ORGANIZADORAS | ALINA GALVÃO SPINILLO e SÍNTRIA LABRES LAUTERT

A Pesquisa em Psicologia e suas implicações para a Educação Matemática

Editora Universitária UFPE

A PESQUISA EM PSICOLOGIA E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALINA GALVÃO SPINILLO
SÍNTRIA LABRES LAUTERT
(Organizadoras)

Prefácio – Jorge Falcão

A PESQUISA EM PSICOLOGIA E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Editora Universitária UFPE

RECIFE - 2012

Capa: *Clara Negreiros (design gráfico) e Gabriel Dudeque (ilustração)*

Projeto gráfico: *Gilberto Santos*

Revisão: *Os autores*

Impressão e acabamento: *Editora Universitária/UFPE*

Editora associada à

ABEU

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Catalogação na fonte:
Bibliotecária Joselly de Barros Gonçalves, CRB4-1748

P475 A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática / organizadoras: Alina Galvão Spinillo, Síntria Labres Lautert. ; prefácio: Jorge Falcão. – Recife : Ed. Universitária da UFPE, 2012.
226 p. : il., figs., gráfs.

Vários autores do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM) da UFPE.
Inclui referências.
ISBN 978-85-415-0090-6 (broch.)

1. Psicologia cognitiva – Pesquisa. 2. Ensino – Aspectos psicológicos. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Spinillo, Alina Galvão (Org.). II. Lautert, Síntria Labres (Org.). III. Falcão, Jorge (Pref.)

370.15 CDD (23.ed.) UFPE (BC2012-085)

PREFÁCIO

O conjunto de contribuições disponibilizadas neste livro marca a continuidade exitosa das atividades do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE. Tais atividades têm buscado o estabelecimento de trabalho em rede cooperativa interdisciplinar, envolvendo pesquisadores e grupos não só da UFPE, mas de outras instituições de ensino superior no Brasil e fora dele, no contexto da pesquisa, formação e intervenção em psicologia da educação matemática.

A psicologia da educação matemática surge historicamente como área de problematização e pesquisa interdisciplinar, voltada especificamente para a conjugação de esforços nos domínios dos processos psicológicos de aprendizagem e desenvolvimento e dos processos de aprimoramento de iniciativas didáticas, sem perder de vista a especificidade epistemológica do domínio matemático em que se insere; e nem a questão maior da educação matemática, para além da simples instrução em matemática. O NUPPEM surge como grupo de pesquisa autenticamente vinculado à psicologia da educação matemática posta nestes termos, e os trabalhos aqui apresentados são evidência disso. Há contribuições voltadas para o campo conceitual das estruturas multiplicativas, em que aspectos relacionados ao desenvolvimento conceitual da noção de divisão, probabilidades e combinatória são recuperados de trabalhos de impacto na área, buscando-se nesse esforço evidenciar pontos de apoio para a intervenção didático-pedagógica. Ainda no domínio das estruturas multiplicativas, mais especificamente no âmbito das funções, discute-se o interesse da modelização matemática como contexto em que aspectos concretos, relacionados a fenômenos do cotidiano, são ressignificados em linguagem matemática, com o suporte de ferramentas conceituais que estabelecem princípios gerais de interesse tanto para a matemática como para ciências empíricas como a física. Tais trabalhos são complementados por reflexões que têm como foco a atividade do professor de matemática, tanto em termos de seu percurso de formação como em termos de seu papel efetivo como mediador na atividade de ensino-aprendizagem na sala de aula de matemática. Finalmente, e ainda no domínio da mediação semiótica na atividade de ensino e aprendizagem da matemática, contribuições importantes são trazidas por trabalho voltado para artefatos manipulativos em plataformas digitais, que permitem a potencialização de "experiências mentais" (*mind experiences*) em domínios como a álgebra, abrindo novas possibilidades em termos da já aludida modelização matemática.

Vivemos hoje uma conhecida tensão em ambientes acadêmicos que se traduz em termos de injunção perene para a publicação, na linha do "publicar ou perecer" (*publish or perish*). Publicar não somente em termos quantitativos razoáveis, mas em termos de impacto, o que pressupõe a leitura do que se publica pela comunidade de pares. O presente livro representa, registre-se aqui, uma iniciativa bem-sucedida em termos da gestão adequada de livros ou artigos científicos como vetores de publicação: os trabalhos aqui reunidos configuram um esforço elogiável de problematização, varredura do estado da arte e culminação de etapa de pesquisa dos autores, esta anteriormente publicada sob forma de artigos, de modo que o formato-livro representa sedimentação relevante de informações e questões em determinado domínio da teorização e pesquisa. É indiscutivelmente o caso aqui, e também por isso os autores-organizadores e participantes merecem o devido reconhecimento.

Cabe por fim, aludir ao momento em que surge o presente livro, no âmbito do **IV Seminário do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática** (dezembro/2011), que coincide com o 35º aniversário da fundação do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE. O NUPPEM guarda relação de filiação clara com a tradição de pesquisa iniciada por docentes-pesquisadores pioneiros como Waldecyr C. de Araújo Pereira, Terezinha Nunes, David Carraher e Analúcia Schliemann. Em reconhecimento e respeito a esta filiação, muitos dos trabalhos aqui reunidos registram tais contribuições fundadoras, ao mesmo tempo em que estendem o domínio de problematização e escopo teórico das mesmas (pois como muito bem observou Georges Canguilhem, a ciência não é uma igreja de preceitos sagrados, e sim um canteiro de obras!). A psicologia da educação matemática teve contribuição crucial do "grupo de Recife", cujo livro-programa "*Na vida dez, na escola zero*" atravessou as fronteiras do Brasil para se firmar como texto de referência para questões cruciais em educação matemática (notadamente em países emergentes, mas não somente); o NUPPEM, hoje, retoma, consolida e estende tais contribuições, e também por isso merece aqui homenagem e congratulações. Todos os programas acadêmico-científicos, pelo mundo afora, têm seus problemas e pendências, mas também recursos: que o NUPPEM continue em sua trilha de realizações, em prol do desenvolvimento da psicologia da educação matemática, e para o bem do programa acadêmico e da instituição aos quais se filia.

Natal, Janeiro de 2012.

Jorge Falcão
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Departamento de Psicologia
Professor Titular da disciplina Psicologia Cognitiva

APRESENTAÇÃO

Em 2006, a Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da UFPE comemorou seus trinta anos de existência. Para celebrar este evento, professores do programa produziram capítulos que foram agrupados em um livro, também publicado pela Editora Universitária da UFPE, intitulado *Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem*. Em 2011 comemoramos os 35 anos do programa. Associada a esta data, tivemos a consolidação do Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM) que promoveu o IV Seminário do NUPPEM, cujo tema central foi *A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática*; tema que confere título a este livro e com o qual parabenizamos esta pós-graduação pelos seus 35 anos.

Este é o primeiro livro do NUPPEM; núcleo que se insere em uma das linhas de pesquisa do programa – Educação Matemática e Científica, aquela que, nos anos 80 com a publicação do livro *Na vida dez,na escola zero*, deu visibilidade a esta pós-graduação tanto no cenário nacional como internacional. Esta presente obra congrega capítulos elaborados por ex-alunos do programa, cujas trajetórias acadêmicas são marcadas por uma sólida formação científica que se traduz em pesquisas, como aquelas aqui apresentadas, que trazem implicações para a educação matemática.

Os dois primeiros capítulos tratam de estudos de intervenção conduzidos com estudantes a respeito de conceitos de grande relevância para o conhecimento matemático escolar e extra-escolar. Adotando um paradigma experimental típico de estudos de intervenção, no Capítulo 1, **Spinillo e Lautert** apresentam uma pesquisa cujo objetivo era, a partir de um conjunto de situações específicas, auxiliar crianças alunas dos anos iniciais do ensino fundamental a superar as dificuldades que experimentavam em relação ao conceito de divisão. A partir dos resultados obtidos, as autoras propõem uma abordagem conceitual da divisão a qual requer considerar a natureza deste conceito (seus princípios invariantes) e as formas de raciocinar do aprendiz (o que sabe e as dificuldades que enfrenta).

O Capítulo 2 também apresenta um estudo de intervenção de natureza experimental, porém, conduzido em sala de aula, com estudantes que frequentavam os anos finais do ensino fundamental. **Pires e Magina** discutem a modelagem e a modelação em termos teóricos, e defendem a ideia de que a modelação pode ser um recurso didático poderoso para o ensino de conceitos complexos como, por exemplo, a função afim. A partir de situações de resolução de problemas baseadas na modelagem, os autores tanto apontam o avanço dos estudantes frente ao conceito de função afim, como fazem um levantamento dos tipos de erros que apresentam, gerando alternativas acerca de como fazer para superá-los.

O Capitulo 3 e o Capitulo 4 versam sobre intervenções mediadas por recursos computacionais que são discutidas a partir de estudos de caso. No Capitulo 3, **Borba e Azevedo** discutem diversos estudos que buscam desenvolver o raciocínio combinatório, passando a descrever como uma dupla de crianças utiliza o *software Diagramas de Árbol* para resolverem problemas combinatórios. São descritos seus conhecimentos iniciais e como ocorreu o processo de intervenção do qual participaram, bem como são analisados os avanços conceituais após a construção de árvores de possibilidades por meio do referido *software*.

Freire e Castro Filho, no Capítulo 4, relatam dois estudos de caso. No primeiro, assumem o desafio de ensinar álgebra a crianças, investigando como elas desenvolvem conceitos algébricos a partir de uma sequência de atividades com objetos digitais de aprendizagem e manipulativos, gerando situações de ensino bastante desafiadoras que são descritas e comentadas ao longo do capítulo. No segundo estudo, a atenção dos autores se volta para uma análise de como professores dos anos iniciais do ensino fundamental planejam e utilizam recursos digitais e manipulativos em situações didáticas relativas ao ensino de álgebra.

De modo geral, os estudos discutidos nesses capítulos trazem resultados bastante promissores em relação à possibilidade de se desenvolver o raciocínio matemático de crianças e adolescentes.

O último capítulo, de autoria de **Araújo Gomes**, **Silva e Cordeiro,** apresenta uma extensa revisão bibliográfica a respeito de aspectos relativos à educação matemática que são fundamentais para a formação docente. A partir de recortes de duas pesquisas por elas realizadas, as autoras abordam os aspectos psicológicos e didáticos envolvidos na gestão da sala de aula de matemática e elaboram uma análise crítica acerca da formação de professores que ensinam matemática. Com base em recursos metodológicos diversificados (observações, depoimentos, pesquisa documental), o capítulo contribui com uma análise que traz repercussões importantes para as relações entre a didática e a psicologia.

