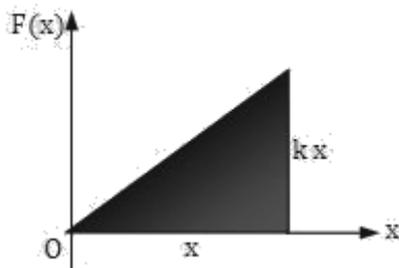


Figura 6-5. Área sob curva $F(x) = kx$.

Solução:

O trabalho pedido é dado pela Equação (6-12)

$$W_m = -\frac{1}{2} kx^2.$$

(Esta teria o mesmo valor para cumprimi-la desta distância x). Note que podemos ainda obter este resultado, calculando a área sob a curva $F(x)$ com o eixo dos x , onde $F(x) = +kx$ é a força aplicada ao bloco. Aqui não conhecemos k . Porém para segurar o bloco em $x_1 = 15$ mm é necessário que a força elástica exercida pela mola seja igual e oposta a esta força aplicada, ou seja, $F_m = -10x$. Logo,

$$k = -\left(\frac{-10 \text{ N}}{20 \times 10^{-3} \text{ m}}\right) = \frac{1000}{2} \text{ N/m} = 500 \text{ N/m}.$$

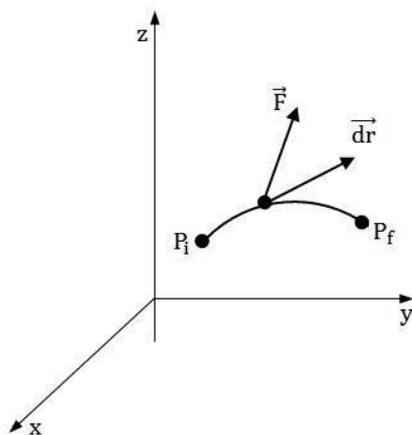
O trabalho pedido é então,

$$W_m = -\frac{1}{2} \times (500 \text{ N/m}) (15 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = -0,056 \text{ J}.$$

Paradinha 6-3

No exemplo 6-3 considere agora que o bloco passe a comprimir a mola de 10 mm. Que trabalho a força elástica realizou sobre o bloco neste deslocamento? Explique o sinal deste trabalho

6-7 Trabalho realizado por uma força tri-dimensional variável



Neste caso geral, a força aplicada à partícula é dada por

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z}, \quad (6 - 13)$$

onde F_x, F_y e F_z podem ser funções de x, y, z . A partícula pode se mover de um deslocamento infinitesimal

$$\vec{dr} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}, \quad (6 - 14)$$

gerando um trabalho dW , expresso por

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

O trabalho total realizado por \vec{F} para deslocar a partícula de P_i a P_f através de uma linha, representada por C , na Figura 6-6, é então,

Figura 6-6. Trabalho realizado por uma força genérica \vec{F} de ir de P_i a P_f ao longo do C .

$$W = \int_c \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_c (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (6 - 15)$$

Uma integral deste tipo é chamada em matemática de **integral de linha**. Seu estudo está acima do nível deste curso. Só situações mais simples serão abordadas neste texto.

6-8 Teorema do Trabalho – Energia Cinética

Considere uma partícula de massa m sob a ação de uma força \vec{F} ao longo de uma curva C . O trabalho realizado sobre a partícula por \vec{F} ao deslocá-la da posição \vec{r}_i para a posição \vec{r}_f é dado pela Equação 6-15

$$W_{i \rightarrow f} = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = m \int_i^f (a_x dx + a_y dy + a_z dz), \quad (6 - 15)$$

onde a 2ª lei de Newton foi usada para um m constante.

Como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx},$$

analogamente, podemos escrever

$$a_y = v_y \frac{dv_y}{dy} \quad \text{e} \quad a_z = v_z \frac{dv_z}{dz}.$$

Substituindo estes valores na Equação (6-15)', podemos obter

$$W_{i \rightarrow f} = m \int_i^f (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = \frac{1}{2} m (\underbrace{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}_{v^2}) \Big|_i^f = \frac{1}{2} m v_f^2 -$$

$$- \frac{1}{2} m v_i^2 = K_f - K_i = \Delta K,$$

onde usamos a definição de energia cinética dada pela Equação 6-13.

Em resumo,

$$W_{i \rightarrow f} = K_f - K_i = \Delta K, \quad (6 - 16)$$

que é o famoso teorema trabalho-energia cinética. Ele afirma que o trabalho realizado por uma força aplicada a uma partícula de massa constante, ao movê-la de uma posição inicial a uma final, é igual à variação da energia cinética neste percurso.

Observações

- a) i) Se $\Delta K > 0$ (ou $K_f > K_i$) $\Rightarrow W_{i \rightarrow f} > 0$.
- ii) Se $\Delta K < 0$ (ou $K_f < K_i$) $\Rightarrow W_{i \rightarrow f} < 0$.
- iii) Se $\Delta K = 0$ (ou $K_f = K_i$), o movimento se dá à velocidade constante $\Rightarrow W_{i \rightarrow f} = 0$.

Atenção! No Exemplo 6-2 a partícula subiu com velocidade constante um plano inclinado, com o auxílio de uma força \vec{F} . A variação da energia cinética foi **nula** ($\Delta K = 0$), mas houve um trabalho não nulo, $W = + mgh \neq 0!$ Como isto aconteceu? É que ele se transformou em uma outra forma de energia, chamada **energia potencial**, que será discutida no próximo capítulo.

b) K é uma grandeza escalar com unidades iguais ao trabalho.

c) As coisas surgiram neste capítulo com novas ideias, mas partindo das leis de Newton. São novos conceitos, como trabalho e energia, que vão facilitar o uso da mecânica na solução de diversos problemas.

Exemplo 6-4

Calcular o trabalho realizado por uma força $\vec{F} = x \hat{x} - xy \hat{y}$, dada em newton, sobre uma partícula de massa constante ao longo de A a B no caminho mostrado na Figura 6-7.

Solução:

A força é bidimensional. Assim o trabalho pedido é dado por

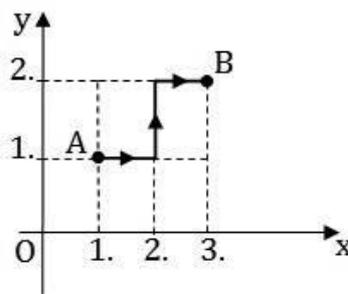


Figura 6-7. Referente ao Exemplo 6-4.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy) = \int_A^B x dx - \int_A^B xy dy = \left[\int_1^2 x dx + \int_2^3 x dx + \int_2^3 x dx \right] - \left[\int_1^2 x dy + 2 \int_1^2 y dy + \int_2^3 xy dy \right] = \left[\frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_2^3 \right] - \left[\frac{2}{2} y^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{2} (9 - 4) - (4 - 1) \right] = 1,0 \text{ J}.$$

Exemplo 6-5

Um corpo de massa m se desloca ao longo de um assoalho horizontal liso com velocidade constante v . Se choca na sua trajetória com uma mola de constante elástica k e massa desprezível. A mola está colocado na horizontal, com o lado oposto ao choque, fixa a uma parede vertical. De quanto a mola é comprimida com o choque?

Solução:

No ponto onde o bloco encontra a mola, consideramos $x = 0$. Com o choque, a energia cinética do bloco decresce, até se anular. Esta variação da energia cinética, $K_f - K_i = -\frac{1}{2} m v^2$, pelo teorema do trabalho-energia cinética é transferida à mola, em forma de trabalho. Logo,

$$\Delta K = -\frac{1}{2} m v^2 = -\frac{1}{2} k x^2 \text{ (cuidado com os sinais!).}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow x = v \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Exemplo 6-6

Considere um bloco de massa m atrelado a uma mola, conforme mostrado na Figura 6-8. A mola está frouxa e o sistema bloco + mola em repouso. A $t = 0$, o bloco parte para a direita com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$, distendendo a mola a ele preso. O bloco percorre uma distância s até finalmente parar. A constante elástica da mola é k e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o assoalho é μ_c .

Calcular:

- O trabalho realizado pela força de atrito.
- O trabalho realizado pela força elástica sobre o bloco.
- Os trabalhos realizados pelo peso do bloco e sua força normal.
- O trabalho total sobre o bloco.
- A distância s .

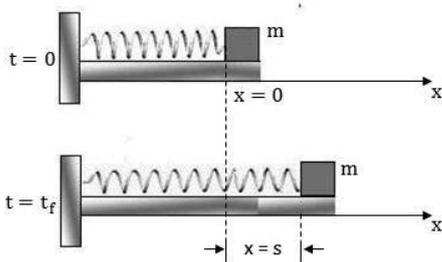


Figura 6-8. Figura referente ao Exemplo 6-6.

Solução:

a) Este trabalho é dado por $W_A = \int_0^s (-A_x) dx = -\mu_c N s = -\mu_c mgs$.

b) Sobre m vai atuar uma força $F_x = -kx$ criada pela mola. Logo,

$$W_{\text{bloco}} = \int_0^s (-kx) dx = -\frac{1}{2} k s^2 < 0.$$

c) Estes trabalhos são nulos já que \vec{P} e \vec{N} são normais ao deslocamento do bloco.

d) $W_{\text{total}} = \sum_i W_i = -(\mu_c mgs + ks^2/2) < 0.$

e) Vamos usar o teorema trabalho-energia cinética, $W_{\text{total}} = \Delta K$.

Logo,

$$-(\mu_c mgs + ks^2/2) = 0 - mv_0^2/2.$$

Obtém-se assim a equação do 2º grau em s , $(k/2)s^2 + (\mu_c mg)s - mv_0^2/2 = 0$, que resolvida fornece as duas raízes para s :

$$s = \left[-\mu_c mg \pm \sqrt{(\mu_c mg)^2 + kmv_0^2} \right].$$

A raiz negativa, obviamente, não serve, pois $s > 0$.

Exemplo 6-7

Imagine uma partícula sob a ação de uma força de mesma direção e sentido que sua velocidade.

a) Usando $F = d(mv) / dt$ para esta partícula, mostrar que

$$F dr = mv dv + v^2 dm.$$

b) Sabendo que $m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$, mostre que

$$mvdv = \left(\frac{m_0 c^2}{m} \right)^2 dm.$$

c) Substituindo os valores de v^2 e $mvdv$ na expressão acima do item a) para Fdr , mostre que para baixas velocidades,

$$W = \int_c F dr = (m - m_0) c^2 = \Delta K.$$

Solução:

a) Partindo de

$$F = \frac{d}{dt} (mv) = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt},$$

podemos calcular Fdr , ou seja

$$Fdr = \left[m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt} \right] (vdt) = mv dv + v^2 dm.$$

b) Da expressão para m , tiramos o valor de v^2 , que é dado por

$$v^2 = [1 - (m_0/m)^2]c^2.$$

Diferenciando os dois lados desta equação em termos das variáveis v (1º membro) e m (2º membro), obtemos

$$2v dv = 2 \frac{m_0^2}{m^3} c^2 dm \Rightarrow mv dv = \left(\frac{m_0 c^2}{m} \right)^2 dm.$$

c) O trabalho é ainda dado pela relação

$$W = \int_c F dr = \int_c \left\{ \left(\frac{m_0 c^2}{m} \right)^2 dm' + \left[1 - \left(\frac{m_0}{m'} \right)^2 \right] c^2 dm' \right\} = c^2 \int_{m_0}^m dm' = (m - m_0) c^2.$$

Falta provar que este valor é igual a ΔK . Usando a expressão para m e chamando $\beta = v/c$, tem-se $m = m_0$

$(1 - \beta^2)^{-1/2}$. Como $\beta \ll 1$, então, podemos expandir em série $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, ou seja

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \frac{5}{16} \beta^6 + \dots \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2, \quad (6 - 16)'$$

e conseqüentemente,

$$(m - m_0)c^2 = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] m_0 c^2 - m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \Delta K, \text{ para baixas velocidades.}$$

A relação $W = (m - m_0)c^2 = \Delta K$ mostra que massa e energia são **equivalentes** na relatividade restrita. Além disso, as definições de força e trabalho são as mesmas da mecânica clássica.

Paradinha 6-4

Certifique-se você mesmo que a Equação (6-16)' pode ser obtida diretamente da expressão do Binômio de Newton para $(a + b)^n$ e depois fazendo $a = 1$, $b = -\beta$ e $n = -1/2$.

6-9 Potência

O conceito de trabalho não leva em conta o tempo em que ele foi realizado. Engenheiros estão interessados que ele se realize no menor tempo possível

Imagine que uma força realize um trabalho ΔW em um intervalo de tempo Δt . A taxa de variação no tempo de ΔW é chamada de **potência média** e é definida como

$$P_{\text{média}} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (6 - 17)$$

Se quisermos a **potência instantânea**, no qual o trabalho é realizado, então definimos seu valor como

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (6 - 18)$$

Unidade

No sistema SI a unidade para potência é o joule por segundo, que recebe a denominação de **watt** (W), em homenagem a James Watt (1736-1819), por suas contribuições no desenvolvimento das modernas máquinas a vapor. Assim $1 \text{ watt} = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

Uma unidade também muito empregada é o quilowatt-hora, ou, simplesmente, Kw.h, para o trabalho. É definida como

$$1 \text{ kw.h} = (10^3 \text{ W}) (3600 \text{ s}) = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = 3,60 \text{ M.J} \quad (6 - 19)$$

Nas contas de energia elétrica esta unidade de energia aparece com frequência.

Outra expressão para potência

Sabemos que

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (6 - 20)$$

Dividindo ambos os membros por Δt e passando ao limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos que é outra expressão para a potência instantânea, quando um objeto sofre a ação de uma força \vec{F} e tem uma velocidade instantânea \vec{v} .

Paradinha 6-5

Qual a potência da tensão da corda segurando um bloco em movimento circular uniforme?

Exemplo 6-8

Uma cachoeira tem uma vazão de 10^4 m^3 de água em cada 2s. Sua altura é de 80 m e a densidade volumétrica da água é $1,0 \text{ g/cm}^3$. Se 4/5 de sua potência é utilizada para gerar eletricidade, calcule esta potência.

Solução:

A potência que gera eletricidade é dada por

$$P_{el} = \frac{4}{5} \frac{mgh}{t} = \frac{4}{5} \frac{\rho Vgh}{t}$$

Usando os valores numéricos no SI

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 = 10^{-3} \text{ kg}/(10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3,$$

obtemos finalmente,

$$P_{el} = \frac{4}{5} \frac{10 \times 10^4 \times 9,81 \times 80}{2} \text{ W} = 313,9 \times 10 \times 10^6 \text{ W} = 3139 \text{ MW}.$$

Exemplo 6-9

Um corpo de massa m cai de uma altura h acima da superfície da Terra, partindo do repouso. Qual sua potência ao atingir a Terra?

Solução:

Vamos usar a relação

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = pv = mgv,$$

onde v pode ser obtido pelo uso da equação de Torricelli $v^2 = 0 + 2gh = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$.

Logo,

$$P = mg\sqrt{2gh}.$$

6-10 Pausa para descontração:

A Revolução Industrial

A Revolução Industrial começou na Grã-Bretanha durante o século XVIII e se espalhou por grande parte da Europa e da América do Norte. Sua repercussão durou praticamente até os nossos dias.

O estopim desta revolução foi motivado pela necessidade da Grã-Bretanha solucionar a crise de combustível em seu território. Suas florestas estavam praticamente esauridas e as minas de carvão rasas estavam quase esgotadas. Novas tecnologias se faziam necessárias para retirar o carvão cada vez mais profundo. A invenção da bomba a vapor para drenar a água nas minas e a descoberta do processo de fundição do ferro, iniciaram a revolução industrial.

Mas por que na Grã-Bretanha? Muitas foram as razões. A geologia naquele país favorecia este caminho, pois, as minas de carvão eram próximas às de ferro. Por outro lado, a situação política era estável, o país era livre de tarifas alfandegárias internas e tinha um sistema bancário bem estruturado. Naquela época, a Grã-Bretanha já era uma potência e dominava os mares. Além disso, tinha um agronegócio relativamente desenvolvido em relação ao resto do hemisfério norte.

A posição da Grã-Bretanha como ilha e seu forte poderio naval, deram-lhe grandes vantagens. No seu território, havia bons portos, rios e canais navegáveis, estes últimos, chegando a mais de 6400 km.

Com a construção de um grandioso império ao redor do mundo, conhecido como império britânico, a Inglaterra tornou tal processo de vital importância para servi-la de fonte de matérias primas e mercados.

Com todas as vantagens mencionadas acima, a Grã-Bretanha detinha ainda de um enorme capital para investimento em grandes novos projetos.

E foi o que aconteceu!

O ferro foi usado cada vez mais para a produção de maquinário, navios e em 1825, para iniciar as ferrovias com locomotivas a vapor.

As ferrovias foram as grandes conquistas na área do transporte de passageiros e cargas. Elas se espalharam rapidamente por praticamente todo o mundo. As locomotivas a vapor foram também aperfeiçoadas em vários outros países. Mesmo na década de 30 do século XX, ainda eram construídos novos modelos. Até hoje, este meio de transporte é largamente utilizado no mundo desenvolvido para o transporte de passageiros, e economicamente viável, para cargas pesadas em distâncias maiores que 500 km. Certamente, não mais usando locomotivas a vapor e dispondo de uma tecnologia moderna sofisticada.

As primeiras tentativas de construir bombas a vapor para drenagem de água, começaram com os engenhos de Savery (1698) e Newcomen (1712). Mas foi James Watt (1736-1819), que em 1769, patenteou uma bomba a vapor mais barata e eficiente.

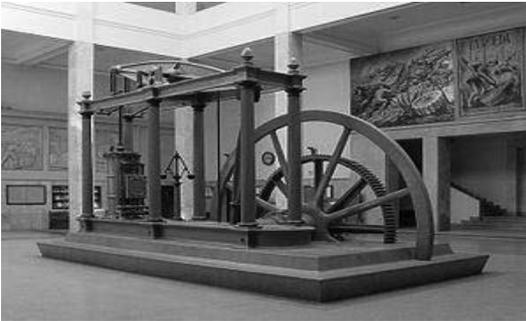


Figura 6-9. Um motor a vapor de Watt, alimentado principalmente com carvão, impulsionou a Revolução Industrial no Reino Unido e no mundo.



Figura 6-10. A saúde precária dos trabalhadores ingleses do setor têxtil em março de 1919.

Um outro setor que se beneficiou muito com a revolução industrial foi o setor têxtil. Com a invenção da máquina de fusos múltiplos, a tecelagem manual praticamente chegou ao fim. Os Estados Unidos se beneficiaram destas conquistas e também progrediram enormemente, construindo indústrias e importando máquinas da Grã-Bretanha.

Esta **primeira fase** da revolução industrial teve na **mecânica** e na **termodinâmica** o embasamento teórico necessário para a sua implementação. Isto durou praticamente cem anos, ou seja, todo o século XVIII. Cem anos depois, ainda no século XVIII, Antoine Laurent de Lavoisier (1743-1794) começou o processo de criação da química moderna. É dele a famosa experiência que mostra que o oxigênio é o fator fundamental para iniciar o processo de combustão em um material combustível. E mais cem anos, já no século XIX, aproximadamente, tem início um processo revolucionário na biologia com Darwin.

No século XIX, começa a ser criado o **eletromagnetismo**, através dos trabalhos pioneiros de Michael Faraday (1791-1867), o que acabaria por substituir paulatinamente o vapor.

Como vimos, a Grã-Bretanha inciou a revolução industrial. Entretanto, ela se espalhou aos poucos por todo o hemisfério norte. No Brasil, devido ao seu atraso à época, chegou tardiamente. Foi aqui muito localizado, em poucas regiões do país, principalmente, São Paulo.

Efeitos negativos da industrialização foram sentidos, com o inchaço das cidades e a proliferação de favelas. Os países mais desenvolvidas resolveram grande parte destes problemas, mas países como o Brasil, ainda sentem tais tragédias humanas.

A revolução industrial foi também indutora de grandes mudanças sociais no mundo. Com o crescimento do protestantismo no hemisfério norte, a ideia do enriquecimento, fruto do trabalho honesto, prosperou e não era mais vista como um pecado. Estas ideias contribuíram para o sucesso do capitalismo, notadamente, nos Estados Unidos.

Na primeira metade do século XVIII, o centro filosófico e científico da Europa esteve concentrado fortemente na Inglaterra. Mas em meados do século, se deslocou para a França e em fins do século, para a Alemanha. Na França, surgiu o **Iluminismo**, movimento filosófico criado para “iluminar” as amplas camadas da população. Este movimento continha vários lemas, entre os quais, a revolta contra as autoridades, o racionalismo (inspirado na tradição de Descartes), o otimismo cultural, o retorno à natureza, o cristianismo humanista e os direitos humanos. Como esperado, não tardou a se instalar uma revolta contra o autoritarismo, o poder da Igreja, do rei e da aristocracia. Em 14 de julho de 1789 estoura a revolução francesa, com o lema “*Liberté, égalité et fraternité*” (*Liberdade, igualdade e fraternidade*).

Foi um grande divisor de águas na história da humanidade. Após a fase inicial do regime de terror que se instalou, inclusive com a morte de Lavoisier na guilhotina, em 1794 começou um novo período, tendo Napoleão Bonaparte (1769-1821) à frente. Nesta época, grandes cientistas foram convocados para assumir importantes tarefas no novo regime. É o caso de físicos e matemáticos brilhantes, como Lagrange, Condorcet, Diderot, d’Alembert, Laplace, entre outros. Neste processo iluminado, a física e a matemática se desenvolveram bastante. Toda a física clássica, por



Figura 6-11. A locomotiva Garrett, também utilizada no nordeste do Brasil após a segunda guerra mundial.

exemplo, que começou com a mecânica de Newton, seguida da termodinâmica e finalmente, do eletromagnetismo, foi concluída até o final do século XIX. Foi um esforço intelectual gigantesco na época!

Os conceitos fundamentais de trabalho, energia, as leis de conservação, entre outras, foram criadas neste período. É bem verdade que Kepler e Galileu já haviam tratado de tais temas, mas superficialmente. Entretanto, foram homens como d'Alembert, Joule, Lagrange e outros que firmaram definitivamente tais conceitos na física.

A **segunda fase** da revolução industrial teve início nos Estados Unidos em fins do século XIX. Foi a era das grandes descobertas em vários setores e da produção em série na indústria do petróleo, da aviação, automobilística, rádio, telecomunicação, etc.

A **terceira fase** da revolução industrial começou após a segunda guerra mundial e ainda foi liderada pelos Estados Unidos. Progressos na área nuclear, na informática, nas telecomunicações, etc., são sentidos até os nossos dias.

É também desse período, o surgimento e a importância crescente dos países denominados emergentes, os quais formam um bloco, chamado BRIC, sigla esta para indicar seus membros, Brasil, Rússia, Índia e China, respectivamente. E tudo isto teve início com a Revolução Industrial!

Resumo

Energia cinética

$$K = \frac{1}{2} mv^2. \quad (6 - 21)$$

Trabalho

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f F_x dx = \text{área sob a curva } F_x \times x, \quad (6 - 22)$$

sendo i e f as posições iniciais e finais, respectivamente. Para forças tridimensionais:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (6 - 23)$$

onde C é o caminho que a força atua entre i e f .

Teorema do trabalho-energia cinética

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K, \text{ onde } \Delta K = K_f - K_i. \quad (6 - 24)$$

Trabalho realizado pela força gravitacional

$$W = \vec{P} \cdot \vec{d},$$

onde $\vec{P} = m g \hat{y}$ e \vec{d} é o deslocamento

Força elástica

$$F_x = -kx \text{ (Lei de Hooke)}$$

Trabalho realizado por uma força elástica

Se um objeto de massa m está preso à extremidade livre da mola, o trabalho realizado sobre m pela força elástica é dado por

$$W_m = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2. \quad (6 - 25)$$

Se $x_i = 0$, e $x_f = x$ então,

$$W_m = -\frac{1}{2} kx^2. \quad (6 - 26)$$

Potência

Potência média:

$$P_{\text{média}} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad (6 - 27)$$

Potência instantânea:

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (6 - 28)$$

ou também,

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (6 - 29)$$

Questões conceituais

- 1) Um homem segura na vertical um cartaz durante algum tempo sem realizar qualquer trabalho mecânico, e afirma que se cansa muito nesta operação! Está correta esta sua afirmativa?
- 2) Uma força constante \vec{F} atua sobre uma partícula. Para um deslocamento \vec{d} dado, em qual dos casos abaixo, o trabalho realizado pela força é positivo, ou negativo ou nulo?
 - a) O ângulo entre \vec{F} e \vec{d} é 120° ;
 - b) o ângulo é 90° ,
 - c) $\vec{F} = 2\hat{x} - \hat{y}$ e $\vec{d} = \hat{x} + 2\hat{y}$.
- 3) Uma mola A tem uma constante elástica maior que a mola B ($k_A > k_B$). Que força elástica realiza mais trabalho: a) se as molas forem comprimidas de uma mesma distância? b) Ou se forem por uma mesma força?
- 4) Dois blocos idênticos podem descer deslizando através de planos inclinados lisos, de mesmo comprimentos, mas de inclinação θ , diferentes. Existe alguma inclinação θ em que o trabalho realizado pela força gravitacional é menor? Justifique sua resposta
- 5) Uma força unidimensional atua sobre um corpo de 2,0 kg quando ele se desloca ao longo do eixo x, de acordo com a Figura 6-9. Ele parte de $x = 0$ com velocidade de 4,0 m/s.
 - a) Qual sua energia cinética em $x = 4,0$ m?
 - b) Qual sua coordenada quando alcança uma energia cinética de 8,0 J?
 - c) Qual sua energia cinética máxima entre $x = 0$ e $x = 7,0$ m?
- 6) A especificação de uma locomotiva é em unidade de energia ou de potência? Por quê?
- 7) a) Em termos industriais, uma cachoeira é especificada em unidades de energia ou de potência?
 b) Já para o meio-ambiente em si é em energia ou potência?
 Justifique suas respostas.

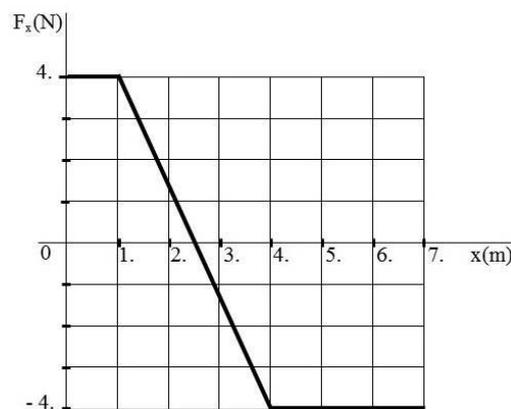


Figura 6-9. Referente à questão 5).

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

- 1)* Uma força $F = 10$ N desloca um corpo de massa 20 kg, inicialmente, em repouso, de uma distância de 10 m. Calcule a potência média liberada no processo.
- 2)* Um carro de massa m parte do repouso e sua velocidade varia como $v = C\sqrt{x}$, onde C é uma constante dimensional em um movimento ao longo do eixo x. Ache:
 - a) sua aceleração;
 - b) o trabalho total feito pelas forças que nele atuam depois de um tempo t ;
 - c) a potência neste intervalo de tempo.
- 3)* Uma força tipo arrasto $\vec{F} = (Cx + 3x^2)\hat{x}$ em newtons e x em metros, atua sobre um corpo ao longo do eixo x. Em $x = 0$, a sua energia cinética é 10 J e em $x = 3$ m ela é 64 J. Calcule a constante C . Despreze efeitos de aquecimento.
- 4)** Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x com uma velocidade $v = C\sqrt{x}$, onde C é uma constante dimensional. Ache o trabalho feito pela força atuando sobre a partícula para movimentá-la de $x = 0$ a $x = d$.
- 5)** Considere uma partícula de massa m suspensa por um fio inextensível, de peso desprezível e de comprimento l . Através de uma força \vec{F} desloquemos a partícula à velocidade constante ao longo de uma trajetória circular, desde $\theta = 0$ até $\theta = \theta_0$, onde θ é o ângulo entre o fio e a vertical.
 - a) Considerando \vec{F} sempre horizontal, calcule o trabalho realizado.
 - b) Considerando agora \vec{F} dirigida sempre ao longo do arco, calcule o trabalho realizado.
- 6)** Um corpo de massa m escorrega do repouso para baixo num plano inclinado de inclinação θ . Em baixo, continua escorregando num assoalho horizontal plano e para após percorrer uma distância s . Admita o mesmo

coeficiente de atrito cinético μ em todo o percurso. Calcule o trabalho feito pelas forças de atrito. Explique o sinal obtido neste cálculo.

7)** Dois blocos de massa m_1 e m_2 são conectados horizontalmente por uma mola em repouso, frouxa e com massa desprezível. Admita que o coeficiente de atrito entre os blocos e a superfície horizontal plana é μ . Ache o valor mínimo de uma força constante horizontal aplicada a m_1 , que desloque m_2 .

8)** Uma partícula de massa m move-se em uma circunferência de raio r . Ela tem uma aceleração radial dada por $a_r = C t^2$, onde C é uma constante dimensional e t o tempo. Ache a potência gerada neste processo como uma função do tempo.

9)*** Uma corrente de densidade linear uniforme tem comprimento l , massa m , e está em repouso sobre uma mesa, com $1/3$ de seu comprimento pendurado verticalmente em uma das extremidades da mesa. Que trabalho é necessário para que a força gravitacional puxe o restante da corrente?

10)*** A energia cinética de uma partícula movendo-se numa circunferência de raio r , depende da distância por ela percorrida s e é dada como $K = C s^2$, onde C é uma constante dimensional. Calcule a força \vec{F} aplicada à partícula.

11)*** Uma força $\vec{F} = -\hat{x} + \hat{y}$, em newtons, atua sobre uma partícula que se desloca em $1,0$ s de uma posição $\vec{r}_i = 1/2 \hat{x}$ à uma posição final $\vec{r}_f = \hat{x} + \hat{y}$. Calcule:

- O ângulo entre as duas posições \vec{r}_i e \vec{r}_f .
- O trabalho realizado por \vec{F} sobre a partícula.
- A potência média da força nesse intervalo de tempo.

12)*** Um bloco de massa m repousa sobre outro bloco de massa $M > m$. Já o sistema $m + M$ repousa sobre uma superfície horizontal com atrito. Uma força horizontal constante F é aplicada ao bloco M , de tal forma que os dois blocos se movem juntos aceleradamente.

Calcule:

- O coeficiente de atrito cinético entre M e a superfície horizontal.
- A força de atrito atuando no bloco superior
- O trabalho feito pela força de atrito no bloco superior durante um deslocamento s do sistema.

CAPÍTULO 7

ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

No capítulo 6 estudamos a relação entre o trabalho e energia cinética. O importante teorema do trabalho e a variação da energia cinética foi deduzido de modo a facilitar, em muito, a resolução de vários tipos de problemas.

Neste capítulo vamos discutir a relação entre trabalho e uma variação na energia potencial que também se apresenta no estudo da mecânica. A energia potencial, nas formas de energia potencial gravitacional ou de energia potencial elástica, já apareceu no capítulo anterior. Não é difícil entender que a energia potencial está associada a uma dada configuração de um sistema de corpos que exercem forças entre si. Isto é o que ocorre, por exemplo, em uma molécula onde, para certa configuração geométrica, existe associado uma energia potencial responsável por este fato.

7-1 Trabalho, forças conservativas e não-conservativas

Começemos a analisar com mais detalhe dois sistemas já por nós discutidos no capítulo anterior: O sistema massa-mola e o sistema massa-plano inclinado. As massas dos blocos são consideradas pequenas. No primeiro, a força presente obedece à lei de Hooke, enquanto no segundo caso, é a força gravitacional.

Sistema massa-mola

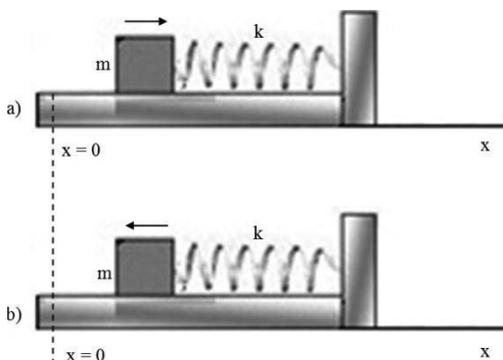


Figura 7-1. a) Bloco se move para a direita (compressão) com velocidade v_i em $x = 0$. b) Bloco se move para a esquerda (descompressão) partindo do repouso, até atingir uma velocidade final v_f em $x = 0$.

Imagine um pequeno bloco de massa m ligado a uma mola de massa desprezível e constante elástica k . Inicialmente, o sistema está em equilíbrio em $x = 0$ e é subitamente colocado em movimento com velocidade inicial v_i para a direita, ao longo de uma superfície horizontal lisa, conforme ilustrado na Figura 7-1. Por a mola ser comprimida de uma distância x , ela transforma energia cinética do bloco em energia potencial elástica do sistema massa-bloco. O bloco diminui paulatinamente, sua velocidade, até parar, e começa a reverter o movimento, indo o bloco em sentido oposto, para a esquerda. Na figura 7-1 tivemos uma variação das energias cinética e potencial elástica, dadas por

$$\text{ida} \rightarrow \begin{cases} \Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2} m v_i^2 , & (7-1) \\ W_{0 \rightarrow x} = \int_0^x (-kx') dx' = -\frac{1}{2} k x^2 , & (7-2) \end{cases}$$

Já na Figura 7-1 b), estas energias foram

$$\text{volta} \rightarrow \begin{cases} \Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = \frac{1}{2} m v_f^2 , & (7-3) \\ W_{x \rightarrow 0} = \int_x^0 (-kx') dx' = +\frac{1}{2} k x^2 , & (7-4) \end{cases}$$

Pela soma das Equações 7-2 e 7-4, o trabalho total é nulo, e usando o teorema do trabalho-energia cinética, obtemos

$$W_{0 \rightarrow x} + W_{x \rightarrow 0} = 0 = \Delta K \Rightarrow K_i = K_f$$

(ou equivalentemente $v_i = v_f$).

Sistema massa-plano inclinado

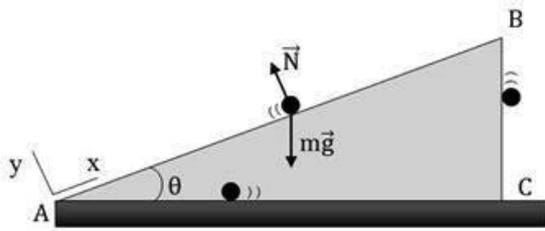


Figura 7-2. Bolinha de massa m jogada plano inclinado acima contra a força da gravidade e dele caindo de B, até atingir o ponto A, todo o processo sem atrito.

Imagine agora uma bolinha de massa m , jogada plano inclinado acima, sem atrito e com uma velocidade inicial v_i de modo que ao atingir o ponto B, a uma altura h , ela para. Neste percurso, só a componente do peso ao longo do eixo x ,

$-mg \sin\theta$ realiza trabalho. As componentes ao longo do eixo y , N e $-mg \cos\theta$, não realizam trabalho, já que são perpendiculares ao deslocamento. De B, cai até atingir o ponto C, com uma velocidade v_f . Ele

escorrega de C a A. Através de equações, podemos resumir o processo descrito acima:

$$\text{ida} \rightarrow \begin{cases} W_{A \rightarrow B} = \int_0^s (-mg \sin\theta) dx = -mg(\sin\theta s) = -mgh, & (7-5) \\ \Delta K = 0 - \frac{1}{2} mv_i^2 = -\frac{1}{2} mv_i^2, & (7-6) \end{cases}$$

onde $s = AB$.

$$\text{volta} \rightarrow \begin{cases} W_{B \rightarrow C} = \int_h^0 (-mg) dh' = mgh, & (7-7) \\ \Delta K = \frac{1}{2} mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2} mv_f^2. & (7-8) \end{cases}$$

Ao longo de CA, o peso não realiza trabalho, já que é normal ao deslocamento. Assim, neste percurso $\Delta K = 0$.

No percurso total, tem-se

$$W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow A} = 0 = \Delta K = +\frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2, \Rightarrow K_f = K_i$$

(ou equivalentemente, $v_f = v_i$).

No sistema massa-plano inclinado a bolinha poderia também ter feito o caminho de volta, descendo o plano inclinado, de B para A. De novo, $W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A} = 0$.

O que se verifica nos sistemas descritos acima? É que existem certos tipos de forças que atuando sobre uma partícula ao longo de um percurso **fechado qualquer**, começando de algum ponto inicial e finalmente, retornando a ele, num percurso de ida e volta, geram um trabalho resultante nulo. Tal tipo de força é chamado de força conservativa.

Observações importantes se fazem necessárias: i) Forças, como a normal \vec{N} , resultante do contacto de um corpo com um assoalho, ou a tensão \vec{T} , no fio de um pêndulo, na ausência de atrito, são normais à trajetória da partícula e assim não realizam trabalho; ii) Estas forças são exemplos de uma categoria de forças chamadas de **vínculo**. O plano inclinado, ou o assoalho, ou o fio do pêndulo, vinculam a partícula a seguir uma dada trajetória.

Se nos sistemas analisados tivéssemos a presença da força de atrito (ou similar, como de arrasto), $K_i > K_f$, e o trabalho ao longo do percurso fechado não mais seria nulo. A força de atrito reverteria parte da energia cinética em energia térmica, que não poderia ser transferida de volta para a energia cinética. Uma força que não é conservativa é chamada de força **não-conservativa**.

Em resumo, uma força **não conservativa** produz uma trabalho resultante não nulo sobre uma partícula, ao longo de qualquer **percurso fechado**.

Teorema importante: *O trabalho resultante realizado por uma força conservativa sobre uma partícula movendo-se entre dois pontos não depende da trajetória seguida pela partícula.*

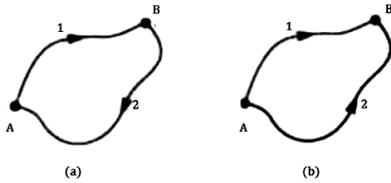


Figura 7-3. (a) Uma partícula se move sob ação de uma força conservativa de A para B e de B para A, ao longo das trajetórias 1 e 2. (b) Idem de A para B, ao longo das trajetórias 1 e 2.

Prova:

Considere a Figura 7-3 (a). Como a força atuando sobre a partícula é conservativa,

$$W_{A \rightarrow B}^{(1)} + W_{B \rightarrow A}^{(2)} = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}^{(1)} = - W_{B \rightarrow A}^{(2)} \quad (7 - 5)$$

Ou seja, o trabalho realizado ao longo da trajetória 1 (de ida), é igual a menos o trabalho ao longo da trajetória 2 (de volta). Consideremos agora a situação representada na Figura 7-3 (b), ao longo da trajetória 2:

$$W_{A \rightarrow B}^{(2)} = - W_{B \rightarrow A}^{(2)} \quad (7 - 6)$$

Cada trabalho W é definido por uma integral (Equação 6-15) que muda de sinal quando percorremos o caminho de integração em sentido inverso (já que os infinitesimais $\vec{dr} \rightarrow -\vec{dr}$). Usando a Equação (7-5) em (7-6), obtemos finalmente,

$$W_{A \rightarrow B}^{(1)} = W_{B \rightarrow A}^{(2)}, \quad \text{CQD.} \quad (7 - 7)$$

Paradinha 7-1

A Figura 7-4 mostra três trajetórias entre os pontos i e f. Uma força resultante realiza o trabalho indicado sobre uma partícula movendo-se ao longo de cada trajetória. Existe algum percurso sobre o qual a força resultante é conservativa? E não-conservativa?

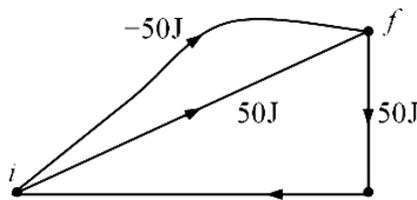


Figura 7-4 Referente à Paradinha 7-1

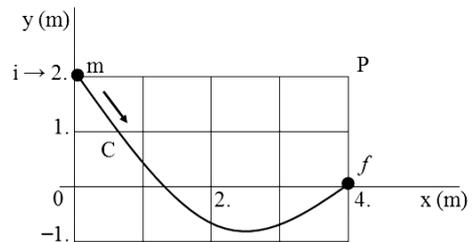


Figura 7-5 Referente ao Exemplo 7-1

Exemplo 7-1

Uma partícula de massa $m = 1 \text{ kg}$, desliza sem atrito num plano vertical do ponto i ao ponto f, através da linha C. Qual o trabalho realizado sobre m pela força gravitacional de i até f?

Solução:

O cálculo através de C, exigiria o conhecimento da equação da curva C, o que não foi dado. Além do mais, poderia levar a um cálculo difícil. Entretanto, qualquer outra trajetória ligando i e f poderia ser escolhida, haja visto que estamos diante de uma força conservativa atuando sobre a partícula. Esta é a força gravitacional.

Uma outra trajetória possível sairia do ponto i e ao longo da horizontal, alcançaria o ponto P(4, 2). Neste percurso o trabalho realizado é nulo, pois o peso $\vec{P} = m\vec{g}$ é normal à trajetória. Do ponto P a partícula cairia sob a ação da gravidade atingindo o ponto f e realizando um trabalho dado por

$$W = mgh = (1 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(2. \text{ m}) = 19,62 \text{ J}$$

Este é também o resultado obtido ao longo da curva C.

Como consequência do teorema acima, temos o seguinte fato:

Para percorrer o caminho de A a B ao longo de 1 e depois retornar de B a A ao longo de 2, é equivalente a percorrer o caminho fechado da Figura 7-3. Isto pode ser representado como

$$W_{A \rightarrow B}^{(1)} + W_{B \rightarrow A}^{(2)} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (7-7)'$$

onde a integral de linha (ver na seção 6-7) é feita ao longo de um caminho fechado C. A notação \oint_C foi criada para representar este fato.

Reciprocamente, se a Equação (7-7)' é verdadeira, $\forall C$ fechado, podemos facilmente demonstrar que $W_{A \rightarrow B}^{(1)} = W_{A \rightarrow B}^{(2)}$, invertendo o raciocínio.

Assim podemos enunciar o seguinte teorema mais geral:

“A condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa é que o trabalho por ela realizado ao longo de qualquer caminho fechado seja nulo”.

Simbolicamente,

$$\boxed{\vec{F} \text{ é conservativa} \Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \forall C \text{ fechado.}} \quad (7-7)''$$

(o símbolo \Leftrightarrow significa *se e somente se*).

7-2 Energia Potencial

No sistema massa-plano inclinado discutido na seção anterior, por exemplo, à proporção que a partícula ia subindo o plano, ela ia perdendo energia cinética e ganhando energia potencial. Algo similar ocorre quando a partícula comprime a mola no sistema massa-mola, também na seção anterior. Vamos agora tentar generalizar este conceito

Imagine uma força **conservativa** atuando sobre uma partícula. Esta força realiza um trabalho W sobre a partícula, dado por

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7-8)$$

Na realização deste trabalho, tivemos uma variação ΔU na energia potencial do sistema, definida como

$$\Delta U = -W. \quad (7-9)$$

Note que, por hipótese, a força é conservativa, e assim o trabalho é o mesmo para todos os percursos entre i e f. Explicitamente, ΔU é expresso como

$$\boxed{\Delta U = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}} \quad (7-10)$$

O fato é que a independência do caminho nos permite definir uma função energia U, cuja diferença entre os dois pontos é expressa através da Equação (7-10).

Vejamos alguns casos mais conhecidos.

Energia potencial gravitacional

Consideremos uma partícula de massa m sob a ação da força da gravidade e a uma altura y da Terra (o sentido positivo de eixo y para cima). A variação da energia potencial do sistema partícula-Terra ao deslocá-la de y para y_f é dado pela Equação (7-10), tornando-se

$$\vec{F} = -mg\hat{y} \text{ e } d\vec{r} = dy\hat{y};$$

$$\Delta U = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg)\hat{y} \cdot dy\hat{y} = mg \int_{y_i}^{y_f} dy = mgy \Big|_{y_i}^{y_f}.$$

Finalmente,

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg \Delta y. \quad (7-11)$$

Temos aí uma variação das grandezas nos dois lados da Equação (7-11). É comum se utilizar a notação

$$U - U_i = mg (y - y_i) , \quad (7 - 12)$$

para indicar U como a função energia potencial no ponto y , enquanto $U - U_i$ depende do ponto de **referência** y_i . Normalmente, tomamos $U_i = 0$ e $y_i = 0$. Ou seja, a medida da energia potencial está sempre associada a um referencial escolhido. Em resumo,

$$U(y) = mgy \quad , \quad (7 - 13)$$

é a **função energia potencial gravitacional**, em relação à posição vertical de referência

$y_i = 0$, com $U (y_i) = 0$.

Energia potencial elástica

Para um sistema massa-mola como mostrado na Figura 7-1, ΔU é dado por

$$\Delta U = - \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} k(x_f^2 - x_i^2) . \quad (7 - 14)$$

De novo a medida ΔU depende do ponto de referência x_i . Normalmente, este ponto de referência é escolhido para uma configuração do sistema na qual a mola se encontra em seu estado relaxado e m em $x_i = 0$. Nesta situação $U_i = 0$, o que implica

$$U(x) = 1/2 kx^2 \quad , \quad (7 - 15)$$

que é a **função energia potencial elástica**, em relação à posição de referência $x_i = 0$, com $U_i = 0$.

Paradinha 7-2

Um mesmo objeto poderia estar sujeito à ação de dois tipos de forças, a partir de uma mesma origem $x = 0$:

$$F_1(x) = \begin{cases} -Cx & , \quad 0 \leq x \leq a , \\ 0, & x > a . \end{cases}$$

e

$$F_2(x) = \begin{cases} -C\sqrt{x} , & 0 \leq x \leq a , \\ 0, & x > a , \end{cases}$$

onde C e a são constantes dimensionais positivas.

Qual das forças oferece a maior variação na energia potencial do objeto?

Exemplo 7-2

Um prédio tem cinco andares e a distância entre os pisos de cada andar é de 4 m. Uma pessoa de 70 kg está no último andar.

- Qual é a energia potencial gravitacional desta pessoa em relação ao andar térreo, tomado como $y = 0$ e $U_i = 0$?
- Mesma pergunta, tomando agora o ponto de referência no 1º andar.
- A pessoa desce para o térreo. Qual a variação da sua energia potencial?

Solução:

a) A pessoa no 5º andar está a uma altura $y = 20,0\text{m}$ do solo (o eixo positivo dos y está voltado para cima). Assim sua energia potencial gravitacional é dada por

$$U = m g y = (70 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (20,0\text{m}) = 13,73 \text{ kJ}$$

b) Neste caso,

$$U = m g y = (70 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (16,0\text{m}) = 10,99 \text{ kJ}$$

c) Devemos usar a Equação (7-12),

$$\Delta U = mg \Delta y = (70 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (20,0\text{m}) = 13,73 \text{ kJ},$$

já que a variação na energia potencial não depende da escolha do ponto de referência $y = 0$, mas sim, da variação na altura Δy .

7-3 Conservação da energia mecânica para forças conservativas

Vamos estudar agora o que acontece com a energia mecânica de um sistema sob certas condições, consideradas a seguir:

- i) apenas **forças conservativas** atuam no sistema (atrito e forças de arrasto, por exemplo, não atuam);
- ii) o sistema está **isolado**. Assim, forças externas não atuam nele, ou não existe troca de energia com o exterior.

Quando uma força conservativa realiza um trabalho W sobre uma partícula dentro do sistema, essa força transfere parte da energia sob a forma de energia cinética, e a outra parte, em forma de energia potencial. Ou seja, numa linguagem matemática

$$W = \Delta K \quad , \quad (7 - 16)$$

$$e \quad W = -\Delta U \quad , \quad (7 - 17)$$

conforme já visto anteriormente. Comparando estas equações, conclui-se que

$$\boxed{\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = 0} \quad (7 - 18)'$$

o que equivale a dizer que existe um número E que se conserva, ou seja,

$$\boxed{E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2} \quad . \quad (7 - 18)''$$

Este número E que se **conserva** é chamado de **energia mecânica** do sistema isolado, onde nele apenas forças conservativas atuam.

O resultado apresentado pela Equação (7-18) constitui o chamado **princípio de conservação da energia mecânica**.

Este princípio é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas em física, conforme veremos neste capítulo e nos que se seguem.

A sua aplicação é muito simples, evitando, por exemplo, o cálculo do trabalho realizado por quaisquer das forças envolvidas no processo (que às vezes pode ser complicado devido às integrais de linha presentes). Como a energia, E , possui o mesmo valor em todas as configurações do sistema, basta aplicar o princípio para cada configuração, escolhendo certamente, as mais simples e/ou convenientes.

Paradinha 7-3

Para os sistemas bloco-mola, bloco-plano inclinado discutido anteriormente, e mais um pêndulo simples, aplique o princípio de conservação da energia mecânica, calculando E para cada um deles. Calcule e discuta os valores da energia cinética e da energia potencial presentes em algumas configurações típicas ao longo de um caminho fechado.

Exemplo 7-3

Um bloco com massa $m = 2,0 \text{ kg}$ é colocado contra uma mola sobre um plano inclinado sem atrito. O plano inclinado forma um ângulo $\theta = 30^\circ$ com a horizontal, conforme a figura. O bloco não está preso à mola. A mola, com constante elástica $k = 19,6 \text{ N/m}$, é comprimida de $\Delta x = 20 \text{ cm}$, e então solta. Tome $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) Qual é a energia potencial elástica da mola comprimida?
- b) Qual é a variação da energia potencial gravitacional do bloco, quando o mesmo se move desde o ponto em que foi liberado até atingir o ponto mais alto no plano inclinado?
- c) Qual a distância percorrida pelo bloco ao longo do plano inclinado até atingir esta altura máxima?

Solução:

$$a) W_{\text{mola}} = - \int_0^{-\Delta x} (-kx') dx' = -\frac{1}{2} k \Delta x^2 = -\Delta U_{\text{mola}} \Rightarrow \Delta U_{\text{mola}} = +\frac{1}{2} k \Delta x^2.$$

Usando os valores numéricos, obtém-se $\Delta U_{\text{mola}} = 39,2 \text{ J}$.

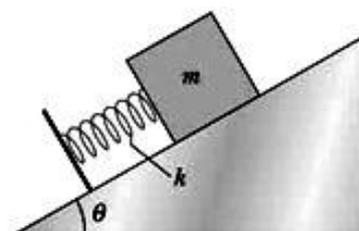


Figura 7-6. Referente ao Exemplo 7-3

b) Tome a energia potencial gravitacional de referência $U_g = 0$, no ponto onde o bloco mais comprime a mola. O bloco é largado de volta, se separa da mola e atinge o ponto mais alto do plano inclinado, atingindo aí uma velocidade momentaneamente nula. Usando o princípio de conservação da energia,

$$\frac{\Delta K}{\Delta K} + \frac{[(mgh - 0)]}{\Delta U_g} + \frac{\left(0 - \frac{1}{2}k\Delta x^2\right)}{\Delta U_{\text{mola}}} = 0 \Rightarrow \Delta U_g = \frac{1}{2} k\Delta x^2.$$

Usando os valores numéricos, $\Delta U_g = 39,2 \text{ J}$.

c) Do item anterior é fácil concluir que $mgh = \frac{1}{2} k\Delta x^2$. Como

$$h = s \text{ sen } \theta \Rightarrow s = \frac{k\Delta x^2}{2 mg \text{ sen } \theta}.$$

Usando os valores numéricos, obtém-se

$$s = 3,92 \text{ m}.$$

7-4 Força e gradiente da energia potencial para sistemas unidimensionais

Do que vimos anteriormente, podemos facilmente aplicar a sistemas unidimensionais isolados, onde apenas forças conservativas atuam. Nesta situação,

$$W = \Delta K = -\Delta U \quad . \quad (7 - 19)$$

Além do mais,

$$W = \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad . \quad (7 - 20)$$

Estas relações levam ao princípio de conservação da energia para sistemas unidimensionais:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U(x) \quad . \quad (7 - 21)$$

Das equações (7-19) e (7-20), conclui-se facilmente que

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' + U(x_0) \quad . \quad (7 - 22)$$

O cálculo de $U(x)$ depende da escolha do referencial $U(x_0)$. Por exemplo, no caso de uma mola, pode-se escolher $U(x_0) = 0$, no ponto x_0 onde a mola está relaxada e em repouso. Já no caso gravitacional, para distâncias próximas à Terra, toma-se em geral a superfície da Terra como este referencial. Para sistemas que envolvam grandes distâncias (astronômicas), veremos no volume 2 deste curso que $U(x_0) \rightarrow 0$ para $x_0 \rightarrow \infty$.

Observe também que o cálculo da energia cinética $K = \frac{1}{2} mv^2$, depende de v^2 , que por sua vez depende de v , o qual depende do referencial escolhido. Em resumo, a medida tanto de K como de U , dependem da escolha do referencial. Entretanto, a energia E , dada pela Equação (7-1), **não depende** de tal escolha. É uma grandeza que é sempre conservada para todas as configurações do sistema! Tente você mesmo verificar isto.

Até agora foi possível determinar ΔU desde que se conheça $F(x)$, através do uso da Equação (7-22). A pergunta agora é: podemos fazer a operação contrária, ou seja, dado $U(x)$ podemos calcular $F(x)$? Para responder a esta pergunta se faz necessário demonstrar o teorema abaixo.

Teorema: *Em um sistema isolado, com energia potencial $U(x)$, a força conservativa nele atuando é dada por*

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} \quad .$$

Prova:

Vamos usar a Equação (7-22), e substituir $F(x)$ por $-dU(x)/dx$:

$$\Delta U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' = + \int_{x_0}^x \left(\frac{dU(x')}{dx'} \right) dx' = \int_{x_0}^x dU(x') = U(x') \Big|_{x_0}^x = \Delta U(x) ,$$

ou seja, obtivemos uma identidade. Logo,

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} , \quad (7 - 22)'$$

é uma expressão verdadeira, CQD.

O termo dU/dx é chamado de gradiente do potencial. A Equação (7-22)' é conhecida como a força igual a menos o **gradiente do potencial**.

Paradinha 7-4

Usando o teorema acima, calcule a força que atua numa mola se sua energia é $U(x) = + \frac{1}{2} kx^2$.

Exemplo 7-4

Um bloco de massa m está atrelado a uma das extremidades de uma mola de massa desprezível e de constante elástica k . A outra extremidade está presa. O sistema massa-mola está em repouso e a mola relaxada sobre uma superfície horizontal lisa. Subitamente, o bloco parte de seu repouso com uma velocidade v_0 , de modo a alongar a mola. Qual o alongamento máximo atingido pela mola?

Solução:

Admitindo o bloco partir no sentido $x > 0$ (para a direita), ele vai sentir a presença de uma força $F = -kx$, criada pela mola. A energia potencial acumulada pelo bloco é dada assim por

$$U(x) = - \int_0^x (-kx') dx' + U(0) = \frac{1}{2} kx^2 + U(0),$$

onde $U(0) = 0$. Logo, sua energia total adquirida é dada por

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m_0^2 + 0.$$

Para $x = x_{\max}$ corresponde à $v = v_{\max} = 0$, e conseqüentemente,

$$\frac{1}{2} kx_{\max}^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 \Rightarrow x_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Este deslocamento do bloco corresponde ao alongamento máximo da mola.

7-5 Estudo qualitativo do gráfico da energia potencial

Imaginemos uma partícula de massa m sob a ação de uma força conservativa, $F(x)$, associada à energia potencial $U(x)$. Seja E o valor pré-fixado da energia total da partícula, dada pela Equação (7-21),

$$E = K + U(x) = \frac{1}{2} mv^2 + U(x) = \text{constante} , \quad (7 - 23)$$

e como $K \geq 0$, então se conclui que

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = E - U(x) \geq 0 , \quad (7 - 24)$$

com a condição

$$U(x) \leq E , \quad (7 - 25)$$

para o movimento da partícula com energia E . O cálculo de sua velocidade é obtido da Equação (7-23), ou seja,

$$v(x) = \pm \sqrt{2/m(E - U(x))} . \quad (7 - 26)$$

Os sinais \pm correspondem aos dois sentidos da velocidade. Com $v(x) = dx/dt$, podemos, em princípio, obter por integração $x(t)$, a equação paramétrica do movimento, desde que se conheça $v(x)$, dada pela Equação (7-26). Na prática, este cálculo é em geral complicado, pois envolve dificuldades técnicas nos cálculos das integrais. Assim sendo, é conveniente, de ante-

mão, estudar qualitativamente o gráfico de $U(x)$, para extrairmos importantes informações sobre o movimento da partícula.

Seja $U(x)$ um potencial geral, representado pela Figura 7-7, onde a partícula está a ele sujeita. Seu movimento obedece às condições (7-24) ou (7-25), e tem como energia E . O gráfico para $F(x) = -dU(x)/dx$ pode ser obtido diretamente da curva de $U(x)$, através do cálculo da derivada de $U(x)$, num dado ponto x , com o sinal negativo. Está, pois, associada ao cálculo da declividade da curva. Nos intervalos (x_1, x_3) e (x_5, x_7) , $U(x)$ tem a declividade negativa, gerando nestes intervalos $F(x) > 0$. Já no intervalo (x_3, x_5) , $U(x)$ tem declividade positiva, gerando $F(x) < 0$. Alguns pontos merecem atenção. Pontos onde $F(x)=0$ são chamados de **ponto de equilíbrio**.

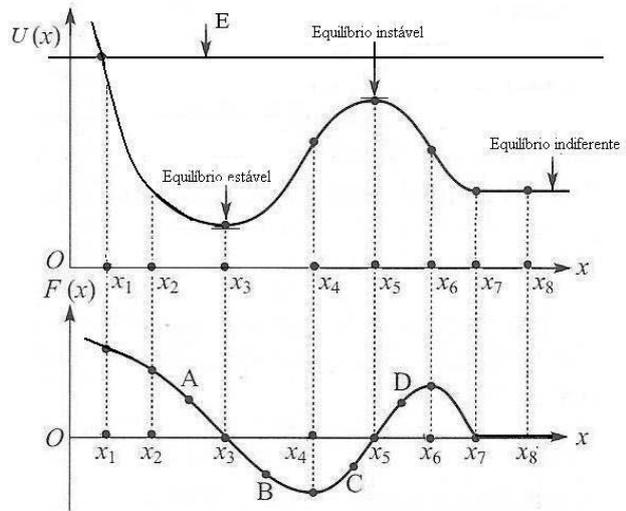


Figura 7-7. Gráficos de $U(x)$ e $F(x)$, onde a energia pré-fixada, E , é conservada.

Nestes pontos, o gráfico de $U(x)$ tem tangentes horizontais. Em x_3 , por exemplo, temos um **mínimo** para $U(x)$. Qualquer pequeno impulso na partícula em torno deste ponto faz a mesma retornar a ele. Seria interessante enfatizar que isso ocorre porque a força tem direção contrária ao deslocamento. Dizemos que x_3 é uma posição de **equilíbrio estável**. A vizinhança de qualquer equilíbrio estável é descrito, aproximadamente, pela lei de Hooke. Observe os pontos A e B em torno de x_3 : AB é aproximadamente, um seguimento de reta (veja também a seção 5-2).

Já o ponto x_5 é um ponto de **máximo** para $U(x)$. Um pequeno impulso na partícula, faz a mesma se afastar ainda mais de x_5 . Dizemos que x_5 é um ponto de **equilíbrio instável**. Finalmente, o ponto x_8 fornece $F(x)=0$, com $U(x) = \text{constante}$. Um pequeno impulso na partícula, faz com que ela permaneça em movimento com a mesma velocidade. Dizemos que x_8 é um ponto de **equilíbrio indiferente**. Uma bola de gude colocada sobre uma mesa horizontal tem este tipo de equilíbrio.

Pontos **extremantes** (máximo (s) ou mínimo (s)) de $F(x)$ ocorrem onde $U(x)$ possui **pontos de inflexão**. É o caso dos pontos x_4 e x_6 no gráfico de $U(x)$. Para finalizar, pontos onde a velocidade da partícula troca o sinal, ou seja, ao passar por um destes pontos x , $v(x)=0$, são chamados de **pontos de inversão** ou **pontos de retorno**. Eles ocorrem quando a condição, dada pela Equação (7-25)

$$U(x) = E, \tag{7-27}$$

é satisfeita. O ponto x_1 da Figura 7-7 representa um ponto de inversão.

A região $x < x_1$ jamais será alcançada pela partícula, haja visto, a condição $U(x) > E$ que ocorre nesta região, e que viola a Equação (7-25).

Solução completa para sistemas unidimensionais

Podemos obter uma solução geral formal do problema dinâmico partindo da Equação (7-26). Consideremos inicialmente o sentido positivo do movimento como

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

Desta equação podemos obter

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}}$$

Integrando os dois membros desta equação, podemos obter a função $x(t)$, ou seja,

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x'))}} \quad (7 - 27)'$$

Os valores x_0 e t_0 se referem às condições iniciais conhecidas da partícula. O sinal da raiz quadrada a ser tomado (\pm) dependerá da orientação de \vec{v} , na região do movimento considerada.

Em muitas situações, a integral acima não pode ser calculada analiticamente, isto é, não pode ser encontrado um expressão fechada para a integral em termos de funções elementares. Entretanto, informações qualitativas obtidas das discussões acima, ajudarão muito na sua solução.

Paradinha 7-5

Considere a queda livre de um objeto de massa m caindo de uma altura h no vácuo. Verifique a Equação (7-26) para as velocidades de subida ou descida, ao passar pela mesma altura.

Exemplo 7-5

A Figura 7-8 representa um gráfico da energia potencial $U(x)$ em Joule, em função de x em metros. Uma partícula de massa $m = 2,0$ kg está sujeita a $U(x)$. O sistema é conservativo.

- Qual a intensidade e o sentido da força que atua sobre a partícula em cada trecho do gráfico ao longo do eixo x ?
- Imagine que a partícula é solta em $x = 3,0$ m com uma velocidade inicial $v_0 = -1,0$ m/s. Ela pode alcançar o ponto $x=0,5$ m?
- Quais os pontos de retorno para a partícula?

Solução:

- a) Trecho 01:

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\frac{0}{1} = 0.$$

- Trecho 02:

$$F_x = -\frac{1. - 3.}{2. - 1.} = -\frac{-2.}{1.} = 2,0 \text{ N.}$$

- Trecho 24:

$$F_x = 0.$$

- Trecho 45:

$$F_x = -\frac{5. - 1.}{5. - 4.} = -4,0 \text{ N}$$

- Trecho 5... :

$$F_x = 0.$$

- b) Em $x = 3,0$ m a energia total da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(3,0) = \frac{1}{2} \times 2. \times 1,0^2 + 1,0 = 2,0 \text{ J.}$$

No ponto $x = 0,5$ m a energia cinética da partícula é

$$K(0,5) = 2,0 - 3,0 = -1,0 < 0,$$

logo, este ponto não é atingido por ela.

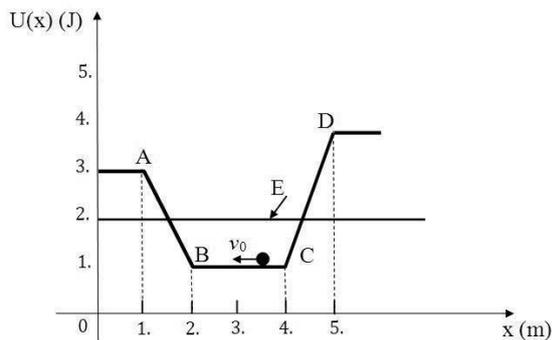


Figura 7-8. Referente ao Exemplo 7-5

c) Os pontos de retorno são aqueles onde $E=U(x)$. Os possíveis candidatos estão nos intervalos (1, 2) e (4, 5).

1º ponto de retorno:

Vamos calcular a equação da reta AB. Ela é dada por (lembrar da geometria analítica $y-y_0 = \text{tg} \alpha (x-x_0)$)

$$U(x) - 1.0 = \text{tg} \alpha (x - 1.0),$$

$$\text{onde } \text{tg} \alpha = \frac{3.0 - 1.0}{2.0 - 1.0} = 2.0.$$

Logo,

$$U(x) = 2x - 1,$$

que igualado à $E = 2,0 \text{ J}$, fornece $x = 1,5 \text{ m}$.

Analogamente, a equação da reta CD é dada por

$$U(x) - 1.0 = \frac{5.0 - 1.0}{5.0 - 4.0} (x - 4.0) \quad \text{ou} \quad U(x) = 4x - 15,0$$

que igualada à $E=2,0 \text{ J}$ fornece $x=4,25 \text{ m}$.

Exemplo 7-6

Imagine o caso hipotético de dois átomos “unidimensionais” ligados por uma energia potencial do tipo Lennard-Jones,

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

onde a e b são constantes dimensionais positivas. O sistema é conservativo.

a) Esboce o gráfico de $U(x) \times x$,

b) Esboce o gráfico $F(x) \times x$.

c) Suponha que um dos dois “átomos” permaneça em repouso e o outro se mova. Descreva o movimento subsequente.

d) Calcular a energia necessária para separar os dois “átomos”.

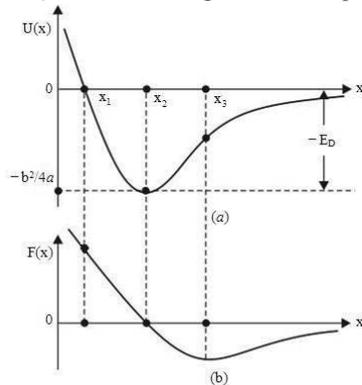


Figura 7-9. Referente ao Exemplo 7-6. Gráfico de $U(x)$ e $F(x)$

Solução:

a) Para esboçar o gráfico $U(x)$ precisamos de seus valores em alguns pontos importantes. Certamente, $x = +\infty$ e

$$x = 0 \text{ são alguns destes pontos. Observe que } \lim_{x \rightarrow 0} U(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0.$$

Para valores muito grandes de x , $U(x)$ tende para zero por valores negativos, haja visto, que o termo $-b/x^6$ domina. Outro ponto onde $U(x) = 0$ é $x = x_1 = (a/b)^{1/6}$, o que é fácil de se obter.

O ponto de mínimo de $U(x)$ é calculado fazendo $dU/dx = 0$, isto é,

$$-\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0 \Rightarrow x = x_2 = (2a/b)^{1/6}.$$

$$\text{b) } F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Note que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, este último obtido através

de valores negativos de $F(x)$. A força se anula em $x = x_2$ e tem um mínimo, onde $dF/dx = 0$. Logo,

$$F'(x) = -\frac{26a}{x^{14}} + \frac{7b}{x^8} = 0 \Rightarrow x = x_3 = (26a/7b)^{1/6}.$$

O ponto x_3 é um ponto de **inflexão** para $U(x)$.

c) O átomo oscila em torno da posição de equilíbrio estável, no ponto $x = x_2$ de $U(x)$.

d) Observe que $U(x)$ é medido em relação ao referencial $U(\infty) = 0$. O átomo estando no intervalo (x_1, ∞) , estará preso ao outro átomo. Para se dissociar (do outro átomo), terá que ter uma energia cinética, na posição de equilíbrio estável, igual ou superior a $-U(x)$ neste ponto. Ou seja,

$$E_D = U(\infty) - U(x) = (2a/b)^{1/6} = b^2/4a. \text{ Verifique!}$$

7-6 Sistemas conservativos tridimensionais

As discussões anteriores podem ser generalizadas para sistema conservativos tridimensionais. Certamente, também existem sistemas bidimensionais, mas com a discussão tridimensional abaixo, não seria difícil adequá-las ao caso bidimensional.

No caso em questão, a energia potencial U agora é função de x, y, z , ou seja, $U = U(x, y, z)$. A força \vec{F} é escrita como

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{x} + F_y(x, y, z)\hat{y} + F_z(x, y, z)\hat{z} \quad , \quad (7 - 28)$$

de tal maneira que a generalização da Equação (7-20) é a seguinte

$$\Delta U = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}' = - \int_{x_0}^x F_x dx' - \int_{y_0}^y F_y dy' - \int_{z_0}^z F_z dz' . \quad (7 - 29)$$

A energia total do sistema é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z), \quad (7 - 30)$$

onde $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Finalmente, a generalização da Equação (7-22)' para três dimensões nos leva à equação

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z} . \quad (7 - 31)$$

Certifique-se que esta expressão de $\vec{F}(\vec{r})$ substituída na Equação (7-29), fornece uma identidade.

O operador

$$\vec{\nabla} \cong \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad (7 - 32)$$

é chamado em linguagem de cálculo vetorial de **gradiente** e também muitas vezes de **nabla** ou **del**. Nesta linguagem, podemos também descrever que

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} U(\vec{r}), \quad (7 - 33)$$

para sistemas conservativos.

Note que propositalmente, na Equação (7-32), os versores estão à esquerda das derivadas parciais. É que neste operador as derivadas só atuam sobre U e não sobre os versores.

Algumas observações importantes se fazem necessárias:

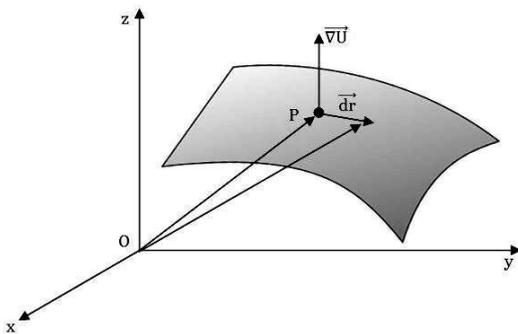


Figura 7-9. Interpretação geométrica do gradiente: normal a uma superfície no ponto P.

i) Interpretação geométrica do gradiente

Considere que $U(\vec{r}) = U_0 = \text{constante}$. Esta equação define uma superfície no espaço onde a energia potencial tem o mesmo valor em todos os seus pontos. Esta superfície é chamada de **superfície equipotencial**. Para diferentes valores de U_0 , geramos uma família de superfícies equipotenciais. Para um dado U_0 , considere um ponto $P(\vec{r})$ sobre tal superfície. Movendo P de uma distância $d\vec{r}$ sobre tal superfície, tem-se que

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}(\vec{r}) = 0 ,$$

haja visto, que permanecemos sobre a mesma $U(\vec{r}) = U_0$. Isto mostra que $\vec{\nabla}U$ é perpendicular a $d\vec{r}$. Ou seja, o gradiente de U num dado ponto, é normal à superfície ali.

ii) Simetrias não cartesianas

Em muitos sistemas em física se têm formas geométricas arredondadas. Ou seja, tais sistemas têm formas mais próximas a superfícies que podem ser esféricas, ou cilíndricas, etc.

Daí ser mais conveniente, matematicamente, descrevê-los num sistema de coordenadas mais próximo à sua simetria.

No caso de simetria esférica,

$$U(\vec{r}) = U(r, \theta, \varphi) ,$$

e o operador $\vec{\nabla}$ tem que ser escrito nestas coordenadas. Todos estes conceitos serão estudados nos cursos de cálculo. Ainda do curso de cálculo vetorial, pode-se provar que este operador é dado pela expressão,

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (7 - 34)$$

iii) Forças centrais

Em muitas situações na física, uma partícula pode estar sujeita a um certo tipo de força, com a seguinte característica:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r} , \quad (7 - 35)$$

onde $F(r)$ pode ser positivo (força repulsiva), ou negativo (força atrativa). Tal força \vec{F} é chamada de **força central**, exatamente, por só depender de $|\vec{r}|=r$ e não dos ângulos θ e φ , presentes nas coordenadas esféricas. É um caso patente de simetria esférica total, tendo r como a distância ao centro de forças.

Comparando-se as Equações (7-33), (7-34) e (7-35) chega-se facilmente à conclusão que para forças centrais,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r) = - \frac{dU(r)}{dr} \hat{r} . \quad (7 - 36)$$

A energia potencial correspondente é dada por

$$\Delta U = U(r) - U(r_0) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' . \quad (7 - 37)$$

As superfícies equipotenciais são superfícies esféricas concêntricas com origem comum no centro de força O.

Paradinha 7-6

a) Ache o versor perpendicular à superfície equipotencial

$$U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 3,$$

no ponto (1,1,1).

b) Qual a força conservativa que está sujeita uma partícula sobre esta superfície?

Exemplo 7-7

Mostre que toda força central é conservativa.

Prova:

Vimos na seção (7-1) que o trabalho resultante realizado por uma força conservativa sobre uma partícula ao longo de qualquer percurso fechado é nulo. Assim sendo, consideremos uma força central $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$, atuando sobre uma partícula. Consideremos também um caminho arbitrário percorrido pela partícula, como por exemplo, aquele mostrado na Figura 7-10. O trabalho total ao longo do percurso $C = a b c d$ é dado por

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r') \hat{r}' \cdot d\vec{r}' + \int_b^c F(r') \hat{r}' \cdot d\vec{s}' + \int_c^d F(r') \hat{r}' \cdot d\vec{r}' + \int_d^a F(r') \hat{r}' \cdot d\vec{s}' ,$$

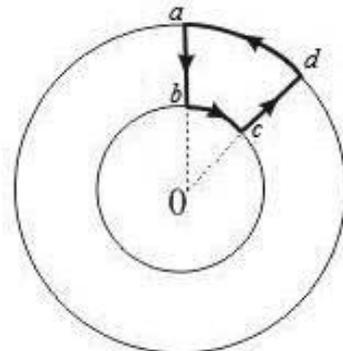


Figura 7-10. Sobre uma partícula atua uma força central. Ela realiza um percurso a b c d sobre duas superfícies equipotenciais concêntricas em O.

onde no trecho ab , $\vec{ds} = -\vec{dr}'$ (e $\hat{r}' \cdot \vec{dr}' = dr'$), no trecho cd , $\vec{ds} = +\vec{dr}'$, e nos demais trechos, a força é perpendicular à \vec{ds} , dando contribuição nula. Daí se conclui que

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0,$$

o que significa que toda força central é conservativa.

7-7 Forças não conservativas

Se várias forças **conservativas** estiverem atuando num sistema **isolado**, tais como a gravitacional, a força elástica de uma mola, eletrostática, etc., podemos considerar a resultante de todas elas, digamos \vec{F} , e calcular o trabalho por ela realizado sobre uma partícula o qual é dado por

$$W = \Delta K. \quad (7 - 38)$$

Também sabemos que

$$W = -\Delta U,$$

o que implica na expressão

$$\Delta K + \Delta U = 0,$$

onde ΔU são as variações de energia potencial do sistema associado a tais forças. Esta equação é equivalente à

$$\Delta E = 0, \quad (7 - 38)'$$

ou seja, a energia mecânica total permanece constante, mesmo que o sistema mude de configuração.

Como sabemos se \vec{F} é conservativa? Se a integral de linha ao longo de um percurso C fechado for nula, \vec{F} é conservativa. Neste caso, \vec{F} deriva de um gradiente, através da Equação (7-33) e ΔU obedece à Equação (7-9).

Imagine agora que além das forças conservativas, tenhamos atuando sobre a partícula uma força **não conservativa** proveniente do atrito. Assim a Equação (7-38) pode ser escrita como

$$W = W_a + W_c = \Delta K,$$

onde W_c é a soma dos trabalhos realizados pelas forças conservativas e vale $-\Delta U$. Já W_a é o trabalho realizado pela força de atrito, dado por

$$W_a = \int_C \vec{A} \cdot \vec{ds} = \int_C A ds \cos \pi = - \int_C A ds < 0. \quad (7 - 39)$$

Fisicamente, o sinal negativo indica que \vec{A} atua sempre contra a direção do movimento. Note também que A pode variar ao longo de C .

É fácil concluir que nesta situação

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = - \int_C A ds \neq 0} \quad (7 - 40)$$

Devido ao termo negativo do segundo membro, conclui-se que a energia mecânica final é menor que a inicial!

Para onde foi a energia mecânica proveniente do atrito? Ela transformou-se em energia térmica, gerando aumento de temperatura no sistema. Esta transferência de energia é **irreversível**, ou seja, nunca recuperada em forma mecânica. Vamos representá-la por ΔU_t , a qual é dada por

$$\boxed{\Delta U_t = \int_C A ds.} \quad (7 - 41)$$

Este assunto será aprofundado no volume 2 deste curso.

Exemplo 7-8

Um pequeno bloco é lançado plano inclinado acima com velocidade inicial $v_0 = 6,0$ m/s. Ele para ao atingir uma altura $h = 1,0$ m do plano inclinado e volta ao ponto de onde foi lançado. Admitindo constante a força de atrito que age no bloco, determinar a velocidade de volta na base do plano inclinado.

Solução:

Na subida do bloco,

$$\Delta K + \Delta U = - \int_c A ds = - As,$$

sendo s a distância percorrida pelo bloco ao longo do plano, até parar. Ou seja,

$$\left(0 - \frac{1}{2}mv_0^2\right) + (mgh - 0) = - As \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh = As.$$

Já na descida,

$$\Delta K + \Delta U = - As,$$

ou explicitamente,

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + (0 - mgh) = - As \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mv^2 + mgh = As.$$

Igualando as equações com o termo As , resulta,

$$v^2 = 4gh - v_0^2.$$

Isto implica dizer que $v < v_0$.

Substituindo pelos valores numéricos vê-se que $v = 3,0$ m/s. Na subida, parte da energia cinética se transformou em energia potencial, e outra parte em energia térmica, pela ação do atrito. Na descida, a energia potencial se transformou em energia cinética (menor do que aquela da subida) e uma parte, de mesmo valor, em energia térmica, já que o atrito foi igual nos dois casos.

7-8 Conservação da energia no caso geral

Vamos considerar o caso geral de um sistema constituído de várias forças conservativas, uma ou mais forças de atrito, outras forças não conservativas atuando sobre uma partícula. De acordo com o teorema trabalho-energia cinética

$$\text{onde,} \quad W = W_c + W_a + W_{nc} = \Delta K,$$

$$W_c = \sum_i W_c^{(i)}, \quad W_a = \sum_i W_a^{(i)} \quad \text{e} \quad W_{nc} = \sum_i W_{nc}^{(i)},$$

sendo,

$$W_c^{(i)} = \int_c \vec{F}^{(i)} \cdot d\vec{r}, \quad W_a^{(i)} = \int_c \vec{A}^{(i)} \cdot d\vec{r}, \quad \text{e} \quad W_{nc}^{(i)} = \int_c \vec{F}_{nc}^{(i)} \cdot d\vec{r}.$$

Podemos associar cada um desses trabalhos com uma variação de energia potencial (para manter uniforme a notação),

$$W_c = -\Delta U, \quad W_a = -\Delta U_t, \quad W_{nc} = -\Delta U_{nc},$$

e concluir que

$$\boxed{\Delta K + \Delta U + \Delta U_t + \Delta U_{nc} = 0.} \quad (7 - 42)$$

Isto equivalentemente implica dizer que a **energia mecânica total** $E_{mec} = K + U$, e sua variação $\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U$, é igual ao trabalho realizado pelas forças não conservativas. Isto acarreta também que a **energia total** do sistema ($E = K + U + U_t + U_{nc}$) é constante e sua variação nula. A energia total não pode ser criada ou destruída, mas sim, transformada. A equação acima traduz o **princípio universal da conservação da energia**. Este princípio não

só se aplica à mecânica, como também a todas as áreas da física e da tecnologia. É uma lei só comprovada experimentalmente.

Potência

Podemos agora generalizar as Equações (6-17) e (6-18) que definem potência. A potência passa a ser, num caso mais geral, como a taxa com que uma força transfere energia de uma **forma** para **outra**. Consequentemente, a **potência média** é definida como,

$$P_{\text{média}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad , \quad (7 - 43)$$

e a **potência instantânea**, pela equação,

$$P = \frac{dE}{dt} \quad . \quad (7 - 44)$$

Exemplo 7-9

Um objeto de massa m está sujeito à ação de forças associadas à energia potencial

$$U(x,y) = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2),$$

onde k é uma constante dimensional positiva.

- a) Expresse U em termos de coordenadas polares. Este é um campo conservativo? Justifique.
- b) Calcule F_x e F_y .
- c) Em coordenadas cartesianas, calcule a energia total do sistema.

Solução:

a) Em coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, $\Rightarrow U = \frac{1}{2} kr^2$.

Como U só depende de r , temos um campo central.

Logo, F é conservativo. Daí, se tem,

$$F_r = -\partial U / \partial r = -\frac{1}{2} kr.$$

b) $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx,$

e $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky.$

Este é um sistema bidimensional.

Já vimos que as expressões acima, tanto em coordenadas polares como as coordenadas cartesianas, correspondem a forças geradas por uma mola elástica.

c) $E = K + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} k (x^2 + y^2),$

sendo $\dot{x} = dx/dt$ e $\dot{y} = dy/dt$.

Exemplo 7-10

A força de atração eletrostática entre o próton (núcleo) e o elétron do átomo de hidrogênio é dado por $\vec{F}(\vec{r}) = -(C/r^2)\hat{r}$, onde r é a distância entre o núcleo e o elétron e C é uma constante dimensional positiva. Suponha o núcleo fixo.

Por alguma razão, subitamente, o elétron salta para uma órbita de raio $r_2 < r_1$.

- a) Calcular a variação da energia cinética do elétron, usando o fato de que ao longo da radial, a força F é igual à força centrípeta,
- b) Calcular a variação da energia potencial do átomo.
- c) De quanto decresceu a energia total do átomo neste processo? Explique este resultado.

Solução:

a) Antes de mais nada $\vec{F}(\vec{r})$ é uma força central e consequentemente, é conservativa. Logo,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad U(r) = -C/r.$$

Usando o fato da igualdade de F com a força centrípeta

$$C/r^2 = mv^2/r \quad \Rightarrow \quad 1/2 mv^2 = 1/2 C/r ,$$

e, portanto,

$$\Delta K = 1/2 mv_2^2 - 1/2 mv_1^2 = 1/2 C \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) > 0.$$

b) $\Delta U = U_2 - U_1 = -C \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0$.

c) A energia total E, é dada por
 $E = 1/2 mv^2 + U(r) = 1/2 mv^2 - C/r = 1/2 C/r - C/r = -1/2 C/r$.
 Finalmente, sua variação é dada por

$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{1}{2} C \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) < 0$,

que é a energia perdida pelo átomo. Apesar de \vec{F} ser conservativo, $\Delta E \neq 0$! Note que no problema havia uma “casca de banana”. Foi pedido se usar a igualdade de forças para calcular ΔK , em vez de se usar a lei de conservação da energia para forças conservativas, $\Delta K + \Delta U = 0$. É que além da força \vec{F} , necessariamente, deveria existir outra força, **não conservativa**, responsável pela perda de energia, sob forma de radiação, ao elétron pular de órbita.

Exemplo 7-11

Um objeto pode deslizar ao longo de uma pista com extremidades curvas e uma parte central de comprimento $l = 60\text{cm}$, como numa pista de “skate” de patins. A figura ilustra isto. Só existe atrito na parte plana, com coeficiente de atrito cinético $\mu = 0,20$. O objeto é solto a partir do repouso do ponto A, a uma altura $h = l/2$.

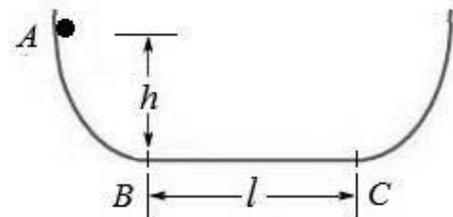


Figura 7-11- Referente ao Exemplo 7-11.

Onde o objeto finalmente, para na parte plana?

Solução:

Neste caso, a lei de conservação de energia poderia ser escrita como

$\Delta K + \Delta U = -\Delta E_t$,

onde $\Delta E_t = Ad$ é a energia térmica liberada devido à força de atrito $A = \mu mg$. A distância d é a distância pedida, a qual, obviamente, satisfaz à condição $d \leq l$.

No problema, $\Delta K = 0$, já que as energias cinéticas, inicial e final, são iguais a zero.

O objeto ao ser solto de A, poderia parar logo durante sua primeira incursão por BC (na ida), ou na 2ª incursão (na volta), ou na 3ª incursão (de novo, na ida), e assim sucessivamente, até parar. Em resumo:

1ª incursão $\rightarrow \Delta E_t^{(1)} = \mu mg d$

2ª incursão $\rightarrow \Delta E_t^{(2)} = \mu mg (l + d)$

3ª incursão $\rightarrow \Delta E_t^{(3)} = \mu mg (2l + d)$

.....
 n – ésima incursão $\rightarrow \Delta E_t^{(n)} = \mu mg [(n - 1)l + d]$.

Logo,

$\Delta U = mgh = \Delta E_t^{(n)}$, ou
 $mgh = \mu mg [(n - 1)l + d]$.

Como $h = l/2$, então,

$\frac{d}{l} = \left(1 + \frac{1}{2\mu} \right) - n \geq 0$.

Certamente, $0 \leq d/l \leq 1$.

Substituindo pelos valores numéricos, observa-se que $1 + 1/2\mu = 3,5$, o implica se ter $n = 3$.

Assim, finalmente,

$d/l = 3,5 - n = 3,5 - 3 = 1/2 \Rightarrow d = 30\text{cm}$.

7-9 Pausa para descontração:

Interação à distância, massa e tempo e a partícula Deus

Interação à distância

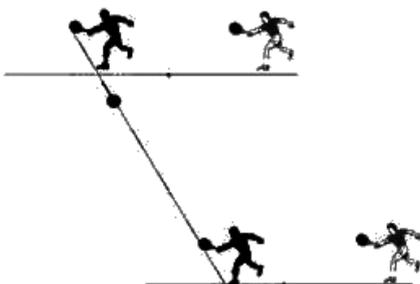


Figura 7-12 Um jogo de frescobol

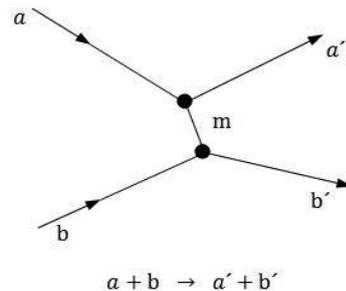


Figura 7-13 Diagrama mais simples de interação à distância entre partículas fundamentais a e b, com a troca de uma partícula mediadora m, responsável pelo mecanismo. Lembra um jogo de frescobol.

A química clássica que estudamos no colégio nos ensina que a matéria é composta de átomos e estes, por sua vez, são formados por um núcleo, constituído de pequeníssimas partículas, os nêutrons e os prótons, em torno dos quais gira uma nuvem de elétrons. Os prótons têm cargas positivas, os elétrons cargas negativas e os nêutrons cargas nulas, de modo a manter o sistema em equilíbrio. Este modelo serviu durante muito tempo à química, mas era instável frente à mecânica de Newton. Nesta mecânica, a nuvem de elétrons deveria ser paulatinamente atraída pelos prótons, de modo a colapsar no centro do átomo. Assim mesmo, uma era tecnológica no século XX utilizou tal conhecimento satisfatoriamente. Ainda no início daquele século, alguns fatos relevantes, como a descoberta do efeito fotoelétrico, que deu a Albert Einstein o prêmio Nobel de física em 1921, vieram a revelar a limitação daquela química e da física newtoniana. Surgiram então a teoria da relatividade e a mecânica quântica para darem embasamento teórico às novas descobertas. Estas teorias vieram a revolucionar a ciência como um todo e deram um impulso surpreendente à tecnologia, já a partir da segunda guerra mundial. O que antes era só ciência pura passou a ter aplicações em todas as áreas da sociedade.

Um modelo de grande sucesso foi desenvolvido através do uso de teorias e resultados experimentais. Suas bases teóricas se assentaram nestas novas teorias. É o chamado **Modelo Padrão**. Tal modelo se impôs face à dificuldade matemática de se manipular tais teorias. A ideia central deste modelo é que toda a matéria é composta de pequeníssimos constituintes fundamentais chamados de **quarks** e **léptons**. Uma partícula elementar é dita fundamental quando na sua estrutura não mais existe outras partículas ainda mais elementares. É o caso, por exemplo, do elétron, do fóton, entre outros. Outra ideia central deste modelo apregoa que tudo no universo está sujeito à ação somente de quatro forças fundamentais: as forças gravitacional, eletromagnética, fraca e forte (ou nuclear). Um mecanismo relativamente simples está por trás destas forças.

Imagine na praia um jogo de frescobol. Uma pequena bola é trocada entre os dois jogadores, durante um bom tempo. O que os une é certamente a existência da bola. Se ela é retirada, por alguma razão, o jogo termina. Por incrível que pareça, este jogo pode ser comparado ao mecanismo dominante que gera as quatro forças fundamentais da natureza. No jogo, os dois jogadores não se tocam e a interação entre eles se faz só à distância, através da troca da bola, conforme ilustrado na Figura 7-12. Em cada uma das forças fundamentais, mecanismo similar dominante também ocorre entre duas partículas fundamentais, através da presença de uma terceira partícula, que faz o papel da bola e é chamada de **mediadora**. A Figura 7-13 ilustra isto.

O diagrama representado na Figura 7-12 é conhecido por **diagrama de Feynman**, em homenagem ao seu idealizador, Richard P. Feynman (1918-1988), um dos dois ganhadores do prêmio Nobel de 1965. Através de cálculos teóricos complexos, associados a estes diagramas, é que os resultados teóricos são comparados com dados experimentais.

Na obra de Newton, a interação à distância, como acontece, por exemplo, na interação gravitacional, não era entendida. Somente após mais de três séculos, com o advento da mecânica quântica e da teoria da relatividade, é que este fenômeno passou a ser compreendido.

Massa

Outro problema também presente na obra de Newton se refere ao conceito de massa. Na mecânica Newtoniana, massa é colocada como uma propriedade da matéria, é considerada primária, é conservada e irreduzível. Newton se referia à massa como **quantidade de matéria** presente em um corpo.

Hoje estes conceitos começam a ser revistos, conforme veremos superficialmente a seguir.

Acreditou-se durante muito tempo que a massa era conservada. Antoine Lavoisier (1743-1794), considerado o pai da química moderna, chegou mesmo a afirmar algo equivalente a que na natureza nada se cria, nada se perde, tudo se transforma. Ele se referia à massa. Somente anos mais tarde, com o advento da teoria da relatividade restrita de Albert Einstein (1879-1955), estes conceitos foram revistos. Hoje se sabe que a massa varia como

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (5 - 22)$$

onde $m(0) \equiv m_0$ é a massa da partícula quando em repouso no referencial do observador. É chamada de **massa de repouso** da partícula. Já $m(v) \equiv m$ é a massa da partícula medida quando se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Certamente, a variação entre m e m_0 só é importante para velocidades v próximas à c . No nosso dia-a-dia estas variações são imperceptíveis para fatos corriqueiros.

Um modelo de grande sucesso foi desenvolvido através do uso de teorias e resultados experimentais. As bases teóricas se assentaram na teoria da relatividade restrita e na mecânica quântica. É o chamado **Modelo Padrão**. Tal modelo se faz necessário pela dificuldade matemática de se manipular tais teorias. A ideia central deste modelo é que toda a matéria é composta de pequeníssimos constituintes fundamentais chamados de **quarks** e **léptons**. Uma partícula elementar é dita fundamental quando na sua estrutura não mais existe outras partículas ainda mais elementares. É o caso, por exemplo, do elétron, do fóton, entre outros.

Existem comprovados, dois grupos de partículas ditas fundamentais. O primeiro é formado por seis tipos de quarks (u, d, s, c, t, b), e o segundo, por seis tipos de léptons ($e, \tau, \mu, \nu_e, \nu_\tau, \nu_\mu$). Destes grupos, a teoria forma três famílias de partículas. Cada família é constituída por duas partículas do primeiro grupo e duas partículas do segundo grupo, com propriedades específicas de carga, massa, entre outras, conforme visto na Tabela 7-1.

Outra partícula fundamental, presente na interação eletromagnética como mediadora, é o **fóton**, representado pelo símbolo γ . O fóton tem massa de repouso nula e carga elétrica nula. Ele se desloca à velocidade da luz e sua

natureza de partícula é importante, por exemplo, na explicação do efeito fotoelétrico, fato este que deu a Einstein, o prêmio Nobel de física de 1921.

Tabela 7-1

Famílias de partículas no modelo padrão				
	Carga elétrica	Primeira família	Segunda família	Terceira família
Quarks	+ 2/3	up (u)	charme (c)	top (t)
	- 1/3	down (d)	strange (s)	bottom (b)
Léptons	- 1	elétron (e)	múon (μ)	tau (τ)
	0	neutrino do elétron (ν_e)	neutrino do múon (ν_μ)	neutrino do tau (ν_τ)

A Tabela 7-2 ilustra todas as interações no modelo padrão. Na natureza, além das cargas elétricas positivas e negativas, que fazem parte da interação eletromagnética, existem na interação forte as **cargas de cor**. Elas se apresentam em três cores básicas. É uma complicação adicional presente na teoria quântica de sustentação do modelo, chamada **Cromodinâmica Quântica**, acima do nível deste curso.

Tabela 7-2

Interação no modelo padrão				
Interação	Intensidade	Mediador	Carga de interação	Partículas que interagem
Forte	1	Glúons (G)	Carga de cor	Quarks
Eletromagnética	10^{-2}	Fótons (γ)	Carga elétrica	Todos quarks e léptons, exceto neutrinos
Fraca	10^{-5}	W^\pm, Z^0	Carga fraca	Todos quarks e léptons
Gravitacional⁺	10^{-39}	Gráviton [*]	Massa ou energia	Todas as partículas

^{*} Ainda não detectado.

⁺ Não faz parte do modelo padrão

Já na Figura 7-14, com o propósito de ilustração, temos possíveis diagramas dominantes que aparecem naquele modelo. A interação gravitacional não faz parte do modelo padrão e a sua partícula mediadora, o **gráviton**, ainda não foi descoberto. Esta partícula elementar hipotética deve ter carga elétrica e massa de repouso nulas e se move à velocidade da luz. Devido a sua intensidade relativa ser muito pequena ($\sim 10^{-30}$), a tecnologia para detectá-la experimentalmente, ainda não está disponível. É uma grave limitação do modelo. As demais partículas já foram observadas diretas e indiretamente. Como exceção, diretamente estão os quarks, que como previsto pela teoria, não podem ser detectados isoladamente. Entretanto, eles formam outras partículas, como por exemplo, o nêutron, formado por 3 quarks, ou seja n(u, d, d).

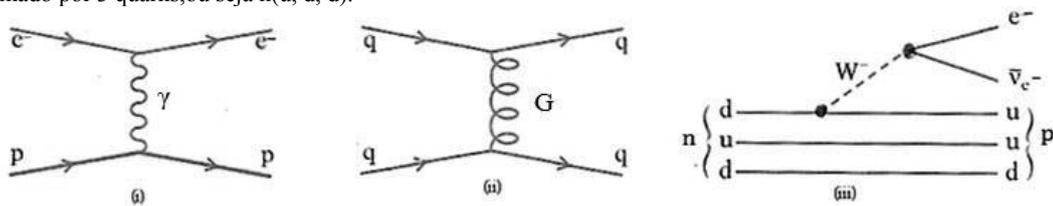


Figura 7-14. Diagramas de Feynman para interações (à distância) previstas pelo **Modelo Padrão**. (i) Interação entre um elétron (e^-) e um próton (p) mediada por um fóton. Esta interação **eletromagnética** é responsável pela ligação de elétrons nos átomos, e base para todo o estudo da química. (ii) Quarks ligados por **glúons**, por exemplo, em um próton, que faz parte da interação **forte**. (iii) Este diagrama ilustra a interação **fraca**, a qual aparece no decaimento radioativo de um nêutron ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_{e^-}$). O quark d, do nêutron, emite um lépton W^- , transformando-o num quark u. O W^- decai em um elétron e um antineutrino do elétron ($\bar{\nu}_{e^-}$), enquanto o nêutron se transforma num próton. O sinal ao lado acima da partícula indica o tipo de carga presente.

Em julho de 2012, a descoberta da partícula fundamental, que ficou conhecida como a **partícula de Higgs**, deu ainda mais consistência ao modelo padrão. Observações foram feitas no **Large Hadron Collider** (LHC) na Europa. Este grande acelerador procura recriar situações físicas como possivelmente presentes no “bigbang” no início da criação do universo. Esta partícula, até então faltosa, deu um entendimento sobre a origem e a necessidade de um balanço de massa nas demais partículas que constituem o modelo. Ou seja, é através dela que

são criadas as massas de todas as demais partículas fundamentais constituintes do modelo e que por sua vez, quando combinadas formam a matéria usual. O modelo padrão, inspirado em teorias fundamentais, mas com grande dosagem de observações experimentais, tem ainda algumas lacunas, que ao que parece, vêm sendo elucidadas com o avanço da física.

O modelo padrão começou a ser elaborado na década de 1960 pelo físico escocês Peter Higgs, e pelos belgas François Englert e Robert Brout (morto em 2011). Em 2013, Higgs e Englert dividiram o prêmio Nobel por estes estudos.

Tempo

Na mecânica de Newton, o espaço é absoluto e o tempo é idêntico para todos os referenciais inerciais. Na teoria da relatividade restrita as noções de espaço e tempo não são absolutas. Dois eventos simultâneos num referencial inercial S não necessariamente o serão quando observados de outro referencial S' que se move com velocidade constante v em relação a S. Assim, o conceito de tempo sofreu uma grande revolução na física moderna.

Newton, como criador da ciência moderna, mesmo sem dispor das ferramentas atuais, teve a garra de publicar sua fantástica obra, sofrendo grandes incompreensões à época.

Material extra curricular sugerido

Forças Nucleares

Hélio Teixeira Coelho e Manoel Roberto Robillota, vol. 11, nº 63, **Ciência Hoje**, página 22-30.

Artigo publicado na revista científica **Ciência Hoje**, de fácil leitura, que trata da força nuclear, mas que contém um apanhado sobre a matéria tratada acima.

DVD

O tremendo sucesso do modelo padrão na física, incentivou Hollywood a produzir o filme “*Anjos e Demônios*”, estrelado por Tom Hanks, premiado por sua atuação com o Oscar. A estória do filme menciona o modelo padrão e faz uso erroneamente do conceito de antimatéria, o qual é bem estabelecido na mecânica quântica, além de outros exageros. No entanto, traz imagens do LHC, além de belas passagens por Roma e o Vaticano.

Resumo

Forças conservativas

“*A condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa é que o trabalho por ela realizado ao longo de qualquer caminho fechado seja nulo.*”

Simbolicamente,

$$\vec{F} \text{ é conservativa} \Leftrightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \forall C \text{ fechado.} \quad (7 - 7)''$$

(o símbolo \Leftrightarrow significa se e somente se).

A força gravitacional e a força elástica são forças **conservativas**; a força de atrito cinético é uma força **não conservativa**.

Energia Potencial

Energia potencial é a energia que está associada com a configuração de um sistema no qual atua uma força conservativa. Quando a força conservativa realiza trabalho, W, sobre uma partícula dentro do sistema, a variação ΔU na energia potencial do sistema é dada por

$$\Delta U = -W.$$

Explicitamente, esta variação também é dada por

$$\Delta U = - \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (7 - 10)$$

onde i é o ponto inicial e f o ponto final.

Energia Potencial Gravitacional

A energia potencial associada com um sistema formado pela Terra e por uma partícula próxima é chamada de **energia potencial gravitacional**. A variação na energia potencial gravitacional do sistema partícula- Terra é

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg \Delta y. \quad (7 - 11)$$

Se o **ponto de referência** da partícula é escolhido como $y_i = 0$ e $U_i = 0$, então,

$$U(y) = mgy . \quad (7 - 13)$$

Energia Potencial Elástica

A energia potencial elástica é a energia associada com o estado de compressão ou alongamento de um objeto elástico. Para uma força elástica $F = -kx$, a energia potencial elástica é

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 . \quad (7 - 15)$$

A *configuração de referência* corresponde à mola na sua posição não deformada, na qual $x=0$ e $U=0$.

Energia mecânica

A energia mecânica E_{mec} de sistema é a soma de sua energia cinética K com sua energia potencial U :

$$E_{mec} = K + U .$$

Um sistema isolado é um sistema no qual nenhuma força externa causa variações de energia. Se apenas forças conservativas realizam trabalho dentro de um sistema isolado., então o *princípio de conservação de energia do sistema* é escrito como

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0, \quad (7 - 18)'$$

ou equivalentemente,

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 , \quad (7 - 18)''$$

no qual os subscritos se referem a diferentes instantes durante um processo de transferências de energia.

Curvas de Energia Potencial

Conhecido $U(x)$ para um sistema no qual uma força conservativa unidimensional, $F(x)$, atua sobre uma partícula, então,

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx} . \quad (7 - 22)'$$

$U(x)$ pode ser ilustrado em um gráfico. Em qualquer valor de x , a força $F(x)$ é o negativo da inclinação da curva naquele valor, e a energia cinética da partícula é dada por

$$K(x) = E_{mec} - U(x) .$$

Um *ponto de retorno* é um ponto x no qual a partícula inverte seu movimento (onde, $K=0$). A partícula encontra-se em *equilíbrio* nos pontos onde a inclinação da curva $U(x)$ é nula (onde, $F(x)=0$).

Ponto de *inflexão* é aquele onde $|F(x)|$ é máximo

Sistemas tridimensionais conservativos

\vec{F} é obtido de $U(\vec{r})$ através de

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r}), \quad (7 - 33)$$

onde $\vec{\nabla}$ é chamado de operador *gradiente* ou *nabla*.

A energia potencial correspondente é dada por

$$\Delta U = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' . \quad (7 - 28)$$

Observe que a análise da curva da energia potencial unidimensional se aplica similarmente, para $U(r)$, nas forças centrais, as quais são definidas como

$$\vec{F} = F(r)\hat{r} . \quad (7 - 35)$$

Trabalho realizado sobre um sistema por uma força externa

Quando uma força de *atrito* cinético atua dentro do sistema, então a energia térmica, E_t , do sistema varia. O trabalho realizado sobre o sistema é então

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_t .$$

Equivalentemente,

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_t = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \Delta K + \Delta U = -\Delta E_t \quad , \quad (7 - 40)$$

onde

$$\Delta E_t = \int_C \text{Ads.} \quad (7 - 41)$$

Conservação da energia

“A energia total de um sistema (soma da sua energia mecânica, sua energia térmica, e sua energia gerada por outras forças não conservativas) é constante e tem variação nula”.

Ela é resultante de observações experimentais e constitui a *lei de conservação da energia*.

Potência

A potência devida a uma força é a taxa com que a força transfere energia. Se uma quantidade de energia ΔE é transferida por uma força em certo intervalo Δt , a *potência média* da força é definida como,

$$P_{\text{méd}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad . \quad (7 - 42)$$

A *potência instantânea* devida a uma força é definida como

$$P = \frac{dE}{dt} \quad . \quad (7 - 43)$$

Questões conceituais

1) Falso ou verdadeiro:

Dois esportistas, André e Bruno, de mesmo peso total, resolvem subir a Serra das Russas em Pernambuco. André escolhe uma trilha ao longo da ferrovia que é mais suave, porém mais longa. Já Bruno, escolhe uma trilha ao longo da rodovia que é mais curta, porém mais íngreme.

- Os rapazes gastaram as mesmas energias em forma de calor.
- No final, André e Bruno adquiriram a mesma energia potencial.
- Para comparar através de estimativas, as energias potenciais gravitacionais atingidos pelos rapazes, precisamos conhecer a altura da Serra das Russas.
- Para comparar as energias gastas em forma de calor, precisamos conhecer as trajetórias seguidas por eles.
- As forças envolvidas na subida da serra são conservativas.

2) Falso ou verdadeiro:

Imagine uma força central $F(r)$ atuando sobre uma partícula de massa m . A energia potencial associada a esta força é $U(r)$.

- m estará em equilíbrio se estiver num intervalo onde $dU/dr=0$.
- m estará em equilíbrio, com velocidade constante, se estiver num intervalo de r , onde $F(r) = 0$, mas $U(r)$ é variável.
- m estará em equilíbrio estável num ponto se aí $dU/dr=0$ e $d^2U/dr^2 > 0$.
- m estará em equilíbrio indiferente se estiver em uma região onde $dU/dr=0$ e $d^2U/dr^2 > 0$.
- Pontos onde $F(r)=0$ chamam-se pontos de equilíbrio.

3) Um *skatista* de massa total m , parte do ponto A para alcançar o ponto D em um ringue cuja seção transversal vertical é mostrada na Figura 7-12. Em todo o percurso existe atrito. Para sair do ponto A o *skatista* empurra rapidamente um corrimão, havendo, no processo, transferência de energia bioquímica para energia mecânica. Analise cuidadosamente a lei de conservação de energia neste percurso.



Figura 7-12. Referente à questão 3.

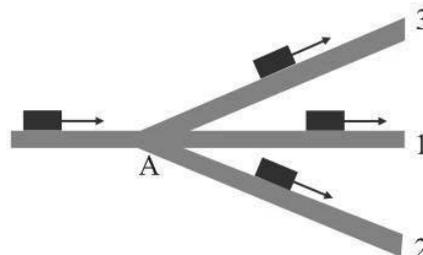


Figura 7-13. Referente à questão 7.

4) Falso ou verdadeiro:

Imagine que um objeto pode descer de um palco, ou ao longo de um plano inclinado sem atrito, ou através de uma corda amarrada num teto funcionando como um pêndulo. Considere a normal \vec{N} do contacto da partícula com o plano e a tensão \vec{T} da corda do pêndulo.

- \vec{T} e \vec{N} são forças conservativas.
- São forças que realizam trabalho.
- O trabalho realizado no deslocamento entre dois pontos quaisquer depende se é pelo plano inclinado ou se é pelo pêndulo.

5) Estime:

- A variação da energia potencial gravitacional quando um homem de 70 kg desce de elevador até chegar onde estão as turbinas da usina hidroelétrica de Paulo Afonso, no início do *canyon*, e a 80 m de profundidade do solo.
- A força média exercida sobre ele pelo elevador, durante o percurso.
- A potência média desenvolvida por essa força, sabendo-se que na descida o elevador levou 10 segundos.

6) Sabe-se que em média uma pessoa pode em cada segundo metabolizar ou transformar no máximo 1500 J de energia bioquímica em outras formas de energia. Cerca de 40% desta energia pode ainda ser convertida em energia mecânica, através dos músculos.

Estime o menor tempo que o homem da questão anterior levaria para subir de volta pela escada em vez de utilizar o elevador.

7) Um bloco sempre passa pelo ponto A com a mesma velocidade e em seguida pode escolher um dos três caminhos distintos mostrados na Figura 7-13. O caminho 3 é um plano inclinado ascendente; o caminho 1 é um assoalho horizontal e o caminho 2 é um plano inclinado descendente. Em cada caminho, com mesmo coeficiente de atrito, ele desliza até, finalmente, parar. Para cada caso, uma energia térmica correspondente é liberada. Escolha a relação correta:

- $\Delta E_t^{(3)} > \Delta E_t^{(2)} > \Delta E_t^{(1)}$,
- $\Delta E_t^{(1)} > \Delta E_t^{(2)} > \Delta E_t^{(3)}$,
- $\Delta E_t^{(2)} > \Delta E_t^{(1)} > \Delta E_t^{(3)}$.

8) Falso ou verdadeiro:

Uma pista vertical ABCDE é mostrada na Figura 7-14. Um bloco desliza de A a D sem atrito. No trecho DE sofre a ação de uma força de atrito, aonde eventualmente, vem a parar.

- O bloco sempre alcançará o ponto C.
- A energia mecânica do bloco permanecerá constante em todos os trechos.
- A energia cinética do bloco aumentará em B e diminuirá em C.
- Não haverá aquecimento no trecho de A a D.
- Nos trechos de A a E, a energia mecânica será sempre maior que outras formas de energia.

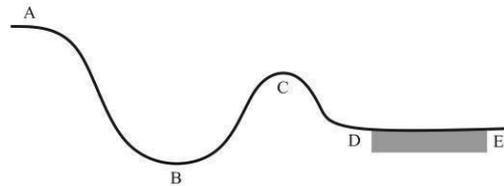


Figura 7-14. Referente à questão 8.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Um pequeno objeto de 1,0 kg é deixado cair de uma altura $h=2,0$ m sobre um assoalho liso.

- Qual o trabalho realizado sobre o objeto pela força gravitacional nesta queda?
- Qual a variação ΔU na energia potencial gravitacional do sistema objeto-Terra durante a queda?
- Tomando como referencial nulo o nível do assoalho, qual o valor de U quando o objeto é solto?

2)* Numa chuva de granizo, uma pedrinha esférica de gelo de raio $r=1,5$ mm cai de uma nuvem situada a $h=2,0$ km acima do solo. O coeficiente de arrasto para a pedrinha é $C=0,60$. A densidade do gelo é igual a 1300 kg/m^3 e a densidade do ar é igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$.

Qual foi a redução na energia mecânica do sistema pedrinha-Terra devido à força de arrasto do ar?

3)* Um pequeno bloco é deixado deslizar sem atrito ao longo da trajetória vertical mostrada na Figura 7-15. O bloco parte do repouso em A, a uma altura h acima do solo horizontal. Qual deve ser a altura mínima para que o bloco atinja o ponto C da circunferência de raio R sem cair?

4)** Um bloco de massa $m = 1,5 \text{ kg}$ é solto de uma altura $h = 50 \text{ cm}$ acima da extremidade superior de uma mola vertical, inicialmente relaxada, de constante elástica $k = 1930 \text{ N/m}$, tendo o lado inferior preso ao assoalho. De que comprimento máximo é a mola comprimida se a massa m fica a ela acoplada?

5)** Um pequeno objeto de massa m parte do repouso e desliza sem atrito do topo de um bloco semiesférico de gelo de raio r , que está preso a um assoalho horizontal. Tome $U_g = 0$ no topo da semiesfera. Calcule:

- A variação da energia potencial gravitacional de m
- A variação da energia cinética de m .
- As acelerações radial e tangencial de m
- O ângulo em que m abandona a semiesfera.

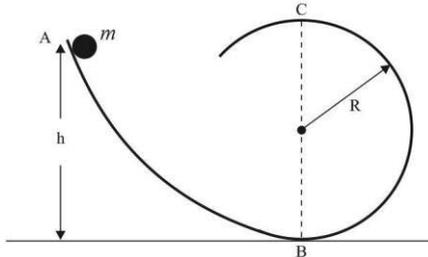


Figura 7-15. Referente ao problema 3.

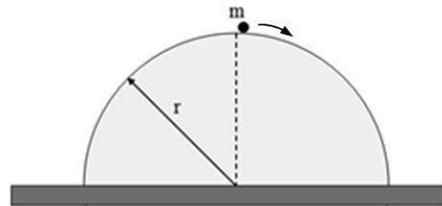


Figura 7-16. Referente ao problema 5.

6)* Na Figura 7-19 o bloco de massa m está inicialmente, em repouso, juntamente, com as molas, que têm massas desprezíveis. O bloco é deslocado de uma distância x para a esquerda e em seguida solto. a) Calcule sua aceleração inicial, supondo todas as superfícies lisas. b) Ache a velocidade do bloco quando ele passa pelo ponto de equilíbrio.

7)* A Companhia Hidroelétrica do São Francisco (CHESF) supre em média por dia para uma grande cidade no nordeste uma energia de 50.000 MWh. Se esta energia pudesse ser obtida de uma usina termonuclear através da conversão massa \rightarrow energia ($E = m_0 c^2$), qual deveria ser a massa equivalente de urânio a ser utilizada neste processo?

8)** Uma partícula se move sob a ação da força $\vec{F} = -y \hat{x} + x \hat{y}$, medida em newtons, e as distâncias em metro.

- Calcule o trabalho ao longo do caminho indicado na Figura 7-17.
- Faça o mesmo para $\vec{F}' = y \hat{x} + x \hat{y}$,
- Alguma dessas forças é conservativa?
- É possível calcular a energia potencial U associada a cada uma destas forças, usando $\vec{F} = -\nabla U$?

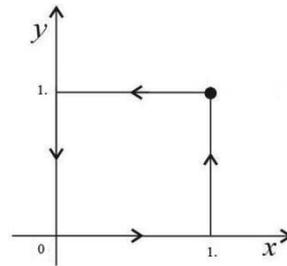


Figura 7-17. Referente ao problema 8.

9)** Um homem usa uma corda para puxar um bloco de $m = 10,2 \text{ kg}$, com velocidade constante, ao longo de 10m, através de uma assoalho horizontal. A corda exerce sobre o bloco uma força de $F = 14 \text{ N}$, dirigida 20° acima da horizontal. Calcule:

- O trabalho realizado pela força \vec{F} .
- O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o assoalho.
- O aumento na energia térmica do sistema bloco-piso devido ao atrito.

10)** Calcule o alongamento máximo da mola mostrada na Figura 7-18 quando a massa m é deixada livre para descer. Despreze atrito na polia e admita que a mola tenha massa desprezível em comparação com m .

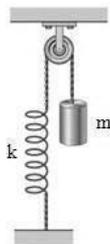


Figura 7-18 Referente ao problema 10.

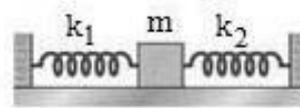


Figura 7-19 Referente ao problema 6.

11)** Uma partícula está sujeita à ação de uma energia potencial dada por

$$U(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r},$$

onde r é distância ao centro de forças, a e b são constantes dimensionais positivas. Calcule:

- O(s) ponto(s) extremante(s) de $U(r)$.
- O valor máximo da força atrativa.

- 12)** Uma partícula, partindo do repouso, escorra sem atrito ao longo da trajetória ABC mostrada da Figura 7-20. O trecho BC é horizontal. a) Para que valor de h a partícula cairá no solo a uma distância máxima de O ? b) Calcule também esta distância mínima.

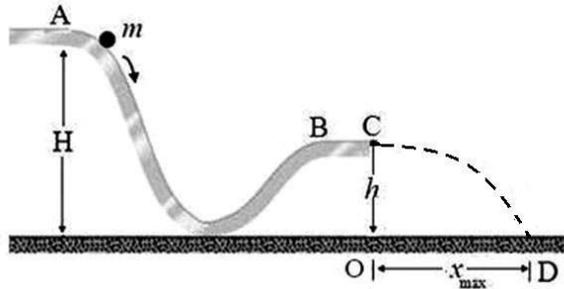


Figura 7-20 Referente ao Problema 12.

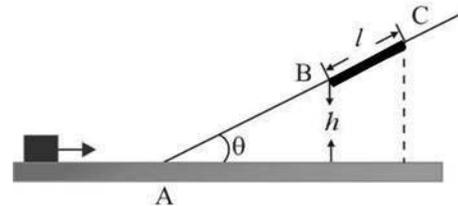


Figura 7-21 Referente ao Problema 15

- 13)** Um bloco de massa m parte do repouso, impulsionado por uma mola de constante elástica k , a qual estava comprimida de uma distância x . O bloco só deixa a mola no ponto de seu comprimento relaxado e então se desloca por uma superfície horizontal lisa até encontrar um plano inclinado de elevação θ e com coeficiente de atrito μ . Qual a distância percorrida pelo bloco no plano inclinado até ele parar?

- 14)** Um bloco de massa $m=1,0\text{kg}$ é colocado contra uma mola sobre um plano inclinado liso. O plano inclinado forma um ângulo $\theta=30^\circ$ com a horizontal. O bloco não está preso à mola, que tem constante elástica $k=20\text{ N/cm}$. A mola está presa no seu outro lado. Ela é comprimida de 10 cm e então solta.

- Qual a energia potencial elástica da mola comprimida?
- Qual é a variação da energia potencial gravitacional do bloco, quando o mesmo se move desde o ponto em que foi liberado até o ponto onde ele para?
- No caso em que houvesse atrito entre o bloco e o plano inclinado, com coeficiente de atrito $\mu=0,1$, qual deveria ser a distância percorrida até ele parar?

- 15)** Na Figura 7-21, um bloco desliza ao longo de um caminho sem atrito até ele alcançar a parte de comprimento l , a qual se inicia a uma altura h sobre uma rampa de ângulo θ . Nesta parte, o coeficiente de atrito cinético é μ . O bloco passa pelo ponto A com uma velocidade v_A .

- Se o bloco puder alcançar o ponto B (onde o atrito acaba), qual seria sua velocidade neste ponto?
- Se o bloco puder alcançar o ponto B, atingindo aí o repouso, qual deveria ser sua velocidade ao passar no ponto A?
- E se ele não puder alcançar o ponto B, qual seria sua maior altura h_{max} , acima de A?
- Quais as forças externas conservativas e não conservativas que atuam sobre o bloco no trajeto de A a B?

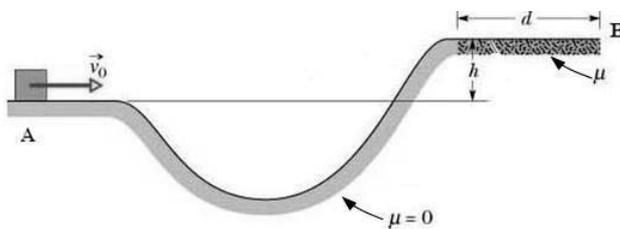


Figura 7-22 Referente ao problema 16.

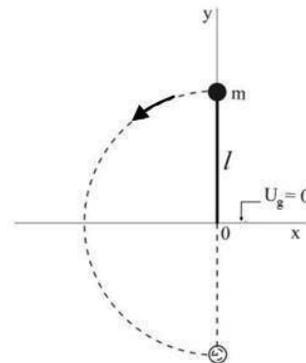


Figura 7-23 Referente ao problema 17.

- 16)** Na Figura 7-22, um bloco desliza ao longo de uma pista AB. A pista não possui atrito até o bloco alcançar o nível mais alto. Ali, uma força de atrito para o bloco, após ele percorrer uma distância d . São conhecidos a velocidade inicial do bloco em A, v_0 , a diferença de altura, h , e o coeficiente de atrito cinético μ .

- Encontre d em função dos dados.
- Do ponto B, onde o bloco inicialmente parou, ele é agora mandado de volta com a mesma velocidade v_0 . Mostre que ele alcança o ponto A com velocidade $v = 2\sqrt{gh}$.

17)** Uma haste leve e rígida de comprimento l tem uma massa m presa a uma de suas extremidades. A outra extremidade é presa a um ponto O , onde pode girar em torno dele sem atrito. Ela é colocada na vertical, como mostrada na Figura 7-23, e em seguida largada como um pêndulo.

- a) Calcule a velocidade no ponto mais baixo.
- b) Calcule a tração na haste naquele instante.
- c) O sistema haste – massa é agora colocado em posição horizontal e solto. A que ângulo da vertical, a tração no ponto O , será igual, em módulo, ao peso mg ?

CAPÍTULO 8

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Numa competição olímpica de salto em distância mostrada na Figura 8-1, é possível se observar que cada atleta, apesar de movimentar seus braços, pernas e cabeça, possui um ponto que descreve uma trajetória bem comportada. Tal ponto é conhecido como **Centro de Massa** (CM). Ele pode ser pensado como se toda a massa do corpo do atleta estivesse lá concentrada, além de ter ali todas as forças externas atuando. O CM está na região do umbigo. Antes do salto, o CM segue uma trajetória horizontal, e com o impulso do salto, uma trajetória parabólica. Um outro exemplo, de um corpo no espaço sideral, mesmo longe da interação gravitacional, ele também possui CM. Assim, para entender melhor o movimento de corpos mais complexos, tais como, o de um pássaro, de um automóvel, dentre outros, agora não mais tratados como simples partículas, se faz necessário conhecer a localização do CM para cada um destes sistemas mecânicos. Este estudo é imprescindível e constitui o objetivo primordial deste capítulo.

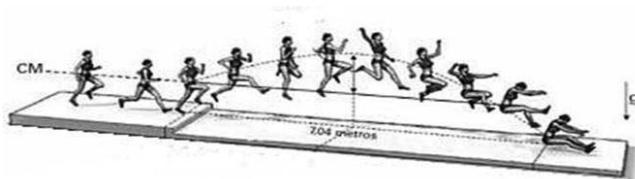


Figura 8-1. Salto em distância de um atleta

8-1 O Centro de Massa para um sistema de duas partículas

Considere duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância $x_2 - x_1$ onde x_2 e x_1 são suas coordenadas em um dado diferencial. A utilização de um referencial unidimensional é fundamental e a localização de sua origem é arbitrária. É plausível se definir a posição do CM como a média das posições ponderada pelas massas das partículas

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (8-1)$$

A massa total do sistema é dada por

$$M = m_1 + m_2 \quad (8-2)$$

Podemos destacar alguns casos particulares:

Se $m_2 = 0$, o CM ocorre na posição da partícula de massa m_1 ; se $m_1 = m_2$, $x_{CM} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ou seja à meia distância entre as duas partículas. Observe que a posição do CM, calculada pela Equação (8-1), é feita através de uma média ponderada, onde as massas m_1 e m_2 funcionam como pesos desta média.

Se as partículas estiverem situadas em um espaço tridimensional, basta na Equação (8-1) fazer as seguintes adaptações $x_1 \rightarrow \vec{r}_1$, $x_2 \rightarrow \vec{r}_2$ e $x_{CM} \rightarrow \vec{r}_{CM}$, de tal modo que teremos

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (8-3)$$

Como $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{x} + y_{CM}\hat{y} + z_{CM}\hat{z}$, então,

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \quad (8-4)$$

Paradinha 8-1

Calcular os deslocamentos relativos das duas partículas de massas m_1 e m_2 em relação ao seu centro de massa num sistema tridimensional

8-2 O Centro de Massa para um sistema de várias partículas

Distribuição discreta

Consideremos agora um caso mais geral onde temos N partículas distribuídas discretamente em três dimensões. Por extensão das Equações (8-4), as coordenadas de CM deste sistema podem ser escritas como

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i, \quad (8-5)$$

ou com uma notação vetorial mais compacta,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (8-6)$$

onde $M = \sum_{i=1}^N m_i$.

Certifique-se o leitor diretamente que da Equação (8-6) pode-se chegar à Equação (8-5).

Distribuição contínua

Para uma distribuição contínua podemos imaginar objetos como uma esfera maciça, ou um cilindro, ou muitos outros corpos. Estes corpos são formados de milhões e milhões de aglomerados de átomos. Entretanto, quando vistos em nossa escala macroscópica, parecem se constituir de uma distribuição contínua de massa, com um elemento diferencial de massa, dm , associado a cada ponto do corpo. Considere, por exemplo, o cálculo de seu x_{CM} . Podemos, facilmente, imaginar que ele pode ser calculado através de um processo limite, assim colocado,

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int_V x \, dm. \quad (8-7)$$

A integral é em dm , portanto em todo o M , que ocupa um volume V .

De modo análogo, podemos obter y_{CM} e z_{CM} . Resumindo,

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_V x \, dm, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \int_V y \, dm, \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int_V z \, dm. \quad (8-8)$$

Na notação, V se refere ao cálculo de integral para o volume total do corpo, e M é sua massa. Normalmente, o cálculo destas integrais pode ser complicado. No entanto, para corpos com distribuições **uniformes** de massa, ele pode ser facilitado. Nestes casos, podemos definir uma densidade de massa, ρ , que seja a mesma para qualquer porção do corpo. Ou seja,

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}. \quad (8-9)$$

Nesta situação, as integrais acima se tornam

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{V} \int_V x \, dV, \quad y_{CM} = \frac{1}{V} \int_V y \, dV, \quad z_{CM} = \frac{1}{V} \int_V z \, dV,} \quad (8-10)$$

ou, em notação vetorial mais compacta e elegante,

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \, d^3r,} \quad (8-11)$$

onde $dV \equiv d^3r$.

Para tornar o cálculo do CM mais simples, algumas dicas devem ser seguidas antes de qualquer coisa. Eis algumas delas:

i) Redução da ordem de dimensões das integrais

Por exemplo, considere o caso de uma placa delgada de espessura constante. Neste caso, definimos

$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{S}$, em vez de ρ , como uma densidade superficial de massa constante.

Conseqüentemente, as integrais (8-7) e (8-8) se reduzem a integrais mais simples.

É o caso também quando se tem um fio delgado com seção transversal constante. A distribuição de massa pode ser tratada como

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} = \text{constante.}$$

ii) Centróide, Centro de Massa e Centro de Gravidade

O **Centróide** é um conceito puramente geométrico para indicar o ponto em que suas coordenadas são as médias das coordenadas dos pontos que formam uma figura geométrica. Este ponto coincide com o CM de um corpo cuja distribuição de massa seja homogênea. Se um corpo pode ser dividido em partes cujos CM são conhecidos, o CM do corpo pode, em geral, ser facilmente obtido. Tome, como exemplo, uma chapa quadrada ABCD. Ela pode ser concebida como formada por um número grande de linhas paralelas ao lado AB, por exemplo. O CM de cada linha estará sobre o segmento de reta que une o meio deste lado AB ao meio do lado oposto CD. A mesma coisa pode ser feita para o lado AD. O CM do quadrado estará assim na intersecção destes dois segmentos de retas que unem o meio de cada um dos lados considerados. Este é equivalente ao encontro das diagonais. Num círculo é o seu centro, num triângulo o encontro de suas medianas, etc.

O **Centro de Gravidade (CG)** é o ponto em um corpo no qual está aplicada a resultante das forças que agem sobre ele, em virtude de sua presença num campo gravitacional não uniforme. Quando a aceleração da gravidade é a mesma para todos os pontos do corpo, $CG \equiv CM$, conforme veremos no Capítulo 12.

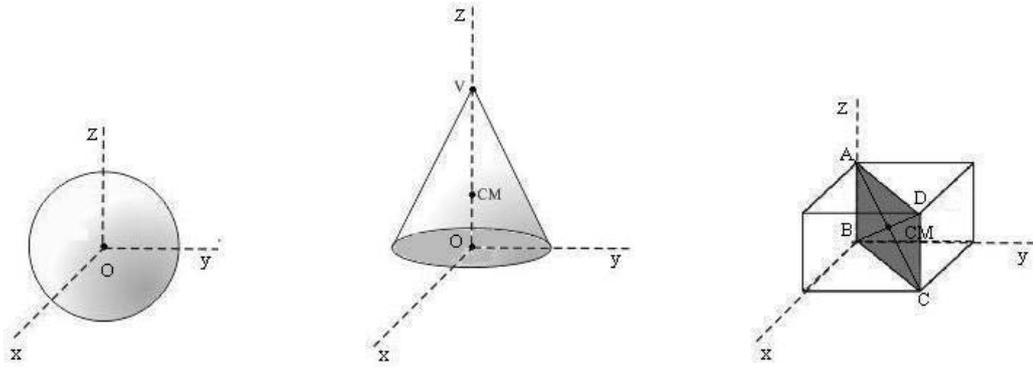
Paradinha 8-2

Usando só argumentos de simetria, diga onde estão localizados os CM para os seguintes corpos:

- um bastão delgado e uniforme;
- uma régua uniforme;
- um triângulo formado por três bastões ligados, delgados e uniformes;
- uma placa triangular uniforme de espessura delgada;
- um paralelepípedo com distribuição uniforme de massa.

iii) Elementos de simetria

São situações a serem consideradas quando um dado objeto tiver um ponto, ou uma linha, ou um plano de simetria. Veja os casos abaixo, como exemplos:



a) **Esfera:** $O \equiv CM$ é o ponto de simetria.

b) **Cone:** A linha VO é uma linha de simetria.

c) **Paralelepípedo:** O plano $ABCD$ é um plano de simetria.

Figura 8-2 Exemplos de simetrias em diferentes objetos. O CM de cada corpo está localizado em um destes elementos de simetria

iv) Escolha adequada de um sistema de eixos

Uma escolha inteligente facilita, em muito, a resolução de um problema. Por exemplo, para um sistema formado de partículas, coloque uma delas na origem das coordenadas. Para um corpo com uma linha de simetria, faça coincidir com esta linha um dos eixos, conforme seja o caso.

v) Decomposição do corpo em partes de CM conhecidos

Considere o exemplo ilustrado na Figura 8-3. Uma chapa triangular ABE ligada a uma chapa quadrada BCDE, de comprimento l . O conjunto é formado de material uniforme e homogêneo, de espessura delgada. Um sistema de coordenadas foi escolhido para tomar partido das simetrias do triângulo e do quadrado. Os CM do triângulo (CM_t) e do quadrado (CM_q) estão indicados na figura. O CM do conjunto é então dado pela relação,

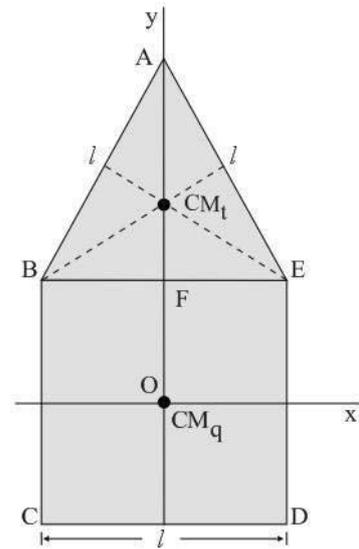


Figura 8-3. Cálculo do CM da figura $ABCDE$ através de sua decomposição em figuras de CM conhecidos: um triângulo equilátero (ABE) e um quadrado ($BCDE$).

$$y_{CM} = \frac{m_t y_c + m_q y_q}{m_t + m_c}, \tag{8 - 12}$$

sendo m_t a massa do triângulo e m_q a do quadrado. Note que $y_q = 0$ e $y_t = 1/3 h = \sqrt{3} l/2$, onde $h = AF$.

Por outro lado,

$$\sigma = \frac{m_q}{l^2} = \frac{m_t}{lh/2} = \text{constante}.$$

Daí se conclui que

$$\frac{m_q}{m_t} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Substituindo estes valores na Equação (8-12), obtém-se

$$y_{CM} = (1 + 3\sqrt{3})l/26.$$

Já $x_{CM} = 0$.

vi) O CM de um corpo pode estar fora dele

Dependendo da geometria do corpo isto pode acontecer! Veremos um exemplo mais adiante.

Exemplo 8-1

- Três partículas de massas iguais $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg formam um triângulo equilátero de lado $l = 1,0$ m.
 a) Qual a localização do centro de massa e do centroide deste triângulo?
 b) Se $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg e $m_3 = 3$ kg, o centro de massa coincide com o centroide? Justifique a resposta.
 c) Nos casos a) e b), onde estão localizados os centros de gravidade?

Solução:

a) Para massas iguais, temos $y_{CM} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{3}y_1$ onde $y_1 = h = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, e $x_{CM} = 0$, já que devido à simetria, o CM se situa sobre o eixo dos y.

Neste caso, o centroide coincide com o CM.

b) Aqui a simetria foi quebrada devido às massas serem diferentes. Assim sendo,

$$x_{CM} = \frac{1}{6} \left[1,0 \times 0 + 2,0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3,0 \times \left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{12} \text{ m};$$

$$y_{CM} = \frac{1}{6} \left[1,0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,0 \times 0 + 3,0 \times 0 \right] = \frac{\sqrt{3}}{12} \text{ m}.$$

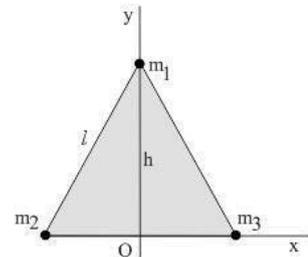


Figura 8-4. Figura referente ao Exemplo (8-1)

O CM agora não mais coincide com o centroide o qual ainda mantém o mesmo valor do item a).

c) Devido às dimensões reduzidas do triângulo, a aceleração da gravidade tem o mesmo valor nos pontos onde estão localizados m_1, m_2 e m_3 . Assim sendo, o CG coincide com CM nos itens a) e b).

Exemplo 8-2

Calcular o CM de um pedaço de fio semicircular delgado, de material uniforme e raio r.

Solução:

Devido à simetria do problema, o CM deve estar localizado sobre o eixo dos y, conforme a Figura 8-5, e assim $x_{CM}=0$.

Vamos calcular y_{CM} usando a equação

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_C y \, dm, \text{ onde } \lambda = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{\pi r} = \text{constante}.$$

Note que

$$dm = \lambda \, ds = \lambda(r \, d\theta) \quad \text{e} \quad y = r \, \text{sen } \theta.$$

Assim

$$y_{CM} = \frac{\lambda}{M} \int_0^\pi r \, \text{sen } \theta \, r \, d\theta = \frac{\lambda r^2}{M} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 2r/\pi.$$

Observe que neste exemplo, a localização do CM ocorre fora do corpo, ou seja, fora do fio, conforme visto na Figura 5-5

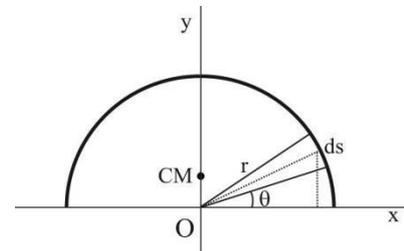


Figura 8-5. Figura referente ao Exemplo 8-2.

Exemplo 8-3

Determine o CM de uma placa quadricircular uniforme e delgada de raio R.

Solução:

Devido à simetria da figura é fácil verificar que $x_{CM} = y_{CM}$.

Assim sendo,

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_C x \, dm,$$

onde $\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{M}{\pi R^2/4} = \text{constante}.$

Observe que a área do setor infinitesimal (triângulo infinitesimal)

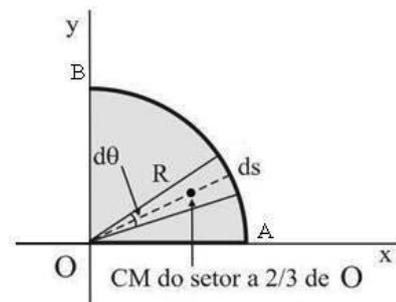


Figura 8-6. Figura referente ao Exemplo 8-3.

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = [(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + \dots] + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)}. \quad (8-14)$$

A soma das forças entre parênteses representam só forças internas newtonianas que satisfazem ao princípio de ação e reação (3ª lei de Newton). Assim sendo, todos os termos entre parênteses se anulam, resultando

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}, \quad (8-15)$$

onde $\vec{F}^{(e)}$ é a resultante das forças externas que atuam sobre S. Como resultado, podemos finalmente, escrever

$$\boxed{M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)},} \quad (8-16)$$

onde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ e \vec{r}_{CM} é dado pela Equação (8-6).

Verifique você mesmo o resultado!

Movimento interno do sistema

Sistema com $N = 2$ partículas

Para fixar ideias, consideremos inicialmente, um sistema com duas partículas ($N=2$). Os deslocamentos internos relativos das duas partículas se fazem em relação ao CM do sistema. São eles,

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = -\frac{m_2}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (8-17)$$

$$\text{e } \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (8-18)$$

onde \vec{r}_{CM} é dado pela Equação (8-3). É fácil verificar que

$$m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'_2 = -\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \vec{r}'_1. \quad (8-19)$$

Observa-se que \vec{r}'_1 e \vec{r}'_2 são antiparalelos. O ponto onde está o CM divide a distância entre as duas partículas na razão inversa das massas. Resulta que o CM está sempre mais próximo da massa maior. Derivando as Equações (8-19) em relação ao tempo, obtemos

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0, \quad (8-20)$$

onde $\vec{p}'_1 = m_1 \vec{v}'_1$ e $\vec{p}'_2 = m_2 \vec{v}'_2$ são os momentos das duas partículas relativas ao CM. Visto do CM, este momento total é nulo.

Sistema com N partículas

Podemos generalizar a discussão acima para $N > 2$ partículas. Nesta situação, as Equações (8-17) e (8-18) se tornam

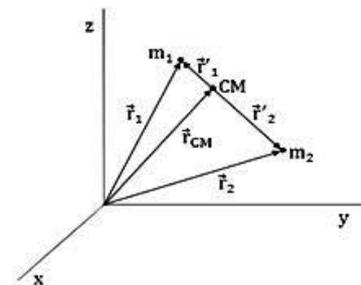


Figura 8-9. Sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 , observado pelas coordenadas \vec{r}'_1 e \vec{r}'_2 a partir do seu CM.

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} \quad , \text{ com } i=1,2,\dots,N. \quad (8-21)$$

Usando a Equação (8-6) para \vec{r}_{CM} , podemos facilmente obter

$$\sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = 0 \quad , \quad (8-22)$$

que é a generalização da Equação (8-19) para N partículas. Derivando em relação ao tempo a Equação (8-22), obtemos

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}'_i = 0 \quad , \quad (8-23)$$

onde $\vec{p}'_i = m_i \vec{v}'_i$. Ou seja, o momento total do movimento interno do sistema relativo ao CM é nulo.

Este resultado é importante na física, pois, tratando o problema visto do CM, facilita em muito, as manipulações algébricas. Este assunto será revisitado com mais detalhe adiante.

Exemplo 8-5

Um projétil é lançado com uma velocidade inicial $v_0 = 30$ m/s em um ângulo $\theta = 45^\circ$ com a horizontal. No topo de sua trajetória o projétil explode em dois fragmentos de massas que são ejetados horizontalmente. Um deles de massa $m_1 = 1$ kg, cai no mesmo plano vertical que contém a trajetória inicial do projétil, a uma distância $x_1 = 80$ m do ponto de lançamento. O outro fragmento tem massa $m_2 = m_1/2$.

Tome $g = 10$ m/s².