Como pode ser notado, esta obra é de interesse de educadores matemáticos, sejam eles oriundos da psicologia, da pedagogia ou da matemática. Conceitualmente estruturado e apoiado em dados empíricos cuidadosamente tratados e interpretados, o livro propõe formas de desenvolver o raciocínio matemático dos estudantes, propõe mudanças na prática docente e procura contribuir para a formação de professores de matemática.

Para finalizar, agradecemos a Lindaevans Richelle de Souza Oliveira e Hanna Kardenya da Silva pelo apoio na revisão dos capítulos; e às instituições CAPES, CNPq e FACEPE que de diferentes maneiras e em diferentes momentos apoiaram a realização das pesquisas que deram origem à elaboração dos capítulos que constituem este livro. Em especial, agradecemos à Professora Dra. Maria José de Matos Luna, Diretora da Editora Universitária da UFPE, pelo incentivo e apoio oferecidos para a preparação desta obra quando ela era, ainda, uma ideia e um desafio para suas organizadoras.

Recife, Dezembro de 2011

Alina Spinillo e Síntria Lautert

POR UMA COMPREENSÃO CONCEITUAL DA DIVISÃO: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Alina Galvão Spinillo e Síntria Labres Lautert
Universidade Federal de Pernambuco

Introdução

Dada sua relevância e complexidade, ensinar divisão tem sido um desafio para professores do ensino fundamental que procuram desenvolver em seus alunos uma compreensão conceitual deste tema mais do que uma compreensão algorítmica que garanta apenas a aplicação de procedimentos de cálculo relativos à operação de divisão. Para tanto, os professores propõem atividades contextualmente significativas em sala de aula (baseadas em situações do cotidiano) em que é frequente a manipulação de material concreto e o uso de representações pictográficas diversas; bem como promovem a solução de problemas de divisão exata, com números pequenos e que, na grande maioria das vezes, são problemas de divisão por partição. Nota-se que tais esforços didáticos se apoiam na ideia de que a instrução deve se iniciar por situações motivadoras e mais simples que vão gradativamente servindo de base para a realização de atividades mais complexas na medida em que o ensino avança.

Entretanto, uma abordagem conceitual da divisão requer considerar outros aspectos além daqueles acima mencionados, a saber: a natureza deste conceito (por exemplo, compreender as relações entre os termos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto) e as formas de raciocinar do aprendiz (seja em termos do que ele já sabe sobre a divisão seja em termos das dificuldades que enfrenta ao ser formalmente instruído em sala de aula).

O presente capítulo, inserido em um campo interdisciplinar denominado Psicologia da Educação Matemática (Da Rocha Falcão, 1999; 2003; Spinillo & Lautert, 2006), versa sobre uma investigação em que tais aspectos servem de base para uma intervenção proporcionada a crianças que apresentavam grande dificuldade com o conceito de divisão. Antes de apresentar o estudo, dois pontos precisam ser discutidos. Um de natureza teórica, relacionado aos princípios invariantes que constituem o conceito de divisão e aos esquemas de ação necessários para a compreensão deste conceito; e outro ponto, de natureza empírica, relacionado aos estudos de intervenção que buscam desenvolver nas crianças noções importantes acerca da divisão.

Os Invariantes Lógicos, os Esquemas de Ação e as Dificuldades com a Divisão

Tomando por base a perspectiva de Vergnaud (1990, 1991, 1997, 2003), uma compreensão psicológica dos conceitos matemáticos requer considerar os invariantes lógicos, os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação.

Segundo Nunes e Bryant (1997) os invariantes lógicos presentes na organização das ações dos indivíduos ao lidar com o conceito de divisão são: (i) o todo deve ser distribuído em quantidades iguais (divisão equitativa das partes); (ii) o todo deve ser distribuído até que não exista a possibilidade de uma nova rodada de distribuição de seus elementos; (iii) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto (que pode ser zero ou diferente de zero); (iv) relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e (v) o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido.

Os esquemas de ação que orientam o modo como os indivíduos lidam com as situações de divisão são a distribuição e a correspondência um-para-muitos (Correa, 2004; 2006; Correa & Spinillo, 2004; Nunes & Bryant, 1997; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2001). Ainda que a concepção inicial esteja ancorada na noção de partição, esta noção inicial não garante que a criança compreenda a relação entre os termos da divisão (Correa, Nunes & Bryant, 1998; Squire & Bryant, 2002), uma vez que as exigências impostas pelas situações de repartir (distribuir) e de dividir não podem ser consideradas idênticas em termos cognitivos. O ato social de partilhar, presente desde muito cedo, decorre de um raciocínio aditivo, enquanto a divisão requer um raciocínio multiplicativo. A criança pode repartir "x" elementos adotando o esquema de correspondência um-para-um, e assim, sucessivamente, até esgotar a quantidade a ser dividida. Já a divisão como operação multiplicativa, fundamentada na correspondência um-para-muitos, requer que se opere com dois ou mais fatores simultaneamente (Correa & Spinillo, 2004).

Duas situações podem ser identificadas em problemas de divisão: divisão por partição e divisão por quotas. Nos problemas por partição é dada uma quantidade inicial e o número de vezes em que essa quantidade foi dividida, sendo necessário encontrar o tamanho de cada parte, como se observa no seguinte problema: *Márcio foi a uma papelaria e comprou 15 cadernos para dar aos seus 3 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de cadernos. Quantos cadernos cada amigo vai receber?* Nos problemas de divisão por quotas é dada uma quantidade inicial e o tamanho de cada parte (quota), sendo necessário encontrar o número de partes em que o todo foi dividido, com no seguinte problema: *Márcio comprou 15 bolinhas de gude. Ele quer dar 3 bolinhas de gude para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar bolinhas de gude?* Embora ambos os problemas possam ser resolvidos pela mesma operação de divisão (15:3), eles requerem formas de raciocinar diferentes determinadas pela natureza das situações que apresentam relações distintas entre o dividendo e o divisor.

A literatura documenta que muitas das dificuldades das crianças residem na não compreensão das relações inversas entre os termos da divisão e de formas inapropriadas de lidar com o resto (e.g., Borba, Selva, Spinillo & Sousa, 2004; Correa, 1996, 2004, 2006; Correa, Meireles & Curvelo, 2000; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Selva, 1998; Silver, 1988; Silver; Shapiro & Deutsch, 1993; Squire & Bryant, 2002).

As pesquisas realizadas por Correa, por exemplo, mostraram que por volta dos 6 anos as crianças, ao estimar, apresentam uma compreensão intuitiva acerca das relações inversas entre o divisor e o dividendo em problemas não-computacionais envolvendo quantidades discretas de elementos; como por exemplo, dividir um certo número de bombons entre um certo número de coelhinhos. Contudo, essa compreensão fica comprometida quando é necessário indicar o número de bombons que cada coelhinho deve receber. De maneira geral, dois tipos de erros foram identificados: a criança focalizava a atenção no tamanho do dividendo, esquecendo o divisor; e a criança focalizava a atenção no divisor, esquecendo o tamanho do dividendo.

Selva (1998) comparou as estratégias adotadas por crianças de 6 a 8 anos na resolução de problemas de divisão por meio de diferentes suportes de representação (lápis e papel, material concreto, cálculo oral). A autora observou que o resto tendia a ser omitido dos procedimentos adotados. Quando presente no procedimento de resolução, o resto era geralmente redistribuído entre as partes, ainda que tal ação não respeitasse o princípio da igualdade entre as partes. Observou-se, ainda, que o resto tendia a ser ignorado com mais frequência quando os problemas eram resolvidos por meio de material concreto do que por meio de lápis e papel.

De acordo com nossa análise, dificuldades em compreender as relações inversas entre os termos da divisão e dificuldades em lidar com o resto decorrem de uma incompreensão acerca dos princípios invariantes relativos ao conceito de divisão. Diante disso, o presente estudo se propôs a responder a seguinte questão: Será que as crianças poderiam superar essas dificuldades se tivessem a oportunidade de refletir acerca dos princípios invariantes da divisão a partir da resolução de situações-problema? Esta possibilidade foi examinada em um estudo de intervenção realizado com crianças alunas do ensino fundamental que tinham dificuldades com a divisão. Antes, porém, de apresentar a pesquisa, faz-se necessário apresentar e discutir os estudos de intervenção conduzidos pelos pesquisadores a respeito deste conceito.

Estudos de Intervenção sobre o Conceito de Divisão

Poucos estudos procuram desenvolver a compreensão de crianças acerca do conceito de divisão. Um desses estudos foi realizado por Carraher (1992) com pré-adolescentes ingleses de 10 e 11 anos em que se explorou o papel de um *software* educativo denominado *Dividir para conquistar* como facilitador da compreensão acerca dos princípios da divisão. O programa permitia que o usuário manipulasse os valores referentes ao dividendo, divisor, quociente e resto, favorecendo a compreensão das relações entre esses termos a partir dessas manipulações. Nesse *software*, letras representavam números de 0 a 9, e a tarefa dos participantes consistia em descobrir os valores associados a essas letras que, por sua vez, correspondiam aos termos da divisão. Por exemplo, se o aluno escolhesse como dividendo o número 15 e como divisor o número 7, o programa executava a divisão, mostrando a letra ***T*** (quociente) e a letra ***M*** (resto). O participante, então, teria que descobrir os valores dessas letras, realizando diversas manipulações. Ao manipular esses valores, o usuário descobria diversas propriedades da divisão, como por exemplo, o fato de que o resto tem que ser sempre menor que o divisor ou o fato de que o valor do resto tem que ser adicionado ao valor obtido pela multiplicação do divisor pelo quociente, para que se possa achar o valor do dividendo. Tais manipulações geravam reflexões que permitiam levantar e testar hipóteses acerca das propriedades matemáticas envolvidas na divisão. Na realidade, o *software* atuava como um contexto simbólico que levava o usuário a raciocinar sobre diversas ideias abstratas da matemática, no caso, sobre os invariantes lógicos da divisão.

Embora esta pesquisa não se caracterize como um estudo de intervenção prototípico (ver Spinillo, 1994; Spinillo & Lautert, 2008), o estudo fornece informações relevantes acerca de como propiciar situações que favoreçam a compreensão acerca dos princípios da divisão, especialmente a compreensão das relações entre os seus termos.

Outro estudo documentado na literatura foi conduzido por Calsa (2002). A autora realizou uma intervenção denominada psicopedagógica construtivista com crianças de 10 anos, alunas do 5º ano do ensino fundamental de escolas públicas as quais apresentavam rendimento insatisfatório em matemática. Os participantes, divididos em um grupo controle e dois grupos experimentais (GE1 e GE2), realizaram um pré-teste e dois pós-testes que consistiam em problemas multiplicativos e em provas piagetianas.

A intervenção, oferecida em pequenos grupos, envolvia um contexto lúdico a partir de uma história em quadrinhos intitulada *Contagem Decisiva.* Nesta história os personagens enfrentavam desafios matemáticos que precisavam ser resolvidos para salvar o planeta de uma invasão alienígena. Para a resolução dos problemas, as crianças tinham à disposição pinos de plástico, giz colorido, lápis e papel. Na intervenção oferecida ao GE1, os problemas continham incógnita cuja ordem de apresentação no enunciado dos problemas era fixa. No GE2 esta ordem era aleatória, de modo que a incógnita poderia ser o todo, o número de partes ou o tamanho das partes, como ilustrado a seguir (Calsa, 2002, p.263):

(P1) “Há! O Cameleano deve ter sabotado as armas! Ah! Ah!”
(P2) “Eles estão a zero agora”
(P3) “E quanto à nós?”
(P2) “Nós temos 30 raios e 5 armas! Quantos raios poderemos usar em cada arma?”
(P1) “Faz a conta direitinho.”

Durante as sessões de intervenção apresentava-se a história em quadrinhos, pedindo que os participantes lessem e comentassem com o grupo a interpretação dada ao problema. Em seguida, a partir de discussões, as crianças elaboravam sua própria solução com auxílio dos materiais de contagem. A examinadora redirecionava o processo de resolução dos problemas, quando necessário, incentivando o uso de diferentes estratégias e discussões acerca de possíveis contradições apresentadas nas soluções das crianças. Ao final, os participantes relatavam o que haviam feito, o resultado a que chegaram e realizavam, individualmente, um registro por meio de desenho ou da escrita.

Comparando-se as ocasiões de testagem, observou-se que as crianças dos grupos experimentais tiveram um melhor desempenho após a intervenção, passando a usar formas de notação mais eficazes e a usar estratégias de resolução mais apropriadas que antes da intervenção. Além disso, os participantes dos grupos experimentais que iniciaram o estudo com notas baixas passaram a ter notas mais altas, melhorando o rendimento escolar. De acordo com a autora, uma das grandes conquistas dos participantes dos grupos experimentais foi refletir sobre os próprios erros, criando novas alternativas para a resolução dos problemas.

Na pesquisa de Carraher (1992), parece que as manipulações dos valores referentes aos termos da divisão foi o que mobilizou o surgimento de formas mais apropriadas de resolução, colocando em evidência as relações entre eles, permitindo que os usuários do *software* refletissem acerca dos invariantes lógicos da divisão. No estudo de Calsa (2002) parece que os benefícios gerados pela intervenção decorreram do fato dos alunos haverem sido desafiados a refletir sobre os próprios erros, reflexão esta de natureza metacognitiva.

Na investigação descrita a seguir, a intervenção se caracterizou por propiciar a reflexão acerca dos princípios invariantes da divisão, tornando-os explícitos para a criança; e por levá-la a refletir sobre sua maneira de resolver problemas de divisão a partir de situações em que suas ações e formas de raciocinar eram colocadas em evidência, tornando-se objeto de análise pela própria criança. As atividades propostas versavam sobre as dificuldades em compreender as relações inversas entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido, e a dificuldade em lidar com o resto em problemas de divisão inexata.

O Estudo

Participaram do estudo 100 crianças de baixa renda, de 8 a 12 anos, alunas do 4º ano do ensino fundamental de escolas públicas da cidade do Recife que apresentavam dificuldades com o conceito de divisão, conforme avaliação realizada em um pré-teste. Os participantes foram igualmente divididos em dois grupos, um Experimental (GE) e um Controle (GC), emparelhados em função da idade e do desempenho obtido no pré-teste. Além das atividades usuais em sala de aula, as crianças do GE participaram de uma intervenção, enquanto as crianças do GC participavam apenas das atividades escolares corriqueiras.

O pré-teste consistia na resolução individual de 12 problemas de divisão apresentados por escrito, sendo dez problemas denominados computacionais, por requerer uma computação numérica para sua resolução; e dois problemas denominados não computacionais, por requerer o uso de estimativa para sua resolução. Os problemas computacionais eram de divisão exata e inexata, podendo ser por partição e por quotas. Os problemas não computacionais eram de divisão exata, podendo ser por partição e por quotas (ver Quadro 1).

Quadro 1: Exemplos de problemas no pré-teste.

	Computacionais	**Não computacionais**
Divisão por Partição	Pedro comprou 28 carrinhos e quer colocá-los em 7 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos. Quantos carrinhos ele vai colocar em cada caixa?	Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João?

Divisão por Quotas	Uma loja de brinquedos recebeu 55 pulseiras que serão vendidas em pacotes com 9 pulseiras em cada um. Quantos pacotes serão montados?	Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo?

O pós-teste foi semelhante ao pré-teste, diferindo apenas quanto aos pares numéricos e referentes apresentados no enunciado dos problemas. Houve um período de nove a dez semanas entre as duas ocasiões de testagem.

A Intervenção

A intervenção, propiciada individualmente às crianças do GE, consistia na resolução de problemas que eram lidos pela examinadora e pela criança, sendo disponibilizado material manipulativo, lápis e papel. A partir de uma entrevista clínica, solicitavam-se explicações a respeito da maneira como cada criança resolvia os problemas. Dentro de um contexto de discussão, a examinadora fornecia *feedback* e comentava a respeito das formas de resolução adotadas, fossem elas corretas ou incorretas, enfatizando os princípios invariantes da divisão. Ao todo foram apresentadas seis atividades, duas em cada sessão, seguindo uma ordem fixa de apresentação.

A primeira sessão voltava-se para um dos princípios invariantes relativo às dificuldades com a divisão documentadas na literatura: as relações de co-variação inversa entre os termos da divisão.

Na atividade 1 apresentava-se um problema de base, do qual se derivavam outros problemas a partir da ação da examinadora de aumentar ou de diminuir o tamanho das partes ou o número de partes, mantendo o dividendo constante. Exemplo:

> *Problema de base (divisão por partição):* Paulo comprou 24 piões e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa?
>
> > *Variação 1: aumento do divisor e diminuição do tamanho das partes*
> >
> > Paulo resolveu aumentar o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 4 caixas. Ele quer colocá-los agora em 6 caixas. Veja que aumentou o número de caixas. Antes eram 4 caixas e agora são 6 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por que?
> >
> > *Variação 2: diminuição do divisor e aumento do tamanho das partes*
> >
> > Paulo resolveu diminuir o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 6 caixas. Ele quer colocá-los agora em 2 caixas. Veja que diminuiu o número de caixas. Antes eram

> 6 caixas e agora são 2 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por que?

Na atividade 2, os problemas envolviam duas pessoas dividindo a mesma quantidade de objetos em um número determinado de partes ou dividindo a mesma quantidade de objetos em quotas pré-estabelecidas. Exemplos:

> *Problema de divisão por quotas:* Juliana e Clara foram à floricultura e cada uma comprou 36 rosas. Juliana quer colocar 9 rosas em cada vaso e Clara quer colocar 4 rosas em cada vaso. Quem vai precisar de mais vasos Clara ou Juliana? Por que?

> *Problema de divisão por partição:* Eduardo e Ana foram a uma loja e cada um comprou 48 foguetes. Eduardo quer guardar seus foguetes em 6 caixas e Ana quer guardá-los em 8 caixas. Quem vai ter caixas com mais foguetes, Ana ou Eduardo? Por que?

Após a resposta, a criança era solicitada a explicar sua forma de raciocinar durante o processo de resolução dos problemas. A examinadora, por sua vez, tornava explícita a relação inversa entre os termos da divisão, comentando que "*se eu tenho a mesma quantidade de foguetes para dividir e se aumentar a quantidade de caixas, então, vai diminuir a quantidade de foguetes dentro das caixas. E se eu tenho a mesma quantidade de foguetes para dividir e se diminuir a quantidade de caixas, então, vai aumentar a quantidade de foguetes dentro das caixas.*"

A segunda sessão versava sobre outro princípio invariante relativo às dificuldades com a divisão: o papel do resto em problemas de divisão inexata. A atividade 3 centrava-se na ideia de que ao alterar o valor do resto alteram-se os valores dos demais termos. Semelhante ao procedimento adotado na atividade 1 apresentava-se um problema de base e suas variações. Exemplo:

> *Problema de base (divisão por partição):* Ana comprou 22 botões e quer colocá-los em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa?
>
> > *Variação 1: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a um*
> >
> > E se a gente der mais 3 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?
> >
> > *Variação 2: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto maior que um*
> >
> > E se a gente der mais 5 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?
> >
> > *Variação 3: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a zero*
> >
> > E se a gente der dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?

Durante o diálogo com a criança, a examinadora explicitava que ao alterar o valor do resto altera-se também o valor do dividendo e do quociente, como ilustrado no diálogo a seguir[1]:

E- O que muda na resolução?
C- Vai colocar mais um em cada um.
E- Será que é só isso que vai mudar?
C- Vai sobrar.
E- Vai sobrar quantos?
C- (silêncio)
E- Mudou o resto?
C- (faz que sim com a cabeça)
E- Mudou a quantidade de botões dentro das caixas?
C- Mudou.
E- E a quantidade total de botões, também mudou?
C- Mudou.
E- Então, mudaram três coisas. [complementa a resposta da criança e explicita os princípios da divisão] A quantidade total de botões, a quantidade de botões nas caixas e o resto. O resto, que é a quantidade de botões que sobrou, não pode ser nem maior nem igual ao número de partes ou tamanho das partes, quando isso ocorre os elementos que estão no resto precisam ser redistribuídos igualmente entre todas as partes e um novo resto vai ser produzido ou poderá ocorrer da operação não ter resto.
C- (resolve com os objetos)

[1] E: examinadora; C: criança

Na atividade 4 eram apresentados procedimentos incorretos de resolução, sendo dito que eram formas de resolução adotadas por crianças de outras escolas. O participante tinha que descobrir qual seria o erro que a criança da outra escola havia feito ao resolver o problema. Exemplo:

> *Problema lido*: Elena comprou 19 garrafas de refrigerante para a festa de aniversário de João. Ela quer servir 6 garrafas de refrigerante em cada bandeja. Quantas bandejas ela vai precisar?
>
> *Instrução*: Agora vou mostrar como foi que a criança da outra escola fez para resolver este problema [a examinadora resolve incorretamente o problema, colocando seis garrafas em duas bandejas, colocando ao lado sete garrafas relativas ao resto, deixando o resto com um número de elementos maior que o número de partes e maior que o tamanho das partes].