- A que distância, x_2 , do ponto de lançamento, cai m_2 ?
- Visto do CM do sistema dos dois fragmentos, quais são suas velocidades logo após a explosão?
- Qual é a energia mecânica liberada pela explosão?

Solução:

a) Pela natureza do conceito de CM, o alcance, R, que teria alcançado o projétil é igual a x_{CM} . Logo,

$$R \equiv x_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2),$$

onde R é dado pela Equação (3-14),

$$R = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}2\theta_0.$$

No ponto O de lançamento foi considerado um sistema de coordenadas com o eixo Oy ao longo da vertical e Ox ao longo da horizontal. Podemos assim calcular x_2 :

$$x_2 = \frac{M}{m_2} R - \frac{m_1}{m_2} x_1.$$

$$\text{onde } \mu = \frac{m_1}{m_2} = 2 \text{ e } \frac{M}{m_2} = 1 + \mu = 3.$$

Substituindo pelos valores numéricos,

$$R = \frac{10^2}{10} \times 1 = 90 \text{ m}, \quad \text{e} \quad x_2 = 3 \times 90 - 2 \times 80 = 110 \text{ m}.$$

b) Conforme visto na Figura 8-10, a partir de O', o fragmento m_2 se desloca obedecendo às equações

$$x_2 - \frac{R}{2} = v_{2x} t \quad \text{e} \quad h = \frac{1}{2} g t^2.$$

Após eliminar t entre as duas relações acima, obtemos,

$$h = \frac{1}{2} g (x_2 - R/2) / v_{2x}^2.$$

Em O', $v_y = 0$ e então podemos usar a equação

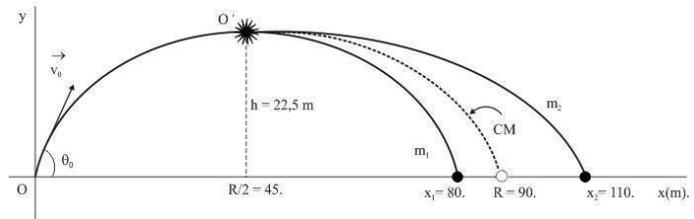


Figura 8-10. Gráfico mostrando a trajetória do CM do projétil (mesmo após explosão), e as trajetórias dos fragmentos. Por ser mais pesado, m_1 atinge o solo mais próximo ao CM.

$0 = v_{0y}^2 - 2gh$, onde $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$. Daí, obtemos

$$h = v_0^2 \sin^2 \theta_0 / 2g.$$

Este valor vale $h = \frac{30^2 \times 1/2}{2 \times 10} = \frac{900}{40} = 22,5\text{m}.$

Assim conhecido h, podemos calcular v_{2x} :

$$v_{2x} = (x_2 - R/2) g / (v_0 \sin\theta).$$

Após substituições numéricas, $v_{2x} = 30,65$ m/s. De acordo com a Equação (8-21) é fácil ver que

$$v'_{2x} = v_{2x} - v_x, \quad e$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 21,21 \text{ m/s}.$$

Logo,

$$v'_{2x} = +9,44 \text{ m/s}.$$

O valor de v'_{1x} é obtido com o uso da Equação (8-19):

$$v'_{1x} = -\left(\frac{m_2}{m_1}\right)v'_{2x} = -\frac{1}{2} \times 9,44 = -4,72 \text{ m/s}.$$

Observe que $v_{1x} = v'_{1x} - v_x = -4,72 + 21,21 = +16,49$ m/s. Pela Figura 8-10, podemos ver que o CM atinge o solo em $R=90$ m, mais próximo da maior massa (m_1), como deve.

c) A energia mecânica liberada pela explosão é dada por

$$\Delta E_{\text{mec}} = \underbrace{\left[\left(\frac{1}{2} m_1 v_{1x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2x}^2 \right) + Mgh \right]}_{\text{no ato da explosão}} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} M v_0^2 \right]}_{\text{inicial}}.$$

Para cálculos numéricos, fica mais fácil no formato

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{mec}} &= \frac{1}{2} m_2 [\mu v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + 2(1 + \mu)gh - (1 + \mu) v_0^2] = \\ &= \frac{1}{2} m_2 [2 \times 16,49^2 + 30,65^2 + 6 \times 10 \times 22,50 - 3 \times 30^2] = \frac{1}{2} m_2 133,26 = 33,32 \text{ J}. \end{aligned}$$

8-4 O Princípio da Conservação do Momento Linear

Da seção anterior vemos também que é possível escrever

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)},} \quad (8 - 24)$$

onde \vec{P} é o momento total de um sistema S de partículas e $\vec{F}^{(e)}$ é a resultante das forças externas que atuam sobre S.

O sistema S foi considerado **fechado**, ou seja, dele não sai nem entra qualquer partícula (massa), de tal modo que a massa total M permanece constante.

Se, além disso, for considerado **isolado**, ou seja, $\vec{F}^{(e)} = 0$, então, $d\vec{P}/dt = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{constante}$.

Este resultado representa a demonstração do **Princípio de Conservação do Momento Linear**, que pode ser posto numa forma compacta, como

$$\boxed{\vec{F}^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = \text{constante.}} \quad (8 - 24)'$$

Observe que a condição $\vec{P} = \text{constante}$, equivale a dizer que ao se considerar dois estados apropriados de S, designados por estados inicial e final, tenhamos $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$, para um sistema **isolado e fechado**.

Sistemas parcialmente isolados

As Equações (8-24) e (8-24)' são expressões vetoriais, e assim sendo têm três componentes, ao longo dos três eixos cartesianos x , y e z , respectivamente.

Dependendo do caso, um sistema poderia não ter forças externas atuando, por exemplo, em uma, ou até mesmo, em duas direções. Isto equivaleria a dizer que nestas direções, o momento linear poderia ter suas componentes conservadas.

Generalização da primeira lei de Newton

Se a resultante das forças externas que atuam sobre S se anula, ou seja, $\vec{F}^{(e)} = 0$, implica que pela Equação (8-24), $d\vec{r}_{CM}/dt = 0$. Como consequência, o CM de S permanece em **repouso** ou em **movimento retilíneo uniforme**.

A equação (8-24)' também implica que um sistema S não pode ter CM deslocado simplesmente, sob a ação de forças internas.

Paradinha 8-3

Imagine um rojão junino lançado no ar a um ângulo θ com a horizontal e que explode em pleno voo. Desprezando a resistência do ar, descreva como o centro de massa dos fragmentos seguiria em continuação à trajetória parabólica original, até que eles começassem a atingir o solo.

Exemplo 8-6

Uma bomba junina em repouso sobre um assoalho horizontal liso explode em dois pedaços, que deslizam pelo assoalho após a explosão. Um dos pedaços de massa m_1 desliza ao longo do eixo positivo dos x .

- De que é formado o sistema S do problema? É ele fechado e isolado?
- Que tipo de forças internas atuam?
- Descreva o movimento do segundo pedaço de massa m_2 .

Solução:

- O sistema S é inicialmente formado pela bomba em repouso. Após a explosão S passa a ser formado pelos dois pedaços. Este sistema é **fechado** porque dele não sai nem entra nenhuma nova massa. É **isolado**, pois paralelo ao eixo dos y atua a força **externa** gravitacional que é compensada pela força normal.
- As forças **internas** são criadas pela reação química da explosão.
- Ao longo do eixo x não atua nenhuma força externa resultante (o atrito é nulo). Nesta direção, \vec{P} é conservado. Como a bomba junina estava inicialmente em repouso, $P = 0$. Isto implica dizer que ao longo do eixo dos x

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\left(\frac{m_1}{m_2}\right) v_1.$$

Como consequência, o momento ou a velocidade do segundo fragmento é ao longo do sentido negativo do eixo dos x .

Exemplo 8-7

Dois blocos de massa m_1 e m_2 estão ligados por uma mola de massa desprezível, em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Os blocos são afastados levemente um do outro, esticando a mola, e depois soltos. a) Quais as forças interna(s) e externa(s) atuando no sistema? b) Descreva o movimento subsequente dos blocos. c) E caso houvesse atrito?

Solução:

- A força interna é produzida pela interação entre os dois blocos através da mola. Esta força é de natureza newtoniana. Quanto às forças externas, na direção vertical, os pesos são equilibrados pelas forças normais. Como não há atrito, também não existem forças externas horizontais. É bom salientar que nosso sistema é formado pelos blocos e a mola. Ele é fechado e isolado.
- Ao longo da direção horizontal (eixo dos x) não atua nenhuma força externa resultante, e então,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\left(\frac{m_1}{m_2}\right) v_1.$$

Caso não há atrito, a energia mecânica total se conserva. Os dois blocos permanecerão em oscilação, ora se aproximando, ora se afastando do CM, o qual permanecerá em repouso.

- Caso houvesse atrito entre os blocos e a superfície, existiria uma força externa resultante na direção do eixo dos x . Consequentemente, \vec{P} não mais seria conservado. A energia se dissiparia e os dois blocos iriam se freando paulatinamente, até pararem.

As forças de atrito são respectivamente $\mu_1 m_1 g$ e $\mu_2 m_2 g$, e têm sentidos opostos, já que \vec{v}_1 e \vec{v}_2 têm sentidos opostos. Para facilitar, consideramos iguais os coeficientes de atrito.

Podemos considerar dois casos, $m_1 = m_2$ e $m_1 \neq m_2$.

Caso $m_1 = m_2$:

Neste caso, a força externa resultante, na direção x , é nula e, portanto, o CM se mantém em repouso. No processo, os blocos vão paulatinamente se freando simetricamente ($\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$).

Caso $m_1 \neq m_2$:

Neste caso, na direção x , $\vec{F}^{(e)} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} \neq 0$,

e conseqüentemente, o CM do sistema se deslocaria ao longo da superfície horizontal.

Paradinha 8-4

Um canhão de massa M aponta numa direção horizontal e dispara uma bala de massa m com velocidade inicial v .

a) Admitindo o atrito desprezível do canhão com o solo, calcule a velocidade de recuo do canhão. b) Quais as forças internas presentes neste processo?

8-5 Abrangência universal das leis de conservação

A dedução da lei de conservação do momento linear, expressa pela (8-25), se baseou na hipótese de que as forças internas obedecem à 3ª lei de Newton (de ação e reação), o que resultou no cancelamento da força interna resultante. Ao que parece, esta hipótese, apesar de bem aceita na mecânica clássica, é rígida demais. É possível provar* a conservação do momento sem o uso da 3ª lei de Newton, mas esta prova está acima do nível deste livro. Além do mais, se sabe que esta lei de conservação ainda continua válida no microcosmo, onde a mecânica quântica atua e lá a 3ª lei de Newton não é mais um princípio fundamental. Na matéria, o nível atômico ou nuclear, as forças internas são realmente forças de muitos corpos, onde uma parte decorre da interação entre pares de partículas, mas também, ao mesmo tempo, com outras partículas próximas, num processo complexo**, acima do nível deste curso.

As leis de conservação da energia e do momento linear formam princípios fundamentais da física que se aplicam às situações muito mais gerais do que as estudadas neste texto. Elas continuam válidas, inclusive na mecânica quântica, com uma abrangência universal.

Exemplo 8-8

Dois pequenos blocos de massas conhecidas m_1 e m_2 comprimem uma mola entre eles. O sistema repousa sobre uma superfície horizontal lisa. A mola tem constante elástica $k = 2120$ N/m e massa desprezível. Subitamente, os blocos são soltos e a mola os empurra em sentidos opostos para fora de seu alcance. Admita que toda a energia armazenada pela mola seja transferida para os blocos.

a) Qual a relação de massas, m_2/m_1 , se a energia cinética do bloco m_1 vale $k_1 = 20$ J e a do bloco m_2 é o dobro da de m_1 . b) De que distância a mola foi comprimida?

Solução:

a) Devemos ter por conservação da energia

$$\left[0 - \left(-\frac{1}{2} kx^2 \right) \right] = k_1 + k_2 \Rightarrow \frac{1}{2} kx^2 = k_1 + k_2.$$

Considere o bloco m_1 na direção $+x$. Nesta direção, não existe força interna. Logo,

$$P = m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0, \quad \text{ou} \\ m_1 k_1 = m_2 k_2.$$

Como $k_2 = 2k_1 \Rightarrow m_1 k_1 = m_2 (2k_1) \Rightarrow m_2/m_1 = 1/2$.

b) Para calcular a distância de compressão da mola,

$$\frac{1}{2} kx^2 = k_1 + k_2 = k_1 + 2k_1 = 3k_1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6k_1}}{k}.$$

Como $k_1 = 20$ J e $k = 2120$ N/m, obtemos

$$x = \frac{\sqrt{6 \times 20}}{2120} = 0,24 \text{ m} = 24 \text{ cm}.$$

* "On Newton's Third Law and the Conservation of Momentum", E. Gerjuoy, American Journal of Physics, Novembro, 1949, volume 17, página 477.

** "Forças Nucleares", Hélio Teixeira Coelho, Manoel Roberto Robillota, Ciência Hoje, volume 11, nº 63 (1990).

8-6 Sistema de massa variável

Até aqui estudamos sistemas com massas totais constantes. Vimos que um corpo só pode se deslocar se existirem forças externas atuando sobre ele. Nesta seção, no entanto, vamos mostrar que se a massa de um corpo for **variável** ele pode, sim, ser impulsionado sob a ação puramente de forças internas.

Segunda lei de Newton para sistemas de massa variável.

Para abordar este problema, vamos considerar o caso de um foguete numa região do espaço exterior sem a presença de um campo gravitacional. Admita este foguete inicialmente, em repouso, em relação a um referencial inercial. Seu movimento unidimensional dar-se-á, conforme veremos, da queima de combustível e sua ejeção através do escape do motor.

Seja M a massa instantânea do foguete, a qual inclui o combustível, e \vec{v} sua velocidade em um instante t qualquer. Ao liberar uma massa, $-\Delta M$, pela combustão num tempo Δt , a uma velocidade \vec{u} em relação ao sistema inercial, o foguete passa a ter uma massa $M + \Delta M$ e uma velocidade $\vec{v} + \Delta \vec{v}$. A variação de massa, ΔM , é uma quantidade negativa, mas por conveniência, só no final da discussão isto será explicitado. Nosso sistema é **fechado** e **isolado** e está representado na Figura 8-11. Como não existe força externa atuando, o momento do sistema S é conservado no processo. Assim

$$\Delta \vec{P} = 0 \implies \vec{P}_f = \vec{P}_i \quad , \quad (8 - 25)$$

onde $\vec{P}_f = (M + \Delta M) (\vec{v} + \Delta \vec{v}) + \vec{u}(-\Delta M)$, e $\vec{P}_i = M\vec{v}$.

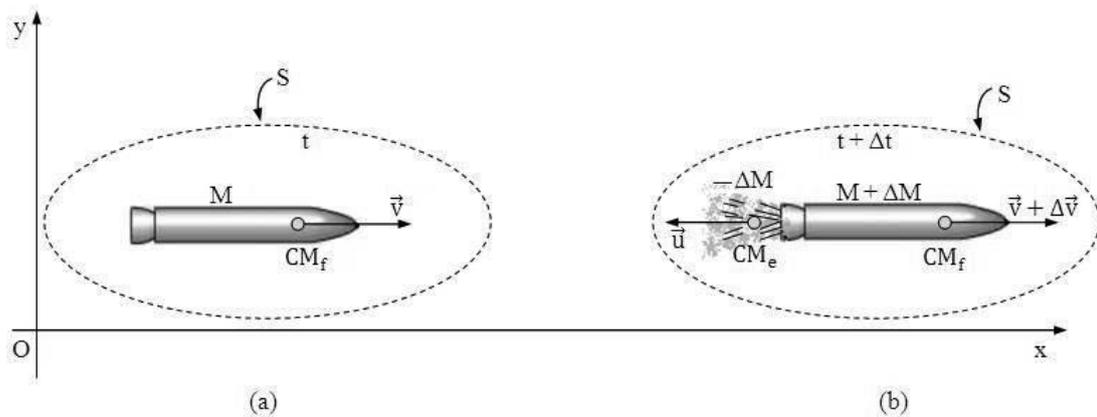


Figura 8-11. (a) Foguete de massa M e velocidade $\vec{v}(t)$ visto de um referencial inercial. (b) Foguete no instante $t + \Delta t$, onde é mostrado a massa do produto de exaustão, ΔM . O sistema S é fechado e isolado nas duas situações.

Com um pouco de manipulação, obtemos

$$M \Delta \vec{v} = -[(\vec{v} + \Delta \vec{v}) - \vec{u}] \Delta M . \quad (8 - 26)$$

Dividindo ambos os membros por Δt e passando ao limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos finalmente,

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = -(\vec{v} - \vec{u}) \frac{dM}{dt} . \quad (8 - 27)$$

O termo de segunda ordem $dv dM$ é desprezado. Observando a Figura 8-12, podemos escrever que

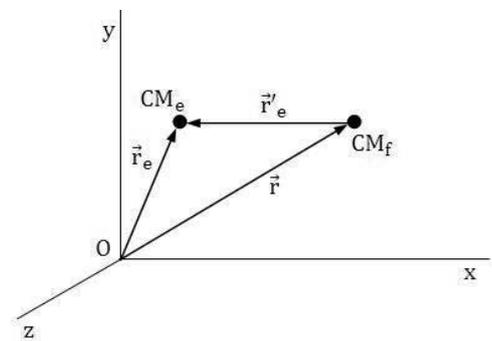


Figura 8-12. Vetores posição dos CM do foguete \vec{r} e do produto de exaustão (\vec{r}_e). O vetor entre CM dos produtos de exaustão e do CM do foguete é \vec{r}'_e antiparalelo a Ox .

$$\vec{r}'_e = \vec{r}_e - \vec{r}.$$

Derivando ambos os membros em relação ao tempo, temos

$$-\vec{v}_e = \vec{u} - \vec{v}, \quad (8-27)'$$

onde $-\vec{v}_e$ é a velocidade relativa do material de exaustão em relação ao foguete (a velocidade relativa do foguete em relação ao material de exaustão é $\vec{v}_{rel} = +\vec{v}_e$).

A grandeza dM/dt é negativa, pois o foguete perde massa. Explicitando este fato na Equação (8-27), teremos

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_{rel} \frac{dM}{dt}. \quad (8-28)$$

A grandeza positiva

$$R = \left| \frac{dM}{dt} \right|, \quad (8-29)$$

é chamada de **taxa de consumo de combustível**. A Equação (8-28) pode ainda ser escrita (no formato $\vec{F} = m\vec{a}$)

$$\boxed{M\vec{a} = -R\vec{v}_{rel}.} \quad (8-30)$$

O termo no segundo membro tem dimensão de força e é chamado de **empuxo** do motor do foguete. Vamos representá-lo por \vec{E}_F , ou seja,

$$\vec{E}_F = R\vec{v}_{rel} \quad (8-31)$$

Voltemos à Equação (8-29). Antes, porém, observemos que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}) = M \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dM}{dt}. \quad (8-32)$$

O termo $M d\vec{v}/dt$ é dado pela Equação (8-28) e lembrando que dM/dt é negativo, teremos

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = R\vec{u},} \quad (8-33)$$

que é a 2ª lei de Newton (no sentido $\vec{F} = d\vec{p}/dt$) para sistema de massa variável.

Paradinha 8-6

Verifique que $R\vec{v}_{rel}$ tem dimensão de força

Cálculo da variação da velocidade

Para este propósito, partamos da Equação (8-27)

$$d\vec{v} = -\vec{v}_{rel} \frac{dM}{M}$$

Vamos supor que durante o período de ignição, \vec{v}_{rel} permanece constante.

Integrando os dois membros desta equação, obtemos

$$\int_{v_i}^{v_f} d\vec{v} = -\vec{v}_{rel} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_{rel} \log\left(\frac{M_i}{M_f}\right),} \quad (8-34)$$

onde o logaritmo natural ou neperiano na base $e = 2,71828$. Os índices i e f se referem aos estados inicial e final, respectivamente. Observe que $M_i > M_f$ e daí o logaritmo é positivo. Como resultado, $\vec{v}_f - \vec{v}_i$ tem direção e sentido de \vec{v}_{rel} , correspondente ao **recuo do foguete**. À medida que o combustível se esgota, M_f vai se reduzindo. Um foguete de vários estágios passa a ser altamente vantajoso, por ser possível descartar cada estágio à proporção que seu combustível termina.

Presença de forças externas

Nesta situação, a Equação (8-29) passa a ser,

$$M\vec{a} = \vec{E}_F + \vec{F}^{(e)}, \quad (8 - 35)$$

onde $\vec{E}_F = R\vec{v}_{rel}$, e $\vec{F}^{(e)}$ é a resultante das forças externas.

Exemplo 8-9

Uma sonda espacial de 15.819 kg move-se em linha reta em direção a Marte a uma velocidade de 200 m/s, em relação a um dado referencial inercial. Num certo instante, o motor da sonda é acionado, queimando 10^4 kg de combustível que é ejetado a uma velocidade de 302 m/s em relação à nave espacial. Qual a velocidade final da sonda?

Solução:

Para cálculo de v_f , utilizamos a Equação (8-33),

$$v_f = v_i + v_{rel} \log\left(\frac{M_i}{M_f}\right),$$

onde $v_i = 200$ m/s, $v_{rel} = 302$ m/s, $M_i = 15819$ kg e $M_f = 15819 - 10.000 = 5819$ kg. Com estes valores, obtemos

$$v_f = 200 + 302 \log\left(\frac{15819}{5819}\right) \cong 200 + 302 = 502 \frac{m}{s}.$$

8-7 Pausa para descontração:

Um falso debate: momento versus força viva

A humanidade tem vivenciado nos últimos cinco séculos um número de debates entre pessoas que tiveram um peso importante na construção da cultura ocidental. Alguns destes debates se revelaram, na realidade, como falsos debates. Foram os casos, por exemplo, da cotenda entre Newton e Leibniz sobre a primazia na autoria do cálculo infinitesimal, ou da disputa entre *ciência* versus *religião* entre Galileu e o papa Urbano VIII. São exemplos marcantes!

Em 1686, aos 40 anos de idade, Leibniz se envolveu num grande debate sobre um conceito criado bem antes por outro filósofo, igualmente importante, o francês René Descartes (1591-1650), considerado o fundador da filosofia moderna. Descartes é também considerado na ciência como um dos maiores matemáticos, criador da **geometria analítica**, e na física, como o criador do conceito fundamental de **momento linear**.

Mas quem foi Leibniz?



René Descartes



Leibniz

O grande filósofo e físico-matemático Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, hoje parte da Alemanha. Além da famosa contenda com Newton, também se envolveu durante toda a vida em inúmeros outros debates. Na maioria dos casos não levaram a nenhuma vitória decisiva. Por ser uma figura de interesses diversificados e a favor de uma formação mais holística, e, portanto, contra a especialização, muitas vezes foi infeliz em abordar temas que não dominava com a devida profundidade ou que estavam acima de suas possibilidades. Como consequência, seus numerosos projetos nunca pareceram chegar a algum resultado. Ele chegou, por exemplo, a elaborar planos utópicos para unificar as Igrejas católica e protestante. Certamente, sem sucesso, além de caírem no descrédito geral. Ou viver acreditando que Deus nos deu o melhor dos mundos, sem, no entanto, enxergar os grandes problemas sociais e econômicos em volta de si, numa visão alienante e mirabolante das coisas. O filósofo francês Voltaire (1694-1778), em seu estilo ferino habitual, não o poupou por estes percalços. Foi um de seus

críticos ferrenhos depois que decidiu se aliar a Newton. Leibniz, apesar de tido como dado uma competente contribuição na matemática, como a invenção do cálculo (hoje aceita como compartilhada com Newton), e também na criação de notações na matemática (hoje mundialmente aceitas), ao contrário de Newton, foi enterrado, como Mozart e tanto outros gênios da humanidade, completamente esquecido, acompanhado no funeral apenas por seu antigo secretário.

Mas o que sabemos mais sobre René Descartes?

Descartes, como já vimos antes, nasceu em Laye, França, de uma família abastada. Foi educado no colégio jesuíta *de la Flèche*, possivelmente, o melhor da França à época. Em Poitiers, graduou-se em Direito, em 1616. Viajou por boa parte da Europa. Serviu por algum tempo como soldado, primeiro no exército protestante, e posteriormente, no exército católico da Bavária. Sua saúde nunca foi das melhores, e por conta disso foi educado com muito mimo, o que lhe deu um ar um pouco afeminado. Na filosofia é considerado o pai do **racionalismo cartesiano**. Nesta filosofia aceita a **razão** como a capacidade de conhecer e de estabelecer a verdade. Por oposição ao **empirismo**, que utiliza para tal, a **experiência sensível**. Acreditava Descartes que só com o uso da **lógica**, da **matemática** como ferramenta, e das **ciências naturais**, com modelos da natureza, é que a verdade poderia ser estabelecida, incontestavelmente. É dele a famosa frase “*Penso, logo existo*” (“*Cogito, ergo sum*”). Descartes morreu de pneumonia no frio inverno da Suécia, como professor da rainha Cristina. Esta rainha tinha o estranho hábito de ter aulas, pontualmente, às 5 horas da manhã!

Sua contribuição em física nasceu de origens religiosas. Segundo ele: “*Após a criação por Deus da matéria (massa), Ele considerou a possibilidade desta matéria estar em movimento no universo*”. E, portanto, deveria existir uma grandeza **fundamental** que se **conservasse** representando este fato. Mas como defini-la? Através de muitas observações experimentais à época, no estudo da colisão de dois objetos, chegou ele à conclusão, em 1644, que esta grandeza deveria ser chamada de **momento** (“**momentum**” em latim) e definida como o produto da massa pela sua velocidade (mv). De acordo com Descartes, esta grandeza se conservava na colisão.



John Wallis



Christian Huygens



Sir Christopher Wren

Em 1663 foi fundada a *Real Sociedade de Londres (Royal Society of London, RSL)* para encorajar a experimentação nas ciências naturais. Cientistas famosos, como o inglês John Wallis (1616-1703), o holandês Christian Huygens (1629-1695), e o inglês Sir Christopher Wren (1632-1723), foram seus membros. Logo de início, foram convidados a estudar mais a fundo, a teoria de colisões, dando continuidade à obra de Descartes.

Em novembro de 1668, John Wallis submeteu um memorando que talvez tenha sido a primeira indicação da Lei da Conservação do Momento. Ao utilizar o momento, Wallis reconheceu que o sentido do movimento deve ser considerado. Numa linguagem moderna, dizemos que a velocidade é uma grandeza vetorial. Descartes falhou por não conhecer este conceito.

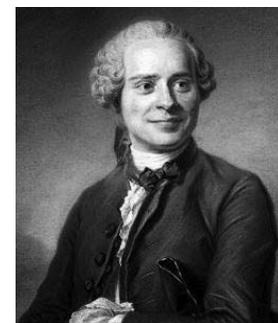
O grande trabalho na resolução do problema da colisão de corpos foi feito por Christiaan Huygens, que trabalhou com muitas variantes do problema.

Na época de Huygens, estas leis gerais estavam começando a ser estabelecidas. A grande generalização ainda estava por vir.

Em 1686, Leibniz apresentou um trabalho em que insistiu que o conceito de momento criado por Descartes e considerado por ele uma grandeza fundamental, era errado. A grandeza fundamental, segundo Leibniz, deveria ser a “**vis viva**” (**força viva**), o nome usado para designar a quantidade mv^2 .

Atualmente, sabemos que ambos, Descartes (1644) e Leibniz (1686), estavam parcialmente certos e parcialmente errados, enquanto Huygens estava mais próximo da verdade. O momento tomado numa forma vetorial, $m\vec{v}$, é agora a sua forma correta. A relação $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constante}$, que aparece num choque de dois corpos, deve ser considerada como uma **lei de conservação**. Já a grandeza “**vis viva**”, deve na realidade ser expressa rigorosamente, como $\frac{1}{2}mv^2$ e é chamada de **energia cinética** de um objeto em movimento.

Quem resolveu este grande impasse entre Leibniz e Descartes, foi outro grande filósofo e físico-matemático francês, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).



Jean le Rond d'Alembert



Joseph Louis Lagrange



Sir Benjamin Thompson,
conde Rumford



Laurent Lavoisier

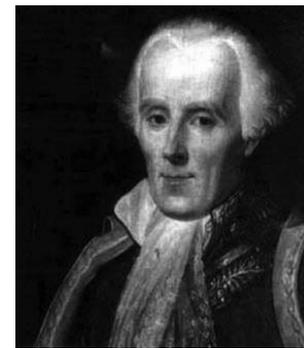
D'Alembert ao nascer foi abandonado nas portas de uma igreja próxima à *Notre Dame de Paris*. Foi adotado por uma família simples de um vidreiro. Posteriormente, veio a saber, que sua mãe era uma aristocrática e o pai um general. Quando mais tarde D'Alembert se tornou famoso, seus pais tentaram, em vão, se aproximar dele. D'Alembert juntamente, com seu amigo Voltaire, foram arautos da revolução francesa. Morreram antes dela acontecer. D'Alembert em 1743 publicou o seu *Tratado de Dinâmica* ("*Traité de Dynamique*") encerrando assim o debate entre Leibniz e Descartes. Mostrou ele, que o *debate* era na realidade um *falso debate*. Basicamente, toda a confusão vinha de uma questão de terminologia. Tanto a *energia* como o *momento*, podem ser encarados como invariantes do movimento.

A questão evoluiu ainda mais porque o conceito de energia não estava completamente equacionado. Em 1777, outro grande físico matemático, de ascendência franco-italiana, participante da revolução francesa, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) apresentou a conexão entre a força e a energia potencial gravitacional. Criou também, entre outras coisas, a *Mecânica Analítica*. Nesta mecânica, todas as leis de conservação da mecânica clássica podem ser expressas por uma simples equação matemática. Além da beleza estética e de sua praticidade, sabemos hoje que ela pode, inclusive, ser estendida à mecânica quântica.

Posteriormente, ficou também claro que existe perda de energia mecânica devido às forças de atrito. O atrito é uma força "não conservativa", pois não "devolve" a energia que absorveu. A relação entre força de atrito e calor e o conceito de calor como uma forma de energia só foi feita no final do século XVIII. Em 1780, Lavoisier (1743-1794) e Laplace (1749-1827), disseram que "*calor é vis viva resultante do movimento das moléculas de um corpo*". Contudo isso só foi compreendido em 1798, quando o físico Sir Benjamin Thompson, conde Rumford (1753-1814), demonstrou a relação entre o trabalho das forças de atrito e a respectiva quantidade de calor gerado.



Julius Robert von Mayer



Laplace

Finalmente, para encerrar, com a evolução do conceito de energia, devemos mencionar o físico alemão Julius Robert von Mayer (1814-1878). Foi o primeiro a enunciar explicitamente, que a energia pode variar de várias formas (química, elétrica, magnética, mecânica, térmica), e pode ser convertida de uma forma em outra, mas a soma total é constante.

Hoje podemos afirmar que o grande (falso) debate entre Leibniz e Descartes foi totalmente esclarecido!

Resumo

Centro de Massa

Distribuição discreta com N partículas:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i z_i, \quad (8-5)$$

ou usando notação vetorial,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i, \quad (8-6)$$

onde M é a massa total do sistema.

Distribuição contínua

$$x_{CM} = \frac{1}{V} \int_V x \, dV, \quad y_{CM} = \frac{1}{V} \int_V y \, dV, \quad z_{CM} = \frac{1}{V} \int_V z \, dV, \quad (8 - 10)$$

ou usando usando uma notação vetorial

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \, d^3 r, \quad (8 - 11)$$

onde V é o volume do corpo.

Segunda lei de Newton para um sistema de partículas

$$M \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}, \quad (8 - 16)$$

onde $\vec{F}^{(e)}$ é a resultante das forças **externas** que atuam sobre sistema.

Conservação do momento linear

Colocando $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$, então $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$

Princípio de conservação do momento:

Se um sistema está **isolado** e **fechado** de modo que $\vec{F}^{(e)} = 0$, então temos

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = \text{constante.}$$

Isto implica dizer que $\vec{P}_i = \vec{P}_f$, onde os subscritos se referem aos instantes inicial e final, respectivamente.

Sistema de massa variável

Equação do tipo da segunda lei de Newton

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{E}_F + \vec{F}^{(e)}, \quad (8 - 35)$$

onde M é a massa instantânea do foguete, incluindo o combustível ainda não consumido, $\vec{E}_F = R\vec{v}_e$, é o empuxo, onde R é a taxa de consumo de combustível e \vec{v}_e é a velocidade dos produtos de exaustão em relação ao foguete. O termo $\vec{F}^{(e)}$ é a resultante das forças externas atuando sobre o sistema.

Equação da variação da velocidade do foguete

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_{rel} \log\left(\frac{M_i}{M_f}\right), \quad (8 - 34)$$

onde a massa do foguete varia de M_i para M_f .

Questões conceituais:

1) Falso ou verdadeiro, justificando sua escolha:

- a) Todo centro de massa de um sistema tem necessariamente alguma massa.
- b) O CM de um sistema não depende da escolha da referencial.
- c) Não se pode escolher um referencial cuja origem coincida com o CM de um sistema.

2) No conserto de uma nave espacial, um astronauta de 70kg em repouso em relação à nave empurra para outro astronauta a peça danificada de 35kg a uma velocidade de 2,0 km/h em relação à nave. Escolha as respostas certas:

- a) O astronauta continua em repouso.
- b) O astronauta se move a 1,0 m/s em sentido contrário à peça.
- c) A quantidade de movimento do sistema astronauta-peça no processo é conservada, mas não sua energia cinética.
- d) O CM do sistema astronauta-peça se desloca em relação à nave.

3) Uma pessoa está de pé sobre uma superfície horizontal lisa e quer sair dela. O que ela poderia fazer?

4) Um motorista dirigindo um carro numa boa estrada reta e horizontal percebe um obstáculo à frente. Case cada uma das afirmações da coluna à esquerda com a mais apropriada da coluna à direita:

- | | |
|--|--|
| a) O motorista aciona o pedal do freio. | i) uma força externa de atrito entre cada roda e a estrada é criada. |
| b) O pedal do acelerador fica livre. | ii) uma força interna é criada. |
| c) Uma pastilha de freio é acionada em cada roda. | iii) Carro desacelera sem o torque no motor. |
| d) A rotação das rodas se torna bastante reduzida. | iv) Energia bioquímica é transformada em mecânica. |
| e) Além de forças externas é criado outro tipo de força. | v) A velocidade do CM do carro é reduzida. |

5) Complete a sentença:

O deslocamento do CM de um corpo só é possível acontecer se existirem forças..... atuando, ou se a do corpo for obtida através de forças.....

6) Duas partículas têm a mesma energia cinética. É verdadeiro dizer que têm a mesma quantidade de movimento se tiverem a mesma velocidade?

7) A Figura 8-13 mostra um salto em distância de um atleta. Antes de alcançar o ponto A, o seu CM já vinha se deslocando em linha reta horizontal. No ponto A, um impulso nos pés faz seu CM de massa se deslocar, passando a descrever uma parábola. Qual a razão dos movimentos sincronizados dos braços, pernas, cabeça, etc, do atleta para que o alcance AB seja o maior possível?



Figura 8-13 Salto em distância referente à questão 7

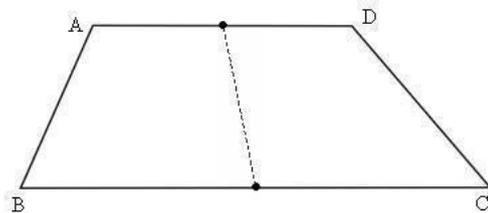


Figura 8-14 Referente à questão 9.

8) Mostre a velocidade de um foguete de múltiplos estágios é muito maior que a velocidade final de uma foguete de um único estágio de mesma massa total e mesmo suprimento de combustível. (Sugestão: analise o caso de dois estágios).

9) Considere o trapézio ABCD da Figura 8-14. Mostre que seu centroide deve estar situado sobre o segmento que une os pontos médios das bases do trapézio.

10) Falso ou verdadeiro:

Uma granada é lançada no ar. Com sua explosão:

- A trajetória do seu CM é alterada.
- A resultante das forças externas é alterada.
- A energia mecânica no processo não se conserva.
- Há uma perda de energia no sistema em forma de energia térmica.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Três partículas de massas 2, 1 e 3 kg, respectivamente, têm vetores posição $\vec{r}_1 = 5t\hat{x} - 2t^2\hat{y} + (3t - 2)\hat{z}$, $\vec{r}_2 = (2t - 3)\hat{x} + (12 - 5t^2)\hat{y} + (4 + 6t - 3t^3)\hat{z}$, $\vec{r}_3 = (2t - 1)\hat{x} + (t^2 + 2)\hat{y} - t^3\hat{z}$, onde t é o tempo em segundo.

- Ache a velocidade de CM em $t = 1s$.
- Obtenha o momento linear total do sistema no mesmo tempo de a).

2)* Três massas iguais são localizadas nos vértices de um triângulo. Prove que o CM é localizado na intersecção das medianas do triângulo.

3)* Prove que o CM não depende da origem do sistema de coordenadas usado.

4)* Um homem de massa m está pendurado em uma escada de corda, suspensa por um balão de massa M. O homem e o balão estão estacionários em relação ao solo.

- Se o homem começar a subir pela escada a uma velocidade v em relação à escada, o balão se moverá? Caso afirmativo, com que velocidade em relação ao solo?
- Qual o estado de movimento após o homem ter parado de subir?

5)* Um homem de massa M está sentado em uma extremidade de uma prancha de massa m que está em repouso sobre um lago congelado. O homem atira um objeto de massa m' numa direção paralela ao comprimento da prancha. A velocidade de m' em relação à margem é v' . Determine a velocidade adquirida pela prancha logo após o lançamento.

6)* Um patinador no gelo de 70 kg está de pé em repouso e lança uma pequena bola de 60 g para longe de si, a uma velocidade horizontal de 4,0 m/s. Qual a velocidade adquirida pelo homem, dada em forma vetorial?

7)** Ache o CM de uma barra delgada (unidimensional) de comprimento l e densidade proporcional à distância de uma de suas extremidades.

8)** Prove que o CM de um arco circular uniforme de raio r e ângulo central α é localizado no eixo de simetria a uma distância do centro igual a $r \sin \alpha/\alpha$.

9)** Considere o Exemplo 8-4. Mostre que o mesmo resultado pode ser obtido considerando o furo circular de raio R como uma massa negativa concentrada em $-R$

10)** Um círculo de raio a é removido de uma chapa circular uniforme de raio $b > a$, como indicado na Figura 8-15. Se a distância entre seus centros A e B é d , ache o CM.

11)** Três partículas de massas m_1, m_2, m_3 são localizadas nos vértices de um triângulo de lados opostos a_1, a_2, a_3 , respectivamente. Prove que o CM está situado no encontro de bissetrizes do triângulo se e somente se $m_1/a_1 = m_2/a_2 = m_3/a_3$.

12)** Ache o CM de um hemisfério sólido uniforme de raio R . (Sugestão: considere o hemisfério constituído de cilindros de alturas infinitesimais como mostrado na Figura 8-16).

13) **Ache o CM de um sólido de densidade constante consistindo de um hemisfério de raio R em cima da base de um cilindro de altura H , conforme mostrado na Figura 8-17.

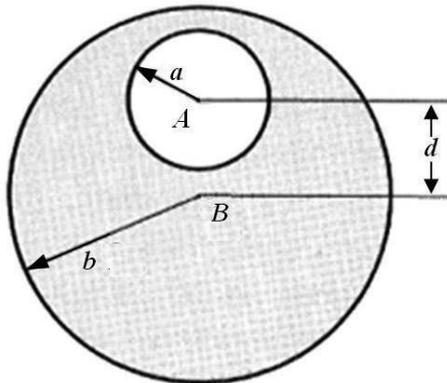


Figura 8-15 Referente ao problema 10.

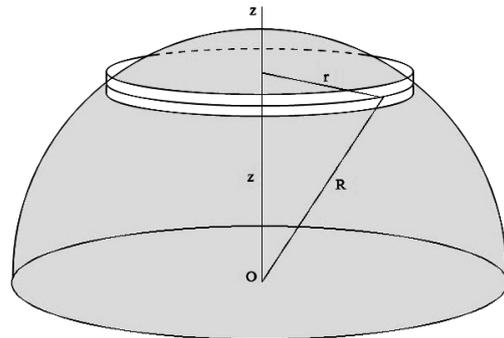


Figura 8-16 Referente ao problema 12.

14)** Um artefato de massa m é lançado no ar com uma velocidade inicial v_0 , formando um ângulo $\theta = 45^\circ$ com a horizontal.

a) Mostre explicitamente, que a variação do momento do artefato após ter decorrido um tempo t_0 é igual a seu peso multiplicado por este tempo. Que lei rege este resultado?

b) Suponha que no tempo t_0 o artefato explode em dois fragmentos iguais. Um fragmento, cuja velocidade, imediatamente, após a explosão é zero, cai verticalmente. Supondo o solo plano, a que distância do lançamento cairá o outro fragmento?

15)** Uma patinadora de massa M (que inclui roupa e patins) numa pista congelada, segura dois pesos iguais, cada um de massa m . Partindo do repouso, ela atira os pesos horizontalmente, um de cada vez. A velocidade de cada peso em relação à patinadora é v_0 .

a) Qual a velocidade na forma vetorial da patinadora, logo após o primeiro lançamento?

b) E após o segundo lançamento?

c) Caso ela estivesse atirado os dois pesos simultaneamente, à mesma velocidade v_0 em relação a ela, ela ganharia mais velocidade?

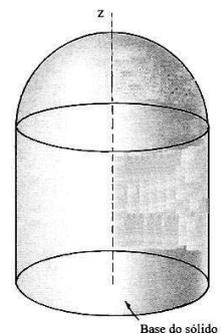


Figura 8-17 Referente ao problema 13.

16)** Um foguete de massa inicial m_0 que inclui o combustível, parte do repouso e move-se em linha reta verticalmente, para cima, em um campo gravitacional constante. Assuma que o gás ejetado sai a uma taxa R constante e a uma velocidade v_e constante em relação ao foguete. Calcular a velocidade do foguete num tempo t após o lançamento.

17)** Um foguete move-se em linha reta em relação a um referencial inercial numa região livre de campo gravitacional. Para obter um incremento de velocidade igual à velocidade de escape dos gases, qual deve ser o valor da relação de massas, m_i/m_f , inicial e final, no processo?

18)** Uma viga de seção transversal em forma de quadrado, possui densidade que varia de acordo com os quadrantes, como mostrado na Figura 8-18, com números indicando as densidades relativas.

a) Se um sistema de coordenadas é escolhido como mostrado na figura, qual a equação da reta que passa pela origem e pelo CM?

b) Mostre que o resultado seria o mesmo caso a seção transversal fossem círculos inscrito ou circunscrito ao quadrado.

19)** Uma corrente delgada e flexível tem uma densidade linear uniforme λ e está em repouso sobre uma mesa, formando um pequeno montículo. Em $t = 0$ começa a ser levantada verticalmente, com uma velocidade constante v . Qual a força necessária para levantá-la em função do tempo?

20)** Um esquilo de massa m está em repouso na extremidade de uma prancha de massa M e comprimento l . A prancha está em repouso sobre a superfície de um lago congelado. O esquilo resolve pular em direção à outra extremidade da prancha com uma velocidade inicial v_0 que forma um ângulo θ com a direção horizontal.

a) Determine v_0 para que o esquilo atinja a outra extremidade da prancha.

b) Qual a variação da energia cinética do esquilo neste processo?

c) Mostre explicitamente, que a variação do momento no tempo é igual ao peso do esquilo vezes o intervalo de tempo em que o mesmo ficou no ar. Que lei física está por trás deste resultado?

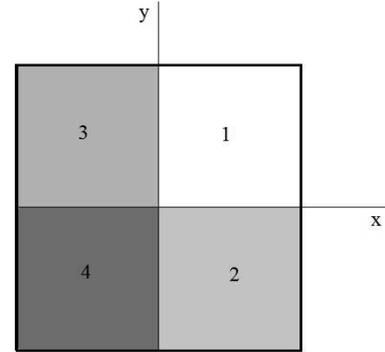


Figura 8-18 Referente ao problema 20.

CAPÍTULO 9

COLISÕES

9-1 Introdução

Conforme vimos no capítulo anterior, a colisão entre dois corpos foi o caminho experimental utilizado por Descartes para estabelecer o conceito de momentum $\vec{p} = m\vec{v}$, e a sua utilização para formular as ideias iniciais sobre grandezas fundamentais que se conservam na física. Estes estudos foram posteriormente retomados por outros cientistas, resultando hoje, após alguns séculos, nas leis de conservação universalmente aceitas, tais como, a conservação da energia e a conservação do momento.

Dois corpos quando se chocam trocam energia e momento. Isto é decorrência do processo de interação entre eles. Neste choque, forças relativamente grandes atuam em cada um dos objetos, num intervalo de tempo muito pequeno. Como resultado, sabemos que os mesmos dois objetos poderiam emergir, como produtos da colisão, ou como um só objeto, diferente dos iniciais, ou até mesmo, em vários objetos, resultado, por exemplo, de um processo de fragmentação decorrente da colisão.

A análise cuidadosa destas colisões podem fornecer informações importantes, sobre a natureza da interação entre as partículas que compõem cada objeto, utilizando neste processo leis de conservação já estudadas. Conforme veremos neste capítulo, ainda é possível realizar esta análise, mesmo sem conhecer as forças que atuam durante a colisão dos corpos emergentes após o choque.

Na escala atômica, uma reação química (como por exemplo, $H + Cl \rightarrow HCl$) pode ser pensada também como um choque entre corpos. A interação entre H e Cl é puramente elétrica, já que a interação gravitacional nesta escala é desprezível. Neste processo, a massa se conserva, como num choque usual entre corpos na escala do nosso dia-a-dia. Já na escala nuclear, os processos envolvidos são relativísticos e a massa não mais se conserva. Isto significa que as velocidades envolvidas são próximas à da luz. Devemos observar que na escala microscópica as partículas interagem entre si, mas não se tocam durante todo o processo da reação. Em todos os casos, porém, as leis de conservação do momento e da energia total são aplicáveis. Isto é de fato um feito fantástico!

Na escala microscópica, o estudo da colisão entre as partículas tem fornecido informações fundamentais para o conhecimento das forças envolvidas. No caso atômico, da força eletrostática, e no caso nuclear das forças de curto alcance que são bastante complexas. Da colisão entre partículas, através do uso de aceleradores altamente sofisticados, podemos obter muitos dados experimentais e testar várias teorias físicas. É o caso bem recente da comprovação da existência da partícula de Higgs, prevista por teorias físicas, estabelecidas muitos anos antes, conforme mencionado na seção 7-10. Daqui para frente vamos nos deter só na colisão clássica que ocorre na escala macroscópica.

Esquemáticamente, podemos representar uma colisão através da Figura 9-1. Antes da colisão e com a influência desprezível de interação, os corpos são definidos por suas massas m_1 e m_2 e seus momentos, \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , respectivamente. Isto caracteriza a **configuração inicial**, antes da colisão.

A pequena região onde a interação entre os corpos passa a ser importante é representada por I. A **configuração final**, após a colisão, é representada pelos momentos \vec{p}'_1 e \vec{p}'_2 . Nesta região, a interação entre os corpos passa de novo a ser desprezível.

O objetivo principal deste capítulo é estudar com detalhes diagramas como aquele, representado pela Figura 9-1.

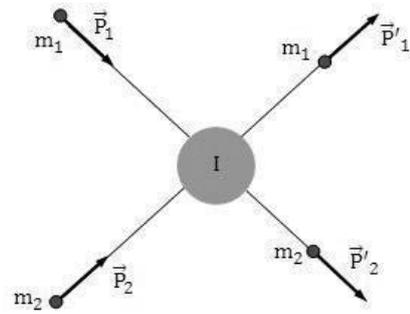


Figura 9-1. Diagrama de colisão entre dois corpos de massa m_1 e m_2 . Seus momentos iniciais são \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , respectivamente, e \vec{p}'_1 e \vec{p}'_2 seus momentos finais. I representa a região de interação no processo.

9-2 Impulso linear

Colisão é um fenômeno que pode ocorrer com muita frequência no nosso dia-a-dia. O momento de um corpo, onde o corpo é tratado como uma partícula pode variar subitamente, com um choque com outra partícula. Isto ocorre, em geral, num intervalo de tempo muito pequeno.

Dois tipos de colisões são frequentes: colisão simples e colisões em série.

Colisão simples

Imagine uma bola de bilhar atingida por um taco. A tacada ocorre num intervalo de tempo, dt , muito pequeno. Neste intervalo, uma força, $\vec{F}(t)$, desconhecida, atua sobre a bola, deformando-a ligeiramente. Ela retorna, logo em seguida, ao seu formato original, adquire um novo momento e segue uma determinada trajetória. Todo o processo de interação taco-bola ocorre na pequena **região de interação**, ilustrada na Figura 9-1.

Quantitativamente falando, a bola sofre a ação de uma força $\vec{F}(t)$ que está relacionada com a variação do momento da bola, através da segunda lei de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. No intervalo de tempo dt , esta variação é dada por

$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt. \quad (9 - 1)$$

Uma variação finita desta equação pode ser calculada entre um instante t_i , imediatamente antes do impacto, até um instante t_f , imediatamente após o impacto, através da expressão,

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt. \quad (9 - 2)$$

A segunda integral da equação acima é chamada de **impulso**, \vec{J} , da colisão. Assim

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt.} \quad (9 - 3)$$

Consequentemente,

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{J}.} \quad (9 - 4)$$

Na prática, em geral, não conhecemos a expressão matemática de $\vec{F}(t)$, mas podemos conhecer a intensidade média $\langle \vec{F} \rangle$ da força e a duração Δt da colisão. Assim sendo,

$$\vec{J} = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \right] \Delta t = \langle \vec{F} \rangle \Delta t. \quad (9 - 5)$$

Em resumo,

$$\boxed{\vec{J} = \Delta\vec{p} = \langle \vec{F} \rangle \Delta t.} \quad (9 - 5)'$$

O gráfico de $F(t) \times t$ é algo próximo ao ilustrado na Figura 9-2.

Na Figura 9-2 (a), a área sob a curva é igual ao módulo de \vec{J} sobre a bola na colisão. Já na Figura 9-2 (b), a área do retângulo é igual à área sob a curva em (a), que também é igual ao

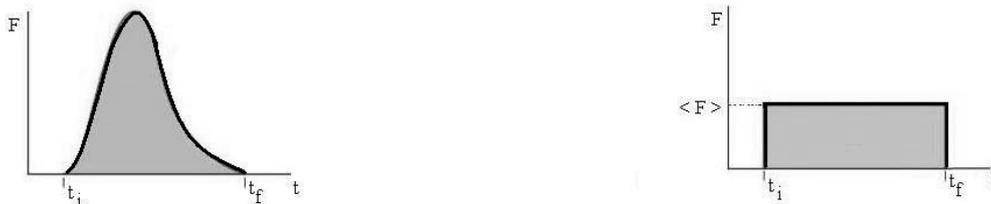


Figura 9-2 (a). Módulo da força versus o tempo que atua sobre a bola na colisão. (b) Força média atuando sobre a bola no intervalo Δt .

módulo de \vec{J} na colisão.

Sobre o taco atua uma força que de acordo com a terceira lei de Newton, tem o mesmo módulo, e sentido oposto à força que atua sobre a bola. Isto significa, pela Equação (9-3), que o impulso sobre o taco também segue a terceira lei de Newton, quando comparado com o impulso sobre a bola.

Paradinha 9-1

Uma bola de massa $m = 0,20$ kg, que se movimentava a uma velocidade $v = 10$ m/s, é rebatida por um taco. A bola deixa o taco com velocidade $v' = 20$ m/s em sentido oposto ao seu movimento inicial. a) Qual o impulso do choque? b) Qual a força média se o impulso durou 10^{-3} s?

Colisões em série

Existem muitas situações onde um alvo fixo sofre a ação de um número grande de colisões sucessivas. É o caso de um jato horizontal de areia sobre uma parede vertical sólida. Cada colisão de um grão de areia produziria uma força sobre a parede. Mas o que estamos interessados é no cálculo da força média $\langle F \rangle$ sobre a parede durante certo intervalo de tempo Δt .

Em geral, consideremos um feixe de projéteis idênticos, igualmente espaçados, cada projétil tratado como partícula, de massa m , e momentos iguais, $m\vec{v}$. Para facilitar, imagine as colisões acontecendo ao longo do eixo x , sobre um alvo fixo vertical, como por exemplo, um bloco sólido. Seja n o número de projéteis que atingem o alvo num intervalo de tempo Δt . Cada projétil sofre uma variação Δp no momento por causa da colisão. No intervalo de tempo Δt esta variação é $n\Delta p$. O impulso resultante J sobre o alvo é dado por

$$J = -n \Delta p, \quad (9 - 6)$$

onde o sinal negativo indica que, pela terceira lei de Newton, o alvo tem impulso contrário a Δp .

Como $\Delta p = m\Delta v$, e usando a Equação (9-5), obtemos

$$\langle F \rangle = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v = -\frac{\Delta m}{\Delta t} \Delta v.$$

Note que, $\Delta m = n m$, é a quantidade de massa que colide com o alvo no intervalo de tempo Δt . Já $\Delta m/\Delta t$ é a taxa de colisão por unidade de tempo. Logo,

$$\langle F \rangle = - \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right) \Delta v. \quad (9 - 7)$$

Dois casos mais comuns podem ocorrer:

Caso i): os projéteis param após o impacto.

Neste caso,

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v.$$

Caso ii): os projéteis são rebatidos com o mesmo módulo de velocidade

Neste caso,

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v.$$

Paradinha 9-2

Uma bola é rebatida por uma parede vertical sem ter qualquer variação no módulo de sua velocidade. Se $\Delta \vec{p}$ for a variação do momento da bola, qual o sentido de $\Delta \vec{p}$?

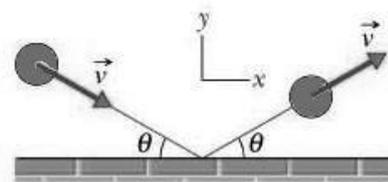


Figura 9-3 Referente à Paradinha 9-2.

Exemplo 9-1

Balas de uma metralhadora são disparadas horizontalmente contra uma parede vertical sólida em um treinamento. Cada bala tem massa de 3 g e saem da metralhadora a uma taxa de 120 balas/min, sendo de 500 m/s a velocidade de cada bala. As balas são rebatidas de volta sem variação no módulo de sua velocidade. Qual a força média que o fluxo de balas exerce sobre a parede?

Solução:

Tomemos o eixo dos x ao longo da trajetória das balas. De acordo com a Equação (9-7), $\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v$, sendo v o módulo da velocidade de cada bala. Logo,

$\langle F \rangle = - \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right) (-2v)$, onde $\Delta m = n m$, sendo n o número de balas que atingem a parede num intervalo de tempo Δt e m a massa de cada bala. Assim

$$\langle F \rangle = 2n m v$$

Substituindo pelos dados numéricos, obtemos

$$\langle F \rangle = 2 \times \left(\frac{120}{60} \text{ balas/s} \right) \times (3 \times 10^{-3} \text{ kg}) \times (5 \times 10^2 \text{ m/s}) = 6,0 \text{ N}.$$

9-3 Tipos de colisões

Em toda colisão a energia total sempre se conserva. Isto já era esperado de uma lei de conservação universal. Imagine dois corpos rígidos, de pequenas dimensões, em rota de colisão, sobre uma superfície lisa horizontal. Ao se chocarem, e durante um tempo muito pequeno, estes corpos estarão juntos, sofrerão uma deformação, possivelmente, não visível a olho nu. Como numa mola, cada corpo voltará ao seu formato original e seguirão em suas trajetórias, logo após o choque. Neste processo, imaginamos que o nosso sistema físico é fechado e isolado. Como não há força externa resultante atuando sobre o sistema, o momento linear total é conservado.

Se a energia cinética total do sistema não foi alterada pela colisão, ela é chamada de **colisão elástica**.

Rigorosamente falando, colisões elásticas só ocorrem em reações entre partículas atômicas, e subatômicas. Nestas reações, não ocorrem contacto entre as partículas nas respectivas regiões de interação.

No entanto, se no caso dos dois pequenos corpos acima alguma energia é transferida da energia cinética para outras formas de energia, tais como, energia térmica e sonora, tal colisão é chamada de **colisão inelástica**.

Duas bolas de bilhar ao se chocarem perdem energia cinética total na forma de energia sonora e térmica, fazendo do choque, uma colisão inelástica. No entanto, tais perdas não chegam a 3% do total, o que é praticamente desprezível. Numa boa aproximação, podemos considerar na prática tal colisão elástica.

Numa colisão inelástica, a maior perda de energia cinética do sistema ocorre quando os dois corpos permanecem juntos após a colisão. Tal colisão é chamada de **colisão perfeitamente inelástica**.

9-4 Colisão elástica unidimensional

Consideremos dois blocos de massas m_1 e m_2 em rota de colisão, deslizando sobre uma superfície horizontal lisa em um movimento unidimensional. Tome o corpo m_1 movendo-se na direção positiva do eixo dos x , com velocidade v_1 , e m_2 , com velocidade v_2 . Se a velocidade v_2 for na direção positiva, então $v_1 > v_2$, para haver colisão. No caso de $v_2 < 0$, m_2 virá ao encontro de m_1 .

Como não existe força externa atuando ao longo do eixo x , o momento total se conserva. Por outro lado, como o choque é considerado elástico, a energia cinética total também se conserva. Após o choque, vamos representar por v_1' e v_2' as velocidades de m_1 e m_2 , respectivamente. Logo, podemos escrever

$$\Delta P_x = 0 \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (9 - 8)$$

$$\Delta K = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{\text{antes da colisão}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2}_{\text{depois da colisão}} \quad (9 - 9)$$

São conhecidos m_1 , m_2 , v_1 , e v_2 , mas faltam conhecer as velocidades v_1' e v_2' . Isto é possível se fazer, haja visto, termos duas equações e duas incógnitas. Neste tipo de abordagem não foi necessário qualquer informação sobre a interação entre os dois corpos.

Fica mais fácil resolver o sistema, reescrevendo a Equação (9-8) na forma

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2), \quad (9 - 10)$$

e a Equação (9-9), na forma

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2). \quad (9 - 11)$$

Supondo $v_2' \neq v_2$ e $v_1' \neq v_1$, e sabendo que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, podemos dividir a Equação (9-11) pela Equação (9-10), obtendo

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad \text{ou} \quad \underbrace{\frac{v_1 - v_2}{\text{velocidade}}}_{\text{relativa antes}} = \underbrace{\frac{v_2' - v_1'}{\text{velocidade}}}_{\text{relativa depois}}.$$

Desta última equação, obtemos que

$$v_2' = v_1 + v_1' - v_2 \quad (9 - 12)$$

Substituindo este valor de v'_2 em (9-10), obtemos finalmente,

$$\boxed{v'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2}, \quad (9 - 13)$$

Usando este valor em (9-12), tem-se

$$\boxed{v'_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2}. \quad (9 - 14)$$

Casos de particular interesse

i) Massas iguais

Supondo $m_1 = m_2$ e usando as Equações (9-13) e (9-14), obtemos $v'_1 = v_2$ e $v'_2 = v_1$, ou seja, houve troca de velocidades entre as partículas.

ii) Alvo em repouso

Nesta situação, temos três subcasos de interesse:

ii)´ Massas iguais ($m_1 = m_2$)

As Equações (9-13) e (9-14) fornecem $v'_1 = 0$, ou seja, a partícula de massa m_1 para após o choque e transfere momento para m_2 , dando $v'_2 = v_1$, ou seja, m_2 sai com velocidade v_1 .

ii)´´ Alvo maciço ($m_2 \gg m_1$)

Analisando as Equações (9-13) e (9-14), nesta situação, encontramos que $v'_1 \approx v_1$ e $v'_2 = 0$.

É o caso de m_1 atingir uma parede maciça sólida ($m_2 \gg m_1$) e voltar com velocidade $-v_1$. A parede praticamente nada sofreu com o choque.

ii)´´´ Projétil maciço ($m_2 \ll m_1$)

Neste caso, $v'_1 \approx v_1$ e $v'_2 \approx 2v_1$.

É o caso de um trem atingir um carro!

Paradinha 9-3

Duas esferas rígidas de metal se aproximam em rota de colisão elástica frontal, com velocidades de mesmo módulo. Após a colisão, uma das esferas de massa m permanece em repouso. Qual a massa da outra esfera?

Exemplo 9-2

Duas pequenas esferas metálicas rígidas estão suspensas por fios idênticos verticais e mal se tocam, como mostrado na Figura 9-4. A esfera de massa m_1 é puxada para a esquerda até atingir uma altura h . Do repouso é largada até colidir elasticamente com a esfera de massa $m_2 > m_1$.

- Qual a velocidade de m_1 imediatamente após a colisão?
- E a de m_2 ?
- Quais seriam os resultados acima caso $m_1 = m_2$? Descreva o movimento subsequente das duas esferas neste caso.

Solução:

a) Neste cálculo podemos imaginar duas etapas:

Etapá 1: m_1 é solto de uma altura h . A velocidade de m_1 , imediatamente, antes de atingir m_2 , é calculada por conservação de energia, ou seja,

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}.$$

Etapá 2: O choque é considerado elástico. Os movimentos das esferas podem ser tratados como unidimensionais, imediatamente, antes e depois da colisão. Nesta direção nenhuma força externa atua no sistema das duas esferas

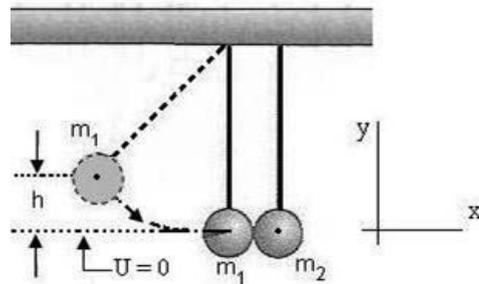


Figura 9-4 Referente ao Exemplo 9-2.

(no intervalo de tempo muito pequeno do choque, existe certa fricção entre as esferas e energia sonora, mas são efeitos desprezíveis).

Usando a Equação (9-13), com $v_2 = 0$, teremos

$v'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} < 0$, já que $m_2 > m_1$. Assim, m_1 é rebatido de volta com esta velocidade.

b) Pela Equação (9-14), v'_2 é obtido:

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} > 0.$$

c) Se $m_1 = m_2$, então $v'_1 = 0$ e $v'_2 = v_1$, como esperado. Neste caso, houve transferência de momento da esfera 1 para a esfera 2. Como o choque é considerado elástico, a segunda esfera sobe até uma altura h , depois retorna, atinge a primeira esfera parada, ela sobe de novo até a altura h , e assim sucessivamente, sem perda da energia mecânica no processo.

9-5 Colisão inelástica unidimensional

Neste caso, a variação da energia cinética total do sistema, ΔK , não é nula.

Se $\Delta K < 0$, parte da energia do sistema pode ter sido convertido em calor ou em outras formas de perda.

Se $\Delta K > 0$, uma parte da energia potencial do sistema foi liberada na colisão.

Em qualquer caso, o momento total do sistema é conservado, desde que não haja atuação de força externa da direção x do movimento. A energia total também é conservada.

9-6 Colisão perfeitamente inelástica unidimensional

Imagine dois corpos de massas m_1 e m_2 e velocidades v_1 e v_2 , respectivamente, na iminência de se chocarem. Se após o choque, eles ficarem juntos, teremos o que se denomina choque perfeitamente inelástico. Após o choque, os corpos se deslocam grudados com velocidade v' . Admitindo não haver qualquer força externa atuando no sistema formado pelos dois corpos na direção do movimento, teremos

$$\Delta P_x = 0 \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2 . \quad (9 - 15)$$

Nesta colisão parte da energia cinética se transforma em calor e outras formas de energia.

Paradinha 9-4

O bloco 1 e o bloco 2 estão em rota de colisão perfeitamente inelástica. Qual o momento linear final se seus momentos iniciais são respectivamente, $15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ e $-8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$?

Exemplo 9-3

Conforme mostrado na Figura 9-5, um bloco 1, de massa m_1 , está se movendo para a direita, com uma velocidade v_1 , e um bloco 2, de massa m_2 também está se movendo para a direita com velocidade $v_2 < v_1$. Uma mola com constante elástica k e massa desprezível, está fixa ao bloco 2. Despreze atrito entre os blocos e a superfície. Quando os blocos colidem, a compressão da mola é máxima no instante em que os blocos têm a mesma velocidade.

Calcule a compressão máxima.

Solução:

Na direção do movimento não existe nenhuma força externa atuando no sistema bloco 1 + (mola + bloco2). Mesmo durante o instante que os blocos colidem, a força elástica de compressão gerada pela mola e de natureza interna ao sistema.

Assim

$$\Delta P = 0 \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v' .$$

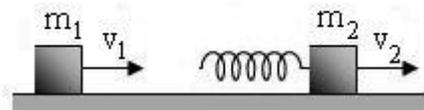


Figura 9-5 Referente ao Exemplo 9-3.

Pelo uso do teorema trabalho - energia cinética, a variação da energia cinética do sistema igual o trabalho realizado pela mola, ou seja,

$$\Delta K = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2}_{\text{depois da colisão}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right)}_{\text{antes da colisão}} = \frac{1}{2} kx_{\max}^2 > 0$$

O choque é perfeitamente inelástico.

Após uma pequena manipulação algébrica, com o sistema de equações acima, obtemos.

$$x_{\max} = v \sqrt{\frac{\mu}{k}},$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ e $v = v_1 - v_2$.

Veremos adiante que μ é chamada de massa reduzida do sistema e v é a velocidade relativa do bloco 2 em relação ao bloco 1.

Exemplo 9-4: Pêndulo balístico

Um pêndulo balístico está mostrado na Figura 9-6. O bloco de madeira maciça de massa M está pendurado por dois fios longos verticais. Uma bala de massa $m \ll M$ é disparada em direção ao bloco atingindo rapidamente o repouso ao penetrá-lo. Como resultado, o sistema **bloco + bola** se desloca para cima com o seu CM atingindo uma altura h , onde momentaneamente, pára. Qual é a velocidade da bala imediatamente antes da colisão? Considere $m = 8 \text{ g}$, $M = 6 \text{ kg}$ e $h = 5 \text{ cm}$.

Solução:

Neste problema temos duas etapas.

Etapas 1: No momento da colisão da bala com o bloco, nenhuma força externa atua na direção x , sobre o sistema $m_1 + M$. Assim, a colisão é totalmente inelástica e neste intervalo de tempo, pode ser tratada unidimensionalmente. Ou seja,

$$\Delta P_x = 0 \rightarrow mv = (m + M) v'$$

Etapas 2: Logo após o choque, a energia mecânica do sistema (bala + bloco + solo) se conserva desde que se faça a hipótese de que as perdas por aquecimento devido à penetração de m no bloco M ocorra entre a colisão e o começo da subida do bloco M . Assim sendo,

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gh.$$

Neste cálculo, a energia mecânica não é afetada pelas forças dos fios sobre M , pois elas são normais à trajetória em cada ponto, e portanto, não realizam trabalho. Tomamos o nível de referência da energia potencial gravitacional igual a zero, o nível inicial de M . Das duas equações acima, podemos eliminar a variável v' , obtendo

$$v = (1 + M/m) \sqrt{2gh},$$

que é a velocidade da bala.

Para se ter uma ordem de grandeza, usamos os valores numéricos na equação acima, e teremos.

$$v = \left(1 + \frac{6,0 \text{ kg}}{0,008 \text{ kg}}\right) \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(0,05 \text{ m})} \approx 744 \text{ m/s}.$$

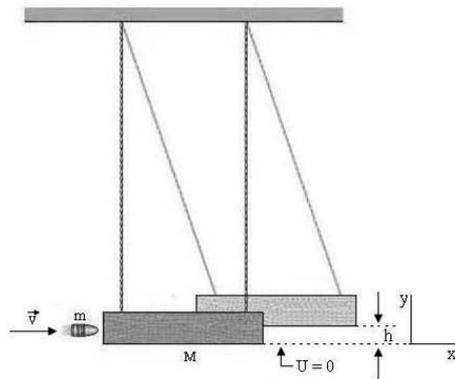


Figura 9-6 Pêndulo balístico usado para medir velocidades de balas.

9-7 Colisão bidimensional

Se dois corpos colidem e seus movimentos não estão ao longo de uma única direção, a colisão é não frontal e deve ser tratada bidimensionalmente.