Os procedimentos incorretos envolviam formas inadequadas de lidar com o resto, a saber: o resto era ignorado durante o processo de resolução; o resto era inserido em uma das partes; o resto era distribuído em algumas das partes, mas não em outras; o resto era maior do que o número de partes e do que o tamanho das partes.

Na terceira sessão, procedimentos incorretos de resolução eram apresentados em cartelas sob forma de desenhos. A criança era solicitada a identificar os procedimentos incorretos e propor formas adequadas de como resolvê-los.

Na atividade 5 era apresentado um problema e dois procedimentos de resolução, sendo um correto e outro incorreto. A criança era solicitada a identificar qual a resolução apropriada, justificando sua escolha.

> *Problema lido*: Jane tem 47 bolas de gude e quer colocá-las em 5 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade. Quantas bolas ela irá colocar em cada caixa?
>
> *Instrução*: Eu dei este problema para Ana e Bruno, que são alunos de outra escola, resolverem. Esses cartões é como se fossem fotografias do jeito que eles resolveram o problema. Eu vou mostrar o jeito que eles resolveram e você irá dizer quem resolveu melhor e explicar como descobriu isso.

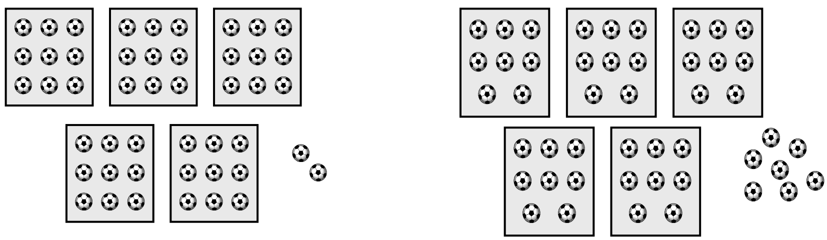


Figura 1. Procedimento correto adotado por Ana (lado esquerdo) e procedimento incorreto adotado por Bruno (lado direito).

Na atividade 6 mostrava-se um procedimento de resolução incorreto, tendo a criança que identificar o tipo de erro e indicar formas apropriadas de como resolvê-lo. Os problemas eram análogos aos da atividade 5 e os procedimentos incorretos incluíam os mesmos tipos de erros.

Problema lido: Mônica comprou 27 estrelinhas na loja de enfeites. Ela quer dar 8 estrelinhas para cada uma de suas amigas. Quantas amigas vão receber estrelinhas?

Instrução: Eu pedi para uma criança de outra escola resolver esse problema e ela resolveu desse jeito [mostrava a cartela com o procedimento incorreto]. Ela errou o problema. Eu quero que você descubra qual foi o erro que ela fez.

Figura 2. Procedimento incorreto por desconsiderar o número relativo ao dividendo, conforme o enunciado do problema.

Tanto na atividade 5 como na atividade 6, a examinadora explicava a razão de um procedimento ser mais adequado que o outro, explicitando o tipo de erro apresentado e que princípios invariantes estavam sendo violados.

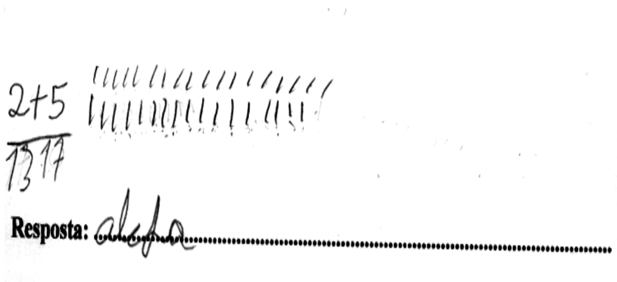
Análise dos Dados

Os problemas computacionais e não computacionais foram analisados com base na pontuação proposta por Brito, Lima, Alves e Rezi (1998). Dada a diferença entre eles, optou-se por realizar análises separadas.

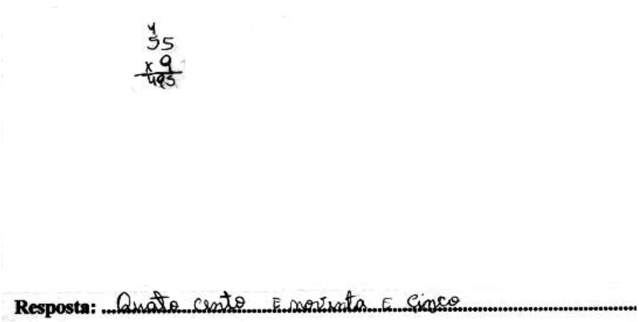
Problemas computacionais

Pontuação zero: a criança não resolve o problema ou interpreta seu enunciado de forma incorreta, empregando outras operações que não a divisão, Exemplos:

> Vovó foi à livraria e comprou 25 cadernos para dar aos seus 7 netos. Ela quer que cada neto receba a mesma quantidade de cadernos. Quantos cadernos cada neto vai receber?

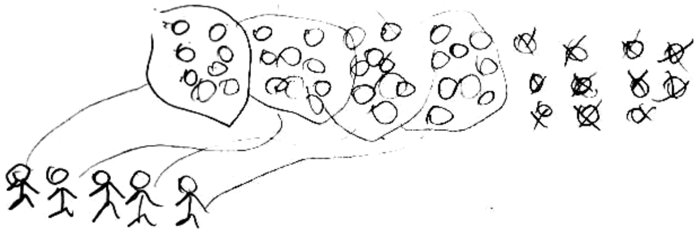


> Uma loja de brinquedos recebeu 55 pulseiras que serão vendidas em pacotes com 9 pulseiras em cada um. Quantos pacotes serão montados?



Pontuação um: a criança aplica a operação de divisão, porém erra por: (i) confundir os valores do divisor e do quociente; (ii) produzir um resultado absurdo gerado da divisão dos valores presentes no enunciado; ou (iii) armar a operação de divisão, mas sem finalizar a resolução. Exemplos:

Marcelo comprou 35 livrinhos infantis. Ele quer dar 5 livrinhos para cada um dos seus amigos. Quantos amigos vão ganhar os livrinhos?



Resposta: cada um vai ganha 8

Lúcia foi a uma loja e comprou 30 camisetas para dar aos seus 5 sobrinhos. Ela quer que cada sobrinho receba a mesma quantidade de camisetas. Quantas camisetas cada sobrinho vai receber?

308 | 2
154
21
20
(0)

Resposta: 154 caramujeta cada sobrinho

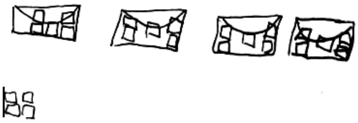
Pontuação dois: a criança adota uma estratégia de resolução apropriada e explicita adequadamente a resposta que pode ser acompanhada ou não do valor do resto quando a divisão é inexata. Exemplos:

> Ricardo comprou 57 bolinhas de gude para dar aos seus 8 amigos. Ele quer que cada amigo receba a mesma quantidade de bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude cada amigo vai receber?

57 | 8
56 7
(1)

Resposta: cada amigo ira ficar com 7 bolinhas de gude

Laura comprou 24 selos. Ela quer guardar 5 selos em cada envelope. Quantos envelopes ela vai precisar?

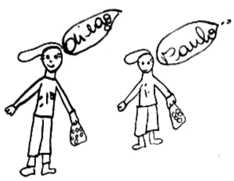


Resposta: emvelope 4

Problemas não computacionais

Pontuação zero: a criança fornece uma resposta incorreta acompanhada de justificativa também incorreta. Exemplo:

Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedos e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo? Por que?



Resposta: Diego vai precisar de mas saquinho
Porque Paulo que colocar em 5

Pontuação um: a criança fornece uma resposta correta, podendo ou não fornecer uma justificativa. A justificativa, quando fornecida, é incorreta ou vaga. Exemplo:

> Marta e Pedro foram a uma papelaria e cada um comprou 40 papéis de carta. Marta quer colocar seus papéis de carta em 8 envelopes e Pedro quer colocar seus papéis de carta em 5 envelopes. Quem vai ter envelopes com mais papéis de carta, Marta ou Pedro? Por que?

Resposta: pedro porque ele comprou mais de que a marta

Pontuação dois: a criança fornece uma resposta correta acompanhada de justificativa apropriada. Exemplos:

> Diogo e Paulo foram a uma loja de brinquedo e cada um comprou 35 bolinhas de gude. Paulo quer guardar 5 bolinhas de gude em cada saquinho e Diogo quer guardar 7 bolinhas de gude em cada saquinho. Quem vai precisar de mais saquinhos, Diogo ou Paulo? Por quê?

Resposta: O Paulo porque ele tem menos quantidade de bolinhas ele tem mas quanti dade de saquinhos.

Rute e João foram a uma banca de revista e cada um comprou 40 figurinhas. João quer colocar suas figurinhas em 8 saquinhos e Rute quer colocar suas figurinhas em 5 saquinhos. Quem vai ter saquinhos com mais figurinhas, Rute ou João? Por quê?

Resposta: Rute por que quando diminuirmos a quatidade de saquinhos aumenta a quantidade de figurinhas.

O dados foram analisados por dois juízes independentes, cujo percentual de concordância foi de 92% no pré-teste e de 97,5% no pós-teste. Julgamentos discordantes foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cuja classificação foi considerada final.

Resultados

Tomando os dados como um todo, no pré-teste, o U de Mann-Whitney não detectou diferenças significativas entre os grupos no pré-teste (Z = -0.042; p = 0.967), visto que havia um alto percentual de respostas incorretas tanto no GC (pontuação zero: 62%) como no GE (pontuação zero: 61%) e um baixo percentual de respostas corretas (pontuação dois no GC: 7% e no GE: 6%).

No pós-teste, o teste U de Mann-Whitney revelou haver diferenças entre os grupos (Z= -6.407, p = 0.000): as crianças do GE (pontuação dois: 39%) tiveram um percentual maior de respostas corretas do que o GC (pontuação dois: 11%), e um percentual de respostas incorretas menor do que o GC (GC: 59% e GE: 18%).

Tabela 1. Porcentagem de cada pontuação em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	Grupo Controle (n= 600)		Grupo Experimental (n= 600)	
	Pré-teste	Pós-teste	Pré-teste	Pós-teste
zero	62	59	61	18
um	31	30	33	43
dois	7	11	6	39

Comparações entre as duas ocasiões de testagem em cada grupo foram examinadas através do teste Wilcoxon, mostrando diferenças significativas entre o pré e o pós-teste apenas no GE ($Z = -5.948$; $p = 0.000$). Isso ocorreu porque no pré-teste havia um percentual elevado de respostas incorretas, e após a intervenção as crianças do GE aumentaram de forma expressiva o percentual de respostas corretas (pontuação um: de 33% para 43%; e pontuação dois: de 6% para 39%) e diminuíram o percentual de respostas incorretas (pontuação zero: de 61% para 18%). Em contraste, as crianças do GC não melhoraram quanto à compreensão acerca da divisão, pois os percentuais de respostas incorretas no pré-teste (62%) e no pós-teste (59%) eram altos, enquanto os de respostas corretas eram muito baixos (7% e 11%, respectivamente pré e pós-teste).

O desempenho nos problemas computacionais

O desempenho nos problemas computacionais é ilustrado na Tabela 2. De acordo com o teste U de Mann-Whitney, no pré-teste, os grupos não diferiam significativamente ($Z = -0.174$; $p = 0.862$), visto que ambos apresentam um percentual elevado de respostas incorretas (GC: 56.6% e GE: 55%) e um percentual pouco expressivo de respostas corretas (GC: 7.8% e GE: 7.2%).

Tabela 2. Porcentagem de cada pontuação nos problemas computacionais em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	Grupo Controle (n= 500)		Grupo Experimental (n= 500)	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
zero	56.6	56.4	55	16
um	35.6	32	37.8	45.8
dois	7.8	11.6	7.2	38.2

No pós- teste, entretanto, o teste U de Mann-Whitney mostra haver diferenças entre os grupos ($Z = -5.774$; $p = 0.000$), pois o percentual de respostas incorretas (pontuação zero) era menor no GE (16%) do que no GC (56.4%); enquanto o percentual de respostas corretas (pontuação dois) era maior no GE (38.2%) do que no GC (11.6%).

Comparações entre o pré-teste e o pós-teste em cada grupo evidenciaram que no GE houve um aumento no percentual de respostas corretas após a intervenção de 7.2% para 38.2% e uma diminuição no percentual de respostas incorretas de 55% para 16% (Wilcoxon: $Z= -5.948$; $p= 0.000$). O mesmo não foi observado em relação ao GC que continuou apresentando altos percentuais de respostas incorretas no pré-teste (56.6%) e no pós-teste (54.6%).

Buscou-se, também, examinar se o desempenho nos problemas computacionais estaria relacionado aos tipos de problemas (por partição e por quotas). O teste U de Mann-Whitney mostrou haver diferenças significativas entre os grupos tanto no problema por partição (Z= -4.923; p= 0.000) como no problema por quotas (Z= -5.702; p= 0.000), diferenças essas que apontavam para um melhor desempenho do GE em relação ao GC. O teste de Wilcoxon, por sua vez, revelou que tanto nos problemas por partição (Z= -5.681; p = 0.000) como nos problemas por quotas (Z= -5.519; p = 0.000) as crianças do GE se saíram melhor no pós-teste do que no pré-teste. Isso indica que houve progresso em ambos os tipos de problemas entre as crianças que participaram da intervenção.

O desempenho nos problemas não computacionais

No pré-teste (Tabela 3), ambos os grupos tiveram um percentual igualmente elevado de respostas incorretas (pontuação zero no GC: 89%; e no GE: 93%). Contudo, no pós-teste, notou-se um percentual de respostas incorretas bem mais alto no GC (73%) do que no GE (28%); e um baixo percentual de respostas corretas (GC: 10%) em comparação ao GE (41%). Tais diferenças, como indicado pelo teste U de Mann-Whitney (Z= -5.510; p = 0.000), revelaram que o desempenho nos problemas não computacionais melhorou após a intervenção.

Tabela 3. Porcentagem de cada pontuação nos problemas não computacionais em cada grupo (GC e GE) nas duas ocasiões de testagem.

Pontuação	**Grupo Controle** (n= 100)		**Grupo Experimental** (n= 100)	
	Pré-teste	**Pós-teste**	**Pré-teste**	**Pós-teste**
zero	89	73	93	28
um	8	17	7	31
dois	3	10	0	41

No GC não se observou qualquer melhoria do pré para o pós-teste. Porém, no GE houve progresso, visto que as crianças que haviam errado todos os problemas no pré-teste passaram a dar resposta corretas no pós-teste (41%). Estas, além de diminuir o percentual de respostas incorretas de 93% para 28%, passaram a ter um percentual maior de respostas que receberam pontuação um (de 7% para 31%). Nota-se, também, que as crianças do GC ampliaram o percentual de respostas corretas (de 3% para 10%) e de respostas que receberam pontuação um (de 8% para 17%), e diminuíram o percentual de respostas incorretas (de 89% para 73%). O teste Wilcoxon revelou que as diferenças entre o pré-teste e o pós-teste são significativas tanto para o GE ($Z= -5.829$; $p = 0.000$) como para o GC ($Z= -3.125$; $p = 0.002$). Isso significa que as crianças do GC também tiveram progresso nos problemas não computacionais, apesar de não haverem participado da intervenção. Esse progresso, entretanto, foi mais expressivo no GE.

Conclusões e Discussão

Em um estudo desta natureza, duas perguntas precisam ser respondidas. A primeira pergunta é se a intervenção foi bem sucedida, de forma que as dificuldades iniciais experimentadas pelas crianças tenham sido superadas com a intervenção. Os dados mostram que as crianças que participaram da intervenção alcançaram níveis de compreensão mais sofisticados sobre os invariantes operatórios da divisão do que aquelas que não tiveram esta mesma experiência, ainda que todos os participantes apresentassem muita dificuldade com o conceito de divisão, como avaliado no pré-teste.

Dado o papel facilitador da intervenção, a segunda pergunta a ser respondida é acerca da natureza da intervenção, com o objetivo de saber quais os aspectos que a caracterizavam que propiciaram os avanços identificados na forma de raciocinar das crianças que dela participaram. Esta análise pode ser realizada em duas direções: uma sobre aspectos gerais norteadores da interação entre o adulto e a criança; e outra sobre aspectos específicos relativos ao conceito de divisão.

No que concerne aos aspectos gerais da interação, destaca-se o fato de que o adulto propiciava discussões e reflexões de natureza metacognitiva que levavam a criança a refletir acerca dos seus processos de resolução, ou seja, de sua forma de raciocinar frente a uma dada situação-problema. Explicações eram sistematicamente fornecidas por parte da examinadora que direcionava a atenção da criança para os aspectos relevantes da situação; assim como explicações eram sistematicamente solicitadas da criança por parte da examinadora. Ao solicitar que a criança explicitasse sua forma de resolver as situações-problema, a examinadora gerava oportunidade para a tomada de consciência por parte da criança. A explicitação da criança permitia também que a examinadora passasse a conhecer sua forma de raciocinar, intervindo de forma apropriada. Como comentam Correa e Spinillo (2004, p.103):

> "[...] refletir e interpretar os tipos de resolução adotados por crianças é uma tarefa complexa, porém essencial tanto para pesquisadores como para educadores que se propõem a compreender o raciocínio da criança e a implementar formas de desenvolvê-lo."

Na realidade, a importância da metacognição enquanto ferramenta cognitiva para desencadear processos de aprendizagem em situações de instrução tem sido ressaltada por diversos autores (Flavell, 1979; Jou & Sperb, 2006; Lautert & Spinillo, 2011; Ribeiro, 2003; Spinillo, 1999, 2003). Este mecanismo estava presente no modo como a examinadora conduzia as atividades durante a intervenção: na forma como solicitava explicações das crianças, na forma como ela própria explicitava diversas facetas do processo de resolução, relacionando-os aos invariantes operatórios do conceito de divisão.

Quanto aos aspectos específicos relativos ao conceito de divisão, nota-se que a intervenção proposta tomou por base a perspectiva de Vergnaud (1990, 1997, 2003) de que uma única situação é insuficiente para abarcar todas as facetas e peculiaridades de um dado conceito, sendo necessário examinar um mesmo conceito à luz de diversas situações. Esta ideia permeou a intervenção que envolvia situações que versavam tanto sobre os invariantes operatórios da divisão como sobre as dificuldades específicas que as crianças experimentam: dificuldades em lidar com o resto e com as relações inversas entre os termos da divisão. Neste sentido, a intervenção pode ser entendida como um exemplo de uma situação de instrução que materializou na ação pressupostos importantes de uma abordagem teórica que possui afiliação clara com a Psicologia da Educação Matemática (Spinillo & Lautert, 2006).

De maneira geral, com esta investigação, pode-se apontar algumas implicações para a Educação Matemática. Primeiro, assumindo a perspectiva de que toda aprendizagem ocorre sobre algo, é necessário considerar os domínios específicos do conhecimento nas situações de ensino (Da Rocha Falcão, 2003). Em sendo assim, é possível compreender a ideia de invariantes como instâncias definidoras dos conceitos que precisam ser consideradas nas situações de ensino. Essa é, sem dúvida, o que se entende por uma abordagem conceitual em que, como comentado na introdução deste capítulo, torna-se necessário compreender a natureza do conceito que se torna objeto de ensino e conhecer os limites e as possibilidades do raciocínio do aprendiz frente ao conceito a ser ensinado.

Segundo, a exemplo da interação desenvolvida entre o adulto e a criança durante as sessões de intervenção realizadas neste estudo, o professor poderia propor situações de ensino que colocassem em evidência tanto as formas da pensar dos alunos como os invariantes do conceito que deseja ensinar, criando situações diversificadas que pudessem contemplar várias facetas do conceito. A sala de aula poderia tornar-se um ambiente de discussão em que atividades metacognitivas tivessem papel importante nas situações didáticas, de modo que o pensamento e as ações dos alunos fossem sistematicamente colocados em evidência (Lautert & Spinillo, 2011; Spinillo, 2003).

Terceiro, ressalta-se o papel do erro na aquisição de formas de raciocinar mais apropriadas (Spinillo, 1995). De acordo com Pinto (2000) e Curry (2008), a análise do erro pode ser uma estratégia didática interessante a ser desenvolvida em sala de aula. Este aspecto foi considerado na intervenção proposta, em especial nas situações em que as crianças tanto eram solicitadas a identificar procedimentos incorretos de resolução, como também a refletir acerca da natureza do erro nas situações-problema. Esta estratégia pode tornar-se um recurso didático poderoso; uma ferramenta que, inserida em um ambiente de discussão e reflexão, pode vir a possibilitar a compreensão de conceitos matemáticos complexos.