Assim, consideremos uma colisão bidimensional não frontal de um corpo de massa m_1 , a uma velocidade \vec{v}_1 , paralela ao eixo x , com outro corpo, de massa m_2 ,

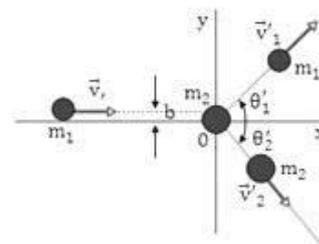


Figura 9-7 Choque não-frontal de dois corpos.

inicialmente, em repouso na origem, conforme mostrado na Figura 9-7. Este tipo de colisão é também chamado de **colisão oblíqua**. A distância entre os CM dos corpos é representada por b e é chamada de **parâmetro de impacto** (também conhecido por **parâmetro de choque**). Note que b é perpendicular à \vec{v}_1 .

Após o choque, as novas velocidades de m_1 e m_2 são \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 , respectivamente. Estas velocidades finais formam ângulos θ'_1 e θ'_2 , com respeito à direção x . Elas são mostradas na Figura 9-7.

Para o tratamento analítico do problema, é conveniente usar o sistema de coordenadas yx mostrado na figura.

A quantidade de momento linear do sistema é dada por

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 ,$$

e é conservada. Projetada ao longo dos eixos x e y , teremos

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta'_1 + m_2 v'_2 \cos\theta'_2 , \tag{9 - 16}$$

$$0 = m_1 v'_1 \text{sen}\theta'_1 - m_2 v'_2 \text{sen}\theta'_2 . \tag{9 - 17}$$

Caso a colisão seja **elástica**, $\Delta K = 0$. E assim, temos a relação

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2}_{K_f} . \tag{9 - 18}$$

Precisamos de mais uma equação para resolver o sistema, já que temos quatro incógnitas, v'_1 , v'_2 , θ'_1 e θ'_2 . Esta quarta equação poderia, por exemplo, depender do parâmetro b ou do tipo de interação entre os corpos que colidem.

Para uma colisão inelástica, usamos a grandeza Q definida por

$$Q = K_f - K_i \neq 0, \tag{9 - 19}$$

onde K_f e K_i estão expressos na Equação (9-18). Se $Q < 0$, parte da energia cinética inicial é perdida, transformando-se, por exemplo, em calor. Se $Q > 0$, há um ganho de energia cinética.

A grandeza Q é chamada de **fator Q** da colisão.

Observação:

Colisões em três dimensões não adicionam qualquer novo conhecimento em física e trazem mais dificuldades matemáticas. Logo, não serão discutidas neste livro.

Exemplo 9-5

Considere um choque elástico oblíquo entre dois corpos de mesma massa estando um deles, inicialmente, em repouso. Mostre que as velocidades finais são vetores, perpendiculares entre si e os vetores velocidade desta colisão formam um triângulo retângulo.

Solução:

Neste caso,

$$m_1 \vec{v}_1 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \tag{9 - 20}$$

A Equação

(9-20) implica que os vetores \vec{v}'_1 , \vec{v}'_2 e \vec{v}_1 formam um triângulo

Como a colisão é elástica, $\Delta K = 0$, o que implica

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m v'^2_1 + \frac{1}{2} m v'^2_2 \Rightarrow v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2 \tag{9 - 21}$$

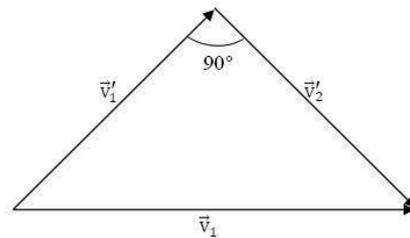


Figura 9-8 Os vetores velocidade numa colisão não-frontal entre corpos de mesma massa, formam um triângulo retângulo.

Já a Equação (9-21), representa o teorema de Pitágoras.

As equações (9-20) e (9-21) geram a Figura 9-8 que prova o que queríamos demonstrar.

Paradinha 9-5

Em um jogo de sinuca, a bola branca com velocidade v colide obliquamente com a bola preta, inicialmente, em repouso. Ambas têm a mesma massa. A bola branca após o choque é desviada de 45% de sua direção de incidência. Qual a velocidade da bola preta após a colisão?

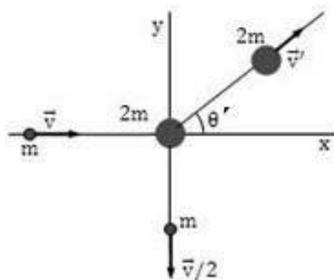
Exemplo 9-6

Uma esfera de massa m move-se ao longo do eixo positivo dos x com velocidade v , e colide contra outra esfera, inicialmente, em repouso, de massa duas vezes maior. Após a colisão, a esfera menos maciça move-se no sentido negativo do eixo dos y com velocidade de módulo $v/2$.

- a) Qual o vetor velocidade da esfera menos maciça?
- b) Que fração de energia cinética inicial é perdida devido à colisão?

Solução:

a) A Figura 9-9 ilustra o problema. A conservação do momento ao longo das direções x e y , dão



$$\begin{cases} \sum X \rightarrow m v = 2m v' \cos \theta' \\ \sum Y \rightarrow 0 = 2m v' \sin \theta' - m v/2, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} m v = 2m v' \cos \theta' \\ m v/2 = 2m v' \sin \theta'. \end{cases}$$

Figura 9-9 Referente ao Exemplo 9-6

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos $\text{tg } \theta' = 1/2 \Rightarrow \theta' \approx 27^\circ$.

O valor de v' pode ser dado pela segunda equação acima, ou seja,

$$v' = \frac{1}{\text{sen } \theta'} \frac{v}{4}.$$

(A primeira equação fornece o mesmo valor para v' , já que $\cos \theta' = 2/\sqrt{5}$).

Notando que $\text{sen } \theta' = \frac{\text{tg } \theta'}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \theta'}} = \frac{1/2}{\sqrt{1 + 1/4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

então,

$$v' = \frac{\sqrt{5}}{4} v.$$

O vetor \vec{v}' é assim caracterizado pelo seu módulo $\sqrt{5} v/4$ e o ângulo $\theta' \approx 27^\circ$, que fornece sua direção e sentido, ou seja,

$$\vec{v}' = (\sqrt{5} v/4) \cos \theta' \hat{x} + (\sqrt{5} v/4) \sin \theta' \hat{y} = (v/2) \hat{x} + (v/4) \hat{y}.$$

b) As energias cinéticas antes e depois da colisão são dadas por

$$K_i = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$e K_f = \frac{1}{2} m \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} (2m) v'^2 = \frac{1}{8} m v^2 + \frac{5m}{16} v^2 = \frac{7}{16} m v^2.$$

O fator Q da colisão é $Q = K_f - K_i = - 1/2 m v^2 < 0 \Rightarrow$ perda de energia cinética inicial.

A fração perdida é calculada pela relação:

$$\rho = \frac{K_i - K_f}{K_i} = 1/8, \text{ ou seja, cerca de } 12,5\% \text{ de energia cinética inicial é perdida pela colisão. Logo, esta é uma}$$

colisão bidimensional oblíqua inelástica.

9-8 Coeficiente de restituição

Na colisão de objetos, tais como esferas, é realístico imaginar que os mesmos tenham algum grau de **elasticidade**. O tempo durante o qual tais objetos estão em contacto é composto de

um **tempo de compressão**, durante o qual uma pequena deformação toma lugar, e um **tempo de restituição**, durante o qual o formato do objeto é restaurado.

É plausível admitir, e a experiência comprova, que tais objetos são deformáveis microscopicamente, tais que as forças exercidas só estão presentes, ao longo da **normal comum**, passando pelo ponto de contacto entre eles (e para esferas, por exemplo, também passando através de seus centros de massa). Como consequência, as velocidades tangenciais, antes e após o choque, são iguais.

Um conceito *empírico*, útil na solução de problemas, é o chamado **coeficiente de restituição**, definido a seguir.

Seja $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ e $\vec{v}'_{12} = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$ as velocidades relativas de dois corpos ao longo de uma normal comum, antes e depois de uma colisão. A grandeza ϵ , chamada de **coeficiente de restituição**, é definida através da relação,

$$\vec{v}'_{12} = -\epsilon \vec{v}_{12}. \quad (9 - 22)$$

Ela depende dos materiais dos quais os corpos são feitos e é geralmente tomado como uma constante entre 0 e 1. Se $\epsilon = 0$, a colisão é dita **perfeitamente inelástica**. Se $\epsilon = 1$, a colisão é dita **perfeitamente elástica**, ou simplesmente, **elástica**.

Paradinha 9-6

Uma bola repica a até 90% de sua altura original

- Que fração de sua energia mecânica é perdida a cada repicada?
- Qual o valor de ϵ do sistema bola + solo?

Exemplo 9-7

Discuta em termos do coeficiente de restituição, as colisões unidimensionais: a) perfeitamente inelástica; b) perfeitamente elástica.

Solução:

a) Em geral, temos para a colisão entre dois corpos, que

$$v'_1 - v'_2 = -\epsilon (v_1 - v_2),$$

e a conservação do momento ,

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Resolvendo este sistema de equações para v'_1 e v'_2 , obtemos

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2, \quad (9 - 23)$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \quad (9 - 24)$$

Inicialmente, fazendo $\epsilon = 0$, teremos

$$v'_1 \equiv \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Assim, após a colisão, as duas partículas movem-se com a mesma velocidade, o que caracteriza que elas se movem como se estivessem grudadas como uma única partícula. Isto define um choque perfeitamente inelástico.

b) Já fazendo $\epsilon = 1$ nas Equações (9-23) e (9-24), obtemos

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2,$$

e

$$v'_2 \equiv \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2,$$

que caracterizam, como já vimos pelas Equações (9-13) e (9-14), um choque elástico.

Exemplo 9-8

Uma pequena esfera cai verticalmente sobre um plano inclinado fixo, de inclinação α em relação ao plano horizontal, com uma velocidade v . O coeficiente de restituição é ϵ . Com que velocidade a esfera é repicada?

Solução:

Vamos adotar um sistema de coordenadas onde o eixo x é paralelo ao plano inclinado e o eixo y normal, com sentido positivo para cima.

Com auxílio da Equação (9-22), podemos escrever

$$v'_n - V'_n = -\varepsilon (v_n - V_n),$$

onde $v'_n = v' \cos \beta$ e $v_n = -v \cos \alpha$, sendo α a inclinação do plano inclinado, que também é o ângulo entre \vec{v} e a normal ao plano inclinado. Já β é o ângulo de \vec{v}' com a normal. As velocidades do plano inclinado, \vec{V} e \vec{V}' , são nulas, pois, o plano inclinado permanece em repouso. É fácil verificar que

$$\vec{v} = (-v \sin \alpha) \hat{x} + (-v \cos \alpha) \hat{y},$$

$$\vec{v}' = (-v' \sin \beta) \hat{x} + (v' \cos \beta) \hat{y}.$$

Assim

$$v' \cos \beta = +\varepsilon \cos \alpha. \tag{9-25}$$

No choque só existe força atuando ao longo da normal, o que implica dizer que as componentes tangenciais das velocidades são iguais, ou seja,

$$v' \sin \beta = v \sin \alpha. \tag{9-26}$$

Dividindo a Equação (9-26) pela (9-25), obtemos

$$\text{tg } \beta = \frac{1}{\varepsilon} \text{tg } \alpha$$

Da Equação (9-26), temos também que

$$v' = v \frac{\sin \alpha}{\sin \beta},$$

$$\text{onde } \sin \beta = \frac{\text{tg } \beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta}}.$$

Com um pouco de manipulações algébricas, podemos finalmente calcular v' , em função dos dados do problema, ou seja,

$$v' = v \cos \alpha \sqrt{\varepsilon^2 + \text{tg}^2 \alpha}.$$

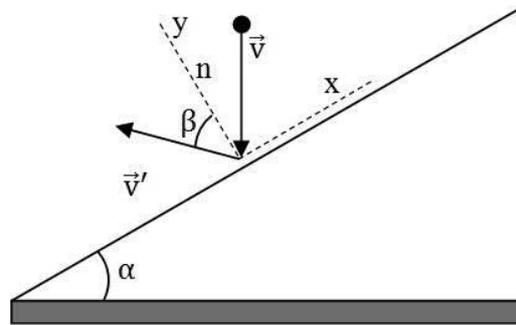


Figura 9-10. Referente ao Exemplo 9-8.

Exemplo 9-9 Um caso geral um pouco mais complicado

Duas esferas de massas m_1 e m_2 , respectivamente, colidem obliquamente, conforme mostrado na Figura 9-11. Ache suas velocidades, \vec{v}'_1 e \vec{v}'_2 após o impacto, em função de suas velocidades v_1 e v_2 , antes do impacto, e dos ângulos θ_1 e θ_2 que elas formam com a normal comum ao longo da direção da colisão:

Solução:

O sistema de coordenadas y x mostrado na Figura 9-11 parece adequado ao problema. A direção x coincide com a normal comum da direção do impacto, e passa pelos CM das duas esferas.

Este problema é mais complexo e exige manipulações algébricas mais delicadas.

Conservação de momento, fornece

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2. \tag{9-27}$$

Com auxílio da figura podemos escrever que

$$\vec{v}_1 = v_1 (\cos \theta_1 \hat{x} - \sin \theta_1 \hat{y}),$$

$$\vec{v}_2 = v_2 (\cos \theta_2 \hat{x} - \sin \theta_2 \hat{y}), \tag{9-28}$$

$$\vec{v}'_1 = v'_1 (\cos \theta'_1 \hat{x} - \sin \theta'_1 \hat{y}),$$

$$\vec{v}'_2 = v'_2 (\cos \theta'_2 \hat{x} - \sin \theta'_2 \hat{y}).$$

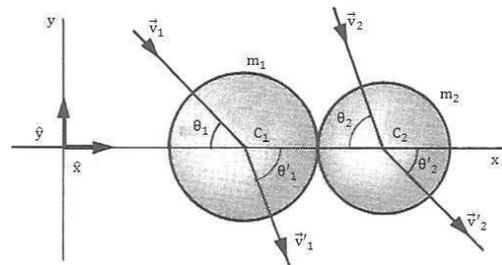


Figura 9-11 Referente ao Exemplo 9-9.

Substituindo as Equações (9-28) na Equação (9-27) e igualando os coeficientes de \hat{x} e \hat{y} , temos

$$m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 = m_1 v'_1 \cos \theta'_1 + m_2 v'_2 \cos \theta'_2, \tag{9-29}$$

$$m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 = m_1 v'_1 \sin \theta'_1 + m_2 v'_2 \sin \theta'_2, \tag{9-30}$$

Pela definição de coeficiente de restituição sabemos também que

$$(\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2) \cdot \hat{x} = \vec{v}'_1 \cdot \hat{x} - \vec{v}'_2 \cdot \hat{x} \quad \text{e} \quad (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \hat{x} = \vec{v}_1 \cdot \hat{x} - \vec{v}_2 \cdot \hat{x},$$

e conseqüentemente,

$$\vec{v}'_1 \cdot \hat{x} - \vec{v}'_2 \cdot \hat{x} = -\varepsilon (\vec{v}_1 \cdot \hat{x} - \vec{v}_2 \cdot \hat{x}).$$

Usando as Equações (9-28), obtemos

$$v'_1 \cos \theta'_1 - v'_2 \cos \theta'_2 = -\varepsilon (v_1 \cos \theta_1 - v_2 \cos \theta_2). \quad (9-31)$$

Com as velocidades tangenciais antes e depois do choque são iguais, teremos

$$\vec{v}_1 \cdot \hat{y} = \vec{v}'_1 \cdot \hat{y} \Rightarrow v_1 \sin \theta_1 = v'_1 \sin \theta'_1, \quad (9-32)$$

$$\vec{v}_2 \cdot \hat{y} = \vec{v}'_2 \cdot \hat{y} \Rightarrow v_2 \sin \theta_2 = v'_2 \sin \theta'_2. \quad (9-33)$$

A Equação (9-30) é automaticamente satisfeita se usarmos as Equações (9-32) e (9-33). Verifique!

Das Equações (9-30) e (9-31), podemos obter

$$v_1 \cos \theta'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} [(m_1 - \varepsilon m_2) v_1 \cos \theta_1 + m_2(1 + \varepsilon) v_2 \cos \theta_2]$$

$$v_2 \cos \theta'_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1(1 + \varepsilon) v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - \varepsilon m_1) v_2 \cos \theta_2]$$

Agora usando as Equações (9-32) e (9-33), finalmente obtemos, após alguma manipulação algébrica,

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_1 (\cos \theta'_1 \hat{x} - \sin \theta'_1 \hat{y}) = \frac{1}{m_1 + m_2} [(m_1 - \varepsilon m_2) v_1 \cos \theta_1 + m_2(1 + \varepsilon) v_2 \cos \theta_2] \hat{x} - v_1 \sin \theta_1 \hat{y},$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}'_2 (\cos \theta'_2 \hat{x} - \sin \theta'_2 \hat{y}) = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1(1 + \varepsilon) v_1 \cos \theta_1 + (m_2 - \varepsilon m_1) v_2 \cos \theta_2] \hat{x} - v_2 \sin \theta_2 \hat{y}.$$

9-9 Referencial do centro de massa

Imaginemos um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 fechado e isolado. A velocidade do seu CM não varia em uma colisão porque não existe força externa atuando neste sistema. O referencial alternativo colocado no CM é chamado de **referencial do centro de massa (RCM)**. Ele se move com uma velocidade constante, \vec{v}_{CM} , em relação ao referencial original, chamado de **referencial do laboratório (RL)**. Assim sendo, o referencial do centro de massa é um referencial inercial.

Considere a partícula de massa m_1 . O vetor posição de m_1 em relação ao CM é dado por $\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}$. A derivada em relação ao tempo desta grandeza $\Delta \vec{r}$, fornece a velocidade de m_1 em relação ao CM. Raciocínio similar pode ser feito para m_2 . Assim em geral, se \vec{v}_i é a velocidade de uma partícula i ($i = 1, 2$) em relação ao RL, sua velocidade \vec{u}_i em relação ao RCM é dada por

$$\boxed{\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}} \quad (9-34)$$

A quantidade de movimento total do sistema no RCM é zero, já que neste sistema, o CM está em repouso. Assim sendo, no RCM, uma colisão de duas partículas de massas m_1 e m_2 geram quantidades de movimento $m_1 \vec{u}_1$ e $m_2 \vec{u}_2$, antes da colisão, e $m_1 \vec{u}'_1$ e $m_2 \vec{u}'_2$, depois da colisão, que obedecem à relação

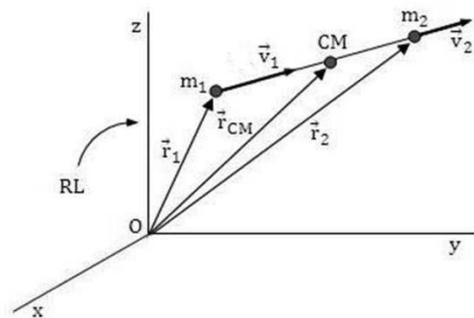


Figura 9-12 Duas partículas de massas m_1 e m_2 com velocidades \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , respectivamente, em rota de colisão, visto de um RL. Admitir $v_1 > v_2$.

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{u}'_1 + m_2 \vec{u}'_2 = 0. \quad (9 - 35)$$

Das Equações (9-35), obtemos que

$$m_1 \vec{u}_1 = -m_2 \vec{u}_2 \quad \text{e} \quad m_1 \vec{u}'_1 = -m_2 \vec{u}'_2, \quad (9 - 35)'$$

o que implica dizer que os momentos das duas partículas permanecem iguais e opostos, antes e depois da colisão.

Note que $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$, e portanto, as velocidades das duas partículas no RCM são respectivamente,

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM}, \quad (9 - 36)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}, \quad (9 - 37)$$

como já obtido na Equação (9-34).

Usando a expressão para \vec{v}_{CM} acima, podemos obter os valores de \vec{u}_1 e \vec{u}_2 , mais explicitamente, ou seja,

$$\vec{u}_1 = m_2 \vec{v} / (m_1 + m_2), \quad (9 - 36)'$$

e

$$\vec{u}_2 = -m_1 \vec{v} / (m_1 + m_2), \quad (9 - 37)'$$

onde $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Das Equações de (9-35) a (9-37)', após a colisão, as velocidades das duas partículas são dadas por

$$\vec{u}'_1 = \hat{n} m_2 v / (m_1 + m_2), \quad (9 - 36)''$$

$$\vec{u}'_2 = -\hat{n} m_1 v / (m_1 + m_2), \quad (9 - 37)''$$

onde \hat{n} é o versor na nova direção da partícula m_1 após a colisão. Podemos afirmar que no RCM a colisão simplesmente roda as velocidades \vec{u}_1 e \vec{u}_2 para uma nova direção, mas que permanecem iguais em módulo e opostas.

Para retornar ao RL, nós devemos simplesmente adicionar a estas expressões a velocidade v_{CM} do centro de massa.

Nenhuma informação adicional acerca da colisão pode ser obtida só das leis de conservação do momento e energia. A direção do versor \hat{n} , por exemplo, depende de mais dados relativos à colisão.

Assim sendo, a matemática das colisões fica muito mais simples quando analisada em um RCM. Tente entender por quê! Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 9-10

Considere uma partícula de massa m_1 movendo-se em rota de colisão com outra partícula de massa m_2 e velocidade \vec{v}_2 , sendo $v_1 > v_2$. Elas interagem via uma energia potencial $U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$.

a) Qual a energia total E do sistema considerado isolado e fechado, se visto do RL?

b) Escreva uma expressão para esta energia no RCM.

Solução:

a) No RL, a energia total é dada pela expressão

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$



Figura 9-13 Duas partículas em rota de colisão vistas no RL e no RCM. Considere $v_1 > v_2$. Admita não existir força externa atuando no sistema, considerado fechado e isolado.

b) Para o cálculo de E no RCM vamos precisar do cálculo de \vec{r}_{CM} , ou seja,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} .$$

Vamos usar também a distância relativa entre as duas partículas

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 .$$

Destas relações de \vec{v}_{CM} e \vec{v} , podemos obter, após alguma manipulação que

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{CM} - \frac{m_2}{M} \vec{v} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{CM} + \frac{m_1}{M} \vec{v} , \text{ onde } M = m_1 + m_2 .$$

Substituindo estes valores na expressão para E, dada pela Equação (9-38), obtemos

$$E = \underbrace{\left[\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right]}_A + \underbrace{\left[\frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) \right]}_B , \tag{9}$$

onde $\mu = m_1 m_2 / M$, é chamado de massa reduzida do sistema (Ver Exemplo (9-3), onde $U(r) = \frac{1}{2} k r^2$).

No RCM, verificamos que o problema foi separado em duas partes, A e B. Na parte A tem-se a energia cinética de um simples corpo de massa M e velocidade v_{CM} . No termo B, o problema é reduzido a um único corpo de massa μ , sofrendo uma interação $U(r)$. Tudo fica mais simples. Para passar para o RL, basta adicionar o termo, $1/2 M v_{CM}^2$, da energia cinética do CM do sistema.

Exemplo 9-11

Um bloco de massa m_1 desliza ao longo de uma superfície lisa com velocidade v_1 . Na frente, desliza sem atrito, na mesma direção e sentido, outro bloco de massa m_2 com velocidade $v_2 < v_1$. Uma mola está presa atrás de m_2 , com massa desprezível e constante elástica k.

- a) Escreva uma expressão para a energia total do sistema durante a colisão no RL.
- b) Qual esta expressão no RCM?
- c) Calcule a deformação máxima da mola após o impacto:

Solução:

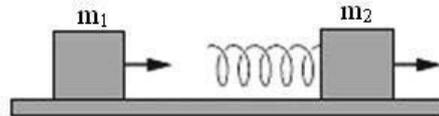


Figura 9-14 Referente ao Exemplo 9-11.

a) No RL esta energia é dada por

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + U(x),$$

onde $U(x) = \frac{1}{2} k |x_1 - x_2|^2$.

b) No RCM, a expressão para E é dada, de acordo com a Equação (9-39), por

$$E = \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right),$$

onde $M = m_1 + m_2$, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $v_{CM} = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$, $x = |x_1 - x_2|$, e finalmente, a velocidade relativa $v = v_1 - v_2$.

c) Após os blocos colidirem, a compressão da mola é máxima no instante em que têm a mesma velocidade. No instante antes do impacto, a energia do sistema no RCM é dada por

$$\frac{1}{2} \mu v^2 , \tag{9 – 40}$$

e após o impacto até a compressão máxima ocorrer, a energia passa a ser

$$\underbrace{\frac{1}{2} \mu v^2}_0 + \frac{1}{2} k x_{max}^2 = \frac{1}{2} k x_{max}^2 . \tag{9 – 41}$$

Igualando as Equações (9-40) e (9-41), obtemos

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max} = v \sqrt{\frac{\mu}{k}},$$

que é o valor pedido.

9-10 Pausa para descontração:

Alguns casos interessantes de transferência de momento numa colisão

Na nossa vida cotidiana nos deparamos com várias formas da utilização da lei de conservação do momento. A seguir, vamos ilustrar isto com alguns casos interessantes.

Possivelmente, você já notou que gatos caindo de grandes alturas em geral sobrevivem à queda? Estudos publicados* mostram que quedas de alturas maiores que seis andares dão maiores chances disto acontecer. Na queda, o gato, instintivamente, reorienta o corpo colocando as patas embaixo dele. Como o homem, o gato se sente altamente inseguro e nervoso com o efeito da aceleração gravitacional durante a parte inicial da queda. Despencando de uma altura maior, a resistência do ar começa a aumentar devido ao gato tornar seu corpo mais espichado e não mais curvado, de tal modo que sua área útil, perpendicular à velocidade de queda, aumenta. No limite, a resistência do ar poderá se tornar igual ao seu peso. Nesta situação, o gato passará a cair sem aceleração, alcançando a velocidade terminal, então, suas chances de sobrevivência aumentarão bastante.

Newton em sua obra propôs um modelo aplicável a situações similares ao caso tratado, onde o ar pode ser tratado

como um fluido formado de um grande número de partículas por unidade de volume. Cada partícula é considerada como tendo uma massa muito pequena, se comparada, por exemplo, com a massa do gato. A área útil mencionada acima ao se deslocar para baixo vai colidindo com tais partículas, transferindo *momenta*. Mas se o fato for observado de um referencial preso ao gato, a área é considerada como em repouso e atingida pelas partículas. Com este raciocínio se pode calcular a força de arrasto. Isto será motivo do problema 6 deste capítulo. Outro exemplo é o caso de lagartos que escapam de perseguição correndo sobre a água. Como um lagarto-basilisco consegue correr sobre a água sem se afundar? Não apenas os lagartos jovens e leves escapam dos predadores dessa maneira, mas os adultos, mais velhos e mais pesados, fazem o mesmo. A uma distância adequada do inimigo, o basilisco pode sair nadando, mergulhar ou ficar submerso por até dois minutos - uma tática útil na hipótese de o predador ser uma ave de rapina. Suas pernas longas e fortes e seus pés com dedos longos e escamados lhe permite correr sobre a água.



Figura 9-15. Basilisco correndo sobre a água.

Durante uma corrida, cada passo ocorre quando o lagarto bate a pata na água. O impacto produz uma força reação de sustentação para cima produzida pela água. Mas como a água é um fluido de baixa viscosidade (pouco atrito interno das moléculas), o pé logo começa a afundar na água. Ao afundar, a pata cria um bolsão de ar, bolsão este gerado por duas forças: uma para baixo combinada com outra para trás. O empurrão para trás exerce no lagarto um momento para frente, que possibilita que ele corra. Como o lagarto não deve lutar contra o arrasto da água, puxa a perna imediatamente, para fora da cavidade antes que a água a invada e envolva a pata e a perna. Nesse instante, a outra perna começa a dar um passo seguinte, batendo na água. Embora o lagarto realmente afunde um pouco, a força média para cima que ele experimenta com a sequência de batidas com os pés é suficiente para sustentá-lo compensando a força gravitacional.

Grandes bailarinas experientes parecem flutuar no palco durante um salto conhecido como *grand jeté*. É óbvio que ninguém pode desligar a gravitação durante um salto. Qual é então a explicação para esse caso de aparente flutuação no ar?

A flutuação no ar, não passa de ilusão. Esta ilusão vem do resultado de uma mudança da posição dos braços e das pernas da bailarina, logo após, um impulso vertical aplicado nos pés para o salto que se combina com o movimento

horizontal antes iniciado. Conforme visto na Figura 9- 16, ela levanta os braços e estica as pernas horizontalmente, assim que os pés deixam o chão.



Figura 9-16. Grand jeté dado por uma bailarina.

*W. O. Whitney e C. J. Mehlhaff, "High-Rise Syndrome in Cats", The Journal of the American Veterinary Medical Association, 1987
Essas ações elevam o centro de massa relativamente ao corpo, embora o movimento do centro de massa em relação ao palco siga rigorosamente uma trajetória parabólica. Numa situação relaxada, o CM de uma pessoa se

situa um pouco abaixo do umbigo. Com as novas posições da bailarina, o seu CM passa a se situar em relação ao resto do corpo, um pouco acima do umbigo, deslocando assim, neste processo, o torso e a cabeça para cima. Para compensar tal elevação, a bailarina dobra, na parte mais alta da trajetória, sua cabeça para trás de modo a dar uma impressão à plateia de que sua cabeça seguiu uma trajetória horizontal.

Assim tem-se a impressão de que a bailarina flutuou graciosamente no grande salto!

Alguns jogadores experientes de basquete também parecem flutuar no ar durante um salto em direção à cesta, o que lhes confere mais tempo para trocar a bola de mão antes de encestá-la. Seguem uma trajetória praticamente, horizontal.

Um jogador pode retificar, da mesma forma, o trajeto percorrido por sua cabeça, durante um salto, se levantar as pernas, erguer os braços e a bola. Ainda que erga os braços e a bola em direção à cesta durante um salto próximo à cesta, o jogador raramente levanta as pernas, e a ligeira retificação do trajeto sofrida pela cabeça dificilmente vai confundir um jogador da defesa que salta ao lado do jogador e que tenta um arremesso.

Certamente, outros esportes utilizam as técnicas descritas acima. Você poderia pensar em outros exemplos interessantes?

Material extra curricular sugerido

“O Circo Voador da Física”, Jearl Walker, LTC, 2008

Resumo

Impulso

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \quad (9 - 3)$$

Teorema do impulso-momento

$$\vec{\Delta} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \quad (9 - 4)$$

Força média atuando numa colisão num pequeno intervalo

$$\langle \vec{F} \rangle = \vec{J} / \Delta t \quad (9 - 5)'$$

Força média para um fluxo constante de partículas colidindo com um alvo fixo

$$\langle \vec{F} \rangle = -\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) \vec{\Delta} v, \quad (9 - 7)$$

onde $\Delta m / \Delta t$ é a taxa de colisão da massa com o alvo e $\vec{\Delta} v$ é variação na velocidade de cada projétil.

Colisão elástica unidimensional

Para um sistema **fechado e isolado**, o momento total na colisão é conservado. Também é conservada a energia cinética total, $\Delta K = 0$.

Após a colisão, as velocidades finais para as massas m_1 e m_2 são respectivamente,

$$v'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_2, \quad (9 - 13)$$

$$v'_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_2, \quad (9 - 14)$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades antes da colisão para a massa m_1 e m_2 , respectivamente

Colisão inelástica unidimensional

Nesta colisão de dois corpos a energia cinética do sistema não é conservada, ou seja, $\Delta K \neq 0$. Se o sistema for **fechado e isolado**, o momento total se conserva.

Colisão bidimensional

Se o choque entre dois corpos **não** é frontal, ele é dito ser bidimensional.

Para um sistema **fechado e isolado**, o momento total se conserva, $\Delta \vec{P} = 0$.
 Se há conservação de energia cinética, $\Delta K = 0$, o choque é **elástico**.
 Caso $\Delta K \neq 0$, o choque é **inelástico**.

Questões conceituais

1) Uma granada é lançada onde sua velocidade inicial \vec{v}_0 forma um ângulo θ_0 com a horizontal. A granada explode no ponto de altura máxima de sua trajetória. Os vetores representados por a, b, c, d, e, f seriam velocidades iniciais dos fragmentos da explosão. De cada alternativa na coluna à esquerda, escolha na coluna à direita, a opção mais adequada:

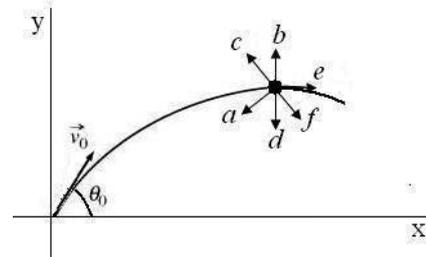


Figura 9-17 Figura Referente à questão 1.

- i) A granada explode em duas partes.
- ii) A granada explode em três partes
- iii) A granada não explode

- i)' a, d
- ii)' e, f, d
- iii)' e
- iv)' b, f
- v)' b, d
- vi)' Nenhuma das direções mostradas

2) Duas bolas de bilhar de massas m_1 e m_2 , têm velocidades v_1 e $v_2 = 0$, respectivamente. Após uma colisão frontal elástica unidimensional, eles se movem com velocidades v'_1 e v'_2 , respectivamente.

De cada afirmativa na coluna à esquerda, escolha a afirmativa correspondente na coluna à direita que mais se adequa:

- i) $m_1 = m_2$
- ii) $m_1 \ll m_2$
- iii) $m_1 \gg m_2$

- i)' $v'_1 = v'_2 = 0$
- ii)' $v'_1 = v_1$, $v'_2 = 2v_1$.
- iii)' $v'_1 = 0$, $v'_2 = v_1$.
- iv)' $v'_1 = -v_1$, $v'_2 = 0$.
- v)' $v'_1 = (m_1/m_2) v_1$, $v'_2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_1$.

3) Deixa-se cair uma esfera maciça de uma altura H sobre uma superfície plana. Seja ϵ o coeficiente de restituição entre a esfera e a superfície e h a altura que a esfera atinge após o choque. De cada afirmativa da coluna à esquerda, escolha a afirmativa que mais se adequa na coluna à direita.

- i) $\epsilon = 0$
- ii) $\epsilon = 1/2$
- iii) $\epsilon = 1$

- i)' $h = H$
- ii)' $h \neq 0, h < H$
- iii)' $h > H$
- iv)' Choque perfeitamente inelástico.

4) Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão em rota de uma colisão unidimensional em um plano sem atrito. Antes da colisão, a partícula m_2 está em repouso e após a colisão, a partícula m_1 passa a ficar em repouso.

O coeficiente de restituição, ϵ , nesta colisão é dado por:

- a) $\epsilon = 1$; b) $\epsilon = 1 + (m_2/m_1)$; c) $\epsilon = 1 - (m_2/m_1)$; d) $\epsilon = m_1/m_2$; e) $\epsilon = m_2/m_1$.

5) Uma bola de bilhar de massa m_1 se choca com outra de massa m_2 estacionária. Das condições de massa abaixo, qual a condição para a segunda bola receber o máximo de energia cinética?

- a) $m_1 < m_2$; b) $m_1 > m_2$; c) $m_1 = m_2$; d) nenhuma das condições mencionadas.

6) Nas mesmas condições da questão 5, em que condição a segunda esfera recebe o máximo de velocidade possível?

7) Quais são as respostas das questões 5 e 6 se a bola se choca com uma série de outras bolas, inicialmente, todas em repouso?

8) Um brinquedo popular utiliza o esquema mostrado na Figura 9-18, onde uma série de bolinhas podem balançar como pêndulos. As bolinhas são idênticas e podem realizar choques elásticos frontais. Imagine levantar a bolinha da extremidade à esquerda e depois soltá-la. O que acontece com o movimento subsequente das demais bolinhas?

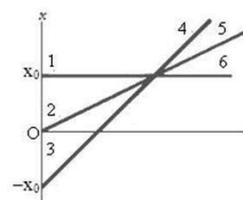
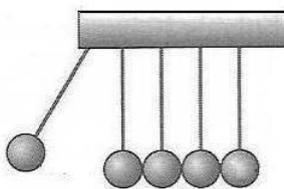


Figura 9-18 Referente à questão 8.

9) Uma partícula de massa $m_1 = 1\text{ kg}$ e velocidade 2 m/s colide frontalmente com outra partícula de massa $m_2 = 2\text{ kg}$, em choque inteiramente inelástico. As energias cinéticas do sistema, antes da colisão, nos sistemas laboratório e CM, são iguais? Justifique sua resposta.

10) Um bate-estacas tem uma massa $m = 2\text{ ton}$ e está a uma altura inicial de $h = 4\text{ m}$. O impulso transmitido à estaca pela queda é

- $17,7\text{ ton} \times \text{m/s}$;
- $-17,7\text{ ton} \times \text{m/s}$;
- insignificante, face a sua altura;
- nenhuma das alternativas acima.

11) Dois corpos sofrem uma colisão elástica unidimensional ao longo de um eixo x . A Figura 9-19 mostra o gráfico das posições dos corpos e do centro de massa (CM) dos mesmos, como funções do tempo t . Olhando o gráfico, escolha a opção correta:

- Inicialmente, os dois corpos estavam se movendo ou um deles estava em repouso.
- A linha 1 corresponde ao movimento do CM antes da colisão e a linha 4 depois da colisão.
- A massa do corpo que estava se movendo antes da colisão é igual à do outro corpo.

Figura 9-19 Referente à questão 11.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Uma bola de 200 g com velocidade de 8 m/s atinge perpendicularmente uma parede e é rebatida em sentido oposto com velocidade de mesmo módulo. A colisão dura 3 ms .

- Qual o impulso da parede sobre a bola?
- Qual a força média da bola sobre a parede?

2)* Num jogo de futebol uma bola de 400 g é chutada e sai do pé do jogador com uma velocidade de 20 m/s .

- Qual o módulo do impulso sobre a bola?
- Se o pé do jogador mantém um contacto com a bola durante 10 ms , qual o módulo da força média de seu pé sobre a bola?

3)* Um vagão de massa $m_1 = 5\text{ ton}$ move-se a uma velocidade $v_1 = 6\text{ m/s}$ e choca-se com outro de massa $m_2 = 3\text{ ton}$ que se move em sentido contrário a uma velocidade $v_2 = 2\text{ m/s}$. O choque é perfeitamente inelástico. Qual a perda de energia cinética na colisão?

4)* Duas esferas perfeitamente elásticas, de massas $m_1 = 1\text{ kg}$ e $m_2 = 2\text{ kg}$, movem-se em sentidos contrários, com velocidades respectivas, de $v_1 = 5\text{ m/s}$ e $v_2 = 4\text{ m/s}$. Quais suas velocidades após o choque?

5)* Duas esferas, de massas $m_1 = 1\text{ kg}$ e $m_2 = 2\text{ kg}$, movem-se na mesma direção e sentido, com velocidades $v_1 = 5\text{ m/s}$ e $v_2 = 4\text{ m/s}$, respectivamente.

- Quais suas velocidades após o choque, se o coeficiente de restituição é $\epsilon = 0,5$?
- Quais seriam estas velocidades, se antes do choque elas tivessem sentidos opostos?

6)** Tomando como referência a seção 9-10, sabemos que qualquer gato ao cair de seis ou mais andares, geralmente, se salva. Ele, rápido e instintivamente, reorienta o corpo esticando-o, ficando com suas pernas abaixo, aumentando assim a área A da seção transversal efetiva do corpo, tomada perpendicularmente à velocidade de queda. Nesta situação a força de resistência do ar poderá se tornar igual ao seu peso e o gato passará a cair com uma velocidade de arrasto terminal constante.

Seguindo um modelo proposto por Newton, para fluidos, o ar poderia ser pensado como composto de um grande número n de partículas por unidade de volume, cada uma com uma massa m muito pequena. O gato de massa

$M \gg m$ caindo com velocidade v vai colidindo com as partículas do ar assim transferindo momento. Calcule a força de arrasto usando este modelo.

7)** Três esferas A, B e C estão em repouso, em linha reta num plano horizontal. Lança-se A contra B com velocidade $v_A = 20 \text{ m/s}$. Determinar as velocidades das três esferas depois de A se chocar com B, em seguida B com C e finalmente, A com B pela segunda vez. O coeficiente de restituição é $\epsilon = 0,5$. Haverá outras colisões?

8)** Dois pêndulos, cada um de comprimento l , estão inicialmente posicionados como mostra a Figura 9-20. O pêndulo mais à esquerda é solto e atinge o outro. Suponha uma colisão perfeitamente inelástica. Os fios são inextensíveis e de massas desprezíveis e as esferas têm dimensões desprezíveis. Calcule a altura que o CM do conjunto alcança após a colisão.

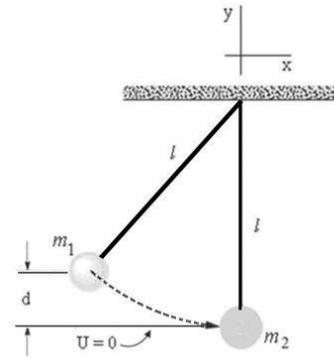


Figura 9-20 Referente ao problema 8.

9)** Um objeto de massa m , move-se com velocidade v e colide com outro idêntico, inicialmente, em repouso. Os dois objetos se unem formando um sistema ligado.

- Qual é a energia cinética do sistema antes da colisão?
- Qual é a energia cinética do sistema após a colisão?
- Que fração da energia cinética original foi convertida em calor?
- Calcule os itens anteriores no referencial CM.
- A energia mecânica transformada em calor é a mesma nos dois referenciais?

10)** Uma partícula de massa m colide com outra partícula idêntica em repouso. Mostre que após a colisão, o ângulo formado entre as duas partículas emergentes

- é 90° , se a colisão for elástica;
- difere de 90° , se a colisão for inelástica?

11)** Um próton (p) com velocidade $v = 400 \text{ m/s}$ colide elasticamente com outro próton, inicialmente, em repouso. Após o choque, eles se movem em trajetórias perpendiculares. O próton incidente move-se após o choque, a 60° em relação à trajetória inicial.

- Quais as velocidades dos prótons após a colisão?
- Quais estas velocidades se calculadas no RCM?

(Sugestão: releia o Exemplo 9-5).

12)** Um fluxo de contas de vidro sai de um tubo horizontal, à taxa de n contas por segundo, e atinge o prato esquerdo da balança, conforme a figura abaixo. A altura de queda até o prato da balança é h e elas são refletidas, atingindo a mesma altura. Cada conta tem massa m .

- Qual a expressão da componente vertical da velocidade de cada conta ao atingir o prato da balança?
- Qual a força média que é aplicada no prato esquerdo da balança?
- Que massa m' deverá ser colocada no outro prato da balança para equilibrá-la?

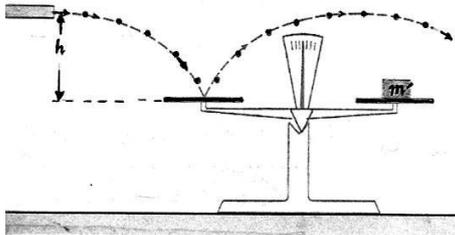


Figura 9-21 Referente ao problema 11.

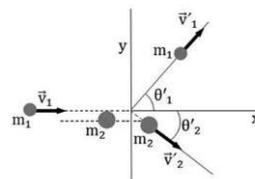


Figura 9-22 Referente ao problema 13.

13)** A Figura 9-22 mostra uma colisão entre dois corpos de massas m_1 e $m_2 = \sqrt{7} m_1$ estando a massa m_2 , inicialmente, em repouso. A velocidade inicial de m_1 é v .

- Qual o valor de θ'_2 se $\theta'_1 = 60^\circ$ e $v'_1 = 3v_1$?
- Determine a velocidade do corpo de massa m_2 após o choque.

c) Esta colisão é elástica? Justifique.

14)** Um bate-estaca tem massa $M = 3$ ton, e cai de uma altura $h = 2$ m sobre uma estaca de massa $m = \frac{1}{2}$ ton, enterrando-a 10 cm. Supondo que a colisão seja completamente inelástica, calcule o módulo da força média do terreno sobre a estaca no seu enterramento de 10 cm.

15)** O bloco de massa $m_2 = 1,0$ kg está em repouso sobre uma superfície plana lisa e tocando uma extremidade de uma mola relaxada de constante elástica $k = 100$ N/m. A outra extremidade da mola está presa a uma parede. Um bloco de massa $m_1 = 2,0$ kg se desloca com velocidade $v_1 = 5,0$ m/s, em rota de colisão com m_2 . Ao se chocarem verifica-se que a colisão é perfeitamente inelástica com os blocos parando momentaneamente. De quanto a mola foi comprimida?

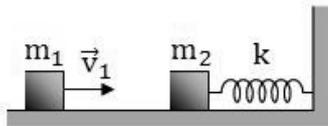


Figura 9-23 Figura Referente ao problema 15.

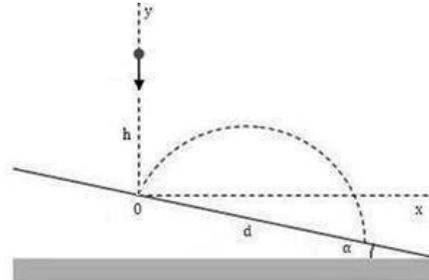


Figura 9-24 Figura Referente ao problema 16.

16)*** Uma bola cai verticalmente sobre um plano inclinado de inclinação α de uma altura h sobre o ponto de incidência conforme mostrado na Figura 9-24. O coeficiente de restituição é ϵ . Calcular a que distância d do primeiro ponto O de incidência voltará a bola a cair de novo sobre o plano inclinado?

17)* Uma bala de massa 20 g atirada horizontalmente com uma velocidade de 500 m/s perfura um bloco maciço de 15 kg, inicialmente, em repouso, sobre uma superfície horizontal. O projétil sai a uma velocidade de 100 m/s e o bloco escorrega uma distância de 10 cm até parar. Qual o coeficiente de atrito μ entre o bloco e a superfície?

18)** Uma partícula de massa m_1 colide com uma outra inicialmente estacionária de massa $m_2 < m_1$. A colisão é elástica. Qual o ângulo máximo de que a partícula incidente é desviada?

19)** Uma partícula de massa m_1 colide elasticamente com outra de massa m_2 , inicialmente em repouso. Calcule a fração da energia cinética que a partícula incidente perde, em duas situações distintas:

- a) a partícula incidente emerge a 90° da direção original;
- b) a colisão é frontal.

20)** Uma partícula com velocidade de 100 m/s colide frontalmente com outra idêntica, inicialmente, em repouso. Da colisão, a energia cinética do sistema decresce de 1%. Qual a velocidade da partícula incidente após a colisão?

21)*** Um pêndulo é formado por uma pequena esfera suspensa por um fio inextensível e de peso desprezível. A esfera toca levemente uma parede vertical ao lado esquerdo do pêndulo. A esfera é puxada para a direita da parede de tal maneira que o fio forma um ângulo $\theta = 90^\circ$ com a vertical. Desta posição ela é solta e atinge a parede, sendo o coeficiente de restituição de 90%. Qual é o número mínimo de colisões depois do qual o ângulo θ torna-se menor que 60° ?

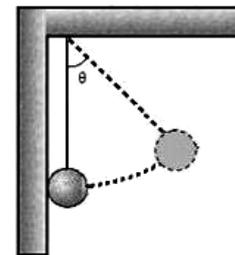


Figura 9-25 Figura Referente ao problema 21.

CAPÍTULO 10

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

O movimento de rotação foi introduzido preliminarmente no capítulo 3, sem preocupação de identificar os agentes causadores deste fato. Àquela altura, estudávamos somente a cinemática dos movimentos linear e de rotação. Neste capítulo, vamos dar um salto maior, com o estudo das rotações, onde os referidos agentes responsáveis por este movimento terão o papel preponderante.

Começamos este estudo com a definição de **corpo rígido**, de grande importância na dinâmica de rotação. Nesta trajetória, vamos introduzir um novo conceito na mecânica, conhecido por **momento angular**, que correspondentemente ao **momento** no movimento linear, tem um papel fundamental na dinâmica das rotações. Era o elemento que faltava para completar a trilogia da mecânica: energia, momento e momento angular. Esta trilogia é muito importante na solução de problemas. De alguma maneira, é uma alternativa ao uso das leis de Newton, nada práticas em situações mais complexas na física.

10-1 Corpos rígidos

Objetos envolvidos em nosso estudo serão considerados como formados de sistemas de partículas.

Tais sistemas tanto podem ser **discretos** como **contínuos**, dependendo se as partículas podem ser consideradas como separadas entre si ou não.

Forças aplicadas a objetos podem mudar a distância entre partículas individuais. Nestes casos os objetos são **corpos elásticos** (ou **deformáveis**). Em alguns casos, estas deformações são mínimas, tornando os corpos na prática indeformáveis.

Um sistema de partículas no qual a distância entre duas partículas quaisquer não muda pela aplicação de forças é chamado de **corpo rígido**. Neste volume, daqui por diante, vamos nos deter só em corpos rígidos.

Um **deslocamento** de um corpo rígido é uma mudança de uma posição para outra. No deslocamento de um corpo são fundamentais os movimentos de **translação** e de **rotação**.

Translação

Imagine um corpo rígido se deslocando de uma posição para outra. Se durante tal deslocamento todos os pontos do corpo rígido movem-se em linhas paralelas entre si, teremos uma **translação**. Assim sendo, para estudar o movimento de translação de um corpo rígido, basta considerar qualquer ponto do corpo.

Um ponto, em particular, de especial interesse é seu centro de massa.

Paradinha 10-1

Uma bola de futebol americano tem formato de um elipsoide com seu CM conhecido. Em um jogo, ela é lançada com velocidade inicial \vec{v}_0 . Mostre que o movimento da bola poderá ser determinado completamente. (Reveja o movimento de projéteis).

Rotação

Teremos uma rotação do corpo se todas as partículas descrevem circunferências concêntricas ao eixo, girando de um mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo. Tal eixo é chamado *eixo de rotação*. Basta considerar uma única coordenada angular para configurar tal movimento de rotação.

Muitas vezes o movimento de rotação pode ocorrer só em torno de um único ponto fixo O. Isto é equivalente a uma rotação em torno de um eixo que passa em O. Um ponto P situado a uma distância r de O terá que se mover sobre uma esfera de raio r. Seu movimento poderá ser assim descrito com o uso de dois ângulos θ e φ , das coordenadas esféricas, já que r é fixo (veja a digressão matemática 1-1).

Paradinha 10-2

Certifique-se que o movimento de um ponto num pião que gira em torno de um ponto fixo pode ser descrito com o uso de duas coordenadas angulares. Escolha tais coordenadas.

Teorema de Chasles

O físico-matemático francês Michael Chasles (1793-1880) provou o teorema fundamental para o movimento mais geral de um corpo rígido. Neste movimento geral, nenhum ponto do corpo é considerado fixo.

Teorema: “O movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação seguida de uma rotação em torno de um ponto conveniente, o qual poderia ser até o seu CM”.

Prova

Consideremos um ponto O sobre um dos lados de um triângulo ABC contido em um dado corpo rígido \mathcal{E} , conforme mostrado na Figura 10-1. Para chegar à posição \mathcal{E}' deste corpo, podemos imaginar uma translação para a posição O' tal que o triângulo ABC ocupará a nova posição A' B' C'. Com uma rotação θ em torno de um eixo passando por O' e normal à página do livro, o corpo rígido \mathcal{E}' vai para a posição \mathcal{E}'' e conseqüentemente, o triângulo A' B' C' para a posição A''B''C''. Assim o movimento pode ser considerado como composto de uma translação mais uma rotação, CQD.

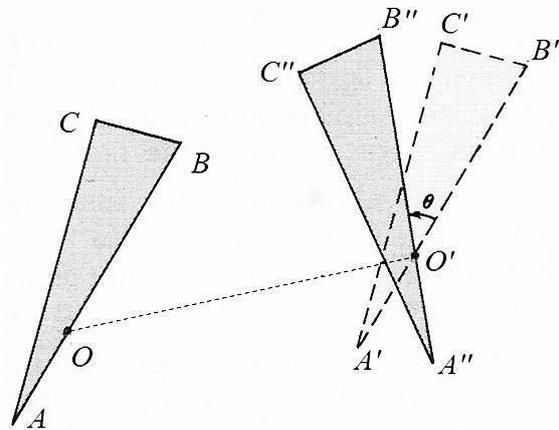


Figura 10-1. O corpo rígido \mathcal{E} através de uma translação ocupa a posição \mathcal{E}' e depois através de uma rotação θ ocupa a posição \mathcal{E}'' . Sobre \mathcal{E} considera-se três pontos A, B, e C formando um triângulo. No processo $A \rightarrow A' \rightarrow A''$, $B \rightarrow B' \rightarrow B''$ e $C \rightarrow C' \rightarrow C''$.

Graus de liberdade

O número de coordenadas necessário para especificar a posição de um sistema constituído de partículas é chamado de **graus de liberdade**.

Vejamos um exemplo:

Quantos são os graus de liberdade para especificar um corpo rígido de se movimentar livremente no espaço tridimensional?

Para responder isto, imagine um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ nele contido. Este ponto requer 3 coordenadas. Por outro lado, um eixo passando por P_1 e por outro ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pode ser especificado se conhecermos 2 de seus cossenos diretores, digamos $\cos \alpha = (x_2 - x_1)/d$ e $\cos \beta = (y_2 - y_1)/d$, onde d é a distância entre P_1 e P_2 , dada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

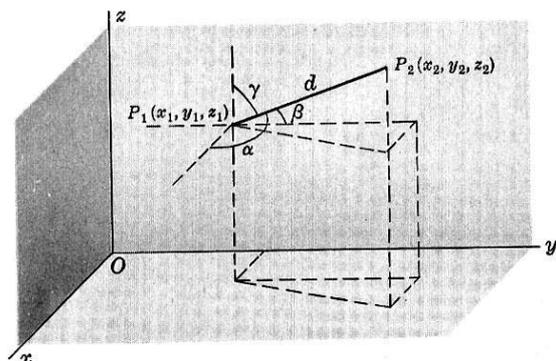


Figura 10-2. Cossenos diretores do eixo P_1P_2

Uma ilustração pode ser vista na Figura 10-2. Uma rotação deste corpo rígido em torno do eixo $P_1 P_2$ pode então, finalmente, ser especificada por uma coordenada angular. Como resultado, o número de graus de liberdade é dado por

$$3 + 2 + 1 = 6.$$

Caso o corpo rígido tivesse um ponto fixo, em torno do qual pudesse mover-se no espaço, este número seria reduzido para 3, já que P_1 é fixado.

Outro exemplo é o de uma partícula movendo-se ao longo de uma dada curva, $x=x(s)$, $y=y(s)$ e $z=z(s)$, onde s é um parâmetro. A posição da partícula na curva é determinada ao se especificar uma coordenada. Então só temos um grau de liberdade.

Paradinha 10-3

Mostre que o número de graus de liberdade para que cinco partículas movam-se livremente em um plano é 10.

10-2 Rotações finitas e infinitesimais

Nesta seção, vamos nos deter um pouco mais sobre a rotação de um corpo rígido. Para isto, é necessário que o leitor reveja o capítulo 3, mas precisamente a seção 3-6.

O movimento de rotação de um corpo rígido, digamos, por exemplo, em torno do eixo (**fixo**) dos z , é o movimento mais simples que se pode imaginar para este corpo. Já vimos que ele pode ser descrito através de um único grau de liberdade, o ângulo φ , mostrado na Figura 10-3. No movimento de um pião, o eixo de rotação não é fixo, e seu movimento é caracterizado não só por um ângulo, mas também por uma direção (**eixo de rotação**) e um sentido deste eixo.

No caso de rotações **finitas**, φ é uma grandeza escalar. Isto decorre do fato que a operação de adição de duas rotações sucessivas **finitas** não é comutativa.

Entretanto, já vimos anteriormente (capítulo 3) que para rotações **infinitesimais**, estas operações são comutativas. E

assim para ângulos muito pequenos, $\Delta\varphi$ passa a ter um caráter vetorial. Através de uma **convenção**, adotada na matemática, e conhecida como regra da mão direita (Figura 10-4), o vetor $\Delta\vec{\varphi}$ é caracterizado por um **módulo**, $\Delta\varphi$ (ângulo infinitesimal de rotação), uma **direção** (eixo de rotação) e um **sentido** (**positivo**, se $\Delta\vec{\varphi}$ apontar para “cima” correspondendo a uma rotação anti-horária, e **negativa**, se $\Delta\vec{\varphi}$ apontar para “baixo” correspondendo a uma rotação horária. Esta convenção é a adotada neste livro.

O leitor pode verificar que tal convenção decorre da escolha arbitrária, do sentido da flecha $\Delta\vec{\varphi}$, tomando como positivo, se correspondendo a uma rotação anti-horária, (embora pudéssemos, igualmente bem, ter escolhido a oposta).

Antes de continuar, vamos fazer uma rápida revisão matemática de alguns novos produtos envolvendo vetores,

úteis neste assunto.

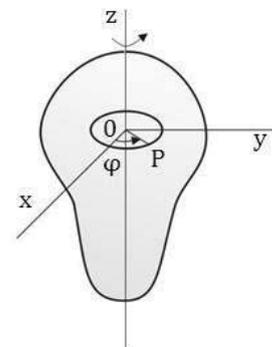


Figura 10-3. Movimento de rotação mais simples de um corpo rígido em torno de um eixo fixo Oz , estando P situado no plano xy .

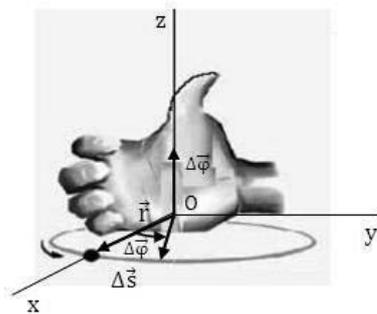


Figura 10-4. Regra da mão direita para uma rotação infinitesimal, $\Delta\vec{\varphi}$, de natureza vetorial. Para uma rotação anti-horária, a convenção é $\Delta\vec{\varphi}$ seja dirigida para cima, enquanto para uma rotação horária, seja para baixo.

Digressão matemática 10-1

Produtos vetorial, triplo e misto de vetores

Produto vetorial

Definição

O produto vetorial de dois vetores \vec{a} e \vec{b} , é um terceiro vetor \vec{c} , cuja operação é representada por $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, onde \times é o símbolo da operação, e é assim definido:

Módulo: $c = |\vec{c}| = ab \sin \varphi$, sendo φ o menor ângulo entre \vec{a} e \vec{b} e $a = |\vec{a}|$ e $b = |\vec{b}|$.

Direção: o eixo perpendicular ao plano formado por \vec{a} e \vec{b} ;

Sentido: convencionado como positivo, se da ponta da seta do versor \hat{n} dirigido ao longo do eixo, se vê \vec{a} indo ao encontro de \vec{b} no sentido anti-horário.

Resumidamente, podemos escrever que

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ab \sin \varphi \hat{n} \quad (10-1)$$

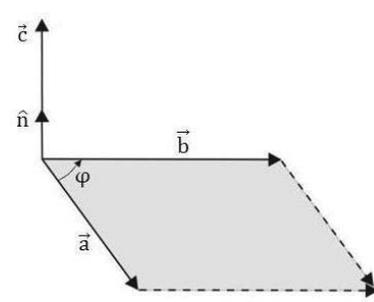


Figura 10-5. Produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Interpretação geométrica

O seu módulo representa a área do paralelogramo formado pelos dois vetores, como mostrado a Figura 10-5. Por outro lado $\vec{a} \times \vec{b}$ é um vetor que além de medir a área do paralelogramo definido por \vec{a} e \vec{b} , tem o **vetor área**, normal ao plano do paralelogramo.

Conclusão

Isto sugere que a área pode ser tratada como uma **grandeza vetorial**.

Propriedades do produto vetorial

Pode-se provar através do cálculo vetorial, as seguintes propriedades:

- i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (anti-comutativo)
- ii) $\vec{a} \neq 0$ e $\vec{b} \neq 0$, gerando $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.
- iii) $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} = -\hat{y} \times \hat{x}$,
 $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} = -\hat{z} \times \hat{y}$,
 $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} = -\hat{x} \times \hat{z}$.
- iv) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- v) $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, $\lambda =$ um escalar.

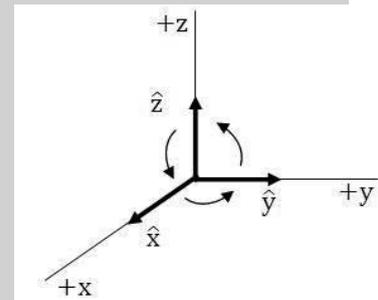


Figura 10-6. O Produto vetorial feito na ordem das setas curvas (sentido anti-horário) é convencionado como positivo ($\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$). Na ordem inversa, é negativo ($\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$). Os versores \hat{x} \hat{y} e \hat{z} formam na origem O um triedro com orientação dextrógiro.

$$\text{vi) } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}. \quad (10-1)'$$

Observação:

No produto escalar de dois vetores **ortogonais**, o resultado é um escalar **zero**. Para o produto vetorial de dois vetores **colineares**, o resultado é também **zero**. A pergunta é: O zero do produto escalar é o mesmo do produto vetorial? Cada um deles é gerado de forma diferente. No entanto, matematicamente, são manipulados da mesma maneira. Para distingui-los, alguns textos usam a notação $\vec{0}$ para o zero do produto vetorial. Como, operacionalmente, ambos são iguais, vamos assim manter a rotação 0 (zero) para os dois produtos.

Produto triplo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (10-2)$$

O parêntese deve ser mantido, haja visto o caso especial

$$\hat{x} \times (\hat{x} \times \hat{y}) = \hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y},$$

enquanto,

$$(\hat{x} \times \hat{x}) \times \hat{y} = 0.$$

Observe que $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ e daí usarmos a Equação (10-2).

Produto misto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (10-3)$$

Não faz sentido a operação $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$. O leitor pode facilmente verificar. Uma representação conveniente da Equação (10-3) é dada pelo determinante

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (10-4)$$

Voltando à Figura 10-3, um ponto P situado no plano xy, da seção transversal do corpo rígido, a uma distância r de O, descreve uma circunferência de raio r. É fácil verificar que $\Delta s = \Delta\phi \cdot r$. Como a rotação é infinitesimal, a grandeza $\Delta\phi$ é um vetor, $\Delta\vec{\phi}$, como já visto no capítulo 3. As outras duas grandezas, r e Δs , são também vetores, neste caso, mutuamente perpendiculares, como pode ser visto na Figura 10-4, e que se postas juntas, com origem em O, formam um triedro dextrógiro, com a sequência $\Delta\vec{s} \rightarrow \Delta\vec{\phi} \rightarrow \vec{r} \rightarrow \Delta\vec{s}$. Essas grandezas se relacionam, através de um produto vetorial,

$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{\phi} \times \vec{r}. \quad (10-5)$$

No caso mais geral, onde o ponto P não está mais contido no plano y O x, como mostrado na Figura 10-7, teremos

$$\Delta s = \Delta\phi r',$$

onde $r' = r \sin \theta$, sendo θ o ângulo entre \vec{r} e $\Delta\vec{\phi}$.

Assim a relação vetorial (10-5) se mantém, mas agora o ângulo entre $\Delta\vec{\phi}$ e \vec{r} não é mais 90° , e $\sin \theta$.

Da Equação (10-5), podemos escrever

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} \right) \times \vec{r}$$

ou simplesmente,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (10-6)$$

onde $\Delta\vec{s} \cong \Delta\vec{r}$, mas que no limite, $\Delta s \rightarrow \Delta r$, dando, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ e $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$.

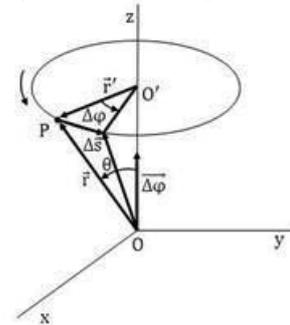


Figura 10-7. Caso em que o ponto P de um corpo rígido não está contido no plano xOy. Para não sobrecarregar a figura, o desenho do corpo rígido foi omitido.

10-3 Classificação de grandezas escalares e vetoriais

Considere um ponto P com vetor posição $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$. Uma operação de **inversão** em P com relação à origem O, equivale a trocar suas coordenadas, na forma $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$, gerando um novo vetor posição $\vec{r}' = -\vec{r} = -x \hat{x} - y \hat{y} - z \hat{z}$. Já a operação de **reflexão**, equivale a refletir o vetor \vec{r} , sobre um “espelho”, imaginário, podendo este espelho ser, por exemplo, um dos planos xy, yz ou zx do triedro dextrógiro xyz. Se a reflexão for, por exemplo, sobre um espelho no plano zx, a coordenada y troca em $-y$, e o vetor posição passa a ser $\vec{r}' = x \hat{x} - y \hat{y} + z \hat{z}$.

O vetor posição \vec{r} e todos os outros vetores cujas componentes se comportam das formas acima são chamadas de **vetores polares**. Verifique, por exemplo, que \vec{v} e \vec{a} são vetores polares.

Uma questão que pode ser colocada a esta altura é em que aspecto vetores como $d\vec{\phi}$ e $\vec{\omega}$ diferem dos vetores polares?

Os vetores $d\vec{\varphi}$ e $\vec{\omega}$ têm módulos e direções bem definidos, mas seus sentidos são definidos, como já vimos, através de uma convenção. Para uma rotação anti-horária, por exemplo, no plano xy e centrada na origem O, a **convenção** é que o **sentido** é dado pela flecha de um vetor normal a este plano e na direção positiva do eixo dos z. A regra da mão direita se presta bem para esta convenção. Pela associação destes vetores, com um eixo, eles diferem dos vetores polares, e são assim chamados de **vetores axiais**. São também chamados de **pseudo-vetores** (o termo pseudo equivale a falso)

A distinção entre os vetores polares e axiais pode ser ilustrada através de uma reflexão. Por exemplo, um vetor \vec{r} perpendicular ao espelho troca de sinal por reflexão, ou seja, $\vec{r}' = -\vec{r}$, conforme pode ser visto na Figura 10-8.

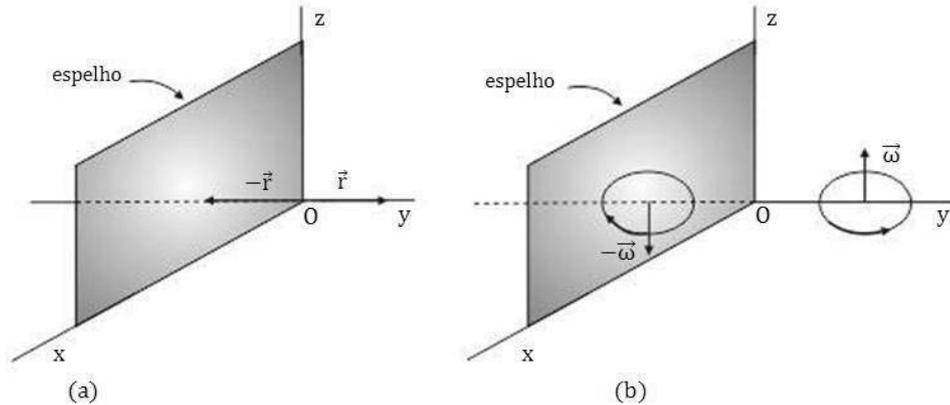


Figura 10-8. a) Reflexão especular para \vec{r} ; b) reflexão especular para $\vec{\omega}$

Já para $\vec{\omega}$ correspondendo a uma rotação anti-horária no plano x y, a sua imagem especular é uma rotação horária $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$. Se a rotação fosse paralela ao plano xz, $\vec{\omega}$ seria ao longo de \hat{y} e a imagem especular daria $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$. São comportamentos distintos daqueles para vetores polares. Convém mencionar que o produto vetorial de dois vetores polares \vec{a} e \vec{b} , é um vetor axial. Com efeito, na sua definição foi usada a convenção para caracterizar o seu sentido através do sentido da operação de \vec{a} indo a encontro de \vec{b} . Ainda com o espelho da Figura 10-8 e usando a Equação (10-1)', verificamos que as componentes z e x de $\vec{a} \times \vec{b}$ trocam de sinal. Já a componente y **não** troca. Assim $\vec{a} \times \vec{b}$ comporta-se como um vetor axial.

Em geral sabemos que grandezas escalares são invariantes sob a ação de rotações, inversões ou reflexões. Mas no caso de um produto misto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, tem-se um **falso escalar**. A razão disto é que associando \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} aos lados de um paralelogramo, o cálculo do produto misto fornece seu volume. Porém, trocando $\vec{a} \rightarrow -\vec{a}$, $\vec{b} \rightarrow -\vec{b}$, $\vec{c} \rightarrow -\vec{c}$, o produto misto dos três vetores será negativo. A grandeza escala mudou de sinal! O produto misto é na realidade um **pseudo-escalar**.

Convém aqui fazer um pequeno resumo. As grandezas até então estudadas podem assim ser classificadas segundo o quadro abaixo:

Natureza	Exemplo
Escalar	Massa; carga elétrica; produto escalar de dois vetores polares.
Pseudo-escalar	Produto misto de três vetores polares.
Vetor polar	$\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{p}, \vec{F}$
Pseudo-vetor ou vetor axial	Produto vetorial de dois vetores polares; $\vec{\omega}$; $d\vec{\varphi}$.

Na física de partículas elementares os conceitos de vetores polares e axiais têm um papel fundamental.

Paradinha 10-4

Mostre as seguintes afirmações:

a) \vec{p} e \vec{F} são vetores polares.

b) O produto vetorial de um vetor axial por um vetor polar é um vetor polar. Dê um exemplo.

10-4 Torque

Provavelmente, você já teve o infortúnio de ter que trocar um pneu baixo de seu carro. Para retirar a roda do carro você deve usar uma chave de roda para desparafusar cada parafuso. Esta chave não deve ser muito curta para você poder aplicar na sua extremidade uma força menor para **torcer** a chave. Assim o parafuso que prende a roda ao carro sai com mais facilidade. Este processo é de alguma maneira similar ao de uma alavanca com um ponto de apoio, usada para levantar cargas pesadas. Já dizia o grande filósofo Arquimedes: “Dá-me uma alavanca e um ponto de apoio que eu levantarei o mundo”.

Como matematizar estas operações? Tomemos o caso da chave de roda. Uma força \vec{F} é aplicada numa extremidade da chave. Na outra extremidade, ela se encaixa ao parafuso que passa a conter um ponto fixo O no processo de torcer a chave. A distância do ponto onde \vec{F} é aplicada na chave ao ponto O é representada por \vec{r} . O ângulo entre \vec{F} e \vec{r} é representado por φ . Para compatibilizar estas operações é plausível criar uma grandeza chamada **torque**, representada por τ , e definida como

$$\tau = r F \text{ sen } \varphi. \tag{10 - 7}$$

A palavra **torque** tem sinônimo, de torção, e vem do verbo em latim **torquere**, que significa torcer.

Na literatura mais antiga se usava em vez de torque a expressão **momento de uma força em relação** a um ponto. Certamente, é uma expressão longa, porém mais precisa.

Duas maneiras de calcular τ são

$$\tau = (r)(F \text{ sen } \varphi) = r F_{\perp}, \tag{10 - 8}$$

e
$$\tau = r (r \text{ sen } \varphi)(F) = r_{\perp} F, \tag{10 - 9}$$

onde r_{\perp} é a distância perpendicular entre o eixo de rotação em O e a linha estendida ao longo do vetor \vec{F} . Esta linha estendida é chamada de **linha de ação** de \vec{F} , enquanto r_{\perp} é o **braço de alavanca de \vec{F}** (ver Figura 10-9).

Uma forma mais geral de definir o torque é generalizar a Equação (10-7), já que τ tem um **módulo**, uma **direção**, através do eixo perpendicular ao plano xy e que passa em O, e um **sentido**, caso a chave gire no sentido anti-horário (positivo) ou no horário (negativo). Em resumo, podemos escrever que o torque é uma grandeza vetorial definido por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10 - 10}$$

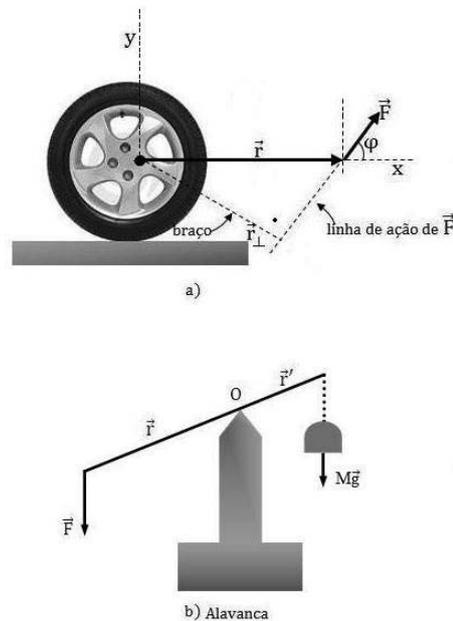


Figura 10-9. a) Chave de roda aplicada ao parafuso de roda de um carro. O ponto (.) no ângulo indica ser ele reto (90°)
b) Alavanca.

Como \vec{r} e \vec{F} são vetores polares, $\vec{\tau}$ é vetor axial.

Unidade

No SI a unidade de torque é o newton-metro (N.m). Observa que esta unidade é a mesma para o trabalho. No entanto, torque e trabalho são conceitos bem distintos e não devem ser confundidos. O trabalho pode também ser expresso em joules (1 j = 1 N.m), mas o torque jamais.

Paradinha 10-5

Mostre que se mudarmos o ponto O do eixo, o torque em geral também mudará

Exemplo 10-1

Uma partícula de massa m cai, partindo do repouso, ao longo da vertical, Calcule o torque após um tempo t, da força que atua sobre m, em relação a um ponto distante d na horizontal de onde m partiu.

Solução:

O torque é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

onde

$$\vec{F} = -mg\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{r} = d\hat{x} - y\hat{y}.$$

Logo,

$$\vec{\tau} = (d\hat{x} - y\hat{y}) \times (-mg\hat{y}) = -mgd(\hat{x} \times \hat{y}) + mgy(\hat{y} \times \hat{y}) = -mgd\hat{z}.$$

O torque é normal e entrante à página deste livro. É o mesmo ao longo da vertical.

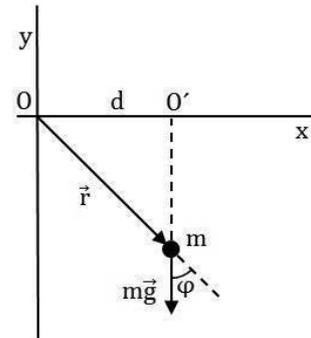


Figura 10-10. Referente ao Exemplo 10-1

10-5 Momento angular

No movimento retilíneo tivemos como protagonista importante o momento linear \vec{p} . Através dele estudamos, por exemplo, a teoria das colisões. Nesta seção vamos iniciar uma discussão sobre a grandeza correspondente a \vec{p} para rotações. Chamaremos esta grandeza de **momento angular**.

Com efeito, seja uma partícula P de massa m, com e momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$, situada no plano xy e movendo-se em relação ao ponto O, conforme ilustrado na Figura 10-11. Vamos definir, por conveniência a ser explicitado adiante, o movimento angular, \vec{l} , de P em relação a O, como a relação vetorial

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad , \quad (10 - 11)$$

onde \vec{r} é o vetor posição de P em relação a O. A partícula poderia até estar em movimento retilíneo no plano xy (mas girando quando vista de O). Comparando a Equação (10-11) com a definição de torque e verificamos as correspondências entre as grandezas

$$\vec{l} \rightarrow \vec{p} \quad , \quad \vec{\tau} \rightarrow \vec{F}$$

Unidades

No SI a unidade de momento angular é o $\text{kg.m}^2/\text{s}$ equivalente a J.s.

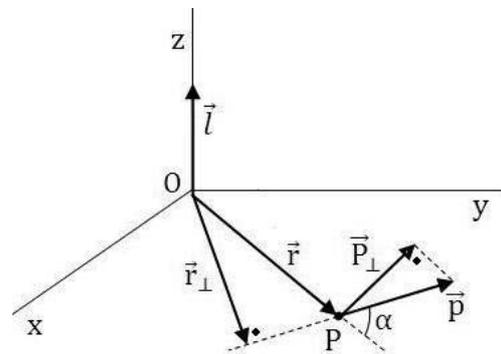


Figura 10-11. Definição de momento angular de P em relação a O. O ponto (•) num ângulo significa ser ele um ângulo reto.

Natureza vetorial do momento angular

Como \vec{r} e \vec{p} são vetores polares, \vec{l} é como o torque, um vetor axial (ou pseudo-vetor). Este vetor tem um **módulo** ($l = r p \sin \alpha$), uma **direção** (eixo passando por O e perpendicular ao plano onde \vec{r} e \vec{p} estão situados) e um **sentido** (pela regra da mão direita, ao longo do sentido positivo do eixo, se correspondendo a uma rotação anti-horária).

É fácil verificar pela Figura 10-11 que

$$l = r p_{\perp} = r(mv_{\perp}) = (r)(p \sin \alpha), \quad (10 - 12)$$

e

$$l = r_{\perp} p = r_{\perp} m v = (r \sin \alpha) (p). \quad (10 - 13)$$

O cálculo de l pressupõe a especificação de O. Pela Figura 10-11, \vec{r} e \vec{p} estão situados no plano x y. Se não estivessem neste plano, certamente, \vec{l} seria perpendicular ao novo plano de \vec{r} com \vec{p} , e não mais coincidiria com o eixo dos z.

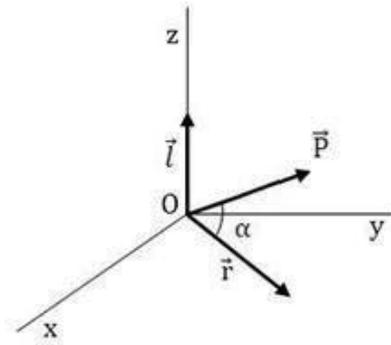


Figura 10-12. Na figura o vetor \vec{p} foi redesenhado com a origem no ponto O. O triedro $(\vec{r}, \vec{p}, \vec{l})$ é tal que os vetores satisfazem à relação $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Relação entre o torque e o momento angular

Sabemos que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

que multiplicando vetorialmente à esquerda por $\vec{r} \times$, fornece

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (10 - 14)$$

Usando a Equação (10-11), podemos escrever

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{= 0, \text{ pois } \vec{p} = m\vec{v}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (10 - 15)$$

Comparando as Equações (10-14) e (10-15), concluímos que

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}}, \quad (10 - 16)$$

que é a relação existente entre o torque e o momento angular.

Paradinha 10-6

No Exemplo 10-1, calcule o momento angular \vec{l} em relação a O, após decorrido um tempo t do início da queda da partícula de massa m.

Exemplo 10-2

Um foguete junino é lançado verticalmente a uma distância $d = 2,0$ m de um observador O.

- a) Quais os valores do momento angular e do torque, calculados em relação a O, quando o foguete alcança uma altura máxima $h = 20,0$ m após acabar todo o seu combustível, restando uma massa $m = 0,10$ kg e sobre ele só atuando a força gravitacional?
- b) Quais estes valores na metade do caminho de volta ao solo?

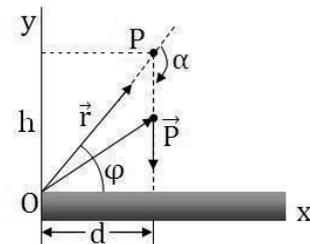


Figura 10-13. Referente ao Exemplo 10-2.

Solução:

a) No ponto onde o foguete alcança a altura máxima $y = h$ ele momentaneamente para e começa a cair. Logo, $l = - (r \text{ sen } \alpha)(m \dot{\theta}) = 0$, já que $v = 0$. Já o torque é dado por $\tau = - (r \text{ sen } \alpha)F = -r_{\perp}F$, sendo $F = mg$ e $r_{\perp} = d$.

Note que $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$ e daí $\text{sen } \alpha = \cos \varphi$. O sinal negativo vem da regra da mão direita. Assim

$$\tau = - d mg = - (2,0\text{m}) (0,10 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) = - 1,96 \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) A velocidade do foguete na queda a uma altura y é dado pela equação de Torricelli

$$v^2 = 2 g y$$

$$\text{Para } y = y_{\text{max}}/2 \Rightarrow v^2 = g h.$$

Logo, o momento angular é dado por

$$l = - (r \text{ sen } \alpha) m v = - (r \cos \varphi) m \sqrt{gh} = - d m \sqrt{gh} = - (2,0\text{m}) \times (0,10 \text{ kg}) \times (9,81\text{m/s}^2 \times 20\text{m})^{1/2} = -2,80 \text{ kg m}^2/\text{s}.$$

Note que o torque é o mesmo do item (a), já que $F = mg$ e $r_{\perp} = d$ não mudam, qualquer que seja a posição do foguete na sua descida.

10-6 Momento angular de um sistema de partículas

Consideremos um sistema constituído por N partículas. Seja m_i a massa da i -ésima partícula ($i = 1, 2, \dots, N$) no instante t . Visto do ponto O de um sistema de coordenadas inercial, o momento angular **total** deste sistema é dado por

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (10 - 17)$$

Momento angular medido em relação ao CM do sistema

Se \vec{r}'_i e \vec{v}'_i são os vetores posição e velocidade, respectivamente, da i -ésima partícula em relação ao CM, então podemos escrever

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{\text{CM}} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{\text{CM}}, \quad (10 - 18)$$

conforme já vimos, na seção 8-3. Logo, o momento angular total é dado por

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_{\text{CM}}) \times (\vec{v}'_i + \vec{v}_{\text{CM}}) = \sum_i (m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) + \vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\sum_i m_i \vec{v}'_i \right) + \\ &+ \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \times \vec{v}_{\text{CM}} + \left(\sum_i m_i \right) (\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}), \end{aligned}$$

onde omitimos os limites de variações nos somatórios ($i = 1, \dots, N$), para tornar a notação mais leve.

Notemos que o segundo somatório é nulo, pela Equação (8-23). O terceiro somatório também é nulo, pela Equação (8-22). Resta finalmente,

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P}} \quad (10 - 19)$$

onde $\vec{P} = M\vec{v}_{\text{CM}}$, é o momento total do sistema, e

$$\vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i. \quad (10 - 20)$$

O termo $\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P}$ é o momento angular do CM em relação a O .

Se o sistema, como um todo, estiver em repouso ($\vec{P} = 0$), então $\vec{L} = \vec{L}'$, não dependendo assim de O para sua medida.

O momento linear relativo ao CM sempre se anula, ou seja,

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = \sum_i \vec{p}' = 0 .$$

Já o momento angular total correspondente aos momentos angulares internos, $\vec{L}' \neq 0$.

Em física atômica e subatômica, \vec{L}' corresponderia à soma dos momentos angulares internos, ou simplesmente, os **spins** das partículas que compõem o sistema. No entanto, o leitor não deve confundir conceitos. Nesta área da física se utiliza a mecânica quântica cuja concepção é totalmente diferente da mecânica clássica utilizada neste livro.

Paradinha 10-7

A Terra gira em torno do Sol. Ela por sua vez gira em torno do seu CM (spin). Qual é o momento angular total da Terra em relação ao Sol?

Relação geral entre torque e momento angular

Vamos generalizar a Equação (10-16) para um sistema de partículas. Para isto vamos derivar em relação ao tempo a Equação (10-17):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} .$$

O termo do primeiro somatório é nulo, pois $d\vec{r}_i/dt = \vec{v}_i$. Já no segundo somatório, $d\vec{v}_i/dt = \vec{a}_i$. Assim

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i . \quad (10 - 21)$$

Admitindo o referencial ser inercial, podemos usar a segunda lei de Newton, para a i-ésima partícula,

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} , \quad (10 - 21)'$$

onde i e $j \neq i$ variam de 1 a N. Note que $\vec{F}_i^{(e)}$ é a força **externa** atuando sobre a i-ésima partícula, enquanto \vec{F}_{ij} é a força **interna** entre a i-ésima a j-ésima partículas. Pela terceira lei de Newton $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$.

Consequentemente, a Equação (10-21) fica

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i, j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} , \quad (10 - 22)$$

onde para facilitar vamos usar a notação,

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \equiv \sum_{i, j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} .$$

O primeiro somatório é o torque externo total $\vec{\tau}^{(e)}$, que atua sobre o sistema, em relação a O. O segundo somatório pode ainda ser trabalhado. Como os índices i e j são mudos (ou seja, logo depois de terminado as somas, elas não mais aparecem), podemos intercambiá-los e assim usar a identidade

$$\sum_{i, j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq i} [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}] .$$

e a equação acima fica

$$\sum_{i, j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i, j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} . \quad (10 - 23)$$

As forças encontradas na física clássica têm linha de ação segundo a linha que une as duas partículas, ou seja,

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

o que implica que $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$,

e assim a Equação (10-23) dá contribuição nula na Equação (10-22). O resultado importante disto é que

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(e)}} . \quad (10 - 24)$$

Esta é a lei **fundamental da dinâmica das rotações** para um sistema de partículas.

Duas observações são importantes:

i) Situação onde o referencial do CM não é inercial

A Equação (10-21) vale para qualquer referencial. Caso este referencial seja o CM, podemos escrevê-la

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{a}'_i . \quad (10 - 25)$$

Entretanto, da Equação (10-18), podemos ainda escrever que

$$\vec{a}_i = \vec{a}'_i + \vec{a}_{CM}.$$

Assim, a Equação (10-25), torna-se

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}'_i \times (m_i \vec{a}_i) - \left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right) \times \vec{a}_{CM} .$$

O último termo desta equação é nulo, pois pela Equação (8-22), $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$.

Logo, usando a Equação (10-21)', teremos,

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}'_i \times (m_i \vec{a}_i) = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i, j \neq i} \vec{r}'_i \times \vec{F}_{ij} .$$

O último termo desta equação se anula pelos mesmos argumentos já discutidos acima para analisar a Equação (10-23). Como $\vec{r}'_i - \vec{r}'_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, então,

$$\boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'^{(e)}} , \quad (10 - 26)$$

onde $\vec{\tau}'^{(e)}$ é a resultante do torques externos em relação ao CM. Assim podemos concluir que a Equação (10-24) continua válida com respeito ao CM mesmo que este referencial esteja acelerado.

ii) Equações da dinâmica do corpo rígido

Vimos pelo teorema de Chasles, que o movimento mais geral de um corpo rígido se compõe de uma translação e uma rotação em torno de um ponto conveniente escolhido.

Se o ponto escolhido for o CM, a Equação (8-24) se aplica ao movimento de translação, enquanto a Equação (10-26) ao movimento de rotação. Estas duas equações representam as leis fundamentais da dinâmica do corpo rígido.

Exemplo 10-3 Binário (ou conjugado)

Um sistema de duas forças iguais, e opostas, mas que não têm a mesma linha de ação é chamado de **binário** (ou **conjugado**).

- a) Para um binário mostre que o torque é independente do ponto em relação ao qual é calculado.
- b) Para um binário mostre que este torque é $\tau = Fb$, onde b é a distância entre as linhas de ação das duas forças.

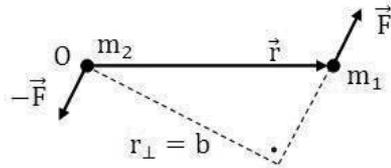


Figura 10-14. Binário

Solução:

a) Seja O inicialmente escolhido no CM do sistema. Tomemos outro ponto qualquer de referência, $O' \neq O$. Teremos

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{OO}' \quad , \quad i = 1,2,$$

e o torque em relação a O, é dado por

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{OO}') \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i + \vec{OO}' \times \sum_i \vec{F}_i .$$

Como $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} - \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}' \quad , \quad \forall O'.$

b) O ponto escolhido pode ser qualquer. Escolhendo O de acordo com a Figura 10-14, teremos que

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{onde} \quad \tau = |\vec{\tau}| = r_{\perp} F = b F.$$

A grandeza b é chamada de **braço** do binário.

Exemplo 10-4

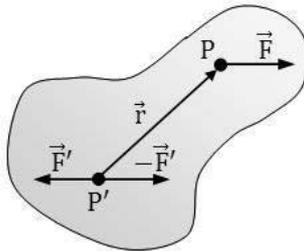


Figura 10-15. Referente ao Exemplo 10-4.

Prove que uma força atuando em um dado ponto de um corpo rígido pode ser equivalentemente substituída por uma única força atuando em outro ponto escolhido junto com um binário apropriado.

Solução:

Seja \vec{F} a força atuando no ponto P de um corpo rígido. Se P' é o outro ponto do corpo rígido, é fácil de ver que o efeito de \vec{F} não muda se aplicarmos duas forças \vec{F}' e $-\vec{F}'$ em P' .

Em particular, escolhendo $\vec{F}' = -\vec{F}$, teremos que o efeito de \vec{F} sozinho é o mesmo, que o efeito do binário, formado por \vec{F} e $\vec{F}' = -\vec{F}$ (com momento angular $\vec{r} \times \vec{F}$) junto com a força $-\vec{F}' = \vec{F}$.

10-7 Conservação do momento angular

O procedimento para chegarmos à lei de conservação do momento angular é similar ao utilizado para a lei de conservação do momento linear. Vamos partir da Equação (10-24),

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(e)},$$

que diz que a taxa de variação, em relação ao tempo, do momento angular de um sistema de partículas, em relação a um ponto fixo em um referencial inercial (ou em relação ao CM), é igual à soma dos torques externos que atuam sobre o sistema.

Se considerarmos que $\vec{\tau}^{(e)} = 0$, então,

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{tor constante} .} \quad (10 - 27)$$

Isto equivale a dizer: **“Se a resultante dos torques externos tomados em relação a um dado ponto fixo em um referencial inercial (ou em relação ao CM) se anula, o momento angular do sistema em relação a esse ponto se conserva”.**

Esta é a lei fundamental de conservação do momento angular, expressa matematicamente, pela Equação (10-27).

Sistemas parcialmente isolados

As Equações (10-24) e (10-27) são equações vetoriais. Têm, portanto, cada uma, três componentes, ao longo dos três eixos cartesianos x, y, e z, respectivamente. Dependendo do caso, um sistema poderia não ter torques externos atuando, por exemplo, em uma, ou até mesmo, em duas direções. Isto equivaleria a dizer que nestas direções, o momento angular poderia ter suas componentes conservadas.

Dois exemplos ilustram bem a lei de conservação do momento angular.

i) Estudante sentado em um banco girante segurando uma roda de bicicleta.

Este tipo de experimento se encontra na maioria dos laboratórios de física.

Um estudante inicialmente em repouso, segura uma roda de bicicleta que pode girar livremente em torno de um eixo vertical, conforme a Figura 10-16 (a). Ao inverter o eixo de rotação da roda, ele mesmo se põe a girar no banco em sentido anti-horário por causa da conservação do momento angular do sistema (*estudante + banco + roda*).

Em outras palavras, o momento inicial (i) do sistema deve ser igual ao seu momento final (f), ou seja,

$$\vec{L} = \vec{L} - \vec{l}, \quad (10 - 28)$$

onde \vec{L} é o momento angular do *estudante + banco* e \vec{l} é o momento angular da *roda* (o sistema *estudante + banco* está inicialmente em repouso, $\vec{L}_i = 0$).

Da Equação (10-28) podemos finalmente obter

$$\vec{L} = 2\vec{l}. \quad (10 - 29)$$

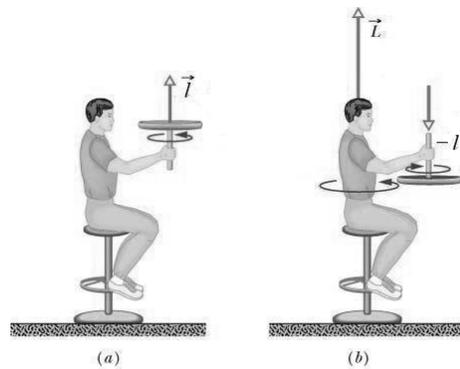


Figura 10-16. (a) Um estudante segura uma roda de bicicleta girando em torno de um eixo vertical. (b) O estudante inverte o eixo de rotação da roda e ele mesmo se põe em rotação, devido à conservação do momento angular no processo.

ii) Orientação de uma espaçonave

Aviões e embarcações têm em seus exteriores meios fluidos (ar e água, respectivamente) utilizados para mudanças de suas orientações. No caso de uma espaçonave, temos o vácuo e o problema é mais complexo. Para tal, se utiliza um volante, conforme mostrado na Figura 10-17. A *espaçonave+volante* forma um sistema isolado. Se, inicialmente, a espaçonave e o volante não estiverem rodando, o momento angular do sistema é nulo. Para mudar a orientação da espaçonave, basta o volante ser posto a girar, por exemplo, no sentido horário. Pela conservação do momento angular do sistema, a nave deverá girar no sentido anti-horário. Eis então, o método utilizado pelas espaçonaves para as mudanças de orientação.

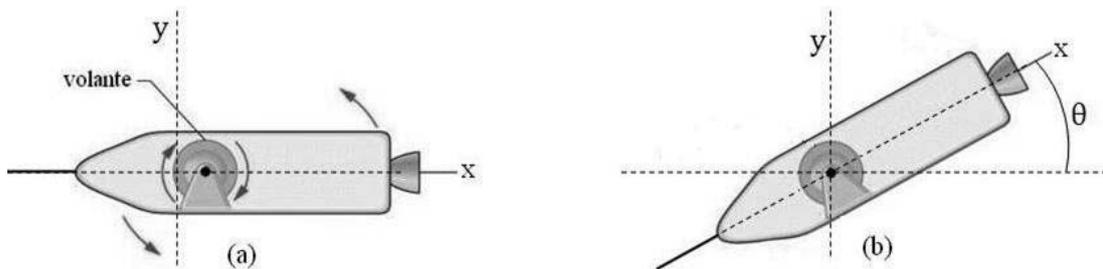


Figura 10-17. Espaçonave contendo um volante para mudanças de sua orientação.

10-8 Simetrias e leis de conservação

As leis de conservação até aqui estudadas (energia, momento e momento angular) têm validade na mecânica, mas como veremos na continuação do estudo da física, se aplicam a todas as áreas, da astrofísica ao microcosmo. São todas elas fundamentais e de uma simplicidade e elegância difíceis de acreditar. São elas três, uma contrapartida às três leis de Newton, igualmente fundamentais, mas de difícil manuseio em sistemas mais complexos.

Um ponto importante a mencionar é que tais leis de conservação, em geral, estão associadas a operações de simetria. Por simetria, entendemos a propriedade de que dispõe um sistema de ser transformado, após uma dada operação, num sistema indistinguível do original.

Exemplos de operações de simetrias são mostradas na Figura 10-8 para a operação de reflexão especular do vetor posição \vec{r} e da velocidade angular $\vec{\omega}$.

Passemos, pois, a demonstrar que as três leis de conservação já discutidas estão ligadas a operações de simetrias de sistemas físicos.

Homogeneidade temporal e conservação da energia

Imaginemos a operação de repetir uma dada experiência em outro horário com as mesmas condições iniciais. Se as forças envolvidas no processo, atuando sobre o sistema forem conservativas e não dependentes do tempo, as duas experiências serão equivalentes. Assim sendo, o referido sistema passou por uma operação de simetria através de uma translação temporal. Na situação descrita, consideremos um sistema isolado onde exista, para facilitar, uma só partícula e uma força conservativa nela atuando. Logo, conforme a seção 7-6,

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad (10 - 30)$$

onde U é a energia potencial não dependente explicitamente do tempo. Podemos escrever para o trabalho elementar sobre a partícula

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} = -dU. \quad (10 - 31)$$

A variação no tempo deste trabalho é obtida derivando ambos os membros desta equação em relação a t ,

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt}.$$

Como $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, então,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \frac{dK}{dt}, \text{ o que implica}$$

$$\frac{d}{dt} (K + U) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = K + U,$$

que é a **lei de conservação de energia total**, obtida como consequência da Equação (10-30), onde U é conservativa e não depende de t .

Paradinha 10-8

Generalize a discussão acima para um sistema isolado contendo N partículas e sujeito a um potencial conservativo $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$

A segunda lei de conservação do momento resulta da homogeneidade espacial. Em virtude desta homogeneidade, as propriedades mecânicas de um sistema fechado e isolado são invariantes por qualquer deslocamento de todo o sistema no espaço. Com efeito,

$$\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}, \dots, \vec{r}_N \rightarrow \vec{r}_N + \Delta\vec{r}, \text{ tal que}$$

$$\Delta U = U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}, \vec{r}_2 + \Delta\vec{r}, \dots, \vec{r}_N + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = -\Delta\vec{r} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \right) = 0, \forall \Delta\vec{r}.$$

Isto implica dizer que na equação acima

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0,$$

ou seja,

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0.$$

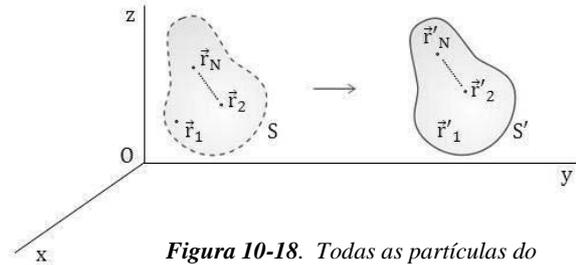


Figura 10-18. Todas as partículas do sistema foram igualmente deslocadas de $\vec{\Delta r}$.

Ora, isto é a **lei de conservação do momento**.

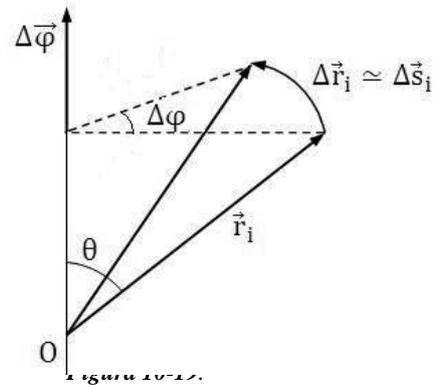
Paradinha 10-9

Como o campo gravitacional próximo a Terra não muda para translações horizontais, mostre que isto implica que as componentes horizontais do momento se conservam.

Isotropia espacial e a conservação do momento angular

Semelhante, ao caso anterior, mostraremos que a lei de conservação do momento angular resulta da **isotropia espacial**. Por **isotropia** entendemos que as propriedades mecânicas de um sistema isolado e fechado não variam quando o mesmo é girado como um todo e de qualquer modo no espaço. Isto significa dizer que sua energia U permanece inalterada. Com efeito, seja $\Delta\vec{r}_i$ o deslocamento da i-ésima partícula, com vetor posição \vec{r}_i , depois de uma rotação $\Delta\varphi$, o que equivale a dizer que

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i, \quad (10 - 32)$$



conforme ilustrado na Figura 10-19. Para que U seja invariante por rotação, devemos ter

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N + \Delta\vec{r}_N) - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \\ &= - \sum_i \vec{F}_i \cdot (\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i), \end{aligned} \quad (10 - 33)$$

onde usamos a Equação (10-32) para o valor de $\Delta\vec{r}_i$. Utilizando a propriedade do produto misto, dado pelas Equações (10-30), podemos reescrever a Equação (10-33) como

$$\Delta U = - \Delta\vec{\varphi} \cdot \left(\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \right) = - \Delta\vec{\varphi} \cdot \sum_i \vec{\tau}_i = - \Delta\vec{\varphi} \cdot \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

Esta é a **lei de conservação do momento angular** que resulta da **isotropia espacial**.

Exemplo 10-5

Considere uma partícula sujeita a forças centrais.

- a) Qual o torque em relação ao centro de forças?
- b) Mostre que o momento angular em relação ao centro de forças se conserva
- c) Mostre que a órbita da partícula deve permanecer sempre no mesmo plano.

Solução:

- a) A força que atua sobre a partícula tem a forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \hat{r},$$

medida a partir da origem O. O torque que atua sobre a partícula é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}(r) = (\vec{r} \times \hat{r}) f(r) = 0.$$

b) Como

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} = 0 \quad \therefore \quad \vec{l} \text{ se conserva.}$$

c) Sejam \vec{r} e \vec{p} o vetor posição e o momento da partícula, respectivamente, num certo instante, e $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ o seu momento angular. Da expressão de \vec{l} se observa que \vec{l} é perpendicular ao plano de \vec{r} com \vec{p} . Como \vec{l} se conserva, então, \vec{r} e \vec{p} devem permanecer sempre num mesmo plano.

Exemplo 10-6

Uma partícula de massa m move-se com velocidade \vec{v} numa semi-região do espaço no qual sua energia potencial é conservativa e é uma constante U . Ela subitamente entra noutra região cuja energia potencial é também constante e igual a $U' \neq U$.

Determine a mudança na direção do movimento da partícula, sabendo que θ é o ângulo entre normal ao plano separando os semi-espacos e a velocidade \vec{v} .

Solução:

A Figura 10-20 ilustra o problema. O potencial U varia ao longo de

$$z \text{ e é dado por } U(z) = \begin{cases} U, & z < 0, \\ U', & z \geq 0. \end{cases}$$

Logo,

$$F_z = -\frac{\partial U(z)}{\partial z} \quad \text{e} \quad F_z = \frac{dp_z}{dt}.$$

A primeira expressão para F_z decorre de fato de \vec{F} ser conservativa, enquanto a outra expressão se deve à segunda lei de Newton. Para as demais componentes de \vec{F} , de modo análogo, podemos concluir que

$$\text{Já } F_x = \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

$$\text{e } F_y = \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

o que implica dizer que p_x e p_y se conservam no plano que divide as duas regiões U .

Como consequência, quando a partícula atravessa o plano de separação entre as duas regiões, a componente tangencial do momento varia de tal modo que

$$\Delta p_t = m(v \sin \theta - v' \sin \theta') = 0, \quad \text{ou} \quad \sin \theta = v' \sin \theta', \tag{10 - 34}$$

sendo θ' o ângulo entre a normal ao plano e a velocidade v' da partícula depois de atravessar o plano. Por conservação da energia, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv'^2 + U',$$

e usando a Equação (10-34) obtemos finalmente,

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv^2} (U - U')}.$$

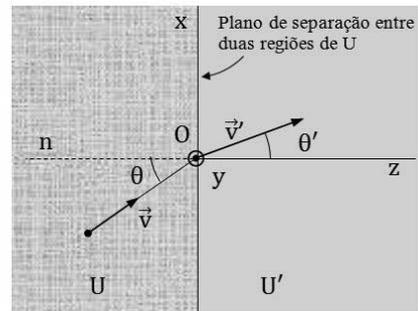


Figura 10-20. Referente ao Exemplo 10-5.

10-9 O Problema clássico de dois corpos

Para diferenciar do problema equivalente na mecânica quântica, usa-se a palavra **clássico**, neste tipo de problema.

Consideremos o movimento de duas partículas de massas m_1 e m_2 num campo de forças cuja energia potencial depende somente do módulo da diferença de seus vetores posição, isto é, $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Vamos mostrar que o problema é formalmente idêntico ao de uma única partícula de massa $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, chamada de massa reduzida, movendo-se em um campo externo conservativo, $U(r)$, onde $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, o qual é simétrico em torno do centro de forças.

A energia total do sistema é dada por

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad (10 - 35)$$

onde

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_1 \quad \text{e} \quad \dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_2.$$

Usando

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

e colocando a origem O no CM do sistema, $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0$.

Estas duas últimas equações fornecem

$$\vec{r}_1 = m_2 \vec{r} / (m_1 + m_2) \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = -m_1 \vec{r} / (m_1 + m_2).$$

Substituindo na Equação (10-35), temos, então

$$E = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + U(r), \quad (10 - 36)$$

onde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, e $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, como velocidade relativa da partícula 2 em relação à 1. Este resultado é o que queríamos demonstrar.

Paradinha 10-10

No Exemplo 10-7, caso a origem O não fosse escolhida no CM do sistema, mostre que

$$E = \left[\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} \mu \vec{V}^2 + U(r) \right],$$

equivalente ao resultado do Exemplo 9-10.

Exemplo 10-7

a) Em coordenadas polares, mostre que E, dado pela Equação (10-36), pode ser expresso como

$$E = \frac{1}{2} \mu v_r^2 + U_{ef}(r),$$

onde $v_r = dr/dt$, e o termo $U_{ef}(r)$, chamado de **energia potencial efetiva**, é dada por

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

b) Identifique fisicamente o segundo termo de $U_{ef}(r)$.

Solução:

a) Em coordenadas polares

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}.$$

Derivando em relação o tempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{x} + \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{y},$$

já que \hat{x} e \hat{y} são versores constantes, **não** dependentes de t.

Chamando

$$r = \frac{dr}{dt} \quad \text{e} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt},$$

e recordando pela Equação (3-22), que

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{cases},$$

ou inversamente,

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} \\ \hat{y} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \end{cases}.$$

Note que cada versor \hat{r} e $\hat{\theta}$ tem módulo 1, mas se movimentam no espaço. Substituindo estes valores na Equação (10-37), obtemos após uma pequena manipulação algébrica,

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}.$$

Levando este valor na Equação (10-36), chegamos, finalmente, à expressão pedida

$$E = \frac{1}{2} \mu v_r^2 + U_{\text{ef}}(r), \quad (10-37)$$

onde

$$U_{\text{ef}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}, \quad (10-38)$$

sendo $l = r(m \dot{\theta})$, identificado como o momento angular da “partícula” de massa reduzida μ .

b) O termo $l^2/2\mu r^2$ é a parte do potencial efetivo, identificado como “**potencial centrífugo**”, e associado à energia cinética de rotação da “partícula” de massa μ em torno de seu centro.

Note que a energia potencial é central e assim l se conserva, bem como E . O problema, pois se reduz ao de um movimento unidimensional de uma “partícula” de massa reduzida μ na presença do potencial central efetivo $U_{\text{ef}}(r)$.

10-10 Movimento em um campo central

O movimento de uma partícula de massa m em um campo central é obtido facilmente das leis de conservação. Já mostramos no Exemplo 10-5 que sua trajetória ocorre sempre em um plano.

Já vimos da expressão da conservação da energia, dada pela Equação 10-37, que

$$E = \frac{1}{2} m v_r^2 + U_{\text{ef}}(r) = \text{constante}, \quad (10-37)'$$

onde $U_{\text{ef}}(r)$ é dado pela Equação (10-38). Desta equação, podemos obter

$$r = \frac{dr}{dt} = \left[\frac{2}{m} (E - U(r)) - (l/mr)^2 \right]^{1/2},$$

ou tirando o valor de dt , teremos

$$dt = \frac{dr}{\left[\frac{2}{m} (E - U(r)) - l/m^2 r^2 \right]^{1/2}}. \quad (10-39)$$

Como pela conservação do momento angular

$$l = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}, \quad (10-40)$$

então, o valor de $d\theta$ pode ser calculado pela relação

$$d\theta = \frac{l}{mr^2} dt = \frac{l dr/r^2}{[2m(E - U(r)) - l^2/r^2]^{1/2}} \quad (10 - 41)$$

Integrando as Equações (10-39) e (10-41), obtemos

$$t = \int dr / \sqrt{(2/m)(E - U(r)) - (l/mr)^2} + A, \quad (10 - 42)$$

$$\theta = \int \frac{l dr/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (l/r)^2}} + A', \quad (10 - 43)$$

onde A e A' são constantes de integração que dependem das condições de contorno do problema. As duas últimas equações fornecem a solução geral do problema. A primeira equação relaciona r e t , enquanto que a segunda relaciona r e θ .

Da Equação (10-41) vê-se que $d\theta/dt$ nunca muda de sinal, e assim θ varia monotonicamente com o tempo.

A Equação (10-37)' mostra que a parte radial do movimento se comporta similarmente como em um problema unidimensional, que estudamos no capítulo 7. Aqui, no entanto, a partícula está em um campo efetivo onde a energia potencial é dada pela Equação (10-38).

Os pontos de retorno ocorrem quando $v_r = dr/dt = 0$, indicando que $r(t)$ começa a decrescer, em vez de crescer, ou vice-versa. Nestes pontos $v_r = 0$, enquanto $v_\theta = d\theta/dt \neq 0$. Os pontos de retorno são obtidos da Equação (10-37)' pondo $v_r = 0$, ou seja,

$$U(r) + l^2/2mr^2 = E. \quad (10 - 44)$$

Se o intervalo de r ocorre entre dois limites r_{\min} e r_{\max} , o movimento é finito e a trajetória ocorre inteiramente numa região limitada por circunferências de raios r_{\max} e r_{\min} , como mostrado na Figura 10-21.

A condição para a trajetória ser fechada pode ser obtida da integral definida

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l dr/r^2}{[2m(E - U(r)) - (l/r)^2]^{1/2}}, \quad (10 - 45)$$

obtida da Equação (10-43), quando dois limites de integração são usados. Ela deve ser uma fração racional de 2π , isto é, $\Delta\theta = 2\pi \alpha/\beta$, onde α e β são inteiros. Existem somente duas classes de campos centrais nos quais os movimentos finitos ocorrem em trajetórias fechadas. Tais campos têm energia potencial $U(r)$ que variam como $1/r$ ou como r^2 . O primeiro inclui o campo gravitacional newtoniano (atrativo), as interações eletrostáticas coulombianas (atrativa ou repulsiva) e o segundo, o oscilador harmônico (tipo mola).

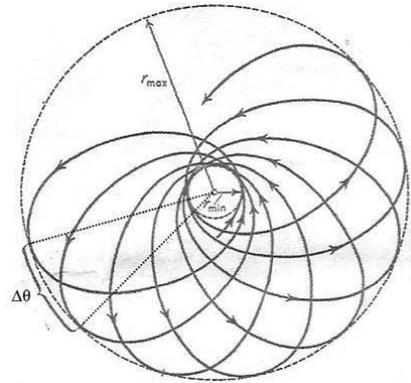


Figura 10-21. Movimento finito ocorrendo numa região limitada por circunferências de raios r_{\max} e r_{\min} .

Exemplo 10-8

Considere duas partículas interagindo através de um campo dado por $U(r) = -C/r$, onde C é uma constante positiva.

Calcule as possíveis trajetórias de uma das partículas colocando a origem O no CM do sistema.

Solução:

Substituindo o valor de $U(r) = -C/r$ na Equação (10-43), obtemos

$$\theta = l \int \frac{dr}{\sqrt{(2\mu E)r^2 + (2\mu C)r - l^2}} + A'.$$

Esta integral é de fácil cálculo (ver digressão matemática abaixo ou em tabelas de integrais indefinidas).

Por simples manipulação algébrica, e notando que $x \rightarrow r > 0$, $a = 2\mu$, $b = \mu C$ e $c = l^2$, obtemos

$$\theta = \arccos \left[\frac{l/r - \mu C/l}{\sqrt{2\mu E + (\mu C/r)^2}} \right] + \text{constante}. \tag{10-46}$$

A constante acima engloba a constante A' (Equação (10-43)) e mais $\pi/2$ da transformação de $\arcsin(\)$ para $\arccos(\)$ dando origem à Equação (10-46).

Por outro lado, vamos tomar a origem de θ tal que a constante acima seja zero. Definindo agora

$$p = l^2/\mu \quad e \quad e = \sqrt{1 + (2El^2/\mu C^2)}, \tag{10-47}$$

chegaremos à equação das possíveis trajetórias da partícula

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \tag{10-48}$$

Na geometria analítica esta é a equação em coordenadas polares de uma cônica com um foco na origem. As grandezas p e e são o **parâmetro da cônica** e sua **excentricidade**, respectivamente.

Note que $\theta = 0$ corresponde ao ponto mais próximo à origem (**periélio**), conforme pode ser visto pela Equação (10-48). Abaixo vamos dar um resumo sobre as cônicas.

Elipse

Da equação para e em (10-47), se $E < 0 \Rightarrow e < 1$. Tem-se então uma elipse para a órbita. É o tipo de órbita para todos os planetas do sistema solar ($C = -GMm$, sendo G a constante gravitacional universal).

Da geometria analítica sabemos que

$$a = p/(1 - e^2) = C/2|E| \quad e \quad b = p/\sqrt{1 - e^2} = l/\sqrt{2\mu|E|}.$$

No caso onde $e = 0$, a elipse torna-se uma circunferência.

Hipérbole

Para $E \geq 0 \Rightarrow e > 1$, e tem-se então uma hipérbole, onde $a = p/(e^2 - 1) = C/2E$.

Parábola

Se $E = 0 \Rightarrow e = 1$, e tem-se então uma parábola.

As órbitas dos cometas e satélites podem ser elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. As órbitas parabólicas e hiperbólicas resultam de perturbações planetárias. Quando um cometa (ou satélite) passa ao lado de um grande planeta, Júpiter, por exemplo, sua trajetória é originalmente elíptica, mas pode ser injetada tal que sua órbita pode tornar-se uma parábola, ou uma hipérbole. Neste caso, o cometa, depois de ter passado em volta do Sol, se afasta e sai do sistema solar, jamais a ele retornando.

Digressão matemática

Integral e cônicas

Integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsen \left(\frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} \right),$$

Propriedades trigonométricas úteis

$$\arcsen x + \arccos x = \pi/2, \quad \arcsen(-x) = -\arcsen x.$$

Cônicas

São curvas obtidas da intersecção de um plano com um cone a diferentes

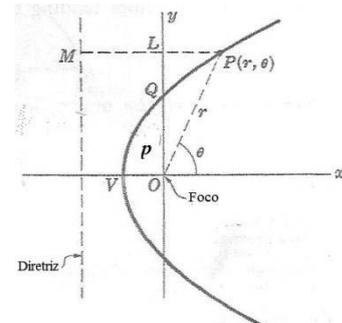


Figura 10-22. Cônica

ângulos.

Dois parâmetros caracterizam uma cônica: e (excentricidade) e p (parâmetro da cônica).

Excentricidade

Distância de P a um ponto fixo, chamado **foco**, dividido por sua distância a uma linha fixa, chamada **diretriz** (ver Figura (10-22))

Parâmetro da cônica

$p = OQ$.

($2p$ é também chamado de **normal ampla**, do latim *latus rectum*)

Se $e < 1 \rightarrow$ elipse
 $e = 1 \rightarrow$ parábola
 $e > 1 \rightarrow$ hipérbole

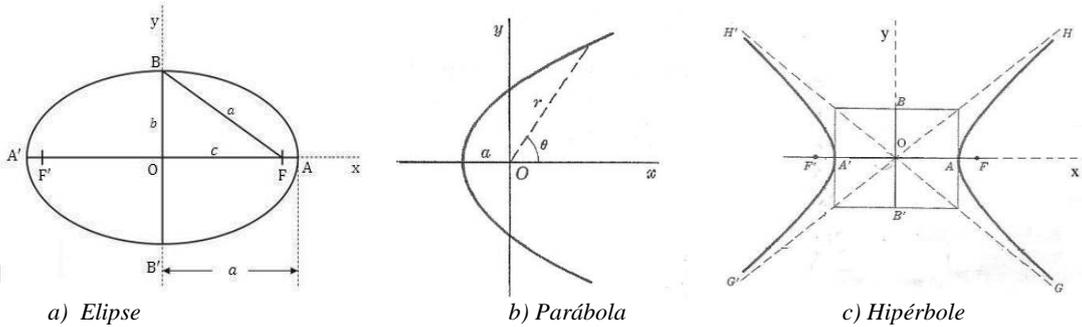


Figura 10-23 Tipos de cônicas

a) Elipse

Equação Cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$A'A = 2a$, $B'B = 2b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 $e = c/a$ e $p = b^2/a$.

Equação Polar

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

b) Parábola

Equação Cartesiana

$$y^2 = 4ax$$

$e = 1$ e $p = 2a$

Equação polar

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

c) Hipérbole

Equação Cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$A'A = 2a$, $B'B = 2b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,
 $e = c/a$ e $p = a(e^2 - 1)$.

Equação polar

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

10-11 Pausa para descontração: Euler

Leonhard Euler nasceu na Basileia, Suíça, em 1707 e morreu em São Petesburgo, Rússia em 1783. É considerado um dos maiores matemáticos e físicos da humanidade. Euler foi um dos mais prolíficos criadores na sua área, tendo contribuído com mais de oito centenas de publicações em matemática (desde a elementar à superior), mecânica, eletricidade, óptica e magnetismo. Era dono de uma prodigiosa memória, tinha incomum facilidade para línguas, e mesmo cego (em 1735, perdeu a visão do olho direito, e em 1766, a do olho esquerdo), continuou produtivo, passando a ditar seus trabalhos. Algumas de suas maiores contribuições foram na matemática. Ele mostrou que a base do logaritmo natural é um número irracional e introduziu o símbolo e e para denotá-lo. Mostrou também que uma potência complexa de um número complexo é, por sua vez, um número complexo e introduziu o símbolo do número imaginário, $i = \sqrt{-1}$. No seu livro **Introductio in analysin infinitorum** desenvolveu o conceito de infinitésimos e de funções, propondo a notação $f(x)$, bem como os símbolos de somatório (Σ), logaritmo ($\log x$), e tantos outros. Euler introduziu também as funções beta e a gama e



Figura 10-24. Leonhard Euler.

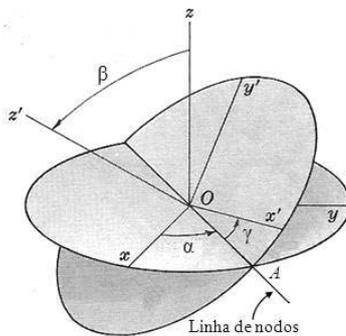


Figura 10-25 Os ângulos de Euler.

computou para números ímpares a função zeta de Riemann. Nenhum outro cientista foi tão grandemente responsável pela forma da matemática superior atual. Foi ele o criador de uma notação mais bem sucedida de todos os tempos. Os três símbolos e , π , i , onde Euler teve grande responsabilidade, podem ser combinados com os dois inteiros mais importantes, 0 e 1, na célebre igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, que contém os cinco números mais significativos em toda a matemática. Seu livro **Mechanica**, publicado em 1737, além de outros artigos, foi a primeira exposição da mecânica newtoniana numa forma matemática: A esta obra várias outras ideias se sucederam, especialmente, uma solução particular do problema dos três corpos. Euler se formou no ano de 1726 na Universidade da Basileia. Em 1727, conseguiu o segundo lugar numa premiação da Academia de Ciências de Paris com um trabalho sobre o melhor

posicionamento de mastros numa embarcação. Em 1730, tornou-se professor da Academia de Ciências de São Petesburgo, da qual três anos mais tarde, tornou-se um membro permanente. Entre 1759 e 1766, assumiu a Academia de Berlim, retornando em seguida a São Petesburgo. Durante quase meio século após a sua morte a Academia de São Petesburgo continuou a publicação de seus trabalhos inéditos. Foi Euler quem introduziu em seu livro **Mechanica**, o conceito rigoroso de momento angular e a lei de sua conservação, fundamentais na física. Coube a ele também na criação do processo matemático de descrição de qualquer rotação de um corpo rígido, em relação a um dado ponto. Segundo ilustrado na Figura 10-25, a passagem de um sistema de coordenadas xyz , atrelado ao corpo, para qualquer outro sistema $x'y'z'$, deste corpo, com origem comum O , pode ser feito através de três rotações anti-horárias sucessivas α, β, γ , conhecidas como **ângulos de Euler**. Ainda foi dele, a criação das equações do movimento de um corpo rígido em relação a um sistema de coordenadas a ele atrelado e com ele girando.

Estas importantes equações são conhecidas na mecânica como **equações de Euler do movimento**.

Vale a pena mencionar que juntamente, com Lagrange e Hamilton, ajudou na criação da **mecânica analítica**.

São assim muitas as contribuições de Euler à física. É por isto que ele é merecidamente considerado um dos maiores cientistas da história da ciência.

Resumo

Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (10 - 10)$$

Momento angular para uma partícula

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (10 - 11)$$

Momento angular para um sistema de partícula

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{l}_i. \quad (10 - 17)$$

Se o movimento angular for medido em relação ao CM do sistema

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}, \quad (10 - 19)$$

$$\text{onde } \vec{L}' = \sum \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i \quad (10 - 20)$$

Segunda lei de Newton na forma angular

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{l}}{dt}, \text{ onde } \vec{\tau} \text{ é o torque externo resultante para uma partícula.} \quad (10 - 16)$$

Para um sistema de partículas

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (10 - 24)$$

Conservação do momento angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \iff \vec{\tau}^{(e)} = 0$$

Nesta situação $\vec{L} = \text{constante} \implies \vec{L}_i = \vec{L}_f$ para um sistema isolado. Esta é uma das leis fundamentais de conservação na física.

Questões conceituais

- 1) Verdadeiro ou falso:
É possível dizer que o torque em relação a um ponto é equivalente ao torque em relação a um eixo? Justifique a resposta.
- 2) O vetor posição de uma partícula em relação à origem O de um referencial é $\vec{r} = \hat{x} + \hat{y}$, em metro, e sobre ela atua uma força $\vec{F} = \hat{x} - \hat{y}$, em newtons. Qual é o ângulo entre \vec{r} e \vec{F} ?
- 3) Um carrossel tem o módulo do seu momento angular, durante um certo intervalo de tempo, dado pela Figura 10-26. Considerando os três intervalos de tempo $(0, t_1)$, (t_1, t_2) e (t_2, t_3) , ordene o módulo do torque que atua sobre o carrossel em ordem decrescente.

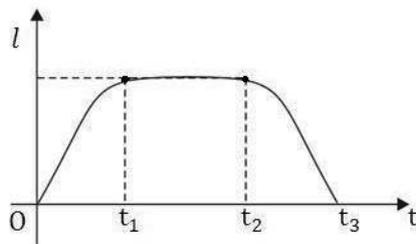


Figura 10-26

- 4) Mostre a 2ª lei de Kepler: “No movimento de um corpo sob a ação de forças centrais, o vetor posição que liga o corpo ao centro de forças, descreve áreas iguais em tempos iguais”.
- 5) Mostre que no movimento elíptico da Terra em torno do Sol, este situado num dos focos da elipse, a velocidade é máxima quando a Terra está mais próxima do Sol (**periélio**) e mínima quando está mais afastada do Sol (**afélio**).
- 6) No movimento da Terra em torno do Sol, o qual é tomado como centro de um referencial, a Terra tem um vetor posição \vec{r} e um momento \vec{p} . A Terra gira, por sua vez, em torno de seu eixo, com spin \vec{S} . Enquanto $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ é perpendicular ao plano de órbita (eclíptica), escolha a opção correta:
 - a) \vec{S} também é normal à eclíptica;

- b) O momento angular total do movimento combinado é $\vec{L} = \vec{l} + \vec{S}$, sendo \vec{S} normal à eclíptica;
 c) O momento angular total do movimento combinado é $\vec{L} = \vec{l} + \vec{S}$, com \vec{S} formando um ângulo de $23,5^\circ$ com a direção de \vec{l} .

7) Considere o movimento de uma partícula em um campo de forças numa região plana homogênea e situada no plano xy.

Assinale a opção correta para as componentes do momento, \vec{p} , e do momento angular, \vec{l} , que são conservadas:

- a) p_x, p_y, l_z ;
 b) p_z, l_x, l_y ;
 c) p_x, p_y, p_z .

8) Como na questão anterior, considere agora um campo de força atuando ao longo de uma linha ligando dois pontos do eixo dos z. Assinale a opção correta:

- a) p_z, l_z ;
 b) p_x, p_y, l_z ;
 c) l_z .

9) Como na questão anterior, mas considere um campo de forças de um semi-plano infinito homogêneo, onde sua borda é o eixo dos y. Assinale a opção correta:

- a) p_y ;
 b) p_x ;
 c) l_z .

10) Reveja a seção 6-10 e de cada assunto na coluna à esquerda, escolha na coluna à direita, a opção mais adequada:

- | | |
|---|---|
| i) Iluminismo. | i') Estabelecido rigorosamente por Euler. |
| ii) Conceito de momento. | ii') Durante a Revolução industrial. |
| iii) Conceito de momento angular. | iii') Surgiu na França, durante a revolução industrial. |
| iv) Revolução industrial. | iv') Introduzido por Descartes. |
| v) Criado os conceitos de trabalho e energia. | v') Início na Inglaterra. |

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

1)* Em um dado instante uma força $\vec{F} = \hat{x} + \hat{y}$, em newtons, atua em um objeto de 0,25 kg que possui vetor posição $\vec{r} = 2,0 \hat{x} - \hat{z}$, em metros, e velocidade $\vec{v} = -2,0 \hat{x} + 3,0 \hat{z}$, m/s. Em torno da origem calcule:

- a) Qual o momento angular do objeto?
 b) Qual o torque que atua sobre ele?

2)* Num certo instante t qualquer, o vetor posição de um objeto, de massa de 1,0 kg, em relação à origem, é dado por $\vec{r}(t) = 2,0 t^2 \hat{x} - (2t + t^2) \hat{y}$, em metro. Em relação à origem:

- a) Qual o torque atuando sobre o objeto?
 b) Qual o momento angular do objeto?

3)* Uma força $\vec{F} = \hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}$, em newtons, atua sobre um corpo com vetor posição $\vec{r} = 2\hat{x} - \hat{y}$, em metros, em relação à origem.

- a) Qual o torque em relação à origem?
 b) Mesma questão, mas em relação ao ponto O' (1., -2., 0) em metro.

4)* a) Qual o módulo do momento angular da Terra devido a sua revolução em torno do Sol, sendo a massa da Terra $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg e sua distância média do Sol $R_T = 150 \times 10^9$ m?

b) Que fração deste valor se compara com o do planeta Júpiter? Tome a massa de Júpiter $M_J = 318 M_T$, sua distância média do Sol $R_J = 778 \times 10^9$ m e seu período de revolução 11,9 anos.

5)* Um avião de 2000 kg está voando na direção Sul em linha reta a 500 km/h, a uma altitude de 1000 m. Qual seu momento angular em relação ao aeroporto do Recife diretamente abaixo de sua trajetória?

6)* Uma pessoa de 70 kg está sobre o equador o qual passa sobre a cidade de Macapá. Qual é o módulo do seu momento angular em torno do centro da Terra devido à rotação da Terra? Considere a Terra como uma esfera de raio $R = 6,37 \times 10^6$ m.

7)* Estrelas de nêutrons são corpos celestes com altíssimas densidades. Suponha que uma dessas estrelas de raio de 30 km tenha uma aceleração centrípeta da ordem de $1,2 \times 10^6$ m/s². Qual deve ser o seu período?

8)* Considere o movimento de uma partícula em um campo de força tal que $U = C(x^2 + y^2), \forall z$, C é uma constante dimensional, atuando dentro de um cilindro homogêneo infinito. Tome o eixo do cilindro como o eixo dos z . Quais são as componentes do momento e do momento angular que são conservadas? Justifique sua resposta.

9)** Ache a razão dos tempos gastos por duas partículas de massa m e m' , respectivamente, para percorrerem uma mesma trajetória, sujeitas neste percurso, a uma mesma energia potencial.

10)** Um bloco de massa m desliza em uma circunferência de raio r sobre uma mesa em atrito, enquanto permanece ligado a um cilindro de massa M pendurado por um fio inextensível e massa desprezível que passa por um furo no centro da mesa, conforme a figura abaixo.

Que momento angular do disco mantém o cilindro em repouso?

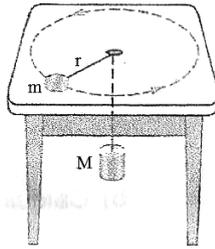


Figura 10-27 Referente ao problema 10.

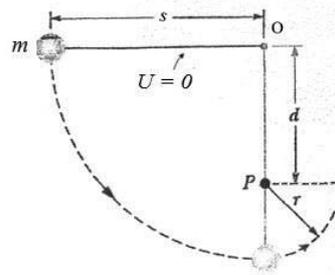


Figura 10-28 Referente ao problema 11.

11)** O fio da Figura 10-28 com comprimento s , possui uma bolinha de massa m presa em uma de suas extremidades e está fixo na outra extremidade. Um pino está fixado no ponto P , a uma distância d do ponto fixo. Quando a bolinha, inicialmente em repouso, é solta com o fio na posição horizontal, conforme mostrado, ela irá oscilar ao longo do arco tracejado.

- Qual seu momento angular \vec{l} em relação a O quando ela alcança o ponto mais baixo?
- Se a bolinha fizer uma volta (completa) em torno do pino P , qual o menor valor para a distância d ? (Sugestão: a bolinha deve ainda estar se movendo no ponto mais alto de sua oscilação).
- Qual o momento angular da bolinha em relação ao pino, quando ela estiver no ponto mais alto da circunferência menor?

12)* Considere uma energia potencial $U(r) = -C/r$, onde $C > 0$ é constante, atuando entre uma partícula de massa m e outra de massa $M \gg m$. A partícula M pode ser tratada como centro das forças fixo em O . Esboce o gráfico de $U_{ef}(r)$.

13)* A excentricidade da órbita da Terra é $e = 0,0167$. Qual a razão entre as velocidades máxima e mínima em sua órbita em torno do Sol?

14)* a) Mostre que o menor valor da energia para uma partícula sujeita a um campo central $U(r) = -C/r$, é dado por $-\mu C^2/2l^2$, onde μ é a massa da partícula.
b) Mostre que a órbita da partícula é uma circunferência.

15)* No sistema solar cada planeta está sujeito a um campo de força central dado pela equação $U(r) = -GMm/r$, onde G é a constante gravitacional universal, M a massa do Sol e $m \ll M$, a massa do planeta.

- Calcule a expressão para o período T da órbita deste planeta.
- Obtenha a 3ª lei de Kepler sob a forma $T^2/a^3 = 4\pi^2/GM$.

16)** Mercúrio é o planeta mais próximo ao Sol e também o mais próximo a Terra que possui uma órbita elíptica acentuada. O seu periélio e afélio são, respectivamente, de $4,59 \times 10^7$ km e $6,97 \times 10^7$ km, e a massa do Sol é $1,99 \times 10^{30}$ kg. Calcule o período de sua órbita.

17)** Uma partícula de massa m está em um campo central $U = \frac{1}{2}kr^2$, com energia total E . Como para qualquer campo central, a trajetória está situada num plano, tome este campo no plano xy .

- Quais os valores das forças nas direções x, y e z ?
- Num mesmo gráfico, esboce as curvas para $U(r)$, $l^2/2mr^2$ e $U_{ef}(r)$. Verifique que o movimento da partícula ocorre para todas as energias fisicamente possíveis mas limitadas à região de força não passando através do seu centro.

18)** Uma partícula de massa m do repouso de uma distância $M \gg m$, atraídas por um campo de força central, representado por $U(r) = -C/r$, onde $C > 0$ é constante. Se a partícula m segue uma trajetória parabólica, mostre que seu periélio é dado por $r_p = r_{\min} = p/2$.

19)** Admitindo o momento angular l conservado, mostre que para campos do tipo $U(r) = C/r$, onde C é uma constante, a grandeza vetorial $\vec{G} = \vec{v} \times \vec{l} + C \vec{r}/r$ é invariante com o tempo.

20)** No espaço exterior imagine existir um certo sistema “solar” formado por uma estrela de massa M e um planeta de massa $m \ll M$, movendo-se em órbita circular, em torno de M , a uma distância muito grande dele. Uma explosão nuclear na estrela faz com que metade de sua massa seja expelida, sem, no entanto, danificar o planeta nem afetar a distância dele à massa M . Qual a sua nova órbita, logo após a explosão?

CAPÍTULO 11

DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

No capítulo anterior foi definido o que se entende por um corpo rígido. Tal corpo estando sob o efeito de um movimento, o mais geral possível, onde nenhum dos seus pontos do corpo é admitido estar fixo, obedece ao teorema de Chasles. Ou seja, este movimento geral se compõe de uma translação e uma rotação em torno de algum ponto conveniente. Novos conceitos foram então introduzidos, como o de torque e momento angular, resultando na lei de conservação do momento angular, fundamental na mecânica. Neste capítulo, vamos aprofundar ainda mais nosso estudo introduzindo o conceito de rolamento. Neste conceito um corpo rígido se move, como resultado de um movimento combinado de translação e rotação, mas sem deslizamento.

Na sociedade moderna, ou até mesmo na natureza, a rotação está presente em praticamente tudo o que ocorre. Daí a importância destes últimos capítulos.

11-1 Velocidade angular revisitada

No que se segue, vamos imaginar um corpo rígido como formado por um conjunto discreto de partículas. Em algumas situações, podemos tratá-lo como contínuo, com sua estrutura interna levada em consideração. A passagem de situações que envolvem somatórios sobre distribuições discretas de partículas para distribuições contínuas é efetuada na forma usual, adotada anteriormente em muitas situações. Ou seja, simplesmente isto é feito substituindo a massa de cada partícula por ρd^3r , onde ρ é a densidade de massa, e o somatório pela integração sobre todo o volume do corpo.

A descrição do movimento de um corpo rígido pode ser feita com a auxílio de um sistema inercial fixo xyz , e de mais um outro sistema móvel $x'y'z'$, atrelado ao corpo. A origem do sistema móvel, conforme veremos neste capítulo, pode ser convenientemente tomada a coincidir com o CM do corpo. A exata posição do corpo com respeito ao sistema fixo é primeiramente determinada pelo conhecimento do vetor \vec{OO}' , (ou \vec{r}_{CM} , se O' de $x'y'z'$ coincidir com o CM do corpo) e segundo pelo conhecimento da orientação dos eixos de $x'y'z'$ com respeito ao sistema fixo xyz . Esta segunda parte é feita por três ângulos independentes, (α, β, γ) , conhecidos por ângulos de Euler. Ao todo, o corpo rígido é um sistema mecânico com seis graus de liberdade. O estudo completo do problema está acima do nível deste curso. No entanto, vamos nos deter em casos mais simples de seu movimento.

Nesta seção, estamos interessados em calcular as velocidades angulares do corpo rígido quando observado de seus diferentes pontos.

Para este propósito, consideremos um deslocamento infinitesimal arbitrário do corpo. Pelo teorema de Chasles, tal deslocamento, pode ser representado pela soma de duas partes. A primeira delas é uma translação infinitesimal do corpo através do seu CM, onde a orientação dos eixos $x'y'z'$ é inalterada. A outra é uma rotação infinitesimal em torno do seu CM.

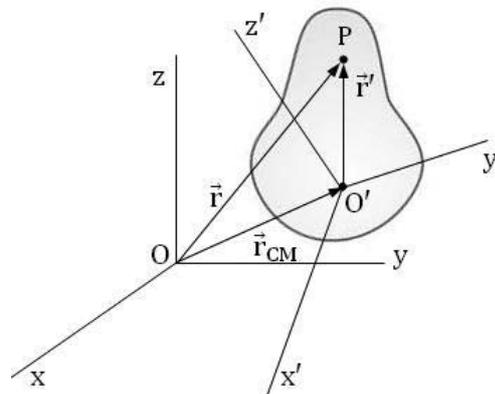


Figura 11-1. Corpo rígido estudado de dois referenciais, xyz e $x'y'z'$

Seja P um ponto qualquer do corpo rígido com vetores posições, \vec{r} , em relação a xyz, e \vec{r}' em relação a $x'y'z'$. Um deslocamento $d\vec{r}$ de P consiste de uma translação $d\vec{r}_{CM}$, seguido de uma rotação infinitesimal $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ em torno do CM. Logo, combinando os dois movimentos,

$$d\vec{r} = d\vec{r}_{CM} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}.$$

Dividindo a equação acima por dt, teremos para cada termo, $d\vec{r}/dt = \vec{v}$, $d\overline{OO'}/dt = d\vec{r}_{CM}/dt = \vec{v}_{CM}$ e $d\vec{\varphi}/dt = \vec{\omega}'$, e finalmente,

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'} \quad (11 - 1)$$

O vetor $\vec{\omega}'$ é chamado de velocidade angular do corpo e sua direção é ao longo do eixo de rotação. Note que na obtenção da Equação (11-1), em nenhum momento foi utilizado o fato de que O' deveria ser o CM do corpo rígido. Considere agora outro sistema móvel de coordenadas $x''y''z''$, com origem $O'' \neq O'$. Representemos por \vec{r}'' o vetor posição de P em relação a O'' . Assim sendo, temos a relação

$$\vec{r}' = \overline{O'O''} + \vec{r}''.$$

Substituindo este valor na Equação (11-1), obtemos

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times (\overline{O'O''} + \vec{r}'') = (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times \overline{O'O''}) + \vec{\omega}' \times \vec{r}'' \quad (11 - 2)$$

É óbvio que P quando observado de O'' deve obedecer a uma relação equivalente à Equação (11-1), ou seja

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\overline{OO''}) + \vec{\omega}'' \times \vec{r}'',$$

que comparada com a Equação (11-2), deve fornecer as relações

$$\frac{d}{dt}(\overline{OO''}) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times \overline{O'O''}, \quad (11 - 3)$$

$$e \quad \omega'' = \omega'. \quad (11 - 4)$$

Esta última relação é muito importante, pois revela que a velocidade angular do corpo em qualquer instante, medida de um sistema de coordenadas atrelado ao corpo, é independente da sua escolha.

Conclusão: Todos os sistemas de coordenadas fixos em um corpo rígido giram com as mesmas velocidades angulares, iguais em módulo e paralelas em direção.

11-2 Dinâmica do movimento de um corpo rígido

Cálculo da energia cinética

Vamos calcular a energia cinética de um corpo rígido admitindo ele formado por um sistema discreto de partículas. Nestas circunstâncias,

$$K = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i \vec{v}_i^2,$$

onde a soma é sobre todas as partículas no corpo. Usando a Equação (11-1) para \vec{v}_i , obtemos

$$K = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)^2 = \frac{1}{2} \vec{v}_{CM}^2 \sum_i \Delta m_i + \sum_i \Delta m_i \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)^2. \quad (11 - 5)$$

As velocidades \vec{v}_{CM} e $\vec{\omega}'$ são as mesmas para cada ponto do corpo. Por outro lado, $\sum_i \Delta m_i = m$ é a massa do corpo.