Além dessas implicações de natureza geral, algumas implicações especificamente voltadas para o ensino da divisão podem ser consideradas. Em relação à dificuldade da criança em lidar com resto pode-se sugerir que no contexto escolar as crianças sejam simultaneamente apresentadas a situações-problema que envolvam tanto a divisão exata como a inexata. Ao colocar o resto em evidência, sobretudo o resto com valores grandes, é dada à criança a possibilidade de compreender que o resto faz parte da divisão e que não pode ser ignorado ou inserido em uma das partes em que o todo foi dividido, o que acarretaria em violar o princípio da igualdade entre as partes. Fazendo-se as adaptações necessárias ao ambiente de sala de aula, a atividade de apresentar um problema de base e manipular os valores de seu enunciado com vistas a refletir acerca das relações entre os termos da divisão pode transformar-se em uma situação didática que auxilie a compreensão das relações inversas entre os termos da divisão.

Do ponto de vista teórico, a intervenção se baseou na ideia de que os invariantes de um conceito podem ser objeto de reflexão durante o processo de resolução de situações-problema com aquele conceito. No caso da divisão, a intervenção focalizou as relações inversas entre os termos da divisão e o papel do resto, visto que ambos estão fortemente relacionados aos invariantes operatórios da divisão e que, além disso, são a causa de muitas das dificuldades experimentadas pelas crianças. Do ponto de vista aplicado, é possível pensar que a instrução escolar poderia privilegiar a reflexão sobre os invariantes operatórios da divisão, promovendo uma abordagem conceitual associada ao ensino do algoritmo utilizado na divisão.

Referências

Borba, R. E. S. R., Selva, A. C. V., Spinillo, A. G. & Sousa, N. A. (2004). Influência de representações e de significados da divisão em problemas com resto. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática* (CD-ROM), Recife: Brasil.

Brito, M. R. F. Lima, V. S. Alves, E. V. & Rezi, V. (1998). Conceito de divisão e suas aplicações: um estudo com estudantes normalistas. *Anais do V Congresso Estadual Paulista sobre a Formação de professores: Formação do educador e avaliação* (CD-ROM). São Paulo: Brasil.

Calsa, G. C. (2002). *Intervenção psicopedagógica e problemas aritméticos no ensino fundamental.* Tese de Doutorado não-publicada. Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

Carraher, D. W. (1992). A aprendizagem de conceitos matemáticos com o auxílio de computador. Em E. S. Alencar (Org.), *Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem* (pp.169-201). São Paulo: Cortez Editora.

Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. Em M. H Novaes & M. R. F. Brito (Orgs.), *Psicologia na educação:Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica.* Rio de Janeiro: Editora Xenon, Coletâneas da ANPEPP, 1, 5, 151-165.

Correa, J. (2006). A compreensão intuitiva da criança acerca do conceito de divisão por cotas de quantidades contínuas. Em M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática* (pp. 185-205). São Paulo: Alínea.

Correa, J. (2004). A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de Psicologia,* Natal, RN, 9, 1, 145-155.

Correa, J.; Meireles, E. S. & Curvelo, C. S. S. (2000). A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. *Estudos de Psicologia,* Natal, 5, 1, 11-32.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*. Estados Unidos da América, 90, 2, 321-329.

Correa, J. & Spinillo, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. Em R. M. Pavanello (Org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: A pesquisa e a sala de aula.* (pp. 103-127). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM.

Cury, H. N. (2008). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica.

Da Rocha Falcão, J. T. (1999). Contribuições da Psicologia para a didática de conteúdos específicos. *Arquivos Brasileiros de Psicologia,* 51, 1, 75- 90.

Da Rocha Falcão, J. T. (2003). *Psicologia da Educação Matemática: Uma introdução.* Belo Horizonte: Autêntica.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34, 306-311.

Jou, G. I. I. de & Sperb, T. M. (2006). A metacognição como estratégia reguladora da aprendizagem. *Psicologia Reflexão e Crítica,* 19, 2, 177-185.

Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (2011). Estudo de intervenção sobre a divisão: ilustrando as relações entre metacognição e aprendizagem. *Educar em Revista*, 93-107.

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Campos, T. M. M., Magina, S. & Bryant, P. (2001). *Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas.* São Paulo: PROEM.

Pinto, N. B. (2000). *O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar*. São Paulo: Papirus.

Ribeiro, C. (2003). Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. *Psicologia Reflexão e Critica*, 16, 1, 109-116.

Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. Em A. Schliemann & D. W. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa* (pp. 95-119). Campinas: Papirus.

Silver, E. A. (1988). Solving story problems involving division with remaiders: the importance of semantic processing and referential mapping. *Proceedings of 10th Annual International Conference of Psychology of Mathematics Education (PME),* 1, 127-133. North Illinois University

Silver E. A., Shapiro, L. J. & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students´solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education.* Estados Unidos da América, 24, 2, 117- 135.

Spinillo, A. G. (1999). As relações entre aprendizagem e desenvolvimento discutidas a partir de pesquisas de intervenção. *Arquivos Brasileiros de Psicologia. Psicologia Cognitiva e interdisciplinaridade*. Rio de Janeiro, 51, 1, 55-74.

Spinillo, A. G. (1995). Avaliação da aprendizagem numa perspectiva cognitiva. *Psychologica*, Universidade de Coimbra, Portugal, 14, 83-99.

Spinillo, A. G. (2003). Ensinando proporção a crianças: alternativas pedagógicas em sala de aula. *Boletim GEPEM* (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), 43, 3, 11- 47.

Spinillo, A. G. (1994). Estudos de treinamento e variações experimentais. *Temas em Psicologia*, 3, 43-58.

Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2006). O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. Em L. L. Meira & A. G. Spinillo (Orgs.), *Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 46-80). Recife: Editora Universitária da UFPE.

Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2008). Pesquisa-intervenção em psicologia do desenvolvimento cognitivo: princípios metodológicos, contribuição teórica e aplicada. Em L. R. de Castro & V. L. Besset (Orgs.), *Pesquisa-intervenção na infância e juventude* (pp.294-321). Rio de Janeiro: Editora NAU.

Squire, S. & Bryant, P. (2002). The influence of sharing of children's initial concept of division. *Journal for Experimental Child Psychology,* 81, 1- 43.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques.* 10, 13, 133 -170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria.* México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. Em T. Nunes & P. Bryant (Orgs.). *Learning and teaching mathematics. An international perspective.* (pp. 5-28). Hove: Psychology Press.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. Em E. P. Grossi (Org.), *Por que ainda há quem não aprende? A teoria.* (pp. 21-64). Rio de Janeiro: Vozes.

A FIM DE ESTUDAR FUNÇÃO AFIM: UMA MODELAÇÃO BEM SUCEDIDA

Rogério Fernando Pires
Universidade Federal de São Carlos
Sandra Magina
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Introdução

A proposta deste capítulo é apresentar um estudo, fruto de uma dissertação de mestrado (Pires, 2009), cujo objetivo foi analisar as reais possibilidades de se introduzir o conceito de função afim no 7º ano do Ensino Fundamental. Os resultados do referido estudo, como discutido adiante, contrariam o que tradicionalmente é proposto, isto é, introduzir este conteúdo apenas no 9º ano do Ensino Fundamental, ou então, somente no Ensino Médio.

O ensino de função é importante porque fundamenta e explica muitos outros conceitos em diversas disciplinas e também em contextos da vida diária. Isto porque as funções podem constituir modelos matemáticos que auxiliam na resolução de problemas diversos, como por exemplo: encontrar o ponto de equilíbrio entre a receita e os gastos na Economia, prever o crescimento de uma população na Biologia, descrever o movimento de uma partícula na Física.

Apesar de sua relevância e aplicabilidade, notamos que a abordagem deste conteúdo costuma ser realizada por meio de situações que não vinculavam o conceito com a realidade dos estudantes.

Dessa forma, o ponto de partida dessa intervenção foi uma situação familiar aos estudantes, qual seja, a manipulação da bomba de aquário responsável pela queda d'água de uma fonte caseira. Esta fonte foi construída pelos alunos nas aulas de Arte e se tratou de uma atividade que os motivou muito. Assim é que quando perguntamos sobre qual atividade, dentre aquelas desenvolvidas dentro e fora do espaço escolar, eles julgavam mais interessantes, a resposta foi consensual: a construção da fonte. Decidimos, então, introduzir o conceito de função afim por meio da exploração da vazão de água produzida pela bomba.

Para desenvolver tal trabalho tivemos por suporte teórico o programa de Etnomatemática proposto por D'Ambrósio (1993, 1999, 2004), focando ainda os construtos da modelagem matemática (Bassanezi, 2006), especialmente a proposta de modelação matemática de Biembengut e Hein (2007).

A modelagem matemática tem sido considerada uma das abordagens pedagógicas para o ensino de Matemática (PCN, 1998). Segundo Barbosa (2001), modelagem é entendida como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade que integram outras disciplinas ou atividades do dia-a-dia.

Segundo Bassanezi (2006, p. 31), modelagem matemática:

> “[...] é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Percebe-se que a modelagem matemática possibilita a obtenção e validação de modelos por parte do indivíduo que são criados a partir de situações da vida real, explicados por meio da Matemática e interpretados na linguagem usual. Seguindo este raciocínio, faremos uso das palavras de Biembengut e Hein (2007) que comparam a ideia de modelagem com o trabalho de um escultor com argila produzindo um objeto, sendo este objeto o modelo matemático.

A modelagem é eficiente a partir do momento em que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com a aproximação da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

Jacobini e Wodewotzki (2001) explicam que um modelo é a representação de alguma situação relacionada com o mundo real feita através de uma linguagem matemática.

Nessa direção, McLone (1984, p. 479) fornece uma definição bem simples para modelagem matemática, por meio do esquema a seguir:

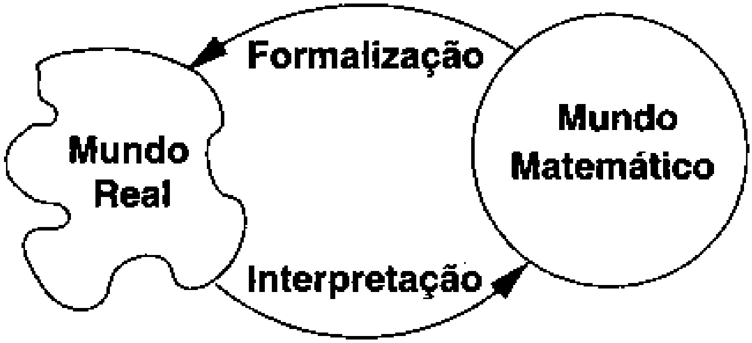


Figura 1. Esquema Simplificado de Modelagem Matemática.