O primeiro termo da Equação (11-5) torna-se igual a $\frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2$, que é a energia cinética do movimento de translação da massa total m do corpo como se ela estivesse toda concentrada em seu CM.

O segundo termo pode ser um pouco mais trabalhado e reescrito como (reveja a digressão matemática 10-1).

$$\sum_i \Delta m_i \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i) = \sum_i \Delta m_i \vec{r}'_i \cdot (\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}') = (\vec{v}_{CM} \times \vec{\omega}') \cdot \left(\sum_i \Delta m_i \vec{r}'_i \right).$$

Como a origem do sistema foi tomada no CM do corpo, este termo é zero, pois

$$\sum_i \Delta m_i \vec{r}'_i = 0.$$

O resultado é que

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i (\vec{\omega}' \times \vec{r}'_i)^2. \quad (11 - 6)$$

Para o segundo termo, vamos usar a identidade vetorial

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

Sua prova é simples. Com efeito,

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (ab \sin \theta \hat{n}) \cdot (ab \sin \theta \hat{n}) = a^2 b^2 \sin^2 \theta.$$

Por outro lado,

$$a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \theta = a^2 b^2 \sin^2 \theta,$$

o que demonstra a veracidade da identidade acima. Consequentemente,

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i [\omega'^2 r_i'^2 - (\vec{\omega}' \cdot \vec{r}'_i)^2]}. \quad (11 - 7)$$

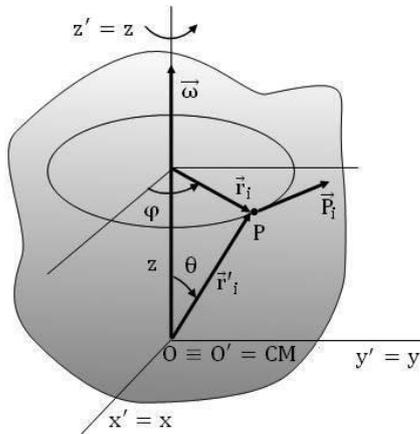
O segundo termo da Equação (11-7) representa a energia cinética de rotação na sua forma mais geral possível. Esta energia tem velocidade angular ω' em torno de um eixo passando pelo CM. A separação de K em duas partes só foi possível porque a origem do sistema de coordenadas fixo no corpo coincide com seu CM. Estudos mais aprofundados de aplicações deste resultado estão acima do nível deste curso.

Rotação em torno de um eixo fixo

Em grande parte das aplicações podemos simplificar a Equação (11-7) considerando a rotação em torno de um **eixo fixo**. A Figura 11-2 ilustra bem uma possível situação deste tipo. Nestas circunstâncias, o sistema de coordenadas móvel, que normalmente é escolhido a passar pelo CM do corpo pode vir agora a coincidir com o seu sistema de coordenadas fixo

xyz. Assim, o termo entre parêntesis na Equação (11-7) tornar-se-á simples, já que $\vec{\omega}' = \omega \hat{z}$, e além do mais,

$$\omega^2 r_i'^2 - (\vec{\omega}' \cdot \vec{r}_i')^2 = \omega^2(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \omega^2 z_i^2 = \omega^2(x_i^2 + y_i^2) = \omega^2 r_i^2,$$



sendo r_i agora escrito numa nova paginação da notação, que representa a distância do ponto P ao eixo de rotação (antes a notação \vec{r}_i' representava o vetor posição de P em relação ao xyz), conforme visto na Figura 11-2.

Se o corpo for considerado como contínuo, o somatório na Equação (11-7) modificada tornar-se-á uma integral sobre o volume do corpo, e teremos

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(\int_{\mathcal{R}} r^2 dm \right) = \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2,$$

onde

Figura 11-2. Rotação de um corpo rígido em torno do eixo dos z.

$$I_z = \int_{\mathcal{R}} r^2 dm = \int_{\mathcal{R}} r^2 \rho d^3r, \quad (11 - 8)$$

definido como o **momento de inércia** do corpo rígido em relação ao eixo dos z, tomado aqui como o eixo de rotação. Ele é calculado multiplicando cada elemento de massa dm do corpo, por r^2 , onde r é a distância de dm ao eixo de rotação, integrando sobre todo o corpo rígido \mathcal{R} .

É claro que tanto o eixo dos x, como o dos y, poderiam ter sido igualmente escolhidos, e aí, então, teríamos diferentes momentos de inércia calculados para cada um destes eixos e eles seriam representados por I_x e I_y .

Como veremos, o momento de inércia tem um papel fundamental no estudo da rotação de um corpo rígido, como tem a massa no restante da mecânica.

Paradinha 11-1

Escreva as expressões I_x e I_y , caso o eixo dos x, ou dos y, fossem tomados igualmente como eixos de rotação do corpo rígido.

Cálculo do momento angular

No uso da lei fundamental da dinâmica das rotações, expressa pela Equação (10-24), é importante o conhecimento da componente do momento angular ao longo do eixo de rotação. Conforme vimos acima, L_z passa a ser esta componente.

Pela Figura 11-3, o módulo do momento angular, correspondente à partícula de massa Δm_i , tomado em relação ao ponto O, é dado por

$$l_i = r_i' p_i \sin 90^\circ = r_i' (\Delta m_i v_i),$$

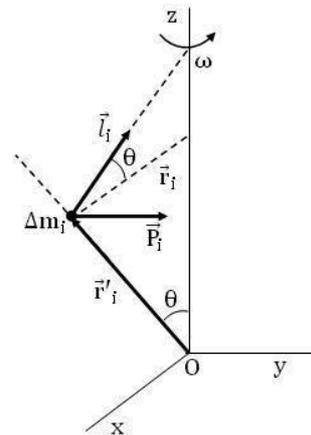


Figura 11-3. Elemento de massa Δm_i de um corpo rígido (não desenhado aqui para não sobrecarregar a figura) com velocidade angular ω mostrado no instante em que \vec{r}_i' é paralelo ao eixo x. Note que $\vec{l}_i \perp \vec{r}_i'$ e \vec{l}_i forma um ângulo θ com \vec{r}_i .

onde p_i e v_i são o momento linear e a velocidade linear de Δm_i respectivamente, sendo 90° o ângulo entre \vec{r}'_i e \vec{p}_i . A componente ao longo dos eixos dos z é dada por

$$l_{iz} = l_i \sin \theta = (r'_i \sin \theta)(\Delta m_i v_i) = r'_i (\Delta m_i v_i).$$

Para as várias partículas que compõem o corpo, o momento angular resultante será

$$L_z = \sum_i l_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_i = \sum_i \Delta m_i v_i r_i.$$

Como $v_i = \omega r_i$, então

$$L_z = \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega.$$

Para uma distribuição contínua, o somatório se transforma numa integral definida sobre o volume do corpo e teremos

$$L_z = \left(\int_{\mathcal{R}} r^2 dm \right) \omega = I_z \omega \quad (11 - 9)$$

A Equação (10-24) se escreve

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = \tau_z^{(e)}, \quad (11 - 10)$$

onde $\tau_z^{(e)}$ é a componente ao longo do eixo dos z da resultante dos torques externos tomados em relação ao ponto fixo O do eixo. Como I_z e ω não dependem da escolha do ponto O , o mesmo dever ocorrer para $\tau_z^{(e)}$.

Paradinha 11-2

Mostre explicitamente que ao mudarmos a origem O para outro ponto qualquer do eixo, esta mudança não afetará a componente z do torque resultante.

Segunda lei de Newton para rotações

A Equação (11-10) pode ser reescrita como

$$\tau_z^{(e)} = I_z \alpha, \quad (11 - 11)$$

onde $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ é a aceleração angular. Ela, como ω , é uma grandeza vetorial, neste caso, dirigida ao longo do eixo z de rotação. Na obtenção da equação acima, note que I_z não depende do tempo t .

A Equação (11-11) é a análoga à 2ª lei de Newton $F = ma$ para o movimento unidimensional. Assim, nas rotações, o momento de inércia desempenha um papel análogo ao da massa.

Trabalho

Consideremos o trabalho realizado por forças aplicadas a um sistema discreto de partículas, numa rotação de um ângulo $\Delta\varphi$,

$$\Delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}'_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\Delta \vec{\varphi} \times \vec{r}'_i) = \sum_i (\vec{r}'_i \times \vec{F}_i) \cdot \Delta \vec{\varphi} = \vec{\tau} \cdot \Delta \vec{\varphi},$$

onde $\vec{\tau}$ é o torque resultante sobre o sistema. No caso de um eixo fixo de rotação ao longo do eixo dos z,

$$\vec{\tau} = \tau_z^{(e)} \hat{z}, \quad \Delta\vec{\varphi} = \Delta\varphi \hat{z},$$

o que nos possibilita a calcular o trabalho total, numa rotação finita de φ_i a φ_f dada por

$$W_{\varphi_i \rightarrow \varphi_f} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \tau_z^{(e)} d\varphi \quad (11 - 12)$$

Usando a Equação (11-11), podemos escrever que

$$\tau_z^{(e)} d\varphi = \tau_z^{(e)} \dot{\varphi} dt = I_z \ddot{\varphi} \dot{\varphi} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2 \right) dt = dK,$$

o que resulta, finalmente

$$W_{\varphi_i \rightarrow \varphi_f} = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2 = K_f - K_i = \Delta K.$$

O trabalho realizado é igual à variação da energia cinética de rotação. Algo similar ocorre no movimento unidimensional, visto na seção 6-8.

A tabela 11-1 resume as equações que se aplicam à rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo e as equações correspondentes para o movimento de translação.

Tabela 11-1

Correspondências entre movimentos de translação e rotação			
Translacional		Rotacional	
Força	\vec{F}	Torque	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Momento linear	\vec{P}	Momento angular	$\vec{L} (= \vec{r} \times \vec{P})$
Segunda lei de Newton	$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Segunda lei de Newton	$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Lei de conservação	$\vec{P} =$ uma constante	Lei de conservação	$\vec{L} =$ uma constante
Posição	x	Posição angular	θ
Velocidade	$v = dx/dt$	Velocidade angular	$\omega = d\theta/dt$
Aceleração	$a = dv/dt$	Aceleração angular	$\alpha = d\omega/dt$
Massa	m	Momento de inércia	I
Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma$	Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha$
Trabalho	$W = \int_c F dx$	Trabalho	$W = \int \tau d\theta$
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$
Potência (força constante)	$P = Fv$	Potência (torque constante)	$P = \tau\omega$
Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$	Teorema trabalho-energia cinética	$W = \Delta K$

Conservação de momento angular

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, com ausência de torque externo, temos pela Equação (10-27), que

$$\tau^{(e)} = 0 \implies L_z = I_z \omega = \text{constante.} \quad (11 - 13)$$

Alguns exemplos abaixo ilustram esta lei de conservação, (reveja a seção 10-7).

i) Estudante em uma cadeira girante

Imagine um estudante sentado em uma cadeira girante, segurando em cada mão, halteres idênticos. Inicialmente, ele gira com velocidade angular moderada. O momento angular \vec{L} está dirigido ao longo do eixo de rotação vertical (eixo do z) no sentido apontando para cima. Vamos desprezar atrito de rolamento na cadeira. A Figura 11-4 indica duas configurações de rotação. Na situação (a), a velocidade angular é moderada. Já na situação (b), o estudante encolhe os braços, diminuindo I_z . Como não há torque externo, L_z é conservado e assim sua velocidade angular é aumentada, para compensar a redução do momento de inércia. Situação similar ocorre com um bailarino girando no gelo, admitindo desprezível o atrito do patim com o gelo. Na direção z não há torque. Assim $L_z = I_i \omega_i = I_f \omega_f$, onde I_f diminui, por exemplo, e ω_f aumenta para manter L_z conservado.

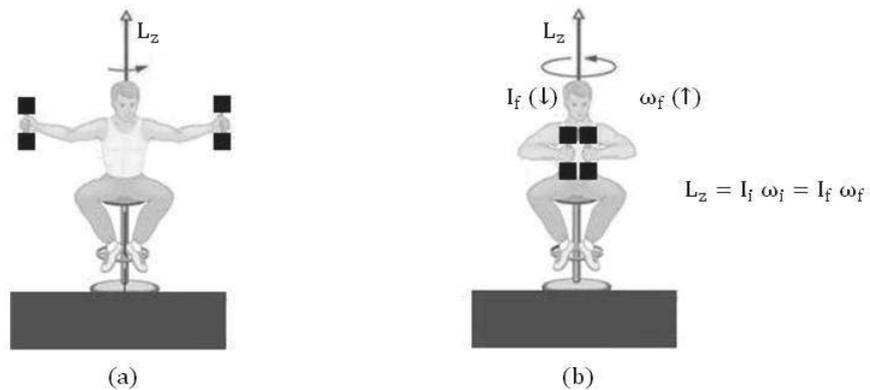


Figura 11-4. Na situação (a), o estudante gira com velocidade angular moderada. Na situação (b), o estudante diminui I_z aumentando ω_f para conservar L_z

ii) Salto em piscina

O momento angular do saltador é constante, pois o mesmo está isolado, e é perpendicular à figura nas diversas posições. Nestas posições, ora I aumenta e ω diminui, ou vice-versa, de modo a manter $L = I\omega = \text{constante}$. A trajetória do CM do saltador descreve uma parábola, como vimos no capítulo 3.

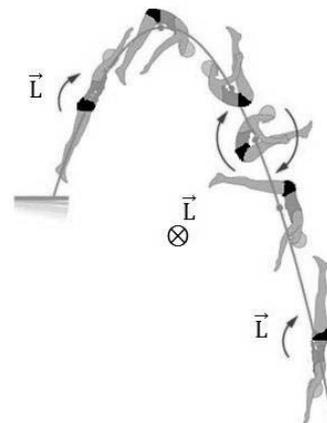


Figura 11-5. Salto em piscina

iii) Pulsar

Fontes de ondas de rádio estelar são emissoras de impulsos de duração média de 35 milésimos de segundo e que se repetem em intervalos extremamente regulares da ordem de 1,4 s, aproximadamente. Tal emissão deve ser produzida por uma estrela de nêutrons, formada de matéria extremamente densa de nêutrons. No seu colapso, devido à alta pressão gravitacional no seu interior, ela atinge um raio de uns poucos quilômetros e começa a girar emitindo um feixe de ondas de rádio à semelhança de clarões emitidos por um farol. Como é um sistema isolado, seu momento angular não varia. Com a diminuição do momento de inércia, I , sua velocidade angular, ω , aumenta extremamente, atingindo valores acima de 500 revoluções por segundo. Para efeito de comparação, o Sol, gira com uma velocidade angular de uma revolução por mês!

11-3 Cálculo de momentos de inércia

Uma grandeza de grande importância na discussão do movimento de um corpo rígido é, como vimos, o seu **momento de inércia**. Um resumo deste conceito pode agora ser feito. Começemos com o momento de inércia de uma partícula de massa m em relação a um dado eixo, que é definido como.

$$I = mr^2 \quad (11 - 14)$$

onde r é a distância da massa ao eixo.

O momento de inércia para um sistema discreto de partículas com massas m_i , $i = 1, \dots, N$ em relação a um certo eixo, é definido como

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (11 - 15)$$

onde cada r_i é a respectiva distância de m_i ao eixo.

Para uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia é definido como uma integral

$$I = \int_{\mathcal{R}} r^2 dm \quad (11 - 16)$$

onde r é distância do elemento de massa dm ao eixo, e \mathcal{R} representa o corpo rígido, onde seus limites geométricos devem ser usados na integração.

Dimensionalmente, o momento de inércia é ML^2 , ou seja, a massa do corpo vezes o quadrado de um comprimento. Esse comprimento k chama-se, por conveniência, **raio de giro** de um corpo em relação ao eixo considerado. Assim,

$$I = mk^2 \quad (11 - 17)$$

A seguir vamos ilustrar com o cálculo do momento de inércia para vários corpos homogêneos mais simples e de grande importância nas aplicações.

i) Barra delgada em torno do seu CM

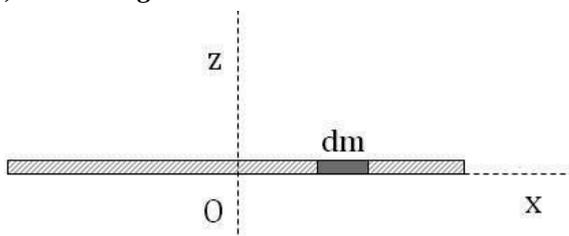


Figura 11-6. Cálculo de momento de inércia de uma barra delgada

Vamos supor Oz o eixo de rotação da barra, onde $O \equiv CM$. Admitindo constante a densidade linear de massa, temos,

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{l} = \text{constante},$$

sendo m a massa da barra de comprimento l .

Assim

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dm = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} ml^2 \quad (11 - 18)$$

Para não sobrecarregar a notação, omitimos o índice z do I.

ii) cilindro anular em torno do eixo central

Uma seção de um cilindro anular de altura h, normal ao eixo dos z é visto na Figura 11-7. Vamos subdividir esta seção reta em anéis concêntricos cada um de espessura infinitesimal hachurada. O volume deste elemento é dado por (área) × (espessura) = $(2\pi r dr) (h)$, e o elemento de massa, $dm = (2\pi r dr h) (\rho)$, onde ρ é a densidade volumétrica constante. O momento de inércia em torno do eixo dos z é então,

$$I = \rho \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r^3 h dr = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^4 - R_1^4).$$

Como

$$R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2),$$

e $\rho = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2) h}$, então obtemos

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)}. \tag{11 - 19}$$

Se $R_1 = 0$, temos o caso de um **cilindro maciço**:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} m R^2}, \tag{11 - 20}$$

Se $R_1 = R_2 = R$ temos o caso de um **aro**:

$$\boxed{I = m R^2}. \tag{11 - 21}$$

Observe que nas deduções acima, os resultados independem de h. É fácil entender daí que o momento de inércia de um **disco circular** em torno de um eixo passando perpendicularmente pelo seu centro é também dado pela Equação (11-20)

iii) Esfera maciça em torno de um diâmetro qualquer

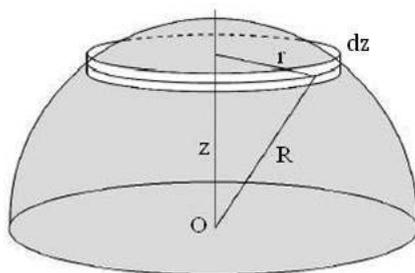


Figura 11-8. Vista de metade de uma esfera maciça tendo Oz como eixo para o cálculo do seu momento de inércia.

Consideremos a esfera maciça de massa m e raio R, da Figura 11-8, onde seu momento de inércia será calculado em torno do eixo Oz.

Dividamos a esfera em discos perpendiculares a Oz, cada um de espessura dz e raio r. O momento de inércia de cada disco em torno de Oz é dado pela Equação (11-20)

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm.$$

Além disso, a densidade volumétrica da esfera é dada por

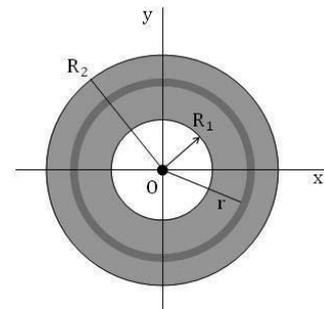


Figura 11-7. Seção normal ao eixo dos z de um cilindro anular de raios interno R_1 e externo R_2 .

$$\rho = \frac{m}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{dm}{\pi r^2 dz} = \text{constante}$$

Assim sendo, o momento de inércia da figura será

$$I = \int_{-R}^R \frac{1}{2} r^2 \rho \pi r^2 dz = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R r^4 dz,$$

onde $r^2 = R^2 - z^2$.

Usando a expressão de r^2 na equação acima, obtemos

$$I = \frac{\pi \rho R^5}{2} \times \frac{16}{15}$$

Como $\rho = \frac{m}{(4/3)\pi R^3}$, obtemos finalmente

$$\boxed{I = \frac{2}{5} m R^2} \quad (11 - 22)$$

iv) Esfera oca

Este caso exige mais atenção na matemática.

Inicialmente, vamos dividir a superfície da esfera oca em tiras de larguras infinitesimais, como uma mostrada na Figura 11-9 (a). Cada tira tem massa dm . De acordo com a **digressão matemática** de seção 10-12, o elemento de área dS mostrado naquela figura, é uma grandeza vetorial e é normal à superfície da esfera no ponto P. A densidade superficial é então definida como

$$\sigma = \frac{dm}{dS} = \frac{m}{4\pi R^2}$$

O cálculo matemático do momento de inércia fica mais simples se em vez de considerarmos **tiras** infinitesimais, considerarmos **aros** infinitesimais, como mostrado na Figura 11-9 (b). Isto resultaria em integrais simples, em vez de duplas. Como efeito, nesta situação a relação entre os módulos de $d\vec{S}$ e $d\vec{S}'$ é dado pela expressão $dS = dS'/\text{sen } \theta$,

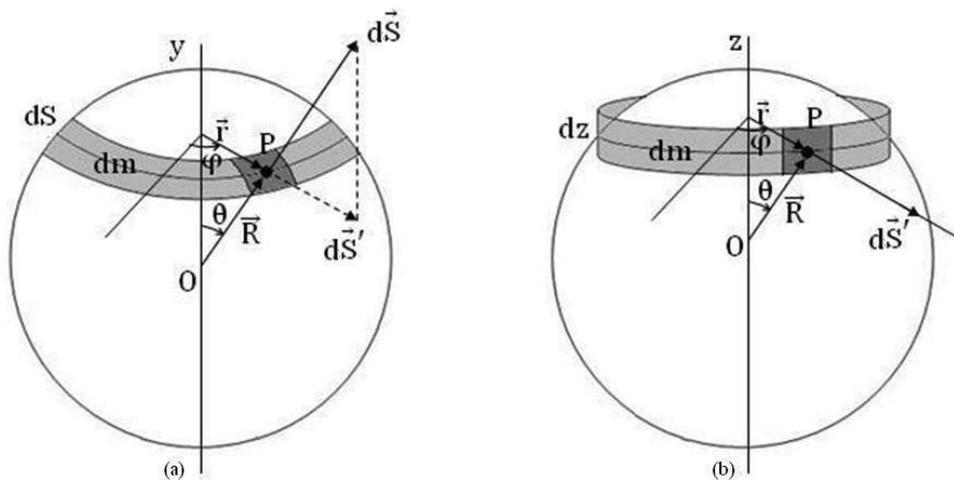


Figura 11-9 Esfera oca tratada em (a) tiras infinitesimais e em (b) como aros infinitesimais

já que $\overline{dS'}$ é também a projeção de \overline{dS} ao longo de \vec{r} e assim normal à superfície do aro infinitesimal. Note que $dS' = 2\pi r dz$.

Cada aro tem momento de inércia dado pela Equação (11-21), ou seja,

$$dI = r^2 dm.$$

Daí, também, se pode escrever

$$dI = r^2 \sigma dS = \sigma r^2 dS' / \sin \theta$$

$$I = \sigma \int_{-R}^R r^2 \frac{2\pi r}{\sin \theta} dz .$$

Para $z = +R$ corresponde a $\theta = 0$ e para $z = -R$ corresponde a $\theta = \pi$. Como $z = R \cos \theta$ e $r = R \sin \theta$, teremos

$$I = -2\pi\sigma \int_{\pi}^0 \frac{R^3 \sin^3 \theta}{\sin \theta} R \sin \theta d\theta = 2\pi R^4 \sigma \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

Note que

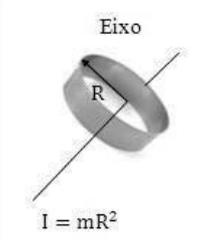
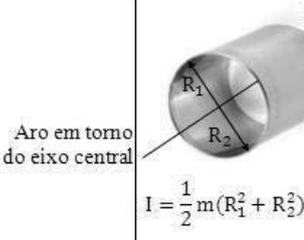
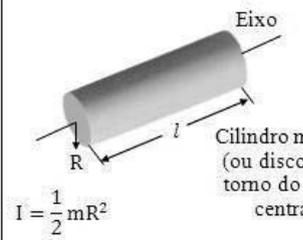
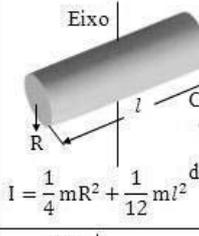
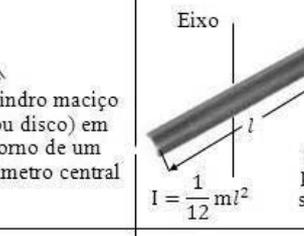
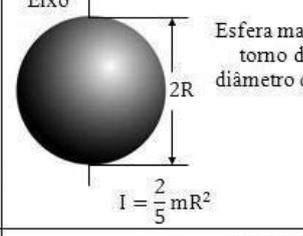
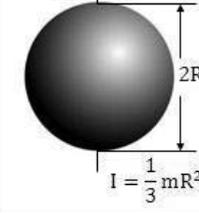
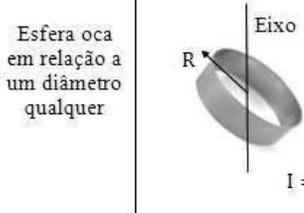
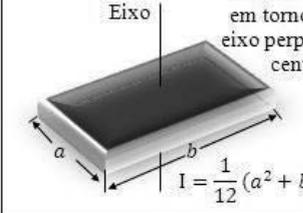
$$\int \sin^3 \theta d\theta = -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta + \text{constante},$$

e usando o valor $\sigma = m/4\pi R^2$, chegamos finalmente a

$$I = \frac{2}{3} mR^2 \quad (11 - 23)$$

A Tabela 11-2 fornece um resumo dos momentos de inércia de figuras geométricas mais utilizadas nas aplicações.

Tabela 10-2 Alguns casos de momentos inércia

 <p>Eixo</p> <p>Aro em torno do eixo central</p> $I = mR^2$	 <p>Eixo</p> <p>Cilindro anular (ou anel) em torno do eixo central</p> $I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$	 <p>Eixo</p> <p>Cilindro maciço (ou disco) em torno do eixo central</p> $I = \frac{1}{2} mR^2$
 <p>Eixo</p> <p>Cilindro maciço (ou disco) em torno de um diâmetro central</p> $I = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2$	 <p>Eixo</p> <p>Haste fina em torno de um diâmetro central perpendicular ao seu comprimento</p> $I = \frac{1}{12} ml^2$	 <p>Eixo</p> <p>Esfera maciça em torno de um diâmetro qualquer</p> $I = \frac{2}{5} mR^2$
 <p>Eixo</p> <p>Esfera oca em relação a um diâmetro qualquer</p> $I = \frac{1}{3} mR^2$	 <p>Eixo</p> <p>Aro em relação a um diâmetro</p> $I = \frac{1}{2} mR^2$	 <p>Eixo</p> <p>Placa retangular em torno de um eixo perpendicular central</p> $I = \frac{1}{12} (a^2 + b^2)$

Paradinha 11-3

Das figuras geométricas na Tabela 10-2, calcule seus respectivos raios de giro.

11-4 Teoremas importantes para o cálculo do momento de inércia

Dois teoremas a seguir são de grande importância para o cálculo de momentos de inércia

i) Teorema dos eixos paralelos

Seja I o momento de inércia de um sistema em relação a um eixo qualquer e seja I_{CM} o seu momento de inércia em relação a um eixo passando através do CM do sistema e paralelo àquele eixo qualquer. Se h for a distância entre os eixos e m for a massa total do sistema, então temos

$$I = I_{CM} + mh^2 .$$

Prova

O momento de inércia I em relação ao eixo qualquer que passa por O' (a, b, c) e é paralelo a Oz , sendo O o CM do sistema, é dado por

$$I = \sum_i m_i |\vec{r}_i - \vec{h}|^2 ,$$

onde $\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}$,

e $\vec{h} = a \hat{x} + b \hat{y} + c \hat{z}$. Mais explicitamente, teremos

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2] = \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \\ &\quad - 2a \sum_i m_i x_i - 2b \sum_i m_i y_i - 2c \sum_i m_i z_i + \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{h^2} \underbrace{\sum_i m_i}_m . \end{aligned}$$

O primeiro termo é I_{CM} . Os termos negativos são todos nulos de acordo com a Equação (8-22). Consequentemente,

$$\boxed{I = I_{CM} + mh^2} , \quad \text{CQD.} \quad (11 - 24)$$

Este teorema é também conhecido como **teorema de Steiner**.

ii) Teorema dos eixos perpendiculares

Considere uma distribuição de massa localizada no plano xy de um sistema de coordenadas xyz .

Sejam I_x, I_y, I_z os seus momentos de inércia em relação aos eixos x, y e z respectivamente. Então, é verdadeira a relação

$$I_z = I_x + I_y .$$

Prova

Seja r_i o vetor posição da partícula de massa m_i no plano xy

$$\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} .$$

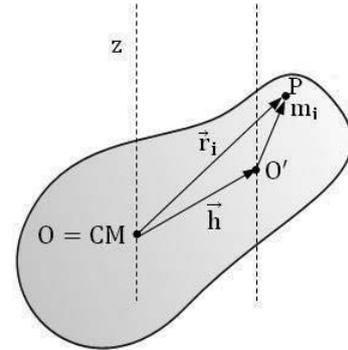


Figura 11-10

O momento de inércia de m_i em relação ao eixo z é $m_i |\vec{r}_i|^2$.

O momento de inércia em relação ao eixo z , considerando todas as partículas, é dado por

$$I_z = \sum_i m_i |\vec{r}_i|^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y, \quad \text{CQD.}$$

O resultado se estende facilmente a sistemas contínuos. Em resumo,

$$\boxed{I_z = I_x + I_y} \quad . \quad (11 - 25)$$

Exemplo 11-1

Calcular o momento de inércia de uma barra de massa homogênea delgada de comprimento l e de massa m em torno de uma extremidade.

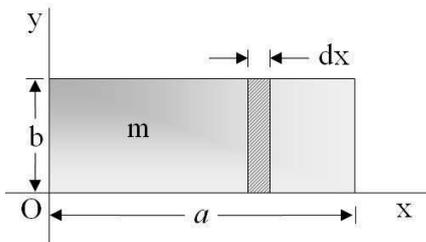
Solução:

Vamos utilizar o teorema dos eixos paralelos. Sabemos que $I_{CM} = \frac{1}{12} ml^2$, logo, em relação a uma extremidade

$$I = I_{CM} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2 .$$

Note que $I > I_{CM}$, o que indica que é mais difícil fazer uma barra girar em torno de uma extremidade do que em torno de seu centro.

Exemplo 11-2



Calcule a) o momento de inércia, e b) o raio de giro, de uma placa retangular homogênea de massa m e lados a e b , em torno de um lado. c) Qual seu momento de inércia em torno de um eixo passando por O e normal à placa?

Solução:

a) A densidade superficial de massa da placa é dada por

$$\sigma = \frac{m}{ab} = \frac{dm}{b dx} = \text{constante, e o momento de inércia infinitesimal em torno do eixo } y \text{ é expresso por } dI_y = (\sigma b dx)x^2 .$$

Figura 11-11 Placa homogênea

Consequentemente,

$$I_y = \int_0^a \sigma b x^2 dx = \frac{1}{3} \sigma b a^3 .$$

Usando a definição de σ acima, temos

$$I_y = \frac{1}{3} m a^2 .$$

$$b) k^2 = I_y/m = \frac{1}{3} a^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3} a \sqrt{3} .$$

c) Podemos usar o teorema dos eixos perpendiculares:

$$I_z = I_x + I_y ,$$

onde I_y é dado pelo item a).

O cálculo de I_x é similar ao de I_y , só que o eixo é o dos x . É fácil ver que

$$I_x = \frac{1}{3} m b^2 ,$$

e conseqüentemente,

$$I_z = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2) .$$

Exemplo 11-3

Calcular o momento de inércia de uma placa homogênea de massa m e lados a e b em torno de um eixo normal a ela e passando por seu CM.

Solução:

Vamos utilizar o teorema dos eixos paralelos, pois conhecemos I_z em torno de O e o I_{CM} é obtido da expressão

$$I_z = I_{CM} + m h^2,$$

onde h é a distância entre O e o CM da placa.

Assim

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2),$$

e conseqüentemente,

$$I_{CM} = I_z - m h^2 = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2) - \frac{1}{4} m (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

Exemplo 11-4 Máquina de Atwood

Uma polia de massa m e raio r pode girar em torno de seu centro e através dela passa, sem atrito, um fio inextensível e de massa desprezível que sustenta na vertical, dois blocos de massas m_1 e $m_2 > m_1$. Admitindo que o fio não escorrega na polia, calcule: a) A aceleração angular da polia. b) A razão das tensões T_1/T_2 no fio nos respectivos pontos que sustentam os blocos.

Solução:

a) De acordo com a Figura 11-12, as equações do movimento dos dois blocos são

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a, & (11-26) \\ m_2 g - T_2 = m_2 a, & (11-27) \end{cases}$$

já que $m_2 > m_1$, sendo a a aceleração linear dos blocos. Para a polia é válida a relação

$$\tau^{(e)} = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\alpha,$$

sendo α a aceleração angular da polia, I o momento de inércia da polia em relação ao eixo normal a ela que passa em seu centro O , e $\tau^{(e)}$ o torque externo resultante nela atuando.

Assim

$$T_2 r - T_1 r = I\alpha.$$

Notando que $a = \alpha r$ e $I = \frac{1}{2} m r^2$ temos que

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m a. \tag{11-28}$$

Somando as Equações (11-26), (11-27), e (11-28), obtemos

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2) + m/2}.$$

O cálculo de $\alpha = a/r$ é assim trivial.

b) Conhecido a se pode obter T_1 da Equação (11-26) e T_2 da Equação (11-27). Com um pouco de manipulação algébrica simples, pode-se chegar ao resultado pedido

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_1(4m_2 + m)}{m_2(4m_1 + m)}.$$

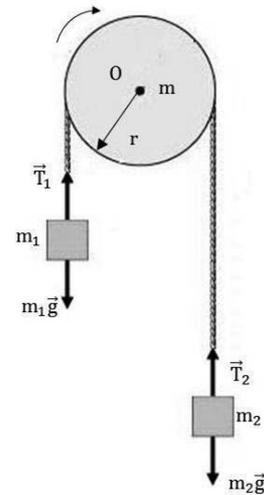


Figura 11-12 Polia sustentando dois blocos na vertical. Este sistema é chamado de máquina de Atwood. É um dispositivo usado para o estudo do movimento retilíneo uniformemente acelerado.

11-5 Relacionando o momento angular e a velocidade angular

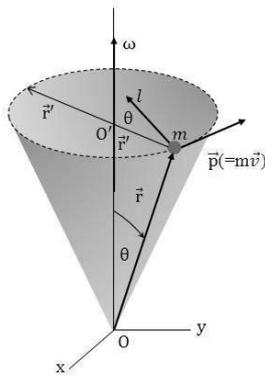


Figura 11-13 Partícula de massa m girando em torno de Oz .

Na Equação (11-9) vimos que havia uma relação entre L_z e a velocidade angular ω dirigida ao longo do eixo dos z , sendo este, tomado como o eixo de rotação. A uma primeira vista somos induzidos a imaginar que \vec{L} e $\vec{\omega}$ são vetores paralelos. Mas como veremos a seguir, nem sempre isto é verdadeiro. Com este propósito vamos considerar três sistemas

i) Sistema de uma partícula

Com efeito, consideremos uma partícula de massa m presa a um fio inextensível e de massa desprezível, que gira em uma circunferência em torno do eixo Oz do sistema inercial xyz , mostrado na Figura 11-13. Os seus vetores $\vec{\omega}$, \vec{r} e $\vec{p} = m\vec{v}$ são mostrados na figura. O vetor $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ é perpendicular ao plano formado por \vec{r} e \vec{p} , o que resulta que \vec{l} **não é paralelo** a $\vec{\omega}$! Aliás \vec{l} só seria paralelo a $\vec{\omega}$ se a origem O fosse escolhida no plano da trajetória da partícula. Este resultado de imediato pode parecer inesperado. Vamos entendê-lo melhor.

Para isto vamos utilizar o caso da Figura 11-13 e calcular separadamente os valores respectivos para cada membro da equação fundamental da dinâmica

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}.$$

Com efeito, sabemos que $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, onde \vec{F} é a força centrípeta atuando em m cujo módulo é

$$F = m\omega^2 r'. \tag{11-29}$$

Por outro lado, o momento angular de m relativo a O é dado por

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad l = m \omega r' r \tag{11-30}$$

O ângulo entre \vec{r} e \vec{F} é $\theta + \pi/2$, de modo que

$$\tau = |\vec{r} \times \vec{F}| = r F \text{sen}(\theta + \pi/2) = r F \text{cos} \theta = m\omega^2 r' r \text{cos} \theta, \tag{11-31}$$

de acordo com o uso da Equação (11-29) para F . O ângulo entre as direções de $\vec{\omega}$ e \vec{l} , de acordo com a Figura 11-14 é $\pi/2 - \theta$. Comparando a Equação (11-31) com a Equação (11-30) podemos concluir que

$$\tau = \omega l \text{sen}(\pi/2 - \theta) = |\vec{\omega} \times \vec{l}|.$$

Como $\vec{r} \times \vec{F}$ e $\vec{\omega} \times \vec{l}$ têm a mesma direção e sentido (apontando na direção Ox), podemos afirmar que a lei fundamental da dinâmica das rotações é verificada. Assim sendo,

$$\boxed{\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{l}} \tag{11-32}$$

que indica que \vec{l} gira em torno da direção de $\vec{\omega}$ com velocidade angular ω .

Paradinha 11-3

a) Mostre que o vetor \vec{l} da Figura 11-14 pode também ser escrito como constituído de duas componentes entre-colchetes $\vec{l} = [\vec{r}' \times \vec{p}] + [(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{p}]$, onde a primeira componente é

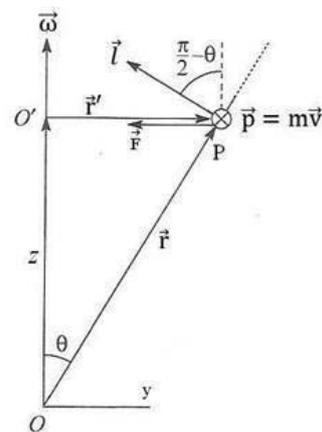


Figura 11-14

um vetor constante, perpendicular ao plano de rotação, enquanto a segunda está contida no plano de rotação.

b) Mostre também que a segunda componente é um vetor não constante que gira com velocidade angular ω e o valor médio de suas projeções no plano xy são nulas (*sugestão*: integre no período $T = 2\pi/\omega$).

c) Finalmente, mostre que a segunda componente varia também com a separação entre O e O' , enquanto a primeira, $\vec{r}' \times \vec{p}$, tem um valor fixo.

ii) Sistema axial

Consideremos um ponto O'' , simétrico de O , como respeito a O' . O momento angular do ponto P em relação a O'' é dado por $\vec{l}' = [\vec{r}' \times \vec{p}] - [(\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{p}]$. Isto significa dizer que a contribuição no plano de rotação é igual e oposta àquela obtida em relação a O' . Para tanto, as componentes neste plano se cancelam se se tomam quaisquer pares de pontos $'$ e O'' simétricos com respeito O' . De acordo com o que foi visto na seção 10-3 isto tem a haver com o fato de que o movimento do sistema considerado tem *simetria axial de rotação*. Isto se manifesta em cada rotação em que o corpo que gira vai ocupando, sucessivamente, posições simétricas de outras anteriores.

iii) Sistema simétrico de duas partículas

Consideremos agora o caso de um sistema de duas partículas, similar ao descrito acima, mas em que a segunda partícula seja colocada na mesma órbita da primeira, se mova com a mesma velocidade angular, mas localizada diametralmente oposta à primeira. A Figura 11-15 mostra os momentos angulares, \vec{l} criado pela primeira partícula, é \vec{l}_s pela segunda partícula simétrica à primeira. Note que $l = |\vec{l}| = l_s = |\vec{l}_s|$.

Assim sendo, as componentes paralelas ao eixo de rotação (Oz) se somam, enquanto, as componentes perpendiculares ao eixo são iguais e opostas e daí se cancelam. Ao se somar as contribuições de \vec{l} e \vec{l}_s ao momento angular total, \vec{L} , do sistema, temos

$$\vec{L} = I_{CM} \vec{\omega}. \tag{11 - 33}$$

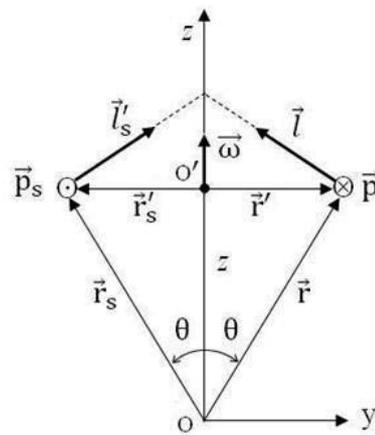


Figura 11-15 Contribuições ao momento angular total para um sistema de massas iguais colocadas diametralmente simétricas. A notação \otimes indica um vetor entrante apontando perpendicularmente para dentro da página, enquanto \odot indica um vetor saliente.

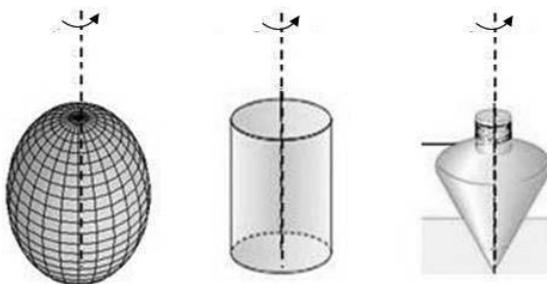


Figura 11-16 Exemplos de corpos rígidos simétricos girando em torno de um eixo vertical de simetria.

iv) Corpo rígido simétrico

Por extensão, a equação acima continua válida para a rotação de um corpo rígido **simétrico** em relação a um eixo de simetria. Este eixo não precisa inclusive permanecer fixo no espaço. A Figura 11-16 mostra alguns corpos rígidos em rotação em torno de um eixo de simetria.

v) Caso geral

A esta altura o leitor pode estar um pouco confuso para entender a relação entre \vec{L} e $\vec{\omega}$ numa rotação. Vamos tentar resumir a discussão acima. Quando a rotação de um sistema rígido (discreto ou contínuo) **não ocorrer em torno de um eixo de simetria**, é preciso ter alguns cuidados ao se tentar relacionar \vec{L} com $\vec{\omega}$. Certamente,

a lei fundamental da dinâmica de rotação, dada pela Equação (10-24) é sempre válida. Mas o uso da Equação (11-33) exige cuidados e um comentário adicional se faz necessário. Para tal, devemos retornar à Equação (11-33). Sabemos que para corpos rígidos simétricos girando em torno de um eixo a relação $\vec{L} = I \vec{\omega}$ se verifica.

O momento de inércia I se comporta como uma grandeza escalar. No entanto, no caso de corpos rígidos quaisquer girando em torno de um eixo que não seja um eixo de simetria, a expressão para I deveria ser recalculada partindo da Equação (11-7).

Pode ser mostrado, em estudos matemáticos mais avançados, que I não se comporta em geral como uma grandeza escalar, mas sim, como um **tensor**. Esta grandeza matemática funciona como um operador tal que transforma $\vec{\omega}$ em \vec{L} de maneira que elas não mais serão paralelas. No caso mais geral possível pode-se mostrar que mesmo assim é possível se achar um sistema de coordenadas com eixos mutuamente ortogonais, passando pelo CM do corpo, tal que neste novo sistema \vec{L} voltaria a ser paralelo a $\vec{\omega}$. Tais eixos são chamados de **eixos principais** e os momentos de inércia I_1, I_2 e I_3 , relativos aos três eixos principais, chamam-se **momentos de inércia principais**. Nesta situação, quando um corpo está girando em torno de um eixo principal

$$L_i = I_i \omega_i \quad (i = 1,2,3). \quad (11 - 34)$$

Em muitos casos, por uma simples inspeção, é possível se determinar os eixos principais de um corpo rígido.

É fácil entender que um eixo de simetria de um corpo rígido, é um eixo principal.

Certamente, esta discussão é mais informativa do que rigorosa, pois este assunto exige uma matemática que está bem acima do nível deste livro.

Exemplo 11-5 Haltere

O **haltere** é um sistema assimétrico cujo eixo forma um ângulo θ com o eixo de rotação, conforme mostrado na Figura 11-17. O sistema gira com velocidade angular constante ω em torno deste eixo e dois mancais o suportam.

Mostre que para o haltere, \vec{L} e $\vec{\omega}$ não são paralelos.

Solução:

O momento angular \vec{l} , de cada uma das duas partículas em relação ao CM se obtém usando o mesmo procedimento discutido acima. Elas têm momentos angulares iguais, pois tanto \vec{r} como \vec{v} têm sentidos opostos para as duas partículas. Consequentemente, o momento angular total é dado por

$$\vec{L} = 2\vec{l}$$

onde, como é fácil de verificar, \vec{L} e $\vec{\omega}$ não são paralelos. A Equação (11-32) permanece válida neste caso, ou seja

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (11 - 35)$$

só que o \vec{L} é o total.

O torque $\vec{\tau}$ é oriundo da presença das forças centrípetas \vec{F} e $-\vec{F}$ que atuam sobre as duas partículas, respectivamente, formando elas um binário. Forças de reação aparecem sobre o eixo nos dois mancais e são responsáveis pelo desgaste que com o tempo lá aparece.

O momento angular \vec{L} de módulo constante, descreve um **cone** em torno de $\vec{\omega}$. Esta rotação de \vec{L} , é chamada de **precessão**. Tal movimento ocorre com frequência em muitos planetas do sistema solar, inclusive com a Terra, com seus eixos de rotação.

O pião é outro exemplo no nosso dia a dia. A precessão é um fenômeno mais comum do que se pensa.

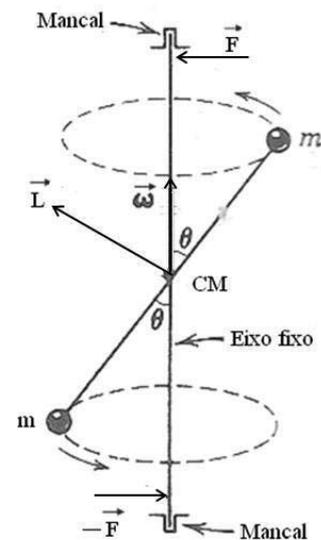


Figura 11-17 Haltere

11-6 Movimento plano de um corpo rígido

O movimento de um corpo rígido é simplificado consideravelmente quando todos os seus pontos movem-se paralelamente a um dado **plano fixo**. Este movimento é chamado de **movimento plano**.

Dois tipos de movimentos podem ocorrer neste processo:

- i) Rotação em torno de um eixo fixo;
- ii) Movimento plano geral.

No caso i) o corpo rígido gira em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano fixo, normalmente chamado de **plano de movimento**. Um exemplo é o movimento de rotação puro em torno de um eixo fixo. O plano de movimento neste caso é perpendicular ao eixo. O sistema tem somente um grau de liberdade (ver capítulo 3) e assim somente uma coordenada é requerida para descrever o movimento.

No caso ii) o movimento pode ser considerado como uma **translação**, paralela ao **plano de movimento**, mais uma **rotação** em torno de um eixo escolhido adequadamente e perpendicular ao plano. Muitas vezes, o eixo é escolhido a passar pelo CM do corpo.

Um bom exemplo deste movimento plano geral é o de um cilindro rolando sem deslizar sobre uma superfície plana horizontal. A rotação se dá em torno de um eixo passando pelo seu CM, normal ao plano de movimento. A translação se dá com o movimento de translação horizontal do CM.

O número de graus de liberdade para tal movimento passa agora a ser 3: duas coordenadas para descrever a translação e uma para descrever a rotação.

Paradinha 11-5

Um ciclista sobe uma serra através de uma estrada suave mas com curvas. Cada roda da bicicleta do ciclista pode ser tratada como descrevendo um movimento plano geral? Justifique sua resposta.

Equação do movimento

Dois são as equações para o movimento de um corpo rígido. Para a translação de CM (ver seção 8-4)

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)} = m\vec{a}} \quad (11 - 36)$$

e para a rotação, tomada em torno do CM,

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}^{(e)}, \quad (11 - 37)$$

de acordo com a Equação (10-26).

Tomando o plano xy como o plano do movimento, teremos

$$\vec{P} = P_x \hat{x} + P_y \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{F}^{(e)} = F_x^{(e)} \hat{x} + F_y^{(e)} \hat{y},$$

e o eixo de rotação será ao longo do eixo z, o que implica que $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

Se o corpo rígido for simétrico em relação ao eixo de rotação, de acordo com o que vimos na seção 8-5, teremos

$$\boxed{\vec{L}' = I_{CM} \vec{\omega}} \quad (11 - 38)$$

Derivando em relação ao tempo a Equação

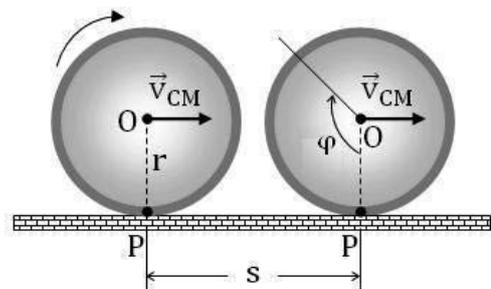


Figura 11-18 Roda em movimento de rolamento.

(11-38), obtemos

$$\vec{\tau}^{(e)} = I_{CM} \vec{\alpha} . \quad (11 - 39)$$

onde $\vec{\alpha} = \alpha \hat{z}$ é a aceleração angular e $\vec{\tau}^{(e)}$ é a resultante dos torques externos em relação ao CM.

As Equações (11-36) e (11-39) são as relações básicas para a descrição do movimento plano geral para um corpo rígido simétrico em relação ao eixo de rotação.

Rolamento

Considere uma roda rolando em posição vertical com seu CM movendo-se com velocidade constante em direção reta numa pista horizontal, conforme mostrado na Figura 11-18. Neste seu deslocamento vamos admitir que ele se dar sem deslizamento ou trepidação sobre a pista, num processo suave. Se a roda se mover para frente percorrendo uma distância s , num tempo t , equivale a dizer que seu CM (ponto O) percorreu esta distância. Isto equivale também a dizer que a roda girou de um ângulo φ em torno do seu eixo, gerando um arco s , dado por

$$s = r \varphi \quad (11 - 40)$$

onde r é o raio da roda. Derivando em relação ao tempo esta relação, obtemos

$$v_{CM} = r \omega \quad (11 - 41)$$

onde $v_{CM} = ds/dt$. A Equação (11-41) dá a condição de um rolamento suave para a roda. A Figura 11-19 fornece uma imagem mostrando que o movimento de rolamento de uma roda pode ser interpretado como uma combinação de uma translação pura com uma rotação pura. Um ponto P qualquer na borda da roda que rola ao longo do eixo x descreve uma curva chamada **ciclóide**, ilustrada na Figura 11-20.

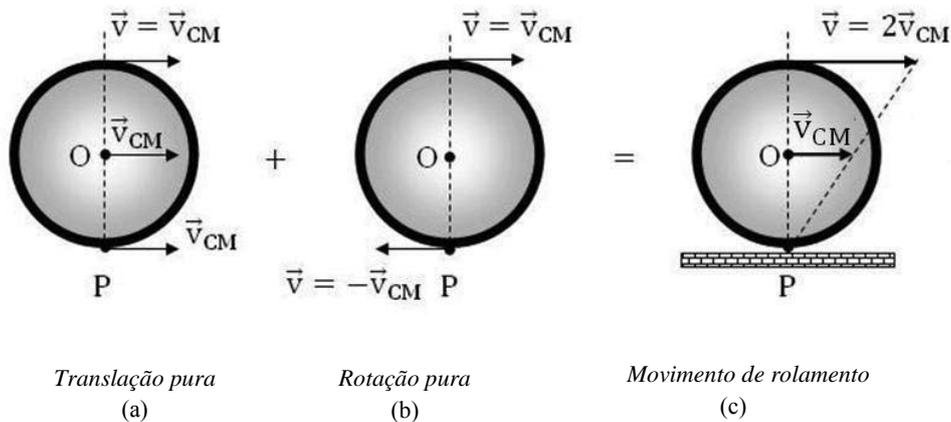


Figura 11-19. Movimento de rolamento de uma roda interpretado como uma combinação de um movimento de translação pura e de um movimento de rotação pura. (a) No movimento de translação pura todos os pontos da roda se movem para a direita com a mesma velocidade \vec{v}_{CM} . (b) No movimento de rotação pura todos os pontos da roda se movem com a mesma velocidade angular ω . Nas suas bordas os pontos se movem com velocidade linear v_{CM} . (c) Movimento de rolamento.

Eixo instantâneo de rotação

Na seção 11-1 foi visto que se um corpo rígido girar em torno do um eixo passando pelo seu CM com velocidade angular ω , girará com esta mesma velocidade se observado de outros eixos paralelos ao primeiro. Assim sendo, muitas vezes é conveniente descrever o movimento de rolamento da roda em torno de um eixo que sempre passa pelo ponto P de

contacto entre a roda e a pista horizontal. Este eixo é perpendicular ao plano da Figura 11-19 (c) e é chamado de **eixo instantâneo de rotação**. Deste eixo e do ponto P se observa uma rotação pura da roda com velocidade angular ω .

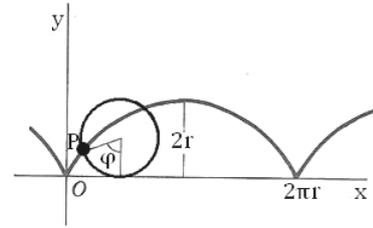


Figura 11-20. Curva chamada cicloide gerada pelo ponto P na borda da roda que rola na direção do eixo x.

Paradinha 11-6

Usando a Figura 11-19 (c) qual é a velocidade linear de um ponto na parte superior da roda de raio r, se calculada do eixo instantâneo que passa pelo ponto P? A velocidade angular da roda é ω se observada do CM.

Atrito e rolamento

Se uma roda rola com velocidade constante, num rolamento como mostrado na Figura 11-18, nenhuma força de atrito atua no ponto P. No entanto, se uma força resultante atuar sobre ela de modo que no seu CM uma aceleração \vec{a}_{CM} se faça presente, esta aceleração causará na roda uma aceleração angular α , como visto na Figura 11-21. Duas situações poderiam ocorrer:

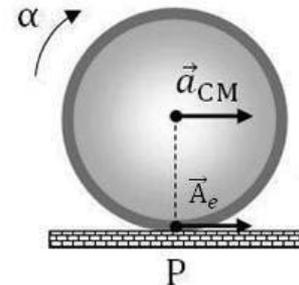


Figura 11-21. Roda rolando para a direita sujeita a uma aceleração \vec{a}_{CM} , com atrito estático presente, gerando uma aceleração angular $\vec{\alpha}$.

i) A roda não desliza

Neste caso, uma força de atrito **estático**, \vec{A}_e , estaria presente e o movimento seria de rolamento suave. As acelerações a_{CM} e α podem se relacionar se nós derivarmos a Equação (11-41) em relação ao tempo, dando

$$a_{CM} = \alpha r, \tag{11 - 42}$$

o que caracterizaria um movimento de rolamento suave.

ii) A roda desliza

Neste caso a força de atrito que atuaria seria de atrito cinético, \vec{A}_c . O rolamento neste caso não mais seria do tipo suave.

Paradinha 11-7

Se a roda da Figura 11-21 fosse desacelerando, quais seriam os sentidos de \vec{a}_{CM} e de \vec{A}_e ?

Energia cinética de rolamento

A energia cinética de uma roda em rolamento calculada a partir de seu eixo instantâneo é dada por

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \tag{11 - 43}$$

onde ω é a velocidade angular da roda e I_P é o momento de inércia da roda em relação ao eixo instantâneo que passa por P. Pelo teorema dos eixos paralelos, aplicado a este caso,

$$I_P = I_{CM} + mr^2,$$

onde m é a massa da roda.

Notando que $v_{CM} = \omega r$, obtemos

$$K = \frac{1}{2} mv_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2. \tag{11 - 44}$$

O Primeiro termo da energia cinética está associado ao movimento de translação do CM da roda e o segundo termo está associado à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo seu CM.

Exemplo 11-6 Rolando plano inclinado abaixo

Considere um corpo uniforme de seção transversal circular de raio r que rola para baixo, sem deslizar, num plano inclinado de ângulo θ e altura h . a) Calcular suas acelerações linear e angular. b) Calcular o ângulo máximo do plano inclinado para o qual é possível o rolamento sem deslizamento. c) Mostrar que a energia mecânica total se conserva. Como interpretar este resultado se existe atrito no processo?

Solução:

a) Na Figura 11-22 podemos visualizar o corpo de seção transversal circular (roda, cilindro, esfera, etc.) rolando suavemente para baixo no plano inclinado. O sistema yx está também representado. As forças de ação estão desenhadas na figura.

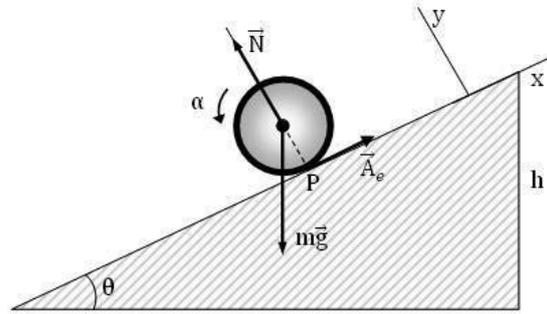


Figura 11-22. Corpo de seção transversal circular rolando sem deslizar para baixo em um plano inclinado.

Usando a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x , temos

$$A_e - mg \sen \theta = -ma_{CM} \tag{11 - 45}$$

onde a_{CM} é a aceleração linear do corpo, descendo o plano inclinado. Não conhecemos A_e , o atrito estático, e a_{CM} . A segunda lei de Newton, na forma angular, aplicada em torno de um eixo Oz passando pelo CM pode ser escrita

$$\tag{11 - 46}$$

onde α é a aceleração angular, $A_e r = I_{CM} \alpha$, ω . Temos duas equações a duas incógnitas, que podem facilmente ser resolvidas, fornecendo

$$a_{CM} = \frac{g \sen \theta}{1 + I_{CM}/mr^2} = \frac{g \sen \theta}{1 + (k/r)^2} \tag{11 - 47}$$

sendo k o raio de giro. Note que \vec{a}_{CM} é um vetor dirigido ao longo do eixo negativo dos x . A força de atrito, por outro lado, tem o valor

$$A_e = a_{CM} I_{CM}/r^2 = \frac{g I_{CM} \sen \theta/r^2}{1 + I_{CM}/mr^2} = mg \sen \theta \left(\frac{k^2}{k^2 + r^2} \right). \tag{11 - 48}$$

Usando a Equação (11-46), podemos finalmente calcular α :

$$\alpha = r A_e / I_{CM} = \frac{(g/r) \sen \theta}{1 + (k/r)^2}. \tag{11 - 49}$$

Já $\alpha > 0$ pois, o corpo rola no sentido anti-horário

b) De acordo com a seção 5-3, se μ_e for o coeficiente de atrito estático, então

$$A_e \leq A_{e,max} = \mu_e N = \mu_e mg \cos \theta. \tag{11 - 50}$$

Comparando com a Equação (11-48), obtemos

$$\tg \theta \leq \tg \theta_{max} = \mu_e [1 + (r/k)^2]. \tag{11 - 51}$$

Na ausência de rolamento, o corpo começa a deslizar para $\theta > \theta_{max}$.

c) Imagine que o corpo é solto o topo do plano inclinado e rola sem deslizar todo o comprimento l do plano, onde $l = h/\sen \theta$. Na base do plano sua velocidade é dada por

$$v_{CM}^2 = 2a_{CM} l = 2gh/[1 + (k/r)^2]. \tag{11 - 52}$$

A energia cinética correspondente é

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \alpha^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 [1 + (k/r)^2].$$

Usando a Equação (11-52), obtemos, finalmente,

$$K = mgh,$$

que é a energia potencial. Consequentemente, a energia mecânica total é conservada. Mas como isto foi possível se havia força de atrito presente? A razão para que isto fosse possível é que no ponto P de aplicação da força de atrito está também o eixo instantâneo de rotação. Ele está em repouso a cada instante em que um ponto P da borda do corpo toca a superfície do plano inclinado. Consequentemente, a força de atrito não realiza trabalho.

Paradinha 11-8

O papel da força de atrito é freiar um corpo. Mostre que o fator de freiamento no Exemplo 11-6 é $[1 + (k/r)^2]^{-1}$.

Exemplo 11-7 O Ioiô

O ioiô é um brinquedo popular rico em física. Tem o formato de um carretel o qual é constituído por dois discos idênticos de raio R, paralelos e ligados ortogonalmente por um eixo cilíndrico curto de raio $r \ll R$. No eixo, se enrola um fio flexível, inextensível e de massa desprezível, o qual deve ser mantido esticado. Prendendo na mão a extremidade do fio e soltando o ioiô, ele rola para baixo, até desenrolar o fio, que então passa de um lado do eixo para o outro e se reenrola à medida que o sistema volta a subir. Admita desprezível o atrito no processo descrito.

- a) Calcular a aceleração linear do ioiô
- b) Calcular sua energia cinética.
- c) Estimar o tempo Δt entre a descida e a subida do ioiô.

Solução:

a) Para que o fio possa se manter sempre na vertical é necessário que $r \ll R$. Observando as forças que atuam no ioiô na Figura 11-23, podemos escrever para a situação (a), as equações do movimento;

$$\begin{cases} T - mg = -ma_{CM} & , & (11 - 53) \\ \tau = Tr = I_{CM} \alpha & , & (11 - 54) \end{cases}$$

onde a_{CM} e $\alpha = \ddot{\phi}$ estão relacionados pela equação $a_{CM} = r\alpha$, e são a aceleração linear ao longo da vertical (eixo y) e a aceleração angular, respectivamente. A grandeza I_{CM} é o momento de inércia do ioiô em relação ao seu CM. Resolvendo o sistema acima, encontramos,

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + I_{CM}/mr^2} . \tag{11 - 55}$$

Como a_{CM} é constante temos aqui um movimento de translação (descida) uniformemente acelerado. A tensão pode também ser calculada e tem o seguinte valor

$$T = \frac{mg}{1 + mr^2/I_{CM}} < mg .$$

No caso da Figura 11-23 (b), o ioiô passa a subir. O sentido de rotação permanece o mesmo, mas o fio passa para o outro lado do eixo. Nesta situação, o torque é negativo, gerando a relação

$$-Tr = I_{CM} \alpha ,$$

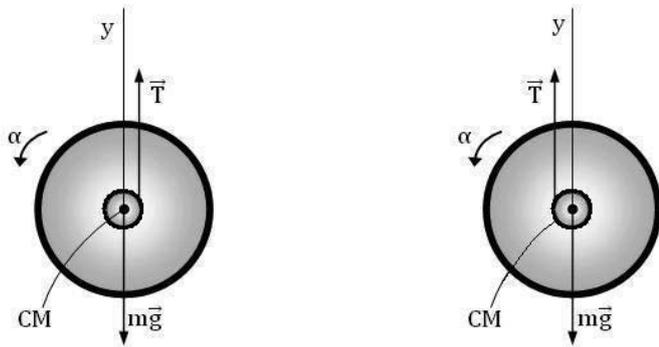
a qual indica uma desaceleração angular na subida ($\alpha < 0$). A Equação (11-53) se mantém já que também vai haver uma desaceleração na aceleração linear. Em resumo, o valor de a_{CM} , dado pela Equação (11-55), permanece o mesmo.

b) O valor da energia cinética é calculado pela expressão

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 . \tag{11 - 56}$$

Como $v_{CM} = r\dot{\phi} = r\omega$, então,

$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 .$$



(a) Ioiô descendo

(b) Ioiô subindo

Figura 11-23. Ioiô em movimento. Nos dois casos $\alpha = \ddot{\phi}$, é anti-horário. O raio do disco maior é R e o raio do disco menor é $r \ll R$, condição para manter o fio na vertical. A tensão no fio é \vec{T} .

Pelo teorema dos eixos paralelos, I é momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo ponto de contacto entre o fio e o eixo, ou seja, **o eixo instantâneo de rotação**.

A expressão para K indica que o movimento em relação ao eixo instantâneo é uma rotação pura, como esperado. c) No curto intervalo de tempo Δt entre a descida e a subida do ioiô, tivemos a presença de um impulso linear (ver seção 9-2) cuja ação se manifestou como um súbito puxão no fio. A força correspondente a este puxão é dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

onde Δp é a variação do momento linear quando a velocidade linear troca de sinal entre a descida e a subida. O cálculo da velocidade é feito por conservação da energia mecânica. Usando a Equação (11-56), e tomando a origem ao longo dos eixos dos y , na posição inicial do ioiô ($y = 0$), temos

$$E = 0 = -mgy + \left(\frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}v_{CM}^2/r^2 \right),$$

e daí obtemos

$$v_{CM} = \pm \left[\frac{2mr^2gy}{I_{CM} + mr^2} \right]^{1/2},$$

onde o sinal (+) \rightarrow descida, e (-) \rightarrow subida. Esta equação está compatível com a equação $v^2 = 2ay$ vista na cinemática, no movimento retilíneo uniformemente acelerado.

Logo, podemos calcular Δp , ou seja,

$$\Delta p = m [v_{CM} - (-v_{CM})] = 2m v_{CM} = 2m \left[\frac{2mr^2gl}{I_{CM} + mr^2} \right]^{1/2},$$

onde $y = l$ é o comprimento do fio ao atingir o ponto mais baixo. Por outro lado, podemos estimar o tempo Δt , como sendo o necessário para se ter uma rotação π rd na etapa de transição do percurso do ioiô. Isto implica dizer que

$$\Delta t \cong \pi/\phi = \pi r/v_{CM}.$$

Paradinha 11-9

Mostre que o movimento de um ioiô é equivalente ao de ele descer um plano inclinado formando um ângulo de $\theta = 90^\circ$ com a horizontal.

11-7 Impulso angular

Em analogia com impulso linear (ver seção 9-2), imagine um corpo rígido sob a ação de um torque externo $\vec{\tau}^{(e)}(t)$ que está relacionado com a variação do seu momento angular, \vec{L} , através da segunda lei de Newton para rotações, num intervalo de tempo muito pequeno. Assim sendo

$$d\vec{L} = \vec{\tau}^{(e)}(t) dt.$$

Para uma variação finita,

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_i}^{t_f} d\vec{L} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}^{(e)}(t) dt. \quad (11 - 57)$$

A segunda integral da equação acima é chamada de **impulso angular**, \vec{J} , para o processo acima. Ou seja,

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}^{(e)}(t) dt} \quad (11 - 58)$$

Disto resulta que

$$\boxed{\Delta\vec{L} = \vec{J}} \quad (11 - 59)$$

Como para o impulso linear, também é válida a relação

$$\vec{J} = \Delta \vec{L} = \langle \vec{r}^{(e)} \rangle \Delta \vec{L}$$

(11 – 60)

Exemplo 11-9

Uma barra delgada, homogênea de massa m e comprimento l está inicialmente em repouso sobre um assoalho polido sem atrito. Subitamente, ela é atingida em uma das extremidades por um pequeno objeto de massa aderente m e de dimensões desprezíveis, tendo ele uma velocidade v , em direção perpendicular à barra. Esta pequena massa logo se adere à barra com o impacto.

- a) Qual a velocidade angular ω do sistema barra + objeto, imediatamente, após o impacto?
- b) Calcular a energia cinética deste sistema em função dos dados

Solução:

a) Com o choque, o pequeno objeto de massa m se adere à extremidade da barra, também de massa m . É um choque perfeitamente inelástico. **Imediatamente**, antes de choque até **imediatamente** após o choque, não deve haver nenhum torque **externo** atuando no sistema (barra + objeto). Logo $\Delta \vec{L} = 0$, o que implica,

$$\frac{mv(l/4)}{L \text{ antes}} = \frac{I_{CM} \omega}{L \text{ depois}}$$

onde

$$I_{CM} = m \left(\frac{l}{4}\right)^2 + \left[\frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{4}\right)^2\right] = (5/24)ml^2.$$

Logo,

$$\omega = \frac{6}{5} \left(\frac{v}{l}\right).$$

b) Note que $\Delta \vec{p} = 0$, pois não há forças externas atuando nas direções x e y . Assim o movimento do CM do sistema é conservado. A velocidade linear do CM do sistema antes do choque é

$$v_{CM} = \frac{m \times v}{2m} = \frac{v}{2}$$

e ela se mantém após o choque, ao longo do eixo dos y . Em torno do CM do sistema gira a barra com o material aderente, com velocidade ω , indefinidamente, já que não há atrito no processo. A energia cinética pedida é dada por

$$K = \frac{1}{2} (m + m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{2}{5} mv^2$$

após usar os valores de v_{CM} , I_{CM} e ω já calculados.

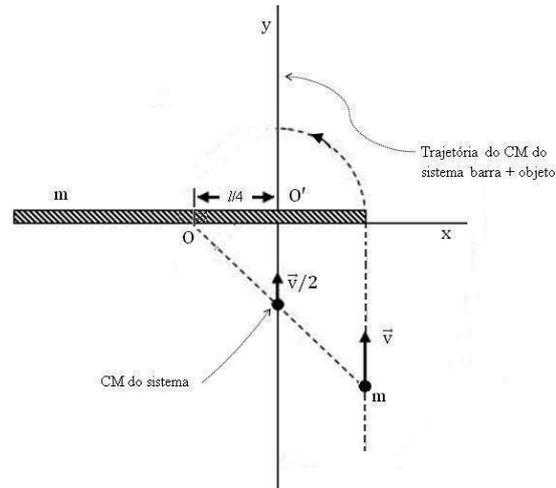


Figura 11-24. Barra livre num assoalho atingida por um objeto. O ponto O é o CM da barra e O' é o CM do sistema (barra + objeto).

Exemplo 11-10

Uma barra delgada uniforme de comprimento l e massa m gira num plano vertical, conforme visto na figura abaixo, em torno de um eixo que passa pela extremidade superior. Quando a barra passa por sua posição mais baixa, colide com uma pequena massa $m' < m$, de material aderente, que fica grudada em sua extremidade. A velocidade angular da barra imediatamente antes da colisão é ω_0 .

- a) Qual a velocidade angular do sistema $(m + m')$, imediatamente, após a colisão?
- b) Admitindo pequenas oscilações, qual o ângulo máximo alcançado pelo sistema?

Solução:

a) Três observações devem ser feitas nesta colisão de m com m' .

i) A energia cinética não se conserva, pois o choque é perfeitamente inelástico.

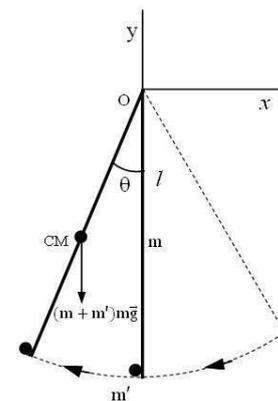


Figura 11-25. Barra delgada sustentada O, ao girar atinge o pequeno objeto de massa m , que se adere à barra e juntos continuam no giro um pouco mais.

ii) O momento linear \vec{P} não se conserva, pois há uma força externa atuando em O, além da gravidade que atua na barra e em m' .

iii) O momento angular total \vec{L} só se conserva no instante do impacto, pois nesta ocasião o torque externo que atua em O tem braço nulo. As forças que atuam durante o choque de m' com m são internas e dão torque nulo. Assim podemos escrever

$$\Delta L = 0 \Rightarrow I_0 \omega_0 = I' \omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I_0}{I'} \omega_0 ,$$

onde

$$I_0 = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2 ,$$

e

$$I' = I_0 + m' l^2 = \frac{1}{3} (m + 3m') l^2 ,$$

$$\therefore \omega' = \left(\frac{m}{m + 3m'}\right) \omega_0 .$$

b) A partir da colisão, \vec{L} não mais se conserva, pois $\vec{\tau}^{(e)} \neq 0$. Assim

$$\vec{\tau}^{(e)} = \vec{r}_{CM} \times (m + m') \vec{g} \sin \theta ,$$

onde

$$r_{CM} = \frac{m l/2 + m' l}{m + m'} = \left[\frac{m + 2m'}{2(m + m')}\right] l .$$

Pela regra da mão direita é fácil ver que $\vec{\tau}^{(e)}$ é um vetor **saliente** (do papel). Já \vec{L} é entrante no papel ($\vec{\omega}$ tem sentido horário e aqui $\vec{L} = I \vec{\omega}$). O torque é então dado por

$$\tau^{(e)} = \frac{1}{2} (2m' + m) g l \sin \theta . \quad (11 - 61)$$

Quando a barra $m + m'$ atingem a posição máxima

$$0 = \omega'^2 - 2 \alpha \theta \Rightarrow \alpha = \omega'^2 / 2\theta . \quad (11 - 62)$$

Como $\tau^{(e)} = I' \alpha$, então usando as Equações (11-61) e (11-62), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m + 2m') g l \sin \theta &= \left[\frac{1}{3} (m + 3m') l^2\right] \frac{\omega'^2}{2\theta} \\ \Rightarrow \theta \sin \theta &= \frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0^2 l}{g}\right) \frac{m^2}{(m + 2m') (m + 3m')} . \end{aligned}$$

Para pequenas oscilações do sistema, $\sin \theta \sim \theta$, o que resulta

$$\theta \approx \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\omega_0^2 l}{g}\right) \frac{m^2}{(m + 2m') (m + 3m')}\right]^{1/2} .$$

Observe que se $m' \approx 0$, o valor de θ coincide com aquele de um pêndulo de haste, ou seja,

$$\omega_0 \sqrt{\frac{l}{3g}} .$$

11-8 Giroscópio

Um giroscópio mais simples consiste de um volante, que é uma roda que pode girar em alta rotação, e cujo centro é fixado em uma das extremidades de uma haste, de massa desprezível, se comparada com a do volante que lhe sirva como eixo de rotação. A outra extremidade da haste pode ser colocada sobre um suporte, como mostrado na Figura 11-26 (a). Imagine o volante não estando girando. Obviamente, o giroscópio se solto, cairá girando para baixo em torno do suporte no ponto O. No entanto, se o volante do giroscópio estiver girando com energia cinética bem maior que a energia potencial gravitacional atuando no CM do giroscópio, o qual tomamos como o centro do volante, o sistema (volante + haste) permanecerá suspenso no ar, em vez de cair! Como explicar isto?

Tomemos um sistema de coordenadas como indicado na Figura 11-26 (a). O peso $\vec{P} = m\vec{g}$, sendo m a massa do volante, atua no seu CM (ponto c). No suporte O aparecerá a força de reação, $-\vec{P}$, que com \vec{P} formam um binário de braço \vec{r} , gerando um torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad (11 - 62)$$

onde $\vec{r} = r \hat{x}$ e $\vec{P} = -mg \hat{z}$. Assim .

$$\vec{\tau} = -rm g (\hat{x} \times \hat{z}) = r mg \hat{y} \quad (11 - 63)$$

A segunda lei de Newton na forma angular

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

se aplica com $\vec{L} = I\vec{\omega}$, onde I é o momento de inércia do volante e $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$ sua velocidade angular. Conclui-se que \vec{L} é perpendicular a $\vec{\tau}$ (ver Equação (11-63)), conforme está mostrado na Figura 11-26 (a).

Num intervalo de tempo infinitesimal, Δt , temos que

$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau} \Delta t = rm g \Delta t \hat{y},$$

que é assim normal a \vec{L} , e paralelo a $\vec{\tau}$.

Logo, podemos escrever que $\Delta\vec{L} \perp \vec{L}$, ou seja

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{L}^2) = \vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 0.$$

O significado disto é que um torque perpendicular a \vec{L} , não altera o módulo de \vec{L} , mas sim sua direção. E mais ainda, o sistema volante + haste girará no sentido anti-horário em torno do eixo dos z , gerando uma circunferência tendo $\vec{\tau}$ sempre tangente a essa trajetória. Este fato está esquematizado na Figura 11-26 (b).

Com o giroscópio em alta rotação, ele deve realizar um movimento chamado de **precessão**, em vez de tombar.

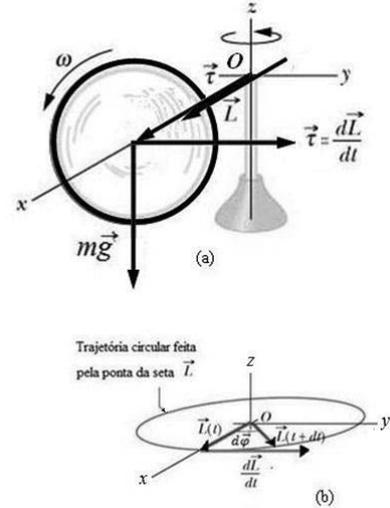


Figura 11-26. (a) Giroscópio simples (b) Esquema da variação de \vec{L} como o tempo.

Velocidade de precessão

O cálculo da velocidade de precessão é similar ao que foi utilizado no movimento circular uniforme (seção 3-7). O momento angular \vec{L} , mostrado na Figura 11-26 (b) gira um intervalo de tempo infinitesimal, Δt , de ângulo, $\Delta\phi$, tal que podemos escrever

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\tau \Delta t}{L} .$$

A velocidade de precessão, Ω , é definida como

$$\Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} ,$$

consequentemente, no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{mgr}{I\omega} . \tag{11 - 64}$$

Observe que Ω independe de m , pois $I \propto m$. Por outro lado, como ω atinge altos valores, então $\Omega \ll \omega$.

Na Figura 11-26 (b), $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$, o que facilmente nos leva a concluir que $\vec{\tau}, \vec{\Omega}$ e \vec{L} estão relacionados por

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} . \tag{11 - 65}$$

O torque criado pelo peso é contrabalanceado pelo torque criado pela variação de \vec{L} .

Pião

Uma variação do giroscópio simples é quando a haste da roda faz um ângulo θ com o eixo dos z . É o caso, por exemplo, do pião em rotação, ilustrado na Figura 11-27. Ele é essencialmente um giroscópio girando em um ângulo com a horizontal.

Para este caso, são válidas as relações $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$, o que implica que $\tau = r mg \sin(\pi - \theta) = mgr \sin \theta$.

Por outro lado,

$$dL = \tau dt,$$

e como,

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} \quad \text{e} \quad d\phi = \frac{1}{L \sin \theta} dL,$$

então,

$$\Omega = \frac{1}{L \sin \theta} \frac{dL}{dt} = \frac{mgr \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega},$$

expressão idêntica à Equação (11-64).

A precessão corresponde a um movimento do eixo terrestre, segundo um cone de semiabertura igual a $23^\circ 27'$, que é o valor aproximado desta obliquidade.

Outro movimento mais sutil do eixo da Terra é

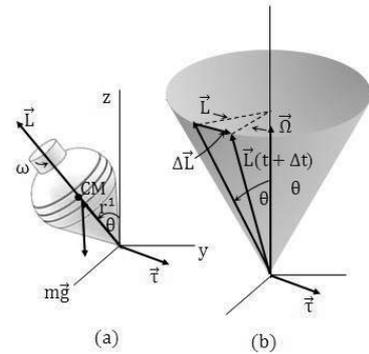


Figura 11-27. Pião girando com seu eixo de rotação formando um ângulo θ com o eixo vertical.

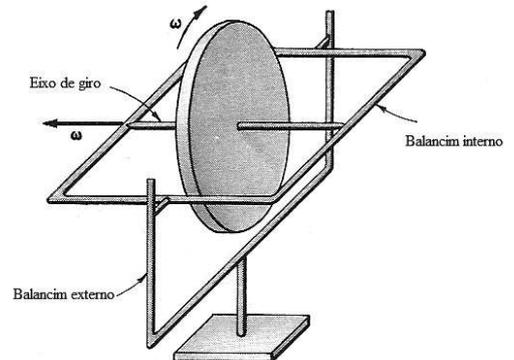


Figura 11-28. Giroscópio mais sofisticado.

chamado de **nutação**. São oscilações deste eixo, o que faz com que a borda do cone de precessão descreva um movimento que se assemelhe a uma babado numa costura. Este movimento foi descoberto pelo astrônomo inglês James Bradley (1692-1762). A precessão terrestre tem um período aproximado de 25.800 anos. Já a nutação tem um período bem menor. Ela acontece em 306 dias do ano. A nutação é causada por vários efeitos irregulares que afetam a Terra, tais como ventos fortes, tornados, correntes oceânicas e outros. Os estudos destes dois movimentos com maior profundidade estão acima do nível deste curso. Na Figura 11-28 temos uma ilustração de um giroscópio mais sofisticado. Muitas são as aplicações do giroscópio na navegação (navios, naves espaciais, etc.), na bicicleta e motocicleta, e outros tantos sistemas.

Exemplo 11-11

Um giroscópio consiste de um disco de raio R montado no centro de uma haste de massa desprezível e de comprimento $2r$. Calcule a velocidade angular de precessão, se o disco gira a uma velocidade angular ω , e a haste fica apoiada numa de suas extremidades e na horizontal.

Solução:

Tomando o eixo dos x ao longo da haste do giroscópio, podemos escrever que $\Omega = \tau/L$, onde τ é o torque criado pelo peso da roda, e dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P} = (r \times \hat{x}) \times mg(-\hat{z}) = mgr \hat{y}, \text{ e } L \text{ é o seu momento angular, dado por}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega} = I\omega \hat{x} .$$

Logo,

$$\Omega = \frac{mgr}{I\omega} = \frac{mgr}{(1/2 m R^2)\omega} = \frac{2gr}{R^2\omega} .$$

11-9 Pausa para descontração:

Tão fácil como andar de Bicicleta*

*Fernando Nóbrega, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco.

Em tempos de sustentabilidade, promoção da saúde e meios de transporte alternativos, a bicicleta está em alta na sociedade atual. De fato, quase todo mundo pode andar de bicicleta, embora, contrariando o título deste texto, quase ninguém sabe explicar fisicamente como fazer isso. A simplicidade aparente de como andar de bicicleta

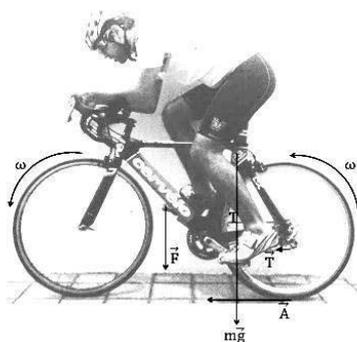


Figura 11-29. Principais forças atuando numa bicicleta em movimento

esconde um pouco as razões de sua estabilidade. Um grupo de cientistas explicou convincentemente esse fenômeno apenas em 1970, cerca de um século e meio após a bicicleta ser patenteada, em 1918, na França. É bom lembrar que ela parece ser uma grande invenção de Leonardo da Vinci no século XVI. Existem especulações que ela possa vir de mais longe na China. A explicação da auto-estabilidade atraiu a atenção de pesquisadores famosos, como os alemães Felix Klein e Arnold Sommerfeld no início do século 20. Klein e Sommerfeld avançaram na teoria de que o momento angular da roda dianteira e o conseqüente efeito giroscópico, estudado neste capítulo, mantém a bicicleta estável. Resultados clássicos sugerem que o momento angular das rodas da bicicleta agem como giroscópios e ajudam a estabilizá-la. O efeito giroscópico também contribuiu para realização de manobras.

Recentemente, em abril de 2011, uma pesquisa publicada na revista *Science*, realizada por uma equipe de pesquisadores da Holanda e dos EUA, concluiu que uma bicicleta experimental pode apresentar auto-estabilidade, apesar de aparentemente não apresentar efeito giroscópico. Em relação a natureza giroscópica da roda dianteira da bicicleta, o estudo observou que os experimentos parecem indicar que o efeito giroscópico não é o único importante no contexto da estabilidade de uma bicicleta. Já no caso de uma motocicleta, que possui massa e velocidade relativamente maiores que a bicicleta, o efeito giroscópico é

predominante para estabilidade da mesma. De fato, os momentos de inércia e as velocidades da bicicleta parecem não ser grande o suficiente para provocar a estabilidade esperada (veja figura).

Pela lei da inércia, uma bicicleta em linha reta tenderá a permanecer em linha reta. Em relação a estabilidade da bicicleta, ao realizar uma curva, a associação com a inclinação do ciclista é verdadeira. Se o ciclista se inclina para a esquerda, um torque será produzido (veja figura) o que provocará uma precessão no sentido anti-horário da roda da bicicleta, que tende a mover a bicicleta para a esquerda.

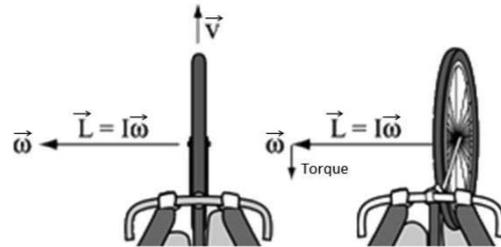


Figura 11-30. À esquerda, a bicicleta em movimento com a roda dianteira alinhada com a roda traseira. À direita, a roda dianteira se inclina um pouco para a direita.

Na verdade, o estudo da *Science* concluiu que a estabilidade da bicicleta pode ser descrita em termos de referenciais não inerciais. No instante que o ciclista sente um desequilíbrio da bicicleta para a esquerda, o mesmo vira o guidom para a direita, resultando em um pequeno percurso circular. Este processo empurra a parte superior da bicicleta de volta para uma condição vertical e equilibrada. Esses resultados ainda demandam investigações futuras.

Assumindo que a bicicleta é equilibrada pela ação do ciclista que, ao sentir o veículo caindo, orienta contra o sentido da queda e assim percorre uma trajetória curva de modo que a resultante (em um referencial não inercial) é centrífuga e suficiente para compensar e corrigir a queda. Este modelo foi bem formalizado matematicamente por S. Timoshenko e Young, que idealizaram equações de movimento para bicicleta. A teoria explica, por exemplo, que a estabilidade de uma bicicleta depende crucialmente da liberdade dos garfos dianteiros (ou seja, se eles estivessem fixos, a bicicleta não ficaria estável). Além disso, quanto mais rápido uma bicicleta se move, mais fácil é mantê-la estável.

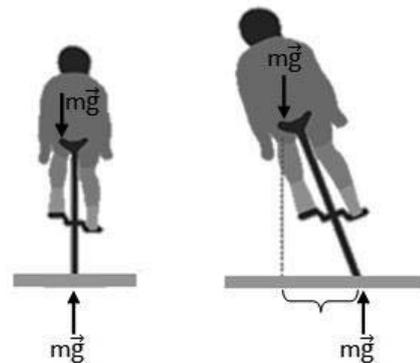


Figura 11-31. À esquerda, ciclista em equilíbrio não produz torque.

Em suma, toda vez que o assunto bicicleta é colocado em pauta, todo mundo encolhe os ombros e diz: "Temos bicicletas; sabemos como andar de bicicleta..." ou "... isto é tão fácil quanto andar de bicicleta". O que em geral não se conhece, e é um dos objetivos deste artigo, é a riqueza científica que está por traz deste meio de transporte e lazer tão utilizado pela sociedade. A estabilidade da bicicleta, embora um problema de Física Clássica tão antigo, desperta o interesse e permanece em evidência nos dias atuais. Nem tudo que foi inventado há muitos anos é um problema fechado.

O problema da bicicleta é um exemplo!

Material extra-curricular sugerido

The stability of the bicycle

David E. H. Jones, *Physics Today*, September 2006 page 51.

O texto acima sugerido é escrito em inglês o que dar ao leitor a oportunidade de pratica-lo.

Resumo

Velocidade de qualquer ponto de um corpo rígido (em relação a um sistema fixo de coordenadas)

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}' \times \vec{r}' \quad (11 - 1)$$

As velocidades \vec{v}_{CM} e $\vec{\omega}'$ são as mesmas para qualquer ponto P no corpo. O vetor posição, \vec{r}' , é de P em relação ao CM.

Momento de inércia

Simetria discreto de partículas

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad , \quad (11 - 15)$$

$$I = \int_R r^2 dm \quad . \quad (11 - 16)$$

As grandezas r_i e r representam as distâncias ao eixo de rotação de cada elemento de massa do corpo.

Energia cinética de rotação (em torno de um eixo fixo que passa pelo CM do corpo)

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (11 - 43)$$

Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner)

$$I = I_{CM} + mh^2 \quad , \quad (11 - 24)$$

onde h é a distância entre dois eixos paralelos

Teorema dos eixos perpendiculares

$$I_z = I_x + I_y \quad (11 - 25)$$

A distribuição de massa está contida no plano x e y e I_x , I_y e I_z são os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

Momento angular de um corpo rígido simétrico em relação a um eixo fixo

$$\vec{L} = I_{CM} \vec{\omega} \quad . \quad (11 - 33)$$

O momento angular \vec{L} , está na mesma direção de $\vec{\omega}$ se o corpo for **simétrico** (ou tiverem os três momentos principais de inércia iguais).

Segunda lei de Newton para rotações

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad (11 - 63)$$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

O torque resultante, $\vec{\tau}$, só é proporcional e na mesma direção de $\vec{\alpha}$ se o corpo for **simétrico** (ou tiverem os três momentos principais de inércia iguais).

Trabalho e Potência para rotações

$$W = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \tau d\varphi \quad (11 - 12)$$

$$P = dW/dt = \tau\omega$$

Conservação do momento angular

$$\text{Se } \vec{\tau} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{constante.}$$

Corpos rígidos em rolamento

Roda rolando sem deslizar

$$v_{CM} = \omega r \quad , \quad (11 - 40)$$

onde v_{CM} é a velocidade linear do CM da roda; ω é sua velocidade angular em torno do CM; r é o seu raio.

$$a_{CM} = \alpha r, \quad (11 - 42)$$

onde $a_{CM} = dv_{CM}/dt$ e $\alpha = d\omega/dt$.

Energia cinética de rotação

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2. \quad (11 - 44)$$

onde m é a massa do corpo I_{CM} seu momento de inércia em relação ao CM.

Eixo instantâneo de rotação

A roda pode também ser observada do ponto P de contacto entre o piso e a roda. Perpendicularmente à roda, passa em P o chamado **eixo instantâneo de rotação**.

Giroscópio

Velocidade de precessão

$$\Omega = mgr/I\omega$$

Questões conceituais

- 1) O ponteiro dos segundos de um relógio tem a velocidade angular de
 - a) 0,017 rad/s.
 - b) 0,010 rad/s.
 - c) 0,10 rad/s.

- 2) Uma esfera e um cilindro, tendo ambos a mesma massa e o mesmo raio, partem do repouso e rolam para baixo em um mesmo plano inclinado. Qual das afirmativas abaixo é correta?
 - a) A esfera chegará primeiro.
 - b) O cilindro chegará primeiro.
 - c) Eles chegarão no mesmo tempo.

- 3) Imagine agora na questão anterior que a esfera e o cilindro são lançados de volta rolando para cima no mesmo plano inclinado. Qual das afirmativas abaixo é a correta?
 - a) A esfera atinge a maior altura se ambos tiveram a mesma velocidade inicial do centro de massa.
 - b) Ambos os corpos atingem a mesma altura se forem impulsionados com energias cinéticas distintas
 - c) Ambos os corpos atingem a mesma altura se forem impulsionados com energias cinéticas iguais.

- 4) O momento de inércia de uma roda que tem uma energia cinética de 24,4 kJ quando gira a 602 rev/min é dado por uma das opções:
 - a) 10,3 kg. m².
 - b) 8,4 kg. m².
 - c) 12,3 kg.m².

- 5) A força $\vec{F} = -8,0 \hat{x} + 6,0 \hat{y}$, dada em newtons, atua sobre uma partícula com vetor posição $\vec{r} = 3,0 \hat{x} + 4,0 \hat{y}$, em metros. O torque em N.m que atua sobre a partícula em torno da origem é dado por uma das opções:
 - a) 60,3 \hat{y}
 - b) 30,1 $\hat{x} + 50,0 \hat{y}$
 - c) 50,0 \hat{z}

- 6) Uma haste delgada de material homogêneo e uniforme gira em torno de seu centro de massa com energia cinética K_0 e velocidade angular ω . Se girasse em torno de uma de suas extremidades, com a mesma energia cinética, mas com velocidade angular ω_0 , escolha a opção correta:
 - a) $\omega_0 = \omega$
 - b) $\omega_0 = 2\omega$
 - c) $\omega_0 = 3\omega$.

- 7) Dois cilindros idênticos, A e B, rolam suavemente através de um piso horizontal com velocidades iguais. A passa a subir uma rampa, atingindo uma altura h_A . Já B, passa a subir outra rampa idêntica, mas sem possuir atrito. A altura máxima h_B é atingida por B. Escolha a opção correta:
 - a) $h_B < h_A$
 - b) $h_B = h_A$
 - c) $h_B > h_A$

- 8) Em certo instante, a força $\vec{F} = 4,0 \hat{y}$ N atua sobre um objeto de massa $m = 0,25$ kg com um vetor posição $\vec{r} = 2,0 \hat{x} - 2,0 \hat{z}$ em m e vetor velocidade $\vec{v} = -5,0 \hat{x} + 5,0 \hat{z}$ em m/s. Em torno da origem, o momento angular do objeto é dado em unidades apropriadas N.m por:
 - a) 0.;
 - b) 8,0 $\hat{x} + 8,0 \hat{z}$;
 - c) 8,0 $\hat{x} - 8,0 \hat{z}$.

corda está na horizontal. Na parte mais baixa de sua trajetória, a bola atinge um bloco de massa $M > m$, inicialmente em repouso, sobre uma superfície sem atrito.

- Se a colisão for elástica, encontre as velocidades da bola e do bloco, imediatamente, após a colisão.
- Se a colisão for inelástica, e a velocidade de M imediatamente após o choque, for metade da velocidade calculada em a), qual seria a velocidade de m ?
- A corda de m atingiria de novo a posição horizontal? Justifique a resposta.

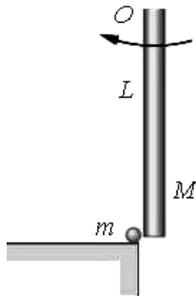


Figura 11-30. Referente ao problema 6.

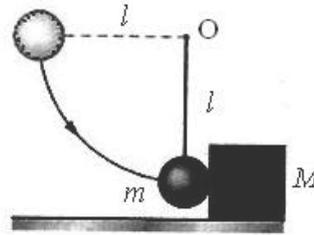


Figura 11-31. Referente ao problema 7.

9)** Um disco uniforme, de massa m e raio r , encontra-se em cima de outro disco maior, concêntrico a ele. O disco maior é uniforme de massa $M = 7m$, e raio $R = 3r$, e pode girar livremente em torno do seu centro fixo. Inicialmente, os dois discos giram juntos com uma velocidade angular $\omega_0 = 45 \text{ rad/s}$. Um pequeno dispositivo é então acionado e faz com que o disco menor deslize para fora escorregando através do disco maior até que sua borda atinja a borda do disco maior. Em seguida, os dois passam novamente a girar juntos, sem haver mais deslizamento.

- Qual é a velocidade angular ω dos discos em torno do centro do disco maior?
- Qual é a razão K/K_0 entre a nova energia cinética do sistema dos dois discos e sua energia cinética inicial?

10)** As rodas A e B da Figura 11-33 abaixo são conectadas por um correia que não desliza. O raio de B é três vezes o raio de A. Qual seria a razão entre os momentos de inércia I_A / I_B , se as duas rodas possuísem:

- O mesmo momento angular em torno dos seus eixos centrais?
- A mesma energia cinética de rotação?
- Admita agora que a roda A partiu do repouso com uma velocidade angular que aumenta a uma taxa uniforme de $\pi/2 \text{ rad/s}^2$. Determine o tempo para que a roda B atinja a velocidade de 100 r.p.m.

11)** Um arame retilíneo e esticado de material homogêneo, com comprimento l e massa m , é entortado num ponto O situado a uma distância l' da extremidade mais próxima de tal modo que as duas novas partes do arame formam um ângulo reto entre si e estejam em um plano vertical.

- Quais os momentos de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano vertical e passando em O para o arame esticado e para o entortado?
- Ache os valores dos ângulos α e β para os quais ocorra equilíbrio no sistema.
- Por argumentos físicos, onde está situado o CM deste sistema?

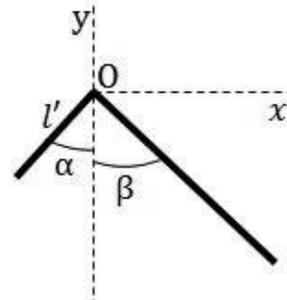


Figura 11-32. Referente ao problema 11.

12)** Um cilindro uniforme e homogêneo de massa m e raio R desce rolando, sem escorregar, um plano inclinado de comprimento l e que forma um ângulo θ com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o plano é μ .

- Quanto da energia é transformada em energia térmica?
- Se o cilindro parte do repouso do topo do plano inclinado, qual a sua velocidade linear na base?

13)** Considere uma barra delgada, inicialmente em repouso sobre uma mesa polida. Ela é atingida por uma percussão em uma das suas extremidades, em direção perpendicular ao seu comprimento. Prove que a energia cinética, adquirida pela barra, é maior do que adquiriria se a outra extremidade estivesse fixa em mancais sem atrito, na razão $4/3$.

14)** Uma molécula triatômica tem dois de seus átomos, cada um de massa m_1 , considerados "fixos" nos vértices de sua base de comprimento a de um triângulo isósceles, tendo o terceiro átomo, de massa m_2 , situado a uma altura h da base.

Determine, com base em argumentos de simetria, os momentos principais de inércia.

15)*** Ache a energia cinética de rolamento de um cilindro homogêneo de massa m e raio r , rolando sem deslizar, dentro de uma superfície cilíndrica de raio R , sendo sua posição determinado pelo ângulo φ , conforme mostrado na Figura 11-37.

16)*** Uma bola homogênea maciça é inicialmente lançada com velocidade v_0 deslizando sem rolar, sobre uma superfície horizontal tendo coeficiente de atrito μ . a) Que distância a bola se desloca antes de começar a rolar sem deslizar? b) Qual é então sua velocidade?

(Sugestão: Durante o tempo de deslizamento da esfera nela atua um torque criado pela força de atrito que irá levá-la ao seu rolamento).

17)** De acordo com a Figura 11-34 um bastão tem massa m e comprimento l . Está inicialmente em repouso em uma mesa horizontal polida e é atingida por uma percussão \vec{J} perpendicular ao bastão, a uma distância d do CM. Determinar o movimento do bastão após a percussão.

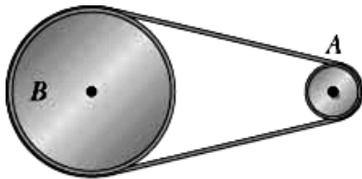


Figura 11-33. Referente ao problema 10.

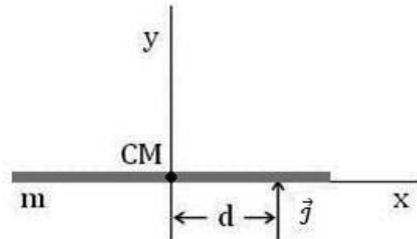


Figura 11-34 Referente ao problema 17.

18)** Uma barra uniforme de comprimento $2l$ está suspensa verticalmente por uma de suas extremidades. A que distância do pino de suspensão deve-se atingir a barra para que ela inicie seu movimento oscilatório sem comunicar-lhe um impulso inicial no pino de suspensão?

19)*** Na Figura, 11-35 um pequeno bloco de massa m desliza para baixo em uma superfície circular de raio r , sem atrito, a partir de uma altura $h=r$ e então se gruda em uma haste uniforme de massa M e comprimento L . A haste gira de um ângulo θ em torno do ponto O antes de parar momentaneamente. Mostre que

$$\theta = \arccos \left[1 - \frac{r/L}{(1 + M/2m)(1 + M/3m)} \right].$$

20)** Uma haste uniforme, fina de comprimento l e massa M pode girar sem atrito, em um plano horizontal em torno de um eixo vertical passando pelo seu centro. A haste encontra-se em repouso quando uma bala de massa m , deslocando-se no plano de rotação, é disparada contra uma das suas extremidades. Conforme vista de cima na Figura 11-36, a trajetória da bala faz um ângulo θ com a haste. A bala se aloja na haste, a qual adquire uma velocidade angular ω , imediatamente, após a colisão.

a) Considere as seguintes grandezas do sistema bala + haste: i) energia cinética; ii) momento linear total; e iii) momento angular total em torno do eixo. São elas conservadas?

b) Mostre que a velocidade da bala imediatamente antes do impacto é dada por

$$v = \frac{\omega l}{2 \sin \theta} \left[1 + \frac{M}{3m} \right].$$

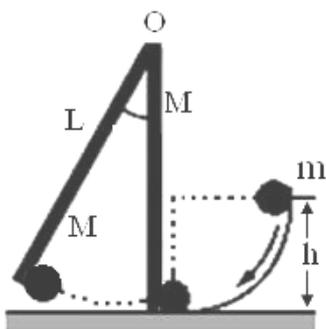


Figura 11-35 Referente ao problema 19.

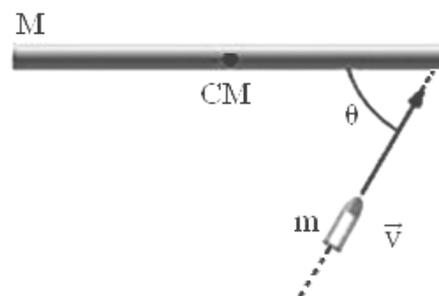


Figura 11-36 Referente ao problema 20.

21) ** Um disco circular uniforme de raio r é colocado sobre uma superfície horizontal lisa. Outro disco idêntico rodando com velocidade angular ω é cuidadosamente colocado em cima do primeiro. O coeficiente de atrito entre os discos é μ . Calcular o tempo necessário para que ambos os discos adquiram a mesma velocidade angular.

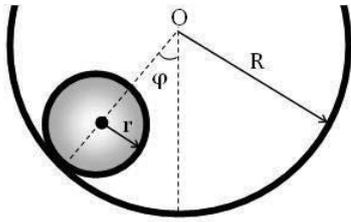


Figura 11-37 Referente ao problema 15.

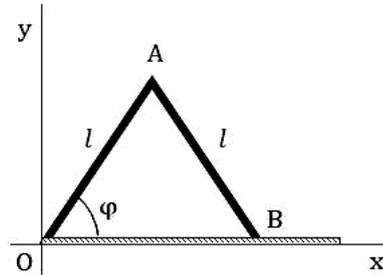


Figura 11-38 Referente ao problema 22.

22)*** Duas varetas delgadas idênticas de material homogêneo, têm cada uma massa m e comprimento l , estão unidas por um pino em A e estão sobre um plano horizontal polido yx , conforme visto na Figura 11-38. A vareta AO começa a girar em torno de O enquanto a extremidade B da outra vareta escorrega ao longo de Ox. Qual a energia cinética do sistema?

CAPÍTULO 12

ESTÁTICA

Este último capítulo do livro, além de relativamente simples, tratará de um assunto que está presente em praticamente tudo em volta de nós.

É de se esperar, por exemplo, que um prédio ao ser construído tenha estabilidade suficiente frente à atuação da força gravitacional ou à ação eventual de fenômenos da natureza, tais como, a ação de tempestades ou de tremores de terra. Poderíamos assim começar nossa apresentação com uma pergunta bem simples: quais são as condições físicas para se ter **equilíbrio mecânico** em sistemas (tais como edifícios, pontes, entre outros exemplos), tratados numa boa aproximação, como corpos rígidos?

A resposta a esta pergunta será respondida ao longo deste capítulo.

12-1 Equilíbrio de um corpo rígido

Observado de um referencial inercial, um corpo rígido estará em **equilíbrio mecânico** se duas condições necessárias e suficientes forem satisfeitas:

i) a resultante das forças externas seja nula;

ii) o torque resultante em relação a um dado ponto arbitrário, seja nulo.

A condição (ii) foi possível, pois conforme já visto na seção (10-6), se a resultante das forças externas for nula, o torque resultante é independente do ponto em relação ao qual é calculado. Um ponto, em particular, de especial interesse é seu centro de massa.

As equações de movimento de um corpo rígido, conforme visto na seção (10-6), aplicadas à situação de equilíbrio mecânico, são

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} = 0, \quad 12 - 1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau} = 0. \quad 12 - 2)$$

A Equação (12-1) implica que $\vec{a}_{CM} = 0$ e a Equação (12-2) que $\vec{\alpha} = 0$, sendo $\vec{\alpha}$ a aceleração angular do corpo rígido em relação a um eixo passando por um ponto arbitrário do sistema inercial.

As Equações (12-1) e (12-2) formam, em geral, um sistema de seis equações escalares simultâneas, haja visto que \vec{F} e $\vec{\tau}$, têm cada um, três componentes cartesianas, uma para cada direção dos eixos de coordenadas. Um caso mais simples, mas que ocorre com frequência, é quando as forças externas forem coplanares (isto é, situadas num mesmo plano). Por exemplo, imagine situadas no plano xy. Isto implica dizer que os torques são paralelos ao eixo z. Com esta situação, uma das equações da força é eliminada e duas da do torque, restando, pois, um sistema de três equações, mais simples de lidar com sua solução.

Observemos agora as Equações (12-1) e (12-2). Verificamos que um corpo rígido em equilíbrio exige que

$$\vec{P} = \vec{C}_1 \quad \text{e} \quad \vec{L} = \vec{C}_2, \quad 12 - 2)'$$

onde \vec{C}_1 e \vec{C}_2 são vetores constantes.

Casos importantes

i) Equilíbrio estático

Uma situação de grande interesse prático é quando $\vec{C}_1 = \vec{C}_2 = 0$, ou seja, aquela em que o corpo está em repouso, ou não se move absolutamente, em relação a um referencial inercial. É o **equilíbrio estático**. A área da física que estuda este equilíbrio chama-se **estática**. Exemplos não faltam neste caso: casas, prédios, pontes, etc.

ii) Equilíbrio mecânico translacional ($\vec{C}_1 \neq 0, \vec{C}_2 = 0$)

Neste caso $\vec{P} \neq 0$, o que implica dizer que o corpo se move com velocidade linear (translacional) constante. Não há movimento de rotação. É o caso de um disco maciço se movendo em linha reta com velocidade constante sobre uma superfície horizontal polida, como gelo em um rink de patinação.

iii) Equilíbrio mecânico rotacional ($\vec{C}_1 = 0, \vec{C}_2 \neq 0$)

Neste caso, não há movimento translacional do corpo, mas um movimento de rotação com velocidade angular constante ($\vec{L} = \vec{C}_2$). O disco maciço só roda em torno de seu eixo com velocidade angular constante, mas sem movimento de translação.

iv) Equilíbrios translacional e rotacional ($\vec{C}_1 \neq 0, \vec{C}_2 \neq 0$)

Um bom exemplo aqui é o disco deslizando no gelo ao longo de uma reta rodando com velocidade angular constante em torno de seu eixo.

v) Estabilidade do equilíbrio rotacional

De acordo com que já vimos na seção 7-5, existem três tipos de equilíbrio rotacional para um corpo: **estável, instável e indiferente**. Um corte transversal vertical visto na Figura 12-1, mostra uma bola de gude no ponto A, topo de uma elevação. Ao sofrer um pequeno toque para a direita ela não mais voltará a sua posição de equilíbrio em A. Este é o tipo do equilíbrio **instável**. Se a bola, no entanto, estivesse em B, um leve toque a faria voltar sempre para esta posição. Este é o tipo de equilíbrio **estável**. Finalmente, a bola na superfície horizontal CD, faz com que ela ao sofrer um pequeno toque role para a direita, à velocidade constante, sem no entanto, retornar ao ponto C. Este é o tipo de equilíbrio **indiferente**.

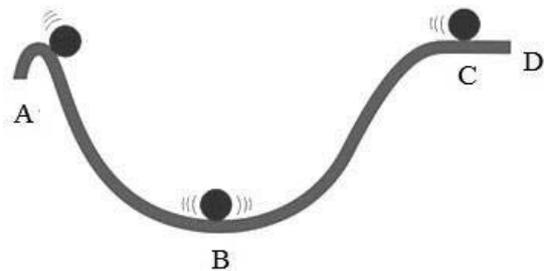


Figura 12-1. Bola de gude em três possíveis situações de equilíbrio: A (instável), B (estável) e C (indiferente).

Paradinha 12-1

As Equações (12-1) e (12-2) são condições necessárias e suficientes para o equilíbrio mecânico e o equilíbrio estático? Explique.

Paradinha 12-2

Considere um cone sobre uma superfície horizontal plana. Ilustre os três tipos da estabilidade do equilíbrio rotacional que pode ocorrer com ele.

Exemplo 12-1

Na figura 12-2 uma esfera de massa $m = 0,91 \text{ kg}$ e raio $r = 4,5 \text{ cm}$ é mantida em repouso por um barbante inextensível e de massa desprezível presa a uma parede com atrito também desprezível, a uma distância $l = 10,0 \text{ cm}$ acima do centro de massa da esfera homogênea.

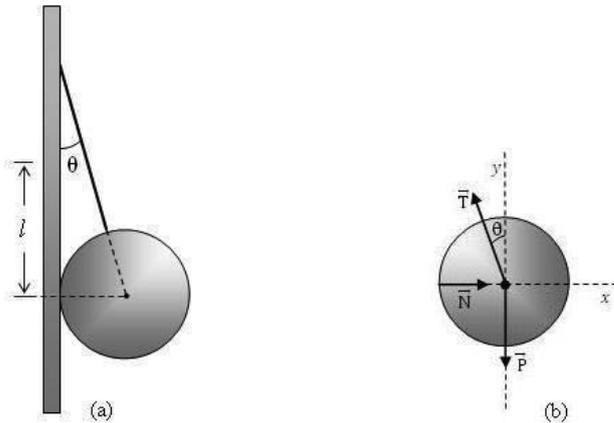


Figura 12-2. (a) Esfera suspensa por um fio. (b) Forças externas atuando sobre a esfera do Exemplo 12-1.

- Calcule:
 a) a tensão no barbante,
 b) a força da parede sobre a esfera.

Solução:

a) Isolando a esfera, a Figura 12-2 mostra as forças externas atuando sobre ela. Devido a estas forças serem **coplanares**, ou seja, atuam no mesmo plano x y da Figura 12-2, o problema é bem mais simples de ser resolvido, conforme veremos logo a seguir.

A equação (12-1) aplicada à Figura 12-2 nas direções x e y, respectivamente, dão

$$\sum X \rightarrow T \sin \theta - N = 0. \quad (12-3)$$

$$\sum Y \rightarrow T \cos \theta - P = 0. \quad (12-4)$$

É fácil verificar que

$$\operatorname{tg} \theta = r/l \quad \text{e} \quad \text{daí} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}.$$

Da Equação (12-4), obtemos

$$T = mg / \cos \theta,$$

e conseqüentemente,

$$T = \frac{mg}{l} \sqrt{r^2 + l^2}$$

O valor numérico é obtido substituindo pelos dados. Assim

$$T = \frac{0,91 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2}{10 \times 10^{-2} \text{ m}} \sqrt{(4,5^2 + 10,0^2) \times 10^{-2} \text{ m}^2} = 9,79 \text{ N}$$

b) É fácil observar que N é obtido da Equação (12-3) e vale

$$N = mg r/l.$$

Seu valor numérico é

$$N = 0,91 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 4,5 \times 10^{-2} \text{ m} / 10,0 \times 10^{-2} \text{ m} = 4,01 \text{ N}.$$

Exemplo 12-2

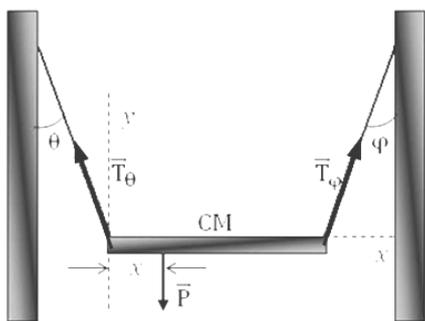


Figura 12-3.

Uma barra não uniforme de comprimento l e peso P está suspensa em repouso, na posição horizontal, por dois fios leves inextensíveis, como visto na figura.

Os ângulos theta e phi são conhecidos.

- a) Calcule a distância x da extremidade esquerda ao CM. b) Qual o valor de x caso a barra fosse uniforme?

Solução:

a) As forças externas envolvidas no problema, o peso da barra \vec{P} e as tensões nos fios, \vec{T}_θ e \vec{T}_ϕ , são todas coplanares, o que de novo torna a solução do problema mais simples. Com a escolha das coordenadas yx mostrada na Figura 12-3, podemos escrever as equações do equilíbrio mecânico.

A equação do equilíbrio translacional quando projetada ao longo dos eixos x e y fornece

$$\sum X \rightarrow T_\phi \sin \phi - T_\theta \sin \theta = 0. \quad (12-5)$$

$$\sum Y \rightarrow T_\phi \cos \phi + T_\theta \cos \theta = P. \quad (12-6)$$

A equação do equilíbrio rotacional fornece por sua vez

$$\sum \tau \rightarrow -Px + T_\varphi l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0 \quad 12 - 7)$$

Da Equação (12-7), obtemos

$$x = T_\varphi l \cos \varphi / P.$$

Da Equação (12-5), temos,

$$T_\varphi = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} T_\theta ,$$

que substituída na Equação (12-6), obtém-se

$$T_\theta = \frac{P \sin \varphi}{\sin(\theta + \varphi)} \quad \text{e} \quad T_\varphi = \frac{P \sin \theta}{\sin(\theta + \varphi)}.$$

Finalmente, o valor de x pode ser obtido, ou seja,

$$x = \frac{l \sin \theta \cos \varphi}{\sin(\theta + \varphi)}.$$

b) Caso a barra seja uniforme, $\theta = \varphi$, o que implica da equação acima que

$$x = l/2 ,$$

como esperado.

Exemplo 12-3

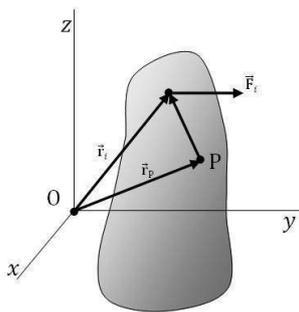


Figura 12-4. Várias forças externas atuando no corpo rígido. Só a i-ésima força \vec{F}_i é mostrada para não sobrecarregar a figura.

Suponha um corpo rígido em equilíbrio translacional. Mostre, **explicitamente**, que se o torque em relação a um determinado ponto for nulo, o torque em relação a qualquer outro ponto também o será.

Prova

Imagine N forças externas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ atuando em um corpo rígido. Este corpo, por hipótese, está em equilíbrio translacional, ou seja,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0. \quad 12 - 8)$$

O torque resultante destas forças em relação ao ponto O do referencial inercial xyz é dado por

$$\vec{\tau}_O = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0.$$

O torque resultante em relação a qualquer outro ponto, P, é escrito como

$$\vec{\tau}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$\vec{\tau}_P = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_P \times \left(\sum_i \vec{F}_i \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_O ,$$

onde usamos a Equação (12-8). Se por hipótese $\vec{\tau}_O = 0$, então, $\vec{\tau}_P = 0, \forall P$ escolhido, CQD.

Este problema constitui na realidade o **teorema fundamental da estática**

12-2 O centro de gravidade e o centro de massa revisitados

Este assunto foi apresentado pela primeira vez na seção (8-1). Vamos agora aprofundar melhor estes dois conceitos. Consideremos um corpo rígido de massa M. Este corpo pode ser pensado como composto de um número grande de elementos de massa. Assim sendo, seja o

i -ésimo elemento com massa m_i , sujeito a uma força gravitacional igual a $\vec{F}_i = m_i \vec{g}_i$, sendo \vec{g}_i o vetor aceleração da gravidade na i -ésima posição, podendo ela ser diferente para outros elementos, isto é, possivelmente $\vec{g}_i \neq \vec{g}_j$, se $i \neq j$. É o caso, por exemplo, de objetos de dimensões astronômicas.

Chamamos de **centro de gravidade** (CG) de um corpo rígido um único ponto deste corpo onde poderia estar aplicada a resultante das forças que agem sobre os seus vários elementos de massa sujeitos a um campo gravitacional.

Determinação do CG

Em relação ao ponto O, origem de um sistema inercial de coordenada x y z , temos as equações de equilíbrio mecânico do corpo

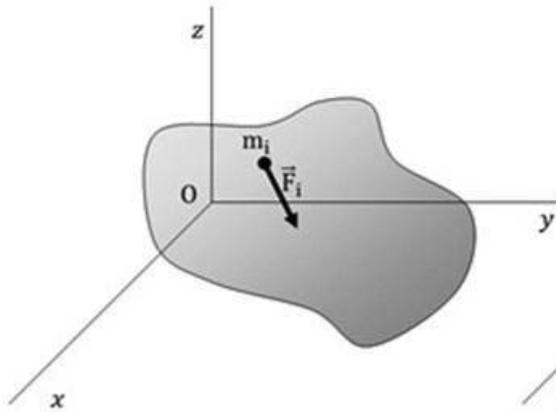


Figura 12-5. Elemento de massa m_i em um corpo rígido sob a ação de uma força gravitacional \vec{F}_i .

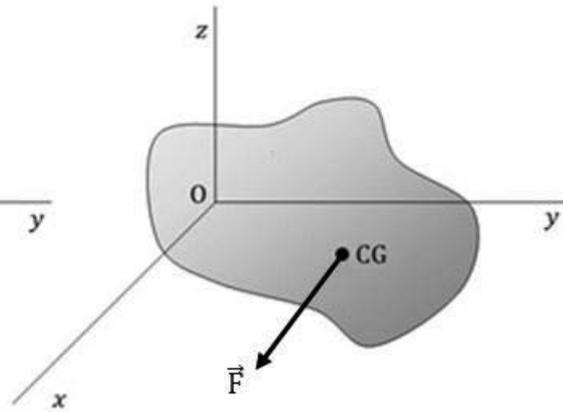


Figura 12-6. Força gravitacional resultante \vec{F} atuando no CG do corpo.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i,$$

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Usando a definição de CG, também podemos escrever

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{CG} \times \vec{F} = \vec{r}_{CG} \times \sum_i \vec{F}_i.$$

Como resultado, obtemos

$$\vec{r}_{CG} \times \sum_i (m_i \vec{g}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g}_i.$$

12

Expressando \vec{r}_{CG} e \vec{g}_i como

$$\vec{r}_{CG} = x_{CG} \hat{x} + y_{CG} \hat{y} + z_{CG} \hat{z},$$

$$\vec{g}_i = g_{ix} \hat{x} + g_{iy} \hat{y} + g_{iz} \hat{z},$$

e através de manipulações algébricas simples, podemos determinar x_{CG} , y_{CG} e z_{CG} . Com efeito, substituindo os valores de \vec{r}_{CG} e \vec{g}_i na Equação (12-9), efetuando os produtos vetoriais e lembrando-se das propriedades dos produtos vetoriais de versores, visto na seção 10-2, chegaremos após uma pequena manipulação algébrica, à equação

$$\begin{aligned} & x_{CG} \sum_i m_i (g_{iy} \hat{z} - g_{iz} \hat{y}) + y_{CG} \sum_i m_i (-g_{ix} \hat{z} + g_{iz} \hat{x}) + z_{CG} \sum_i m_i (g_{ix} \hat{y} - g_{iy} \hat{x}) = \\ & = \sum_i m_i x_i (g_{iy} \hat{z} - g_{iz} \hat{y}) + \sum_i m_i y_i (-g_{ix} \hat{z} + g_{iz} \hat{x}) + \sum_i m_i z_i (g_{ix} \hat{y} - g_{iy} \hat{x}). \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de \hat{z} , \hat{y} e \hat{x} , respectivamente, chegaremos ao sistema de equações

$$\begin{cases} Bx_{CG} - Ay_{CG} = A' & , \\ Cy_{CG} - Bz_{CG} = B' & , \\ Az_{CG} - Cx_{CG} = C' & , \end{cases} \quad 12 - 10)$$

onde $A = \sum m_i g_{ix}$, $B = \sum m_i g_{iy}$, $C = \sum m_i g_{iz}$ e
 $A' = \sum m_i (x_i g_{iy} - y_i g_{ix})$, $B' = \sum m_i (y_i g_{iz} - z_i g_{iy})$ e
 $C' = \sum m_i (z_i g_{ix} - x_i g_{iz})$.

Observe que x_{CG} , y_{CG} e z_{CG} são as incógnitas. A solução do sistema acima fornece os valores das coordenadas do CG do corpo em relação ao ponto O do sistema de coordenadas escolhido.

Casos particulares

i) *Campo gravitacional uniforme*

Se o campo gravitacional \vec{g} é uniforme na região considerada $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ e conseqüentemente, da Equação (12-9), podemos escrever

$$\vec{r}_{CG} \times \vec{g} \left(\underbrace{\sum_i m_i}_M \right) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \vec{g}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i) \times \vec{g}.$$

Usando a definição de CM dada pela Equação (8-6), podemos escrever

$$M \vec{r}_{CG} \times \vec{g} = M \vec{r}_{CM} \times \vec{g} \Rightarrow \vec{r}_{CG} = \vec{r}_{CM}.$$

ii) *Campo gravitacional não uniforme atuando ao longo da vertical*

Suponha $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i g_{iz} \hat{z}$. Usando a Equação 12 - 9), podemos escrever

$$\vec{r}_{CG} \times \sum_i m_i g_{iz} \hat{z} = \sum_i m_i g_{iz} \vec{r}_i \times \hat{z},$$

ou

$$x_{CG} \hat{x} + y_{CG} \hat{y} + z_{CG} \hat{z} \times \sum_i m_i g_{iz} \hat{z} = \sum_i m_i g_{iz} (x_i \hat{x} + y_i \hat{y} + z_i \hat{z}) \times \hat{z},$$

ou finalmente,

$$\begin{aligned} & -x_{CG} \sum_i (m_i g_{iz}) \hat{y} + y_{CG} \sum_i (m_i g_{iz}) \hat{x} + z_{CG} \sum_i (m_i g_{iz}) (\hat{z} \times \hat{z}) = \\ & = - \sum_i (m_i g_{iz} x_i) \hat{y} + \sum_i (m_i g_{iz} y_i) \hat{x} + \sum_i (m_i g_{iz} z_i) (\hat{z} \times \hat{z}). \end{aligned}$$

O produto vetorial $\hat{z} \times \hat{z} = 0$ presente em nossa dedução indica que os torques estão em planos perpendiculares a \vec{g} e só dependem dos versores \hat{x} e \hat{y} .

Igualando os coeficientes de \hat{x} , e \hat{y} e notando que $\hat{z} \times \hat{z} = 0$, obtemos os valores procurados

$$\boxed{x_{CG} = \frac{1}{\sum m_i g_{iz}} \sum m_i g_{iz} x_i} \quad , \quad 12 - 11)$$

$$\boxed{y_{CG} = \frac{1}{\sum m_i g_{iz}} \sum m_i g_{iz} y_i} \quad . \quad 12 - 12)$$

Há uma indeterminação no cálculo de z_{CG} , pois, o termo $[z_{CG} \sum m_i g_{iz} - \sum m_i g_{iz} z_i]$, coeficiente de $\hat{z} \times \hat{z} = 0$, poderia tomar qualquer valor finito, inclusive zero.

Estes mesmos valores poderiam também ser obtidos das Equações (12-10), (12-11) e colocando lá $g_{ix} = 0$ e $g_{iy} = 0$.

O caráter relativo do conceito CG torna-o de pouca praticidade na física, exceto em certos casos particulares. Consideramos a discussão acima sobre este assunto como suficiente para um curso de mecânica clássica inicial.

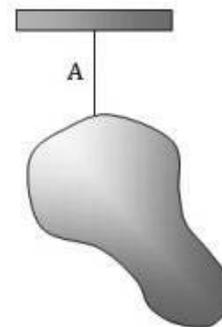


Figura 12-7.

Paradinha 12-3

Imagine uma placa suspensa em A (Figura 12-7) por um barbante. Você pode propor um método prático para determinar o CG da placa?

12-3 Exemplos de equilíbrio estático

Nesta seção vamos dar uma lista de sugestões para a solução de problemas de estática. Algo similar foi feito na seção 4-6 para o uso da segunda lei de Newton. Vamos ilustrar este mecanismo com alguns exemplos escolhidos.

De novo, esta lista é composta de três etapas, que devem ser seguidas no processo de solução de problema:

Armação do problema

- i) *Certifique-se que você entendeu bem o enunciado do problema.*
- ii) *Identifique todas as forças **externas** que atuam sobre cada corpo escolhido.*

Solução do problema

i) *Isolar os corpos*

Escolha cada corpo de interesse para a solução do problema. Em alguns casos, para simplificar, o corpo é substituído por um ponto.

ii) *Diagrama de forças de cada corpo isolado*

Colocar todas as forças atuando no corpo. As forças são representadas por setas.

iii) *Escolha de um sistema de coordenadas que se pareça mais adequado*

Após analisar bem cada diagrama, um sistema de coordenadas deve ser escolhido que pareça mais adequado, de modo a facilitar a manipulação algébrica na solução do problema.

iv) Usar as leis de equilíbrio mecânico para cada diagrama, com as forças projetadas sobre o sistema de coordenadas escolhido.

v) Resolver as equações resultantes.

Discussão do problema

Ao final da solução das equações do problema é interessante analisar o resultado. As unidades estão corretas? Existe algum resultado particular ou singular que mereça comentar? Situação interessante pode ser obtida e/ou analisada?

Exemplo 12-4

Na Figura 12-8, que força mínima \vec{F} , aplicada horizontalmente no eixo de uma roda de raio r e de peso P , a faz subir um degrau de altura h ?

Solução:

As forças externas atuando na roda parada do problema são \vec{F} , \vec{P} e a normal \vec{N} . No momento em que uma força \vec{F} é aplicada no eixo da roda e ela começa a se erguer, $\vec{N} = 0$, e aparece então, uma força não conhecida \vec{F}' em O' . Todas as forças presentes são coplanares.

Um sistema adequado de coordenadas, yOx , está também desenhado no diagrama.

O uso somente da equação do equilíbrio de torque em relação ao ponto O' deve fornecer a solução. Com efeito,

$$-F(r-h) + P \cdot x = 0,$$

onde

$$x = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{h(2r-h)}.$$

Daí obtemos finalmente F , ou seja,

$$F = P \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}.$$

Observando o denominador da expressão acima, vê-se que quanto maior for h , maior será F , conforme o esperado.

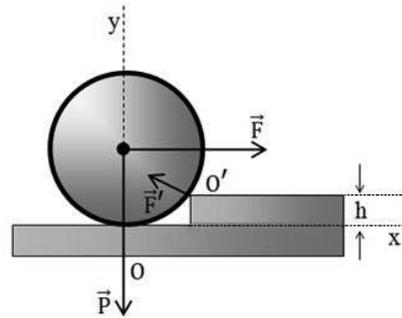


Figura 12-8. Com aplicação da força \vec{F} , a roda começa a se erguer.

Exemplo 12-5

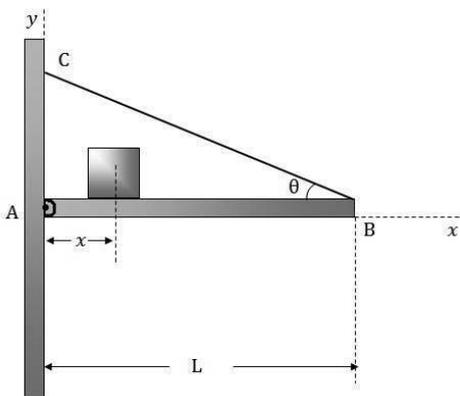


Figura 12-9

Considere uma barra uniforme horizontal de comprimento $L = 4,0$ m e peso $p = 100$ N conforme visto na Figura 12-9. Um bloco de peso $P = 200$ N está assentado sobre ela a uma distância x de uma parede vertical. Um fio fino inextensível e de peso desprezível sustenta a barra por sua extremidade direita no ponto B e é preso na parede no ponto C. O ângulo entre a barra e o fio é $\theta = 30^\circ$. O fio pode suportar uma tensão máxima para um valor de $x_{\max} = 1,5$ m.

a) Qual o maior valor de T para o fio não arrebentar?

b) Na situação do item a), qual a força \vec{F} que a dobradiça exerce sobre a barra no ponto A?

c) Mostre que a linha de ação de \vec{F} aponta para um ponto D, resultado de sua intersecção com o fio, e que projetado sobre a barra coincide com a posição do CM do sistema bloco + barra.

Solução:

a) As forças externas atuando na barra, quando isolada, são \vec{P} , \vec{p} , uma força \vec{F} que a dobradiça exerce sobre a barra em A, e finalmente, a tensão \vec{T} ao longo do fio, em B. Todas as forças são coplanares.

Um sistema de coordenadas inercial adequado tem a origem em A, o eixo dos x ao longo de AB e o eixo dos y ao longo de AC. Um diagrama de forças atuando na barra e no fio está representado na Figura 12-10. Tomando o torque das forças em relação à A, teremos

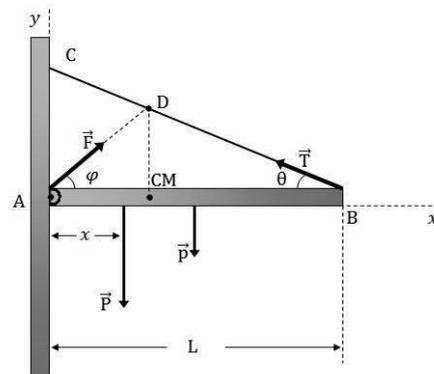


Figura 12-10 Diagrama de Forças do Exemplo 12-5

$$\sum \tau^A = -Px_{\max} - p\left(\frac{L}{2}\right) + T_{\max}L \sin \theta = 0,$$

onde foi usado a tensão máxima que o fio pode suportar sem se romper. Desta equação podemos obter o valor pedido para T_{\max}

$$T_{\max} = [p/2 + P(x_{\max}/L)] / \text{sen } \theta . \quad 12 - 14)$$

Os valores numéricos nos fornece $T_{\max} = 250 \text{ N}$, facilmente calculado.

b) A equação de equilíbrio translacional é para este caso

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{p} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = 0 , \quad 12 - 15)$$

o que fornece as duas equações de suas componentes ao longo do eixo dos x e dos y:

$$\begin{cases} \sum X \rightarrow F_x - T_{\max} \cos \theta = 0, \\ \sum Y \rightarrow F_y - p + P + T_{\max} \text{sen } \theta = 0, \end{cases}$$

A solução deste sistema nos fornece F_x e F_y :

$$\begin{cases} F_x = [p/2 + P(x_{\max}/L)] \text{cotg } \theta, \\ F_y = p/2 + P(1 - x_{\max}/L), \end{cases} \quad 12 - 16)$$

onde foi usado o valor de T_{\max} do item a). A substituição pelos valores numéricos fornece

$$F_x = 216. \text{N} \quad \text{e} \quad F_y = 175. \text{N}.$$

c) O CM do sistema bloco + barra é dado por

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{p+P} [p L/2 + P x_{\max}] .$$

A projeção do ponto D sobre a barra fornece o ponto D'. Vamos mostrar que $AD' \equiv x_{\text{CM}}$.

Como efeito,

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{AD'} = \frac{F_y}{F_x} . \quad 12 - 18)$$

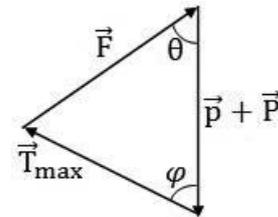


Figura 12-11 Polígono de forças do Exemplo 12-5.

Notando da semelhança dos triângulos ABC e DD'B que

$$\frac{L}{L - AD'} = \frac{CA}{y} \quad \text{ou} \quad \frac{L}{L - AD'} = \frac{L \text{ tg } \theta}{y} \Rightarrow y = (L - AD') \text{ tg } \theta ,$$

e usando os valores de F_x e F_y , calculados no item b), obtemos da equação (12-18), após uma pequena manipulação algébrica que

$$AD' = \frac{1}{p + P} \left[\frac{pL}{2} + P x_{\max} \right] \equiv x_{\text{CM}} ,$$

CQD.

O problema sugere um método gráfico de solução. As forças \vec{F} , \vec{T} , \vec{p} e \vec{P} são vetores deslizantes com resultante nula, de acordo com a Equação (12-15). Estas forças formam um **polígono de forças** fechado, conforme pode ser visto na Figura 12-11. O problema poderia ter sido resolvido graficamente. Este método é utilizado por arquitetos e em alguns projetos na construção civil.

Exemplo 12-6

Uma esfera uniforme pelo peso P está em repouso, presa entre dois planos inclinados de ângulos θ_1 e θ_2 com a horizontal, conforme mostrado na Figura 12-12. Suponha desprezível o atrito entre a esfera e os planos inclinados. Calcule as forças que os planos exercem sobre a esfera.

Solução:

Tomemos o sistema de coordenadas indicado na Figura 12-12. As forças presentes estão também mostradas na figura. A equação do movimento translacional projetada nas direções x e y fornece

$$\begin{cases} \sum X \rightarrow -N_1 \text{sen } \theta_1 + N_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2 \right) = 0 , \\ \sum Y \rightarrow N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 - P = 0 . \end{cases} \quad 12 - 19)$$

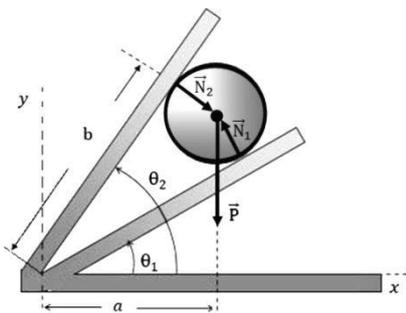


Figura 12-12

(12 – 20)

A equação dos torques em relação ao ponto O, fornece

$$\sum \tau^O \rightarrow -Pa + N_1 b - N_2 b = 0. \quad 12 - 21)$$

Da Equação (12-19), se obtém

$$N_2 = N_1 \text{ sen } \theta_1 / \text{ sen } \theta_2 ,$$

que substituída na Equação (12-20), fornece

$$N_1 = P \text{ sen } \theta_2 / \text{ sen } (\theta_2 - \theta_1) ,$$

e finalmente,

$$N_2 = P \text{ sen } \theta_1 / \text{ sen } (\theta_2 - \theta_1) .$$

Na solução não utilizamos a Equação (12-21).

Exemplo 12-7

Considere quatro esferas de massa iguais A,B,C,D, cujas coordenadas são respectivamente, A (0,0) , B (30. 0) C (30, 30.), D (0,30.) em unidades u apropriadas. As acelerações da gravidade locais são respectivamente, $g_A = 9,80 \text{ m/s}^2$, $g_B = 9,75 \text{ m/s}^2$, $g_C = 9,72 \text{ m/s}^2$ e $g_D = 9,78 \text{ m/s}^2$, onde o peso de cada esfera é a força $-mg_i$, sendo $i = A,B,C,D$.

Qual a posição do centro de gravidade do sistema? Compare-a com o seu CM.

Solução:

Este é um caso de um campo gravitacional não uniforme atuando ao longo da vertical tomado como o eixo dos z. Vamos, pois, usar as Equações (12-1) e (12-2) do texto com a ressalva que todas as massas são iguais, ou seja,

$$x_{GC} = \frac{30. (g_C + g_D)}{\sum g_i} u = 14,98 u \quad \text{e} \quad y_{GC} = \frac{30. (g_B + g_C)}{\sum g_i} u = 14,98u ,$$

sendo $\sum g_i = 39,05 \text{ m/s}^2$.

O CG está situado no ponto (14,98, 14,96) u que está mais próximo ao CM, situado em (15,15)u. Isto significa que o CG está sendo mais próximo à esfera A, que é mais pesada. A coordenada z é arbitrária.

12-4 Estruturas indeterminados

Vimos que as equações vetoriais do equilíbrio de forças ($\sum \vec{F} = 0$) e equilíbrio de torques

($\sum \vec{\tau} = 0$) fornecem, cada uma em geral, a equações independentes para as componentes, uma para cada direção dos eixos de coordenadas. Para forças coplanares, já visto nos exemplos anteriores, o problema se reduz a três equações, duas oriundas da projeção das forças e uma da projeção dos torques. No caso geral, um problema para ser resolvido não poderá ter mais do que seis incógnitas e no caso mais simples de forças coplanares, não mais que três incógnitas. Quando o número de incógnitas for maior do que o número de equações, estes problemas são chamados de **indeterminados**. Informações adicionais teriam que ser dadas para resolver o impasse. Para efeito de ilustração,

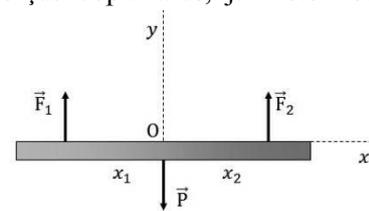


Figura 12-13

considere o sistema mostrado na Figura 12-13 onde só conhecemos \vec{P} . Usando as equações do equilíbrio mecânico, obtemos

$$\begin{cases} -P + F_1 + F_2 = 0 , \\ F_2 x_2 - F_1 x_1 = 0 . \end{cases}$$

Como só P é conhecido, temos duas equações a quatro incógnitas, x_1 , x_2 , F_1 e F_2 , o que torna o problema uma estrutura indeterminada.