O esquema acima nos leva a entender que a essência de um trabalho com modelagem é a criação de modelos, visando explicar matematicamente situações oriundas da realidade, possibilitando que o indivíduo perceba a presença da Matemática em situações vivenciadas por ele. Além do conhecimento matemático, estão envolvidas neste processo a criatividade e a intuição do indivíduo que lhe darão suporte para adaptar as ferramentas matemáticas adequadas para a situação.

Segundo Bassanezi (2006), o processo de modelagem envolve as etapas de experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. Etapas estas comentadas a seguir.

Experimentação – É uma atividade a partir da qual são obtidos os dados. Os métodos experimentais quase sempre são ditados pela natureza do experimento e da pesquisa. A participação de um matemático nesta fase é fundamental, pois ele é quem vai direcionar os trabalhos posteriores no sentido de facilitar o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos.

Abstração – É a etapa de formulação de modelos matemáticos, em que se procura estabelecer a seleção das variáveis, a formulação dos problemas, a formulação de hipóteses e a simplificação.

Resolução – É quando ocorre a obtenção de um modelo, ou seja, quando se consegue substituir a linguagem natural das hipóteses para uma linguagem matemática coerente.

Validação – É a etapa na qual serão aceitos ou não os modelos propostos. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses a eles associados, são testados em confrontos com dados empíricos, comparando suas previsões e soluções com os valores que são obtidos no sistema real.

Modificação – Nesta etapa alguns fatores ligados ao problema original podem promover a aceitação ou a rejeição do modelo. Caso seja rejeitado, serão necessárias novas adaptações ao modelo existente ou a obtenção de um novo.

A validade ou riqueza de um modelo não está relacionada apenas à sua sofisticação matemática, mas à sua capacidade de traduzir para a linguagem matemática situações oriundas de diferentes contextos. Assim, a Matemática e a realidade podem se conectar por meio da modelagem, essa conexão pode ser feita pelo uso de processos matemáticos com o objetivo de analisar, estudar, explicar situações do cotidiano.

Ao contrário do que se pensa, a modelagem matemática não é uma ideia recente, pois existem indícios de que ela esteve envolvida na construção histórica de muitas teorias científicas e, em particular, das teorias matemáticas.

A Modelagem no Ensino de Matemática

A modelagem pode ser um caminho para despertar nos estudantes o interesse pela Matemática, através da aprendizagem por meio de situações-problema que têm sua origem em situações da vida cotidiana.

Para Campos (2007, p. 69), a modelagem matemática no ensino é "a metodologia que utiliza a idéia da modelagem em cursos regulares do sistema educacional. A modelagem constitui, então, um método de ensino-aprendizagem que pode ser empregado em diversos níveis de ensino, desde a matemática elementar até a pós-graduação." Podemos salientar, ainda, que esta metodologia pode: estimular a criatividade do aluno; desenvolver a habilidade na resolução de problemas; melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos; promover o interesse pela disciplina e aproximar a Matemática das outras áreas do conhecimento.

A inclusão de aspectos como a resolução de problemas e a modelagem tem sido defendida por educadores matemáticos (Barbosa, 2001; Bassanezi, 2006; D' Ambrósio 2004; Jacobini & Woderwotzki, 2001), para os quais os conteúdos devem ser ensinados de maneira matematicamente significativa, considerando a realidade do sistema educacional. Blum (1989 *apud* Bassanezi, 2006, p. 36-37) apresenta alguns argumentos para tal:

> "1) Argumento formativo – enfatiza aplicações matemáticas e a performance da modelagem matemática e resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.

2) Argumento de competência crítica - focaliza a preparação dos estudantes para vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
3) Argumento de utilidade - enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.
4) Argumento intrínseco - considera que a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas".
5) Argumento de aprendizagem - garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados e valorizar a própria Matemática.
6) Argumento de alternativa epistemológica - A modelagem também se encaixa no Programa Etnomatemática que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega, de maneira natural e através de um enfoque cognitivo com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica."

A partir desses argumentos, percebemos os benefícios que a modelagem pode trazer para o estudante, já que contribui para o desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas, tornando o aluno mais criativo, proporcionando a formação de juízo próprio e facilitando a aprendizagem dos conteúdos. Todos estes ganhos se justificam pela característica da modelagem que permite que o estudante parta da sua realidade e chegue, de maneira natural, à ação pedagógica, processo que possibilita a adequação perfeita da modelagem no Programa Etnomatemática.

A modelagem matemática é um dos elementos que formam o tripé de sustentação do Programa Etnomatemática, sendo os outros dois a Matemática e a Antropologia Cultural. Na realidade, as técnicas para a resolução de problemas cotidianos usadas por diversos povos parecem ser desenvolvidas por meio de um processo de modelagem.

A Matemática serve como ferramenta para a solução de problemas em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na Física, na Engenharia, na Economia e na Informática. Mas esta aplicação dificilmente é evidenciada no ensino da Matemática na Educação Básica.

Segundo Garding (1981 apud Bassanezi, 2006), no século XIX, os três pilares da educação eram Ler-Escrever-Contar, sendo que a matemática vinha em terceiro lugar e tinha como objetivo ensinar algoritmos para as quatro operações aritméticas e familiarizar o aluno com grandezas e medidas. Podemos notar que não havia uma preocupação com uma Matemática investigativa e crítica, pois o aluno deveria dominar algoritmos para realizar operações sem se preocupar com a análise dos resultados; ou seja, os objetivos do ensino da Matemática não permitiam despertar no aluno um olhar crítico para o que estava sendo ensinado.

Acreditamos que este fato histórico seja um dos fatores que contribuem para a dificuldade em se dar significado prático para muitos conteúdos ensinados na educação básica, sendo este um momento crucial na formação do indivíduo, no qual se formam as opiniões, a capacidade de análise e o senso crítico.

Bassanezi (2006, p. 36) coloca-se da seguinte maneira quanto ao ensino da Matemática nas escolas:

> "O desenvolvimento de novas teorias matemáticas e suas apresentações como algo acabado e completo acabaram conduzindo seu ensino nas escolas de maneira desvinculada com a realidade, e mesmo do processo histórico de construção da matemática. Assim é que um teorema é enunciado, seguindo o seguinte esquema: "enunciado→demonstração→aplicações", quando de fato o que poderia ser feito é sua construção na ordem inversa (a mesma que deu origem ao teorema), isto é, sua motivação (externa ou não à matemática), a formulação hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos, e finalmente seu enunciado. "

Realizando um trabalho nesta ordem inversa sugerida por Bassanezi (2006), estaríamos possibilitando aos alunos a construção de seu próprio conhecimento, seguindo o processo da modelagem e conjugando, verdadeiramente, o binômio ensino-aprendizagem.

O que é Modelação Matemática?

A modelagem matemática, como metodologia de ensino, parte de um tema ou situação sobre a qual são levantadas questões cujas respostas são encontradas por meio da Matemática. Sem sombra de dúvidas, trata-se de uma forma extremamente prazerosa que proporciona, por parte de quem aprende, a construção dos conhecimentos matemáticos de maneira significativa. Mas, existe também a dificuldade de adequar o currículo institucionalmente estabelecido a esta metodologia de ensino.

Diante disso, devem ser feitas adaptações que tornem possível a utilização da modelagem como metodologia de ensino, sem perder a sua linha mestra que é a pesquisa e a posterior criação de modelos pelos alunos, sem deixar de cumprir o currículo estabelecido pelo sistema educacional. Esse método que visa a utilização da modelagem matemática de forma a atender o programa a ser cumprido em cursos regulares é denominado modelação matemática.

Segundo Biembengut e Hein (2007, p. 18), a modelação matemática "norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem. Pode valer como método de ensino-aprendizagem de Matemática em qualquer nível escolar, das séries iniciais a um curso de pós-graduação." Assim, na educação básica, a modelação é uma importante ferramenta para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de maneira significativa. A grande diferença entre modelação e modelagem é que enquanto nesta última não se sabe quais são os conteúdos matemáticos que serão explorados no momento em que o tema é escolhido, na modelação esses conteúdos estão previamente definidos no programa do curso, constituindo modelos que serão recriados pelos alunos com auxílio do professor.

Para o desenvolvimento de um trabalho seguindo as diretrizes da modelação matemática são sugeridos quatro passos:

(1) O diagnóstico que visa verificar alguns aspectos que são fundamentais para o planejamento das aulas, tais como:

(i) A realidade socioeconômica dos alunos, seus interesses e metas que são essenciais para a escolha do tema.
(ii) O conhecimento matemático dos alunos para então estabelecer os conteúdos matemáticos que serão explorados.
(iii) O horário da disciplina (período diurno, vespertino ou noturno) determina a dinâmica das aulas.
(iv) O número de alunos que determina a formação de grupos de trabalho.
(v) A disponibilidade dos alunos para realizar atividades extraclasses, o que implica na delimitação dos objetivos do trabalho a ser conduzido.

(2) A escolha do tema que é de fundamental importância, pois é a partir dele que surgem os modelos que são conteúdos presentes no programa.

(3) O desenvolvimento dos conteúdos programáticos que requer que o professor cumpra as fases a seguir:

Interação – inicialmente é feita uma explanação sobre o tema, delimitando-se a área em questão. Trata-se de um momento muito importante em que a forma com que o professor demonstra seu conhecimento e interesse em relação ao tema pode ser um fator decisivo na motivação dos alunos. É o momento em que também se levanta questões com o objetivo de estimular a participação e reflexão dos alunos.

Matematização **–** quando se formula uma das questões levantadas anteriormente, com a finalidade de levar os alunos a propor respostas, abrindo caminhos para que se consiga atingir as metas propostas. Na medida em que se torna necessário o uso de um conteúdo programático para a continuidade do processo de obtenção da resposta da questão em jogo, interrompe-se este processo de exposição e desenvolve-se a matemática necessária para posteriormente retornar ao processo. Em seguida, apresentam-se exemplos análogos para que o conteúdo não fique restrito ao modelo.

Modelo – é o objeto matemático obtido que permite a resolução da questão em foco, como também de outras questões similares; podendo ser considerado um modelo matemático.

Avaliação – é o último passo, consistindo em avaliar o trabalho realizado, sendo necessário considerar dois aspectos: avaliação como fator de redirecionamento do trabalho do professor e avaliação para verificar o grau de aprendizagem do aluno. Uma avaliação que contemple esses dois aspectos permite ao professor re-planejar seu trabalho, visando melhorar as estratégias de ensino e preencher lacunas que ficaram durante o processo.