Tomando agora o Exemplo (12-5), bastaria que a barra fosse concretada na parede vertical para impossibilitar a determinação de \vec{T} . Verifique você mesmo nas equações do exemplo.

A razão das dificuldades de resolver tais problemas decorre da hipótese idealizada de corpos rígidos presentes nas estruturas dos problemas. No caso do Exemplo 12-5, a barra mesmo concretada à parede, se deformaria com o seu peso e a presença sobre ela do bloco. Estas informações, no entanto, estão fora da nossa abordagem do problema e só serão consideradas em cursos de mecânica aplicada.

12-5 Pausa para descontração: *Criação Artística e Criação Científica**

*Ricardo Ferreira (1928 - 2013), Universidade Federal de Pernambuco. Conferência realizada na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Araraquara, São Paulo, em 28 de abril de 1972.

No desenvolvimento da Ciência há momentos nos quais uma grande descoberta “está no ar” como prova o grande número de descobertas simultâneas realizadas por pesquisadores trabalhando independentemente. (There are moments in the development of science that an important discovery “is in the air”, as is proven by a great number of simultaneous discoveries made by scientists working independently).

“A arte é uma forma de sentir o universo, a ciência uma forma de conhecer o universo”.

Anísio Teixeira

Ao compararmos as atividades criadoras associadas à produção científica com os processos de criação artísticos e literários, o primeiro contraste que notamos é a antiguidade dos segundos quando comparados com o caráter relativamente recente da atividade científica. Manifestações claras de estonteante capacidade artística criadora são, por exemplo, as pinturas encontradas nas cavernas de Lascaux, de Altamira, e de muitos outros lugares do Sudoeste europeu, e que datam até de 40.000 anos. Podemos mesmo dizer que atividades que classificariamos como artísticas são velhas como a própria existência humana na Terra. Em contraste, Ciência tal como a entendemos atualmente, existe apenas há menos de 400 anos, o que representa uma fração menor do que 1/15 da História da Civilização. Para alguns pode parecer que estamos adotando um critério muito estreito sobre o que entendemos por Ciência. Pois não estamos pondo de lado civilizações como a da Grécia e da China? Para justificar nosso ponto de vista, vejamos como definimos o método científico. Ciência é o empreendimento humano para compreender a Natureza. Esta compreensão é alcançada através de interação entre consulta à Natureza (experiência) e formação de modelos mentais que racionalizam os fenômenos (teoria). Este conceito distingue claramente Ciência da Tecnologia, que representa o esforço humano para controlar a Natureza. Por razões bem analisadas por Farrington, no caso da Grécia, e por Needham, no caso do Império Chinês, não foram essas civilizações capazes de criar o método científico. Mesmo Copérnico, cujo 5º centenário do nascimento comemoramos em 1973, pertence ao período anterior à Revolução Científica. Kepler nasceu em 1571, representa ainda o que Koestler chamou tão aptamente de “Divisor das Águas” (Watershed) entre a fase pré e pós-científica. A Revolução Científica é um acontecimento historicamente tão nítido quanto a Reforma, o Iluminismo ou a Revolução Industrial. Teve lugar em alguns países da Europa Ocidental, durante a primeira metade do século XVII com Galileu, Pascal, Huyghens e os homens do “Colégio Invisível” de Oxford e Londres, mais tarde reunidos na Royal Society e cujo porta-voz supremo foi Newton.

Esta tardia aparição do Método Científico comparada com o antigo desenvolvimento das Artes, não foi o fruto apenas de modificações na estrutura social e econômica da Europa, mas exigiu de parte dos seus pioneiros uma mudança radical nos processos mentais. A chamada Ciência dos antigos, codificada por Aristóteles e revivida pela Renascença, é basicamente uma Ciência dos sentidos, do bom senso. É exatamente por esta razão, e por terem sido incapazes de construir modelos mentais abstratos suscetíveis de serem testados pela experiência, que os gregos antigos e seus seguidores peripatéticos falharam nas suas pretensões para entender a Natureza. Quando comparamos os edifícios públicos de Atenas com as rudes igrejas cristãs do Xº ao do XXº século A.D. da Europa Ocidental, quando lemos Sófocles e Eurípedes e os comparamos ao Teatro Medieval, é impossível não concordar que o termo “**Renascença**” é apropriado para descrever as obras de Giotto, Dante, Petrarca e Leonardo. Nas Ciências, ao contrário, tudo teve que ser criado pela primeira vez, num verdadeiro nascimento do espírito de investigação científica.

A experiência diária nos diz que os objetos pesados caem mais rapidamente do que os leves. Assim também, um ciclista pedalando com a força constante faz a bicicleta correr à velocidade constante e se o ciclista cessa de pedalar a bicicleta eventualmente para. De observações como essas se criou a Física de Aristóteles: os corpos caem com velocidades proporcionais às suas massas; uma força constante atuando sobre um corpo produz um movimento uniforme. Pode-se fazer subir a água de um poço por meio de uma bomba aspirante, logo a Natureza tem horror ao vácuo. Foi preciso um salto mental radicalmente novo para se perceber que um corpo tende a conservar o seu estado de repouso ou movimento a menos que sobre ele atue uma força e que, portanto, não fossem as forças de atrito, uma bicicleta posta em movimento continuaria a se mover com velocidade constante (lei da inércia). Da mesma maneira foi necessário o gênio de Galileu para perceber que se abstrairmos a resistência do ar, todos os corpos caem com a mesma aceleração e que, portanto, percorrem espaços iguais em tempos iguais (lei da queda dos corpos). Um pedaço de madeira atirado da borda de um navio em movimento cai na água atrás da posição do observador, mas Galileu criou um modelo mental que lhe permitiu perceber que se eliminarmos a resistência do ar, o pedaço de madeira tendo a mesma velocidade que o navio no sentido do avanço

deste, cairá na água num ponto situado na vertical em relação à posição do observador (lei da composição dos movimentos). Galileu criou assim toda uma Ciência da Dinâmica dos corpos em movimento. A pergunta fundamental do seu continuador, Newton, foi se as leis da Dinâmica se aplicam ao movimento dos astros. O movimento dos planetas é descrito pelas leis descobertas por Kepler, que traduzem os resultados das observações de Tycho Brahe. A pergunta genial de Newton não foi por que caem as maçãs, mas por que uma rocha gigantesca como a Lua também não cai? A resposta correta só pode ser alcançada aplicando-se a lei da composição dos movimentos de Galileu ao movimento da Lua. Em relação a um plano tangente à sua trajetória, a Lua cai constantemente em direção à Terra, mas sua órbita resulta da composição deste movimento com o movimento tangencial à trajetória. A solução newtoniana do problema do movimento dos corpos celestes exige um modelo mental totalmente inexistente antes da Revolução Científica.

A criação artística, ao contrário, depende muito dos sentidos e muito menos de modelos abstratos. Um pintor não pode ser pouco sensível às luzes, tons e formas do mundo exterior. Os grandes escritores transmitem cores, sons e cheiros do mundo onde se movimentam suas personagens: O sol da Argélia em *“O estrangeiro”* de Camus, o roçar das folhas secas pisadas pelos sapatos de Madame Bovary. Em recente entrevista, Robert Graves, o grande poeta e escritor inglês, diz que nas artes todo poder criador vem das glândulas de secreção interna, ou, melhor dito, da interação das glândulas com o mundo exterior. A conclusão de Graves, de que esta é a razão pela qual os cientistas são maridos e amantes incompetentes, parece-nos pecar a partir da premissa, mas pouco duvidamos que se um menino de Praga tivesse tido um pai menos autoritário jamais teríamos ouvido falar de Kafka. Assim também, podemos lá imaginar Jorge Amado escrevendo **“Gabriela”** longe da Bahia, ou Dickens afastado da Londres do século XIX? Mesmo os artistas mais introvertidos dependem fundamentalmente das situações humanas que sentem ou observam. É impossível, por exemplo, imaginar Proust fora da França.

Cabe aqui, talvez, um depoimento pessoal. Quando Ernesto Silva* faleceu, em outubro de 1970, tentei colocar no papel algumas reminiscências deste grande educador químico e amigo íntimo. Estava então residindo numa pequena cidade universitária do meio-oeste americano. E o “momento de retorno” de que nos fala Edmund Blunden no seu *“Undertones of war”* não me ocorreu. As folhas caíram das árvores copadas de vermelho e amarelo; a neve cobriu de branco os telhados e caminhos, os prados cobriram-se de verde; os dias longos chegaram, perdendo-se nas noites em crepúsculos aveludados. Não consegui escrever uma linha sequer. Mas, de volta ao Recife, e mesmo na confusão da chegada, em poucos dias tracei o perfil de Ernesto Silva num retrato de memória. Este é o tipo de dependência emocional e afetiva que jamais conheci em relação à criação científica.

A dependência da criação científica em relação ao meio físico e social é de natureza bem diversa. Tendo morado os primeiros trinta anos da minha vida em regiões tropicais, e observado as nítidas manifestações da eletricidade estática no inverno americano, percebi claramente que os fenômenos elétricos jamais poderiam ter sido descobertos às margens do Capibaribe. Theodor Benfey, que é professor de Química e História da Ciência no Earlham College, sugeriu que a descoberta da pólvora pelos chineses foi condicionada pela existência de grandes jazidas de nitratos na China.

A Ciência é também, muito mais do que as Artes, uma atividade social. Os grandes cientistas são aqueles que, num dado estágio de desenvolvimento, formulam perguntas significativas que podem ser respondidas com os recursos técnicos do cientista e da época na qual vivem. Assim é que a Ciência real, distinta da Ciência contida nos livros, tem muito de artesanato. Como todo conhecimento artesanal, seja a cerâmica ou a arte de abrir os cofres, na prática da Ciência há muito do que Polanyi chama de conhecimento tácito. Ciência aprende-se vendo-se fazer e fazendo-se Ciência, e todo trabalho científico depende da colaboração de um grande número de pessoas, vivas ou mortas, que nos precederam ou que caminham ao nosso lado.

O processo de criação científica nada tem de lógico ou dedutivo. Os livros de texto naturalmente desenvolvem seus tópicos de maneira lógica e harmoniosa. Os trabalhos originais, antigos ou monografias, mostram apenas os resultados bem sucedidos, os progressos alcançados. Muito diferentes foram os caminhos do investigador. Richard Willstätter, na sua comovente autobiografia, *“Out of my Life”*, compara o progresso indicado num artigo com uma viagem de trem entre duas cidades. O cientista, contudo, percorreu muitos atalhos e veredas, parou para ver aqui uma rocha, adiante um remanso, perdeu-se num cipó na floresta, sentiu a beleza da aurora nas montanhas. Se isto era verdade nos tempos de Willstätter, nos começos do século, hoje em dia, numa época em que circulam 100.000 periódicos especializados e cujo número duplica cada 15 anos, podem dizer que o progresso descrito num artigo é como uma viagem em avião a jato. Em épocas menos recentes, contudo, era possível ao cientista descrever todas as pistas, falsas e frutíferas, encontradas durante a investigação. Nestes casos, como por exemplo, no de Kepler, pode-se ver como foi a intuição, e raramente processos lógicos, que levou à descoberta de novos fatos ou generalizações. Duzentos anos atrás, Joseph Priestley, felizmente tão prolixo nos seus escritos, dizia que se os cientistas escrevessem “engenhosa e analiticamente, e não de maneira sintética”, veríamos quanto devemos à intuição. Em tempos recentes, Pauling descreveu como chegou à sua Teoria de anestesia geral e Martin Kamen contou sua descoberta do carbono-14.

A leitura dessas reminiscências confirma tudo que Priestley escreveu. O momento da intuição, quando a pessoa sabe a resposta correta à indagação antes de ter a prova da mesma, é de intensa alegria íntima que a poucos é dado sentir. Mas seja dito que os instantes nos quais a vida parece queimar como palha seca está no campo das relações afetivas e abertos a todos. São momentos como aquele em *“Águas de Primavera”*, quando Sanin recebe a carta de Gemma, decorrido trinta anos de separação. Como diz Turguienev, “não há expressões que traduzem bem tais sentimentos; são mais profundos, vigorosos e indefinidos que qualquer palavra. Só a música poderia traduzi-los”.

*Famoso químico pernambucano

A criação artística difere ainda da criação científica pelo seu caráter único, individual. Este foi um ponto levantado por Erwin Chargraff, quando das controvérsias suscitadas pela publicação do livro “*The Double Helix*”, no qual James Watson conta a história da descoberta da estrutura do DNA e de suas implicações genéticas.

O que Chargraff chama a atenção é para o fato de que, por exemplo, se Tolstoi tivesse morrido na Guerra da Crimeia o mundo não conheceria “*Guerra e Paz*”. Podemos mesmo ir além e dizer que, se Machado de Assis tivesse morrido cedo, Capitu não teria traído Bentinho. Mas é evidente que, se Newton tivesse morrido em criança, como predito pelos médicos, algum outro cientista, provavelmente Hooke, teria descoberto a lei da gravitação antes do fim do século XVII.

No desenvolvimento da Ciência há momentos nos quais uma grande descoberta “esta no ar”, como prova o grande número de descobertas simultâneas realizadas por pesquisadores trabalhando independentemente. O espaço de manobra do cientista é muito mais restrito do que o do artista, e um atraso de poucos dias em publicar os resultados pode ser fatal em certas áreas competitivas. Disto resulta da parte do cientista uma hipersensibilidade em relação aos problemas de critério e prioridade. É uma situação menos crítica nos círculos artísticos e literários, onde o próprio caráter único da produção do artista torna a duplicação virtualmente impossível.

A importância de um trabalho científico pode ser determinada por critérios muito mais objetivos do que no caso da criação artística. Uma teoria incorreta faz predições erradas. Uma experiência mal descrita ou mal executada não pode ser reproduzida.

Ser honesto em Ciência realmente paga a pena. Isto não quer dizer que critérios subjetivos e fatores pessoais não entrem na avaliação dos trabalhos científicos da hora presente. Mas, eventualmente chega-se a uma “consensus” sobre a validade e importância de um trabalho científico.

Parece-me que os critérios de avaliação artística são muitos mais subjetivos. O critério supremo é, sem dúvida, fornecido pela passagem do tempo. Pode-se pôr em dúvida que o desconhecido autor de Vênus de Milo era um escultor de gênio? Pode-se duvidar da grandeza de Goya quando se visita o Museu do Prado? Mas, como podemos julgar o valor dos quadros do Sr. Gilberto Freyre? Mesmo na criação científica há critérios, como a elegância e a sobriedade, que são difíceis de julgar objetivamente. Einstein afirmou que questões de elegância dever ser deixadas para alfaiates e decoradores. Mas há casos de cientistas que escrevem e usam a Matemática com uma elegância que salta às vistas. Alguns espíritos polivalentes, “*harmoniosas multidões humanas*”, como diz Carl Van Doren em relação a Franklin, conseguem atingir níveis científicos e literários igualmente altos. O que talvez indique que a capacidade criadora científica e senso estético não sejam atividades mentais mutuamente antagônicas.

Post-scriptum

A análise dos desenhos e anotações de Leonardo da Vinci indica que ele possuía um sentido de visão anormalmente agudo. Suas descrições de um papagaio de papel em vôo incluem detalhes que só se tornaram conhecidos com a fotografia estroboscópica. Costuma-se dizer que, apesar desses seus dotes extraordinários, Leonardo não pode ser considerado um cientista, no sentido em que Galileu o foi. É possível, contudo, que Leonardo não tenha criado o método científico exatamente porque tinha os sentidos por demais aguçados! Não que os cientistas devam ter os sentidos embotados. Mas um cientista não pode ser dominado pelos sentidos: ele precisa ir além das sensações se quiser analisar o essencial dos fenômenos. Considere-se o movimento aparente do Sol. O sentido da vista nos diz que o Sol gira em torno da terra de leste para oeste. É preciso ir contra nossos sentidos para afirmar que é a Terra que gira no espaço, produzindo o movimento aparente do Sol. Mas Copérnico chegou a esta conclusão porque o conjunto dos movimentos de rotação e translação da Terra, explicava melhor do que o sistema geocêntrico, o movimento dos planetas em relação às estrelas fixas, e este é um fenômeno celeste muito mais sutil do que a sucessão dos dias e das noites. O poder de observação foi, portanto muito importante para Copérnico.

Os naturalistas também devem ser dotados de um grande senso de observação. Darwin, por exemplo, era um naturalista muito perspicaz. Mas, fosse ele somente isto e estaria hoje tão esquecido quanto outros grandes naturalistas, alguns, como os seus compatriotas Bates e Lubbock, reconhecidamente mais aguçados do que Darwin. A grandeza deste residiu em, atento para a diversidade das espécies, formular um modelo mental que racionaliza sua sucessão no tempo e no espaço. A grandeza de Darwin está, aliás, refletida em outros aspectos da sua vida. Teve ele a perfeita intuição de que os processos de seleção natural não se aplicam às comunidades humanas, permanecendo “*antidarwinista*” nas ciências sociais. Isto ficou comprovado, por exemplo, no seu decidido apoio àqueles que combatiam o Governador Eyre da Jamaica, pelas atrocidades por ele ordenadas quanto da revolta de 1865. Neste ponto, Darwin diferiu vigorosamente de outros cientistas seus amigos, como Tyndall, que consideravam como o dever de sociedade branca “dar uma lição” nos rebeldes de pele mais escura. Darwin morreu exatamente antes dos assassinatos do Parque Phoenix, em Dublin, que dariam à questão irlandesa o caráter violento que se prolonga até os dias de hoje. Mas tudo faz crer que teria sido partidário incontestado da política pró-Irlanda de Gladstone, no que pese o anticientifismo religioso deste grande homem. Reconhecer os limites de aplicação de uma teoria é também um processo mental característico do método científico.

Material extra-curricular sugerido

A Dupla Hélice

James D. Watson, Editora Gradiva Publicações, 2012.

A *Odisseia dos bastidores da descoberta da molécula DNA*, ilustrando de perto, um processo de criação científica.

Resumo

• Equilíbrio mecânico

As condições **necessárias** e **suficientes** para um corpo rígido estar em **equilíbrio mecânico** em relação a um referencial **inercial** são as seguintes:

i) A força externa resultante que atua sobre o corpo deve ser nula, ou seja,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0. \quad (\text{equilíbrio translacional})$$

ii) O torque externo resultante, em relação a qualquer ponto, deve ser nulo, ou seja,

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = 0. \quad (\text{equilíbrio rotacional})$$

• Equilíbrio estático

Neste caso, o corpo está em **repouso**, sem movimento de translação nem de rotação em relação ao referencial inercial.

Atenção:

Se as forças externas forem coplanares e situadas, por exemplo, no plano xy, devemos ter para o equilíbrio translacional

$$F_x = 0 \quad \text{e} \quad F_y = 0.$$

Neste caso, os torques são paralelos ao eixo z.

• Centro de gravidade

A força gravitacional que atua sobre um corpo é a soma vetorial das forças gravitacionais que atuam sobre todos os elementos de massa que o compõem. Esta única força pode ser pensada como atuando em um único ponto, chamado **Centro de Gravidade** (CG) do corpo.

Atenção:

Se a aceleração da gravidade for a mesma para todos os elementos de massa do corpo, então $CG \equiv CM$.

• Estruturas indeterminadas

São estruturas mecânicas onde o número de equações disponíveis para sua descrição é menor que o número de incógnitas.

Questões conceituais

1) Escolha a opção correta:

As equações $\sum \vec{F}_i = 0$ e $\sum \vec{\tau}_i = 0$ são condições

- necessárias e suficientes só para o equilíbrio estático.
- necessárias e suficientes só para o equilíbrio mecânico.
- necessárias, mas não suficientes, para o equilíbrio mecânico.

2) Das afirmações abaixo, apenas uma está correta. Assinale esta opção:

- Dado um ponto em equilíbrio sob a ação de três forças, qualquer uma delas é resultante das outras duas.
- A resultante de duas forças é sempre mais intensa do que qualquer uma das componentes.
- O ponto de aplicação de uma força num corpo rígido pode ser deslocado ao longo de sua linha de ação.

3) Um corpo rígido se desloca horizontalmente em linha reta de A para A' sob a ação de uma força \vec{F} . De um ponto fixo O, fora da trajetória AA', um observador verifica que em A o momento desta força, em relação a ele é $\vec{\tau}$. Qual será o momento desta força quando o corpo atingir A'?

4) Um corpo está sob a ação de três forças. Assinale a afirmação correta:

- Este corpo estará em equilíbrio se estas forças forem necessariamente concorrentes.

- b) Para que o corpo esteja em equilíbrio estático, é somente necessário e suficiente que o torque externo resultante sobre o corpo, medido em relação a um ponto qualquer, seja zero.
 c) Para afirmar alguma coisa precisamos de mais dados sobre as forças.

5) Falso ou verdadeiro:

São dados uma barra CD rígida, uniforme e delgada, de peso \vec{P} , que pode ser suspensa por dois fios de comprimentos diferentes, flexíveis, inextensíveis e de pesos desprezíveis, conforme mostrado em dois arranjos, (a) e (b), da Figura 12-14.

- i) Na posição de equilíbrio, \vec{P} e as tensões nos fios, são três forças concorrentes e coplanares;
 ii) A barra pode permanecer em equilíbrio no arranjo (a).
 iii) Se no arranjo (b), o CM se apresentar na posição mais baixa possível, esta é a situação de equilíbrio estável.

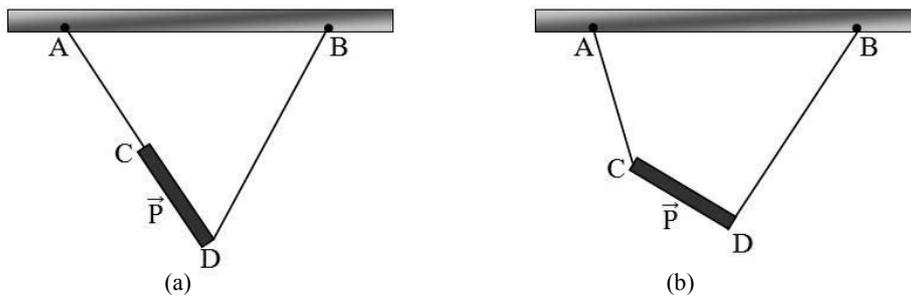


Figura 12-14 Referente à Questão 5.

6) Falso ou verdadeiro:

Na montagem da Figura 12-15 o fio que sustenta a massa m_2 é paralelo ao plano inclinado e o que sustenta a massa m_1 é normal ao referido plano inclinado. Os fios são flexíveis, inextensíveis e de pesos desprezíveis. Despreze atritos. Quando cuidadosamente se remove o plano inclinado, não se verifica deslocamento do carrinho C de massa m !

Isto ocorre em parte por que:

- i) $m_1 < m$ e $m_2 < m$?
 ii) $m = m_1 + m_2$?
 iii) A tensão no fio que vai à massa m_1 equilibra a componente do peso do carro normal ao plano inclinado?

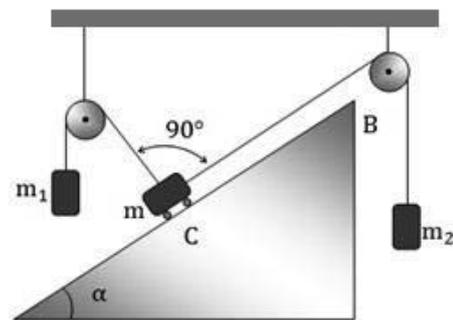


Figura 12-15 Referente à Questão 6.

7) Uma roda gira à velocidade constante ω em torno de um eixo fixo. Ela está em equilíbrio mecânico, pois nenhuma força ou torque externo atuam nela. Sabemos que cada partícula que a constitui está sujeita à aceleração centrípeta dirigida para o eixo de rotação. Como a roda pode ser considerada em equilíbrio?

8) Falso ou verdadeiro:

Um corpo se move em linha reta horizontal aceleradamente. Assim sendo,

- a) O torque em torno de um ponto qualquer será nulo, se for nulo em relação a um ponto adequadamente escolhido;
 b) O torque em torno de qualquer ponto não será nulo;
 c) O corpo não está em equilíbrio mecânico.

9) Como explicar que uma pessoa sentada em uma cadeira, com suas costas retas na vertical, não possa levantar-se sem antes se inclinar para frente?

10) Falso ou verdadeiro:

Considere uma carroça uniforme, tipo prancha, de massa m e base horizontal quadrangular de lado l , conforme vista lateral na figura. Ela está parada em equilíbrio em uma superfície plana horizontal.

- a) É possível se determinar a força normal externa atuando em cada um dos quatro pneus.
 b) No caso da força normal em um dos pneus ser conhecida, é possível conhecer as demais nos outros pneus.
 c) Se esvaziarmos um dos pneus e alterarmos a pressão em outro pneu, mantendo a carroça em equilíbrio, é possível conhecer as forças normais anteriores atuando nos pneus.

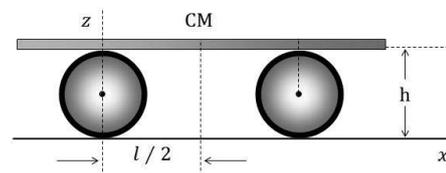


Figura 12-16 Referente à Questão 10.

Problemas

* → *** O número de estrelas indica o nível de dificuldade do problema

- 1)* a) Qual a força F , formando um ângulo α com a horizontal, para cima, necessária para arrastar uma caixa de peso p com velocidade constante, ao longo de um plano horizontal, se o coeficiente de atrito entre a caixa e o assoalho é μ ?
- b) Considere agora o ângulo α abaixo da horizontal. Qual o valor de \vec{F} ?
- c) Supor que a força se inclina de um ângulo cada vez maior. Qual o ângulo além do qual não é possível empurrar a caixa ao longo da superfície, por maior que seja a força?

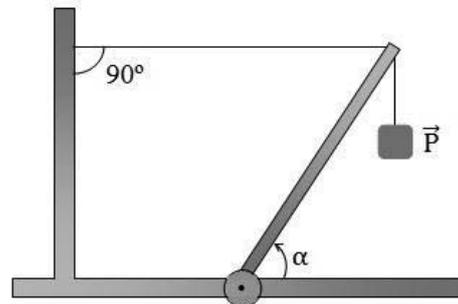


Figura 12-17 Referente ao Problema 3.

- 2)* Um bloco cúbico uniforme tem aresta $a = 0,70\text{m}$ e pesa $P = 500\text{ N}$. Ele está em repouso sobre um assoalho liso, encostando uma das arestas inferiores, AB , em um trilho paralelo a ela e de altura acima do assoalho desprezível. Que altura mínima acima do assoalho deve ser aplicado no bloco uma força horizontal de $F = 350\text{ N}$ para fazê-lo começar a girar em torno da referida aresta?

- 3)* A figura 12-17 mostra uma barra horizontal uniforme de peso $p = 500\text{ N}$ presa por um cabo inextensível e de peso desprezível a uma parede vertical, suspendendo uma caixa de peso $P = 1000\text{ N}$. A barra está presa ao solo por um pino e forma uma ângulo $\alpha = 60^\circ$ com a horizontal. Qual a tração no cabo e a força na barra em sua extremidade inferior?

- 4)* Uma partícula de massa m é suspensa em equilíbrio por dois fios inextensíveis de comprimentos a e b , presos nos pontos A e B , os quais são separados por uma distância c . Ache a tensão em cada fio.

- 5)* Uma barra delgada metálica, uniforme e flexível, é colocada horizontalmente de modo a ter seu ponto médio fixo e suas extremidades amarradas, bem justas, por um fio que é puxado em seu ponto médio pela força de um arqueiro, de modo que a barra se torne um arco. Qual o ângulo deste arco quando a tensão em cada metade do fio ficar igual à força exercida pelo arqueiro?

- 6)* Na Figura 12-18 AB e AC são fios inextensíveis e de pesos desprezíveis presos no teto CD e na parede BD em C e B respectivamente. Um peso P é suspenso em A . Os fios fazem ângulos θ_1 e θ_2 com a parede e o teto, respectivamente. Calcule as trações T_1 e T_2 nos fios.

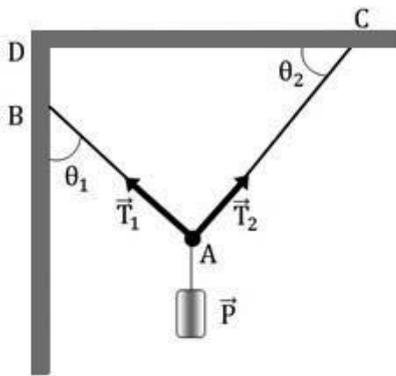


Figura 12-18 Referente ao Problema 6

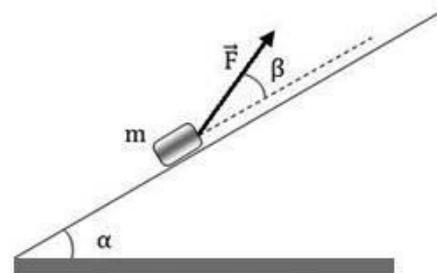


Figura 12-19 Referente ao Problema 7

- 7)* Na Figura 12-19 calcule a força \vec{F} necessária para que a massa m esteja em equilíbrio sobre o plano inclinado se: a) o plano é liso; b) o plano tem coeficiente de atrito μ . 8)* Na Figura 12-20 a massa m é suspensa por um fio inextensível de peso desprezível. Ela é puxada para a direita por outro fio AB tal que AO faça um ângulo α com a vertical. Ache a tensão em cada fio.

9)** Um peso P é suspenso por três fios inextensíveis de pesos desprezíveis e mesmo comprimento l , preso a três vértices de um triângulo equilátero horizontal de lado a . Ache as trações nos fios.

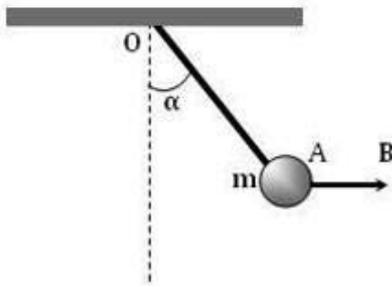


Figura 12-20 Referente ao Problema 8.

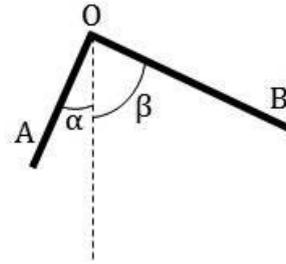


Figura 12-21 Referente ao Problema 11.

10)** Um barra uniforme de massa m está encostada numa parede vertical e apoiada num assoalho horizontal. Despreze atrito. Na base ela está amarrada por um fio inextensível de peso desprezível à base da parede. A barra e fio formam um ângulo α entre si. Calcule a tensão no fio.

11)** Na Figura 12-21, $OA = a$ e $OB = b$ são barras delgadas uniformes, conectadas em O tal que $\alpha + \beta = 90^\circ$. O sistema está suspenso em O , estando AOB num plano vertical. Determine os ângulos α e β para que ocorra equilíbrio no sistema.

12)** Conforme mostrado na Figura 12-22, uma bobina de massa M consiste de um cilindro interno de raio r , preso concentricamente por duas rodas maciças, cada uma de raio $R > r$. Ela é colocada sobre um plano inclinado em que pode rolar sem deslizar. Uma massa m está suspensa por um fio inextensível e de peso desprezível, enrolado na bobina. Qual deve ser o ângulo θ de inclinação do plano inclinado com a horizontal para que o sistema esteja em equilíbrio estático?

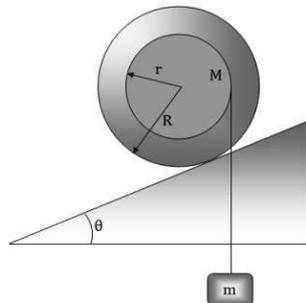


Figura 12-22 Referente ao Problema 12

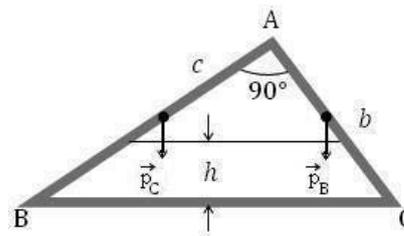


Figura 12-23 Referente ao Problema 13

14)** Um cilindro de massa m e raio r , está encostado em um degrau, de altura h conforme mostrado na Figura 12-24. Uma força horizontal F é então aplicada no topo do cilindro, que continua em repouso.

- Calcule a força normal exercida pelo piso sobre o cilindro.
- Calcule a força horizontal exercida pela borda do degrau sobre o cilindro
- Idem para a componente vertical da força.
- Qual a força mínima \vec{F}_{\min} que fará o cilindro rolar sem escorregar sobre o degrau?

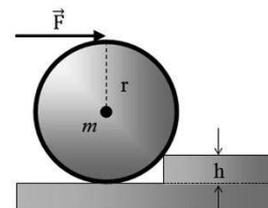


Figura 12-24 Referente ao Problema 14

15)** Empilham-se n tijolos, idênticos e uniformes, cada um de formato retangular e de comprimento a , sobre um assoalho horizontal. Qual é a

distância horizontal máxima entre as extremidades do último e do primeiro tijolo para a qual a pilha não desabe?
 (Sugestão: considere as condições de equilíbrio, sucessivamente, de cima para baixo).

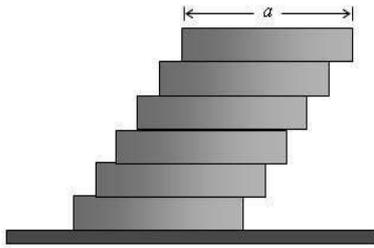


Figura 12-25 Referente ao Problema 15

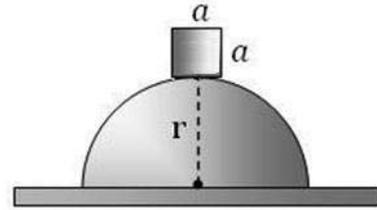


Figura 12-26 Referente ao Problema 16

16)*** Um cubo de densidade uniforme e aresta a é equilibrado sobre uma superfície cilíndrica de raio $r \gg a$, como visto na Figura 12-26. Suponha que o atrito seja suficiente para evitar o deslizamento. Mostre que a condição para haver equilíbrio do cubo é $r \geq \frac{1}{2}a$.

17)* Quatro balões de pesquisa A, B, C e D, idênticos e de mesma massa, estão em um dado instante, a uma mesma altitude. Eles estão sendo utilizados para medir possíveis variações da aceleração da gravidade em região com alto teor mineral. Cada balão é caracterizado pelas suas coordenadas (em km) e a aceleração da gravidade medida. São eles:

A (0,0) com $g_A = 9,80 \text{ m/s}^2$, B (30,0) com $g_B = 9,75 \text{ m/s}^2$, C (30,30) com $g_C = 9,72 \text{ m/s}^2$ e finalmente, D (0,30) com $g_D = 9,78 \text{ m/s}^2$. Desprezando efeitos da curvatura da Terra, calcule para o sistema formado pelos quatro balões: a) o seu CM; b) o seu CG.

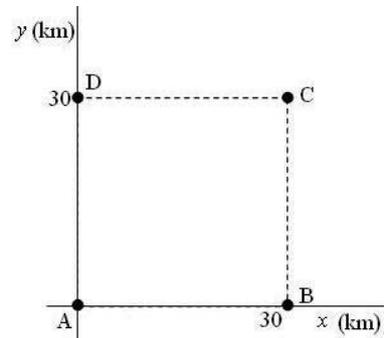


Figura 12-27 Referente ao Problema 17.

Respostas (Questões Objetivas e Problemas)

Capítulo 1

Questões Conceituais

1) Sim. 2) a) 48000 kcal; b) 9,6 kg 3) a) Não; b) A geometria euclidiana não seria uma teoria (científica) válida em todas as situações.

Problemas

1) a) Sim (a velocidade do carro é 90 km/h, enquanto a velocidade máxima permitida, incluindo a tolerância do 20% do radar, é de 88 km/h); b) Sim. 2) $2,5 \times 10^{-9}$ 3) a) 14.400 ml; b) 1.440.000.000 ml ou 1,440 kl 4) a) 7,6 dias; b) São necessários 4 anos 5) a) 1,85 m/passo; b) 22,680 passos 6) a) 160h; b) 9.600 dias ~ 26 anos e 4 meses. 7) $0,419 \text{ m}^3 = 419 \text{ l}$ (Obs.: Segundo o Wolfram Alpha, o volume médio do corpo humano é de 66,4 l e, portanto, o diâmetro médio para uma célula humana deveria ser algo em torno de 5 a 6 micro metros. Por, exemplo, as células vermelhas do sangue têm um diâmetro médio de 7 micro metros). 8) 252 min 9) 1600 h 10) 1 latinha 11) a) 5 trilhões ou 5×10^{12} folhas; b) $8,3 \times 10^{-12} \text{ mol}$ 12) LT^{-2}

Capítulo 2

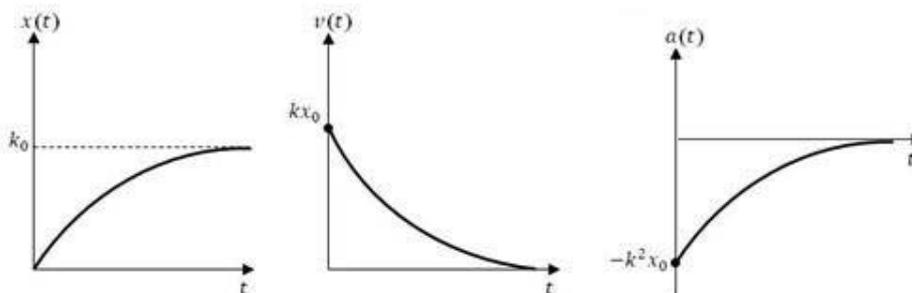
Questões Conceituais

1) Sim. Basta que a inclinação da tangente à curva $v \times t$ decresça continuamente para $a = dv/dt$ diminua 2) Entre 2 e 2,5 s. 3) a) Falso; b) Verdadeiro; c) Verdadeiro.

Problemas

1) $\bar{v} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$ 2) $\bar{v} = n \times \frac{1}{\frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}}$ 3) a) $x(4) = 24\text{m}$; b) $\Delta x = 24\text{m}$; c) $\bar{v} = 8\text{m/s}$; d)

$v(t) = 2 - 6t + 3t^2$; e) $a(2) = 6 \text{ m/s}^2$ 4) a) $t = 20\text{s}$; b) $x_A(20) = 300\text{m}$ 5) $v_A - v_B = \text{m/s}$ 6) a) $v_{\min} = 10,5 \text{ m/s}$; b) $v_{\max} = 17,5 \text{ m/s}$ 7) a) ver figuras; b) x_0 ; c) $a(t) = -k^2 x_0 e^{-kt}$; d) $a(t) = -kv(t)$ 8) a) $a = -5\text{m/s}^2$; b) $v(4\text{s}) = 20\text{m/s}$ 9) $v_{\text{bar}} = 2\text{m/s}$ 11) 0,5s 12) a) 44m; b) ver figura 16) $h = 18,5\text{m}$ 17) 309m



Figuras do problema 7

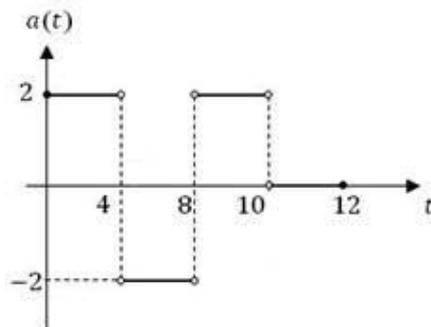


Figura do problema 12

Capítulo 3**Questões Conceituais**

1) Não, pois $\cos\theta_0 = v/v_0 \leq 1$. 2) a) Não. Mesmo com $v = \text{constante}$, $a_c = -v^2/r \neq 0$ e portanto, $a \neq 0$; b) Sim; v crescente implica ω crescente, pois $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$. 3) a) \vec{A} ; b) \vec{E} ; c) \vec{C} ; d) \vec{A} .

Problemas

1) a) $2t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; b) $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 2) $[0,15]$. 3) $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. 4) a) $y = -\left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)x^2$; b) $\vec{v}(t) = \alpha\hat{x} - 2\beta t\hat{y}$;

$\vec{a} = -2\beta\hat{y}$; c) $\langle \vec{v} \rangle = \alpha\hat{x} - \beta t\hat{y}$ 5) $4,0 \text{ km/h}^2$ 6) 60° 7) a) $2\sqrt{5} \text{ s.}$; b) $40\sqrt{5} \text{ m}$; c) $20\sqrt{6} \text{ m/s}$ e a bola é inclinada a um ângulo de $24,09^\circ$ com a vertical 9) $\Delta t = \frac{2v \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}}{g}$ 10) $h/h' = 1/2$.

11) $1,14 \text{ m/s}$. 13) a) $1,0 \text{ rd/s}$; b) $9,22 \text{ m/s}^2$ 14) $\sqrt{2}$ 15) $5,39 \text{ m/s}^2$ 16) a) 90° entre a direção do fluxo do rio e a direção norte; b) Deve nadar a um ângulo de 120° com a direção do fluxo do rio. 17) $45,87 \text{ m}$. 18) 857 km/h 19) 59° 20) $1,6 \text{ m/s}^2$.

Capítulo 4**Questões Conceituais**

1) Não. No segundo caso, a força é $Fm_1/(m_1 + m_2)$. A diferença é devido à resistência inercial à transmissão da força. 2) O resultado é o mesmo. 3) Não. Outras informações são necessárias para se ter v_0 , já que de $\tan\theta_0 = F_x/F_y$, se obtém θ_0 . 4) Um dinamômetro de dimensões maiores. 5) Não. 6) a) $686,7 \text{ N}$; b) $572,3 \text{ N}$.

Problemas

1) $T_\alpha = 80,7 \text{ N}$; $T_B = 65,9 \text{ N}$. 2) a) $mg \sin\alpha$; b) $-g \sin\alpha$. 3) a) $m(a + g)$; b) $m(g - a)$; c) zero 4) 939 N . 5) a) $98,1 \text{ N}$; $98,1 \text{ N}$; $98,1 \text{ N}$. b) 10 kg nos três casos. 6) $3,91 \text{ N}$. 7) $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$; $a = (m_2 - m_1)g/(m_2 + m_1)$. 8) $a = m_2g/(m_1 + m_2)$; $T = m_1m_2g/(m_1 + m_2)$. 9) $m = 2aM/(a + g)$. 10) a) $2,65 \text{ m}$; b) $1,04 \text{ s}$; c) $5,1 \text{ m/s}$. 11) $-(k_1 + k_2)x/m$. 12) $14,0 \text{ kN}$. 13) a) $8,1 \text{ m/s}$; b) $\approx 3,0 \text{ s}$. 14) ****///// 15) $v = [2gl \log(l_0/l)]^{1/2}$

Capítulo 5**Questões Conceituais**

1) A força de atrito só ocorre no domínio da interação eletromagnética ($\sim 10^{-8} \text{ cm}$). 2) Observa a figura 5-1 e releia a seção 5-2. 3) O pesquisador está errado. 4) Sim, pois, $\vec{A} = \mu\vec{N}$. 5) Com esta conceituação, se subitamente, a parede do rotor deixasse de existir, o corpo deveria voar ao longo da direção radial, o que é um absurdo, pois, isto jamais ocorreria. O corpo deveria sair pela tangente. 6) (b) + (iii).

Problemas

1) a) $F > 60 \text{ N}$.; b) $F > 109,5 \text{ N}$; c) $F > 10,95 \text{ N}$. 2) a) $v = [2gl(\sin\theta - \mu \cos\theta)]^{1/2}$; b) $(\sin\theta - \mu \cos\theta)(l/\mu)$. 3) $F = \mu(m + M)g$. 4) $\frac{1-\mu}{1+\mu}(M + 2m)g \leq F \leq \frac{1+\mu}{1-\mu}(M + 2m)g$. 5) $\mu = 0,423$. 6) $\mu = k l_0/(mg - kl_0)$. 7) $2,47$. 8) $2,21 \text{ m/s}$. 9) $0,078$. 10) $15,34 \text{ m/s}$. 11) $22,7 \text{ cm}$. 12) A força de atrito estático, $\vec{F}_{e,max} = \mu mg\hat{x}$. Se $|\vec{F}| > |\vec{F}_{e,max}|$, então o corpo começa a deslizar.

Capítulo 6**Questões Conceituais**

1) Sim, pois ele consumiu energia química. 2) a) negativo; b) nulo; c) nulo. 3) a) mola B; b) iguais. 4) Para o plano inclinado de menor ângulo θ . 5) a) $20,0 \text{ J}$; b) $7,0 \text{ m}$; c) $20,0 \text{ J}$. 6) Potência, pois, se pretende ter uma locomotiva fornecendo a maior energia num menor tempo possível. 7) a) Potência, já que se quer a maior quantidade de energia no menor tempo possível; b) Energia, seria mais apropriado.

Problemas

1) 15,8W ; 2) a) $mC^4 t^2/8$; b) $mC^4 t/8$; 3) c) 6 N/m. 4) $\frac{1}{2} m C^2 d$. 5) a) $mgl(1-\cos\theta_0)$; b) $mgl (1-\cos\theta_0)$
 6) $-\mu gs/(1-\mu \cotg \theta)$. O sinal negativo é devido ao fato de a força de atrito e o deslocamento terem direções opostas. 7) $F = \mu g (m_1 + \frac{1}{2} m_2)$. 8) $mCrt$. 9) $mgl/18$ 10) $2Cs[1 + (s/r)^2]^{1/2}$. 11) a) $\pi/4$ rad; b) $\frac{1}{2} J$; c) $\frac{1}{2} W$. 12) a) $\mu = F/2(M+m)g$; b) $mF/2(M+m)$; c) $W = mFs/2(M+m)$.

Capítulo 7**Questões Conceituais**

1) a) F; b) V. c) V; d) V; e) F. 2) a) V; b) F; c) V; d) F; e) V. 4) a) V; b) F; c) F. 5) a) -54,9 kJ; b) 686,3 N; c) 68,6 W. 6) 91,6 s 7) c). 8) a) V; b) F; c) V; d) F; e) F.

Problemas

1) a) -19,62J ; b) 19,62J; c) 19,62 J. 2) 0,365 J. 3) $h_{min} = (5/2)R$. 4) 9,5 cm. 5) a) $\Delta U = -mg r (1-\cos \theta)$; b) $\Delta k = -\Delta U$; c) $a_r = 2g (1-\cos \theta)$, $a_t = g \sen \theta$; d) $\theta = \arccos (2/3) \sim 48^\circ$. 6) a) $-\left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x$; b) $x \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$. 7) 2,0 g. 8) a) 3,0 J; b) zero; c) \vec{F}' ; d) Só para \vec{F}' . Neste caso, $U = yx$.
 9) a) $W = 47,9$ W; b) $\mu = 0,14$; c) 47,9 W. 10) 2mg /k. 11) a) $r = 2a/b$ fornece um mínimo para $U (r)$; b) $F = b^3/27a^2$. 12) a) $h = H/2$; b) $x_{max} = H$. 13) $kx^2/[2mg (\sen \theta + \mu \cos \theta)]$. 14) a) 10 J; b) 100 J; c) 17,38m. 15) a) $v_B = [v_A^2 - 2gh - 2gl (\sen \theta + \mu \cos \theta)]^{1/2}$; $v_A = [2g(h + l (\sen \theta + \mu \cos \theta))]^{1/2}$; $h_{max} = 2\mu gh + v_A^2 \tg \theta / 2g(\mu + \tg \theta)$; d) conservativa: gravitacional; não conservativa: atrito. 16) a) $(v_0^2 - 2gh)/2\mu g$; 17) a) $2\sqrt{gl}$; b) 5 mg; c) $\theta \arccos (1/3) \simeq 71^\circ$.

Capítulo 8**Questões Conceituais**

1) a) V; b) V; c) F. 2) a) F; b) V; c) F; d) F. 3) Basta jogar fora na horizontal alguma coisa que possuir. 4) a-iv; b-iii; c-i; d-v; e-ii. 5) externas; variações da quantidade de movimento; externas. 6) Sim, pois $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \rightarrow (m_1 v_1) v_1 = (m_2 v_2) v_2 \rightarrow p_1 v_1 = p_2 v_2$. Se $v_1 = v_2 \Rightarrow p_1 = p_2$. 7) Variar a posição do CM para a parábola ter um maior alcance. 10) a) F; b) F; c) V; d) V.

Problemas

1) a) $3\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}$; b) $18\hat{x} - 12\hat{y} - 6\hat{z}$. 4) a) Sim; $v_B = -\left(\frac{m}{m+M}\right)v$; b) Estacionário. 5) $v = -\left(\frac{m'}{m+M-m'}\right)v$. 6) $\vec{v} = -3,4\hat{x}$ em m m/s. 7) $(2/3) l$. 10) $a^2 d/(b^2 - a^2)$ abaixo de B. 12) $z_{CM} = \frac{3}{8}R$. 13) $z_{CM} = (3R^2 + 8RH + 6H^2)/(8R + 12H)$. 14) b) $(2/g) v_0^2 - (\sqrt{2}/2)v_0 t_0$. 15) a) $\vec{V}_1 = \left(\frac{m v_0}{M+2m}\right)\hat{x}$; b) $\vec{V}_2 = \left(V_1 + \frac{m}{M+m}v_0\right)\hat{x}$; c) $\vec{V}'_1 = \left(\frac{2m v_0}{M+4m}\right)\hat{x} < \vec{V}_2$. 16) $v = v_e \log \left(\frac{m_0}{m_0 - Rt}\right) - gt$. 17) Igual a e $\simeq 2,718$, base do logaritmo neperiano. 18) a) $y = \frac{1}{2} x$. 19) $F = \lambda v(v + gt)$. 20) a) $v_0 = \left[\frac{gl}{(1+m/M)\sen 2\theta}\right]^{1/2}$; b) $\Delta K = 0$; c) A lei física é $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$.

Capítulo 9**Questões Conceituais**

1) i) – iv)' ; ii) – vi)' ; iii) – iii)' . 2) i) – iii)' ; ii) – iv)' ; iii) – ii)' . 3) i) – iv)' ; ii) – ii)' ; iii) – i)' . 4) a. 5) c. Para chegar a isto, calcule $dK_2/dm_2=0$, onde $K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2} \right)^2 v_1^2$. 6) Quando $m_2 \ll m_1$. Neste caso, calcule $dv_2'/dm_2 = 0$. 7) Com todas as massas iguais, a última massa transmite o máximo de energia cinética. Verifique isto inicialmente, para o caso de três massas. Para o caso da questão 6, considera-se $m_2 \ll m_1$. Com o choque, a velocidade da segunda bola será igual a $2v_1$. Com as demais colisões deste tipo, a velocidade transferida a cada colisão será aproximadamente, o dobro da transferida na colisão anterior. 8) A questão 7) explica o que acontece. A última bolinha à direita é que se movimenta como um pêndulo, enquanto as demais permanecem paradas. Na sua volta, ocorre o oposto. Só a bola à esquerda sobe, como um pêndulo, e as demais param, e assim sucessivamente, já que os choques são considerados elásticos. 9) $E_{RL} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \neq \frac{1}{2} \mu v^2 = E_{RCM}$, onde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ e $v = v_1 - v_2$. 10) a). 11) c). A trajetória do corpo que inicialmente estava estacionária é 1 e depois da colisão, 4. O outro corpo é 3 e depois 6. O CM segue 2 e 5.

Problemas

1) a) +3,2 Ns; b) $\langle F \rangle = -1600$ N. 2) a) 8,0 Ns; b) 800 N. 3) 60 kJ. 4) 3,7 m/s e 2,0 m/s. 5) a) 4,0 m/s e 9,0 m/s; b) – 4,0 m/s e 0,5 m/s. 6) $2n$ m A v^2 . 7) 1º choque (A com B): $v_A' = 5,0$ m/s, $v_B' = 15,0$ m/s; 2º choque (B com C): $v_B'' = 3,75$ m/s, $v_C'' = 11,25$ m/s; 3º choque (A com B): $v_A''' = 4,06$ m/s, $v_B''' = 4,69$ m/s. Como $v_C'' > v_B''' > v_A'''$, logo não haverá mais choque(s). 8) $d' = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 d$. 9) a) $K = \frac{1}{2} m v^2$; b) $1/2 K$; c) $1/2$; d) $1/2 K; 0; 1$; e) É a mesma. 11) a) 200 m/s e $200\sqrt{3}$ m/s; b) $u_1' = 200 \hat{n}$, $u_2' = -200 \hat{n}$, em m/s. O versor \hat{n} forma um ângulo de 60° com a trajetória inicial. 12) a) $-\sqrt{2gh}$; b) $\langle \vec{F} \rangle = -2n m \sqrt{2gh} \hat{y}$; c) $2n m \sqrt{2h/g}$. 13) $\theta_2' = -\arctg(3\sqrt{3})$, b) v ; c) não, pois $\Delta K \neq 0$ (verifique!) 14) 687 kN. 15) 58 cm. 16) $d = 4\epsilon(1 + \epsilon)h \sin \alpha$. 17) 0,14. 18) $\arcsen(m_2/m_1)$. 19) a) $2m_1/(m_1 + m_2)$; b) $4m_1 m_2 / (m_1 + m_2)^2$. 20) 50,3 cm/s 21) 4.

Capítulo 10**Questões Conceituais**

2) 90° . 3) $(0, t_1)$ o torque cresce, torna-se zero em (t_1, t_2) e decresce em (t_2, t_3) . 6) c). 7) a. 8) c). 9) a). 10) i) – iii)' ; ii) – iv)' ; iii) – i)' ; iv) – v' ; v) – ii)'.

Problemas

1) a) $-\hat{y}$ em J.s; b) $\hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$ em N.m. 2) a) $8t\hat{z}$, em N.m; b) $4t^2 \hat{z}$ em J.s. 3) a) $\hat{x} - 2\hat{y} - 3\hat{z}$, em N.m; b) $-\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$, em N.m. 4) a) $2,68 \times 10^{40}$ kg m^2/s ; b) $f = L_T/L_J = 1,39 \times 10^{-3}$. 5) Tomando o eixo dos x na direção Norte e a altura na direção y , \vec{L} está dirigida ao longo do eixo negativo dos z . O módulo do momento angular é $2,78 \times 10^8$ kg m^2/s . 6) $2,1 \times 10^{11}$ kg m^2/s . 7) 0,99 s. 8) p_z e l_z . 9) $t'/t = \sqrt{m'/m}$. 10) $l_z = r\sqrt{Mmg r}$. 11) a) $m\sqrt{2gs}$; b) $d_{\min} = 3s/5$; c) $mr\sqrt{2g(2d - s)}$. 13) 1,034. 15) a) $T = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{GM}$, onde a é o semi-eixo maior da elipse. 16) 88 dias. 17) a) $F_x = -kx$, $F_y = -ky$, $F_z = 0$. 20) O planeta deverá escapar em uma órbita parabólica.

Capítulo 11**Questões Conceituais**

1) c). 2) a). 3) c). 4) c). 5) c). 6) b). 7) a). 8) a). 9) c). 10) b). 11) b).

Problemas

1) $\frac{1}{3} ml^2$. 2) a) $I_z = I_y = \frac{1}{12} ml^2$; $I_x = 0$; b) $\frac{2}{5} m r^2$. 3) $a_{CM} = \frac{10F}{7m}$. 4) $25 \times 10^{-6} N.m$. 5) a) $\frac{6}{5} \left(\frac{v}{l}\right)$; b) $\frac{1}{5} m v^2$. 6) a) $v_1 = \left(\frac{r_0}{r_1}\right) v_0 = 20 \frac{m}{s}$; b) $T = m \frac{v_0^2}{r_0} = m \frac{v_1^2}{r_1} = 10 N$; c) $W = \frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)$ sendo $L = m r_0 v_0 = m r_1 v_1$. Assim $W = 15 J$. 7) $\omega = \frac{M}{M+3m} \omega_0$. 8) a) $\vec{v} = \sqrt{2gl} \hat{x}$, $\vec{V} = \frac{2m}{m+M} \sqrt{2gl} \hat{x}$; b) $v' = \frac{m}{m+M} \sqrt{2gl}$; c) a corda não alcançaria a posição horizontal. 9) a) 40 rad/s ; b) $8/9$. 10) a) $I_A/I_B = 1/3$; b) $I_A/I_B = 1/9$; c) 20s. 11) a) arame esticado $I_O = \frac{1}{3} m[l^2 - 3l'(l-l')]$; arame entortado: mesmo valor; b) $\alpha = \text{arc tg} \left(\frac{l-l'}{l'}\right)$ e $\beta = \pi/2 - \alpha$; c) Ao longo do eixo negativo dos y, de valor $y_{CM} = -\frac{1}{2m} [m'l' + m''l'(l''/l')^3] \cos \alpha$, onde $l'' = l - l'$ e $m'' = m - m'$. Observe que $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha}$. 12) zero; b) $v_{CM} = 2\sqrt{gl \sin \theta/3}$. 14) Os eixos de simetria do triângulo passam pelo seu CM. Um deles é paralelo à base do triângulo, o outro a sua altura. Os momentos de inércia são $I_x = 2m_1 m_2 h^2 / (2m_1 + m_2)$, $I_y = \frac{1}{2} m_1 a^2$ e $I_z = I_x + I_y$. 15) $K = \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\varphi}^2$. 16) a) $d = 12v_0^2/49 \mu g$; b) $v_{CM} = \frac{5}{7} v_0$ 17) O bastão segue girando em torno do seu CM ao longo do eixo y, obedecendo às equações $y = (J/m)t$ e $\omega_{CM} = 12 Jd/ml^2$. 18) $y = \frac{4}{3} l$. 20) a) K não é conservado, pois, o choque é perfeitamente inelástico; \vec{p} não é conservado, pois há uma força externa atuando no eixo, devido ao impacto; \vec{L} é conservado, pois não há torque externo resultante (existe a força externa atuando no eixo, mas tem braço nulo). 21) $t = \frac{3}{8} \frac{\omega r}{\mu g}$. 22) $K = \frac{1}{3} ml^2(1 + 3 \text{sen}^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$.

Capítulo 12**Questões Conceituais**

1) b). 2) c). 3) \vec{c} . 4) a). 5) V ; F ; V . 6) V ; F ; V . 7) São forças internas que se anulam duas a duas. 8) F ; F ; V . 9) Ao inclinar-se para a frente, a linha de ação do CM se aproxima mais da linha da força normal criada pelos pés no solo. 10) F ; V ; F .

Problemas

1) a) $F = \frac{\mu p}{\cos \alpha + \text{sen} \alpha}$; b) $F = \frac{\mu p}{\cos \alpha - \mu \text{sen} \alpha}$; c) $\mu = \text{arc tg}(1/\mu)$. 2) 50cm. 3) $T = 722 N$, $\vec{F} = 722 \hat{x} + 1500 \hat{y}$ em newtons. 4) $T_{AC} = \frac{mg \cos \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$, $T_{BC} = \frac{mg \cos \alpha}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$, sendo $\cos \alpha = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$ e $\cos \beta = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$. 5). 120° . 6) $T_1 = \frac{P \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$, $T_2 = \frac{P \text{sen} \theta_1}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$. 7) a) $F = mg \text{sen} \alpha / \cos \beta$; b) $F = mg (\text{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) / \cos \beta$. 8) $T_{OA} = mg \sec \alpha$; $T_{AB} = mg \text{tg} \alpha$. 9) $T = Pl \sqrt{9l^2 - 3a^2}$; 10) $T = \frac{1}{2} mg \cotg \alpha$ 11) $\alpha = \text{arc tg}(a/b)$; $\beta = \pi/2 - \alpha$. 12) $\theta = \text{arc sen}[mr/(m+M)R]$. 13) $T = 75,79 N$. 14) a) $P - F\sqrt{(2r-h)}$; b) $H = F$; c) $F\sqrt{(2r-h/h)}$; d) $P/\sqrt{h(2r-h)}$. 15) $d_{max} = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right)$, para $n \geq 2$. 17.) a) $x_{CM} = y_{CM} = 15. \text{ km}$; b) $x_{CG} = 14,96 \text{ km}$; $y_{CG} = 14,98 \text{ km}$; todos a uma mesma altitude.

BIBLIOGRAFIA

A bibliografia mais utilizada nesta obra está listada abaixo.

Hall, A. Rupert, *From Galileo to Newton*, Dover Publications, 1981.

Neste livro você pode testar seu inglês.

Einstein, Albert, *Como vejo o mundo*, Ed. Nova Fronteira, 1981.

Este é um livro onde o famoso cientista fala sobre o social, o político, o cultural, o econômico e certamente sobre a ciência de uma forma brilhante.

Alonso, M.S e Finn, E.S. *Física, vol I*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo (1972).

Bernal, J., *Science in History*, 4 vols., Penguin Books, Middlesex (1969).

Boyer, C. B., *História da Matemática*, Ed. Blücher (1996).

Contém material sobre a história da física teórica.

Bruhat, G., *Mecânica, Difusão Europeia do Livro*, São Paulo (1963).

Bukhovtsev, B. B., Krivtchenkov, V. D., Miakishhev, G. Ya. e Saraeva, I. M., *Problemas Seleccionados de Física Elementar*, Ed. Mir, Moscou (1985).

Coelho, H. T. e Ferreira, R., “*Annus Mirabilis de Einstein: Artigos que revolucionaram a física*”, *Gazeta de Matemática*, Lisboa, Janeiro 2006, pág. 29.

Sobel, Dava, *Longitude*, Ed. Ediouro, 1997.

Um livro muito interessante sobre a história de um gênio solitário, sem nenhuma educação superior que resolveu um difícil problema científico do século XVIII.

Dugas, R., *Histoire de la Mécanique, Le Griffon, Neuchâtel* (1950).

Einstein, A. e Infeld, I., *A Evolução da Física*, Cia Editora Nacional, S. Paulo (1971).

Einstein, A., *Ideas and Opinions*, Crown Publishers, Inc., New York (1954).

Eisberg, R. M. e Lerner. L. S., *Física, vols. 1 e 2*, Mc Graw – Hill, São Paulo (1982).

Feynman, R. P., Leighton, R. B. e Sands, M., *The Feynman Lectures on Physics, vol. I*, Addison – Wesley, Reading, Mass (1963).

Feynman, R. P., Gottlieb, M. e Leighton, R., *Dicas de Física, Suplemento para a resolução de problemas de Lectures on Physics*, Bookman ed. (2008).

Filme ou em DVD: De Roberto Rossellini, “*Descartes*”,

De duração de quase três horas. Com legenda em português, mostra um retrato fascinante da vida de Descartes e de sua busca incessante pelo conhecimento. É um filme obrigatório para todos os interessados em filosofia e ciência.

Filme ou em DVD: De Jean Jacques Annaud, “*O nome da rosa*”,

Baseado no famoso, porém denso, livro de Umberto Eco. No filme se mostra como a experiência e o raciocínio lógico é utilizado para demonstrar ideias, num mosteiro medieval, onde crimes estranhos ocorriam, em pleno período da inquisição. Faz lembrar algo que Galileu vivenciou? Assista ao filme!

Fogiel, M., ed., *The Physics Problems Solver*, Research and Education Assoc., New York (1985).

Galilei, Galileu, *Duas Novas Ciências*, Ed. Nova Stella, São Paulo (1984).

Gilbert, A., *Origens Históricas da Física Moderna*, Fundação Calouste Gulbenkian (1982).

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison – Wesley, Readingh Mass. (1951).

Hellman, Hal, *Grandes Debates da Ciência*, Editora UNESP (1999).

O livro descreve dez das maiores contendas científicas nos últimos 500 anos, tais como, o papa Urbano VIII contra Galileu, Newton contra Leibniz, entre outros.

Halliday, D., Resnick, R e Walker, J., *Fundamentos de Física., vol I, Livros Técnicos e Científicos*, Rio de Janeiro, 7ª ed. (1979).

Harvard Project Physics Reader, Units 1 to 3, Holt, Rinehart and Winston, New York (1968).

- Coelho, H. T. e Robillota M. R, *Forças Nucleares*, vol. 11, nº 63, *Ciência Hoje*, página 22-30 (1990).
- Írodov, I. E., *Problemas de Física General*, Ed. Mir Moscou, (1985).
- White, M., *Isaac Newton, o último feiticeiro*, Editora Record (2000).
Ótima biografia sobre Newton. É escrito numa forma agradável de ler. Contém vários fatos, sobre sua vida íntimas, não tão familiares ao público em geral.
- Watson, James D., *A Dupla Hélice*, Editora Gradiva Publicação, (2012).
A Odisseia dos bastidores da descoberta da molécula DNA, ilustrando de perto, um processo de criação científica.
- Jeans, J., *The Growth of Physical Science*, 2nd ed., Cambridge University Press (1951).
- Walker Jearl, *O Circo Voador da Física*, LTC (2008).
- Gaardes, Jostim, *O Mundo de Sofia: romance da história da filosofia*, Cia das Letras Ed., (1995).
- Kitell, C., Knight, W.D. e Ruderman, M. A., *Mecânica (Curso de Física de Berkeley, vol I)*, Ed. Edgard Blücher, São Paulo (1970).
- Kumar, A., *Problems in Physics*, vol. 1 e 2, Atlantic ed. (2003).
- Landau, L. e Lifshitz, E., *Mechanics*, Pergamon Press (1960).
- Landau, L., Ajeizer, A. e Lifshitz, E., *Curso de Física General, Mecânica y Física Molecular*, Ed. MIR Moscú (1973).
- Leighton, R. B. e Vogt, R. E., *Exercises in Introductory Physics*, Addison – Wesley, Reading, Mass (1969).
- Sobel, Dava, *A Filha de Galileu*, Ed. Companhia das Letras (2000).
Esta biografia de Galileu Galilei é inspirada nas cartas, pouco conhecidas, que sua filha mais velha escreveu-lhe ao longo de duas décadas.
- Lucie, P., *Física Básica*, vol. I, Ed. Campus, Rio de Janeiro (1977).
- Mac Donald, Simon G., *Problemas de Física Geral*, Ao Livro Técnico S. A., Rio de Janeiro (1971).
- Mach, E., *The Science of Mechanics*, Open Court Publishing Co., La Salle Illinois (1960).
- Newton, I., *Principia*, University of California Press, Berkeley, Calif. (1960).
- Newton, *Textos, antecedentes, comentários*, Ed. Contraponto, EDVERJ (2002).
- Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica, Mecânica (vol. I)* Ed Blucher (2002).
- Nussenzveig, M., Lobo Carneiro, L. e Pinguelli Rosa, L., *300 Anos dos "Principia de Newton," COPPE, Rio de Janeiro (1988).*
- Platão e Aristóteles, *os caminhos do conhecimento*, Marco Zingano, Odysseus Ed., 2002.
Obra acessível a estudantes sobre dois dos maiores filósofos que influenciaram tanto o desenvolvimento da Ciência.
- Roditi, I., *Dicionário Houaiss de Física*, Ed. Objetiva (2005).
- Sears, F. W. e Zemansky, M. W., *Física*, vol I, *Livros Técnicos e Científicos*, Rio de Janeiro, 3ª ed. (1973).
- Sears, F. W., *Física I, Livro Técnico Ltda (1958).*
- Spiegel, M., *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, Schaum publishing Co. (1967).
- Symon, Keith R., *Mechanics*, Addison Wesley, 2ª ed.
- Tipler, P. A., *Física*, vol. I, Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1978).

Sobre o autor

Hélio Teixeira Coelho, nasceu em Bonito, Pernambuco. Estudou no Colégio Marista de Recife, onde concluiu o ensino médio sendo laureado com a medalha do colégio. Graduou-se em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Pernambuco. No ano seguinte, fez o curso de pós-graduação em Ciência e Tecnologia Nuclear no Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN)/Universidade de São Paulo. Em seguida foi aceito pela Universidade da Pennsylvania. Nesta universidade obteve o MSc e o PhD em física teórica, nas áreas de física nuclear e de partículas. Fez seu pós-doutorado na Universidade de Frankfurt, Alemanha. Em sua volta ao Brasil veio a se tornar professor titular de física na Universidade Federal de Pernambuco. Foi professor pesquisador visitante em várias instituições internacionais, destacando-se Mc Master University, Canadá; Bochum Universität, Alemanha; Fukui University, Japão; Universidade de São Paulo, em São Paulo e São Carlos; Universidade Federal do Rio Grande do Sul; Université de Paris, em Orsay, entre outras. Tem mais de uma centena de artigos científicos publicados em revistas internacionais, além de livros. Tem também trabalhos científicos com destaques internacionais na área de forças nucleares.

ISBN 978-85-415-0584-0



9

788541

505840