O Estudo

O estudo foi realizado em uma escola da rede pública municipal da cidade de Salto de Pirapora, Estado de São Paulo. Trabalhamos com duas turmas de 7º ano: uma turma consistiu no grupo controle (GC) e a outra, no grupo experimental (GE); cada grupo contando com 24 e 29 participantes, respectivamente.

Foi aplicado um pré-teste que teve por objetivo diagnosticar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto em questão e um pós-teste que teve o intuito de, após a intervenção de ensino proporcionada ao GE, comparar o desempenho dos estudantes dos dois grupos.

Os estudantes do GE realizaram o pré-teste, a intervenção de ensino e o pós-teste. Todas essas atividades ocorreram em sete encontros, todos em aulas duplas (50 minutos cada, totalizando 14 horas-aula), sendo duas aulas duplas para a aplicação dos instrumentos (tanto nos participantes do GC quanto do GE) e cinco aulas duplas para a realização da intervenção de ensino. O primeiro e sétimo encontros foram destinados à aplicação do pré e do pós-teste, que aconteceram 15 dias antes e 15 dias depois da intervenção proporcionada ao GE. A intervenção ocorreu do segundo ao sexto encontro.

Descrição da Intervenção de Ensino

Era nosso desejo que o ponto de partida de nossa intervenção fosse uma situação-problema que os alunos tivessem efetivamente motivação para resolvê-la. Tendo tal ideia em mente, passamos a buscar um tema que fosse significativo para os alunos. Assim, perguntamos a eles: Das atividades que vocês têm desenvolvido dentro e fora do espaço escolar, quais as que vocês julgam a mais interessante? A grande maioria dos alunos respondeu que gostava muito das aulas de Arte, em que a professora, juntamente com eles, construiu algumas fontes que jorravam água e um chafariz no jardim da escola, usando bombas de aquários.

Decidimos, então, que as bombas utilizadas nas aulas de Arte seriam o tema motivador da nossa intervenção sobre função, pois percebemos que a partir destas bombas poderiam surgir questões que gerariam problemas, cujas soluções poderiam ser encontradas por meio de uma função afim.

Assim, utilizamos três bombas de aquários idênticas àquelas usadas nas aulas de Arte. Nosso intuito seria fazer com que os alunos conseguissem enxergar um pouco da Matemática que está presente num material utilizado por eles para a realização de um trabalho em outra disciplina. Portanto, elaboramos uma intervenção de ensino cujos encontros discutiremos detalhadamente a seguir.

1º Encontro: Relação de Dependência entre Duas Grandezas e Expressões Matemáticas que Evidenciam esta Relação

Neste encontro, desenvolvemos três atividades por meio de fichas. A primeira contou com o auxílio da modelagem de uma situação que envolvia três bombas d'água e um cronômetro. Iniciamos o encontro dividindo a classe em duplas. Antes dos alunos adentrarem à sala de aula colocamos sobre a mesa as três bombas d'água. Usamos dois recipientes transparentes, nos quais o primeiro tinha uma marca vermelha a cada litro e o segundo a cada meio litro. Para possibilitar a visualização dos alunos, estes recipientes receberam água com um corante azul que foi bombeada.

Para cada dupla entregamos um cronômetro e uma ficha de atividade. Iniciado o funcionamento de uma das bombas, pedimos que um dos alunos manuseasse o cronômetro e o outro observasse o volume d'água em um recipiente. Foi desta maneira que os alunos resolveram a primeira atividade da ficha 1, abaixo apresentada.

Ficha de atividade 1

Atividade 01: Observe as bombas A, B e C em funcionamento e responda:
Quantos litros d'água a bomba A é capaz de jogar em 1 minuto? E a bomba B? E a C?
Atividade 02: Com base no que se pode observar na atividade anterior, responda. Quantos litros d'água a bomba B é capaz de jogar em 6 minutos?
Atividade 03: Uma bomba tem a capacidade de jogar 4 litros d'água em um minuto.
Baseado nestas informações preencha a tabela abaixo:

Tempo (em minutos)	1 min.	2 min.	5 min.	7 min.	*x* min.
Litros d'água					

2º Encontro: Construção de Gráficos de Uma Função Afim

Neste encontro procuramos desenvolver as habilidades necessárias para a construção de gráficos de uma função, partindo de uma tabela ou de uma expressão algébrica. Os alunos coletaram dados, observando o funcionamento da bomba e criaram modelos que permitiram a resolução do problema proposto. Cada dupla recebeu uma ficha com três atividades e uma folha de papel quadriculado, na qual construíram os gráficos. Inicialmente, tiveram que observar a bomba C em funcionamento e verificar quantos litros esta bomba era capaz de bombear por minuto. Após esta observação, os alunos realizaram as atividades contidas na ficha 2.

Ficha de atividade 2

Atividade 01: Observe a bomba em funcionamento, preencha a tabela abaixo e com as informações desta tabela construa um gráfico de segmentos.

Tempo (min.)	3 min.	6 min.	9 min.	15 min.	21min.
Litros d'água					

Atividade 02: Um outro tipo de bomba, com uma potência diferente da citada na atividade anterior é capaz de jogar água de acordo com a seguinte expressão $L=3t$, sendo L a quantidade de litro d'água jogados por esta bomba e t o tempo que ela gasta para jogar uma certa quantidade de água em minutos. Baseado nestas informações preencha a tabela abaixo e construa um gráfico de segmentos.

t	$L=3t$
1	
2	
3	
4	

Atividade 03: Um reservatório tem a capacidade de armazenar 30 litros d'água. Nele já continha 5 litros quando foi aberta uma torneira para enchê-lo, esta torneira lança neste reservatório 2 litros de água por minuto. Sabendo que a expressão matemática que representa o volume do reservatório com o passar do tempo é $v=2t+5$, construa um gráfico de segmentos que representa o volume deste reservatório em função do tempo.

No final deste encontro, distribuímos a ficha 3 para ser resolvida em casa e entregue no encontro seguinte.

Ficha de atividade 3

Atividade 01: Sabe-se que o quilograma do pão francês custa R$ 3,00 na padaria do Sr. Joaquim.
Quanto pagará uma pessoa que comprar 7 quilogramas deste tipo de pão?

Atividade 02: Um pintor de paredes cobra por seu serviço R$ 5,00 o metro quadrado de parede que
pinta, mais R$ 25,00 que é um valor fixo cobrado pela visita. Tendo como base as informações acima, preencha a tabela abaixo.

m^2 de parede	2	6	10	14	x
Valor cobrado em (R$)					

Atividade 03: Considere as seguintes funções definidas de R em R, preencha as tabelas abaixo
e construa a representação gráfica de cada uma em um plano cartesiano.

a)

x	$y=5x$
1	
2	
3	
4	

b)

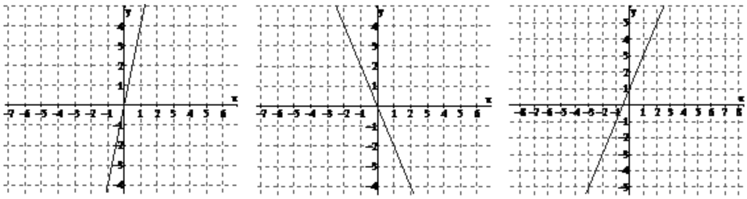
x	$y=2x+1$
-2	
-1	
0	
1	

3º Encontro: Do Registro Gráfico para o Registro Algébrico

O objetivo deste encontro foi trabalhar a mudança do registro gráfico para o registro algébrico e o reconhecimento do crescimento e o decrescimento de uma função afim por meio de sua representação gráfica. O encontro iniciou-se com a discussão das atividades da ficha 3, momento em que cada aluno mostrava como havia resolvido as atividades e justificava o uso das estratégias adotadas. Em seguida, distribuímos a ficha 4 com duas atividades em que a primeira pedia que, a partir da representação gráfica, os alunos determinassem sua representação algébrica, e a segunda pedia que estabelecessem relações entre as situações postas (todas relativas às bombas d'água) e os gráficos que as representavam.

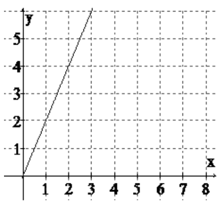
Ficha de atividade 4

Atividade 01: Escreva a expressão matemática que representa cada um dos gráficos abaixo

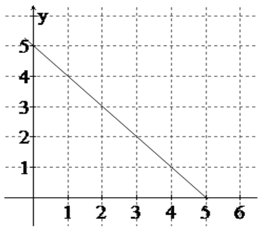


Atividade 02: Cada um dos gráficos abaixo representa uma situação na qual foi utilizada uma bomba d'água parecida com a que vem sendo usada em nossas atividades. Observe os gráficos e classifique as funções que os representam como: crescente, decrescente ou constante.

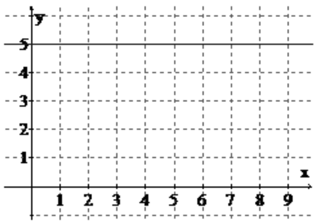
a) Uma bomba foi ligada para encher um reservatório, sabendo que ela tem a capacidade de jogar 2 litros d'água a cada minuto e que o gráfico abaixo representa o volume deste reservatório em função do tempo, sendo x o tempo transcorrido e y o volume.



b) Uma bomba foi coloca para retirar água de uma piscina. O gráfico a seguir mostra a quantidade de água contida nesta piscina durante o tempo em que esta bomba permanece ligada, sendo que x representa o tempo em minutos e y a quantidade de água em m^3.



c) A professora Mariquinha resolveu montar um aquário com seus alunos. Para que os peixes se mantenham vivos é necessário colocar uma bomba neste aquário com a finalidade de circular a água nele contida, produzindo, assim, oxigênio para os peixes.
O gráfico apresentado abaixo mostra o volume da água contido neste aquário durante o tempo que esta bomba fica ligada, sendo x o tempo em minutos e y o volume do aquário em litros.



4º Encontro: Noções de Coeficiente Angular e Linear

Neste encontro trabalharam-se as noções de coeficiente angular e linear, e as alterações que o coeficiente angular acarreta no comportamento gráfico da função. A partir da ficha 5, as atividades versavam sobre contexto matemático escolar, não partindo de uma situação do cotidiano. Nosso intuito era observar se os alunos conseguiam abstrair alguns conceitos presentes nestas atividades que foram trabalhados em outras ocasiões que decorreram de situações que foram modeladas. Antes de iniciar as atividades foi feita uma breve explanação sobre os coeficientes angular e linear numa função do tipo $y=ax+b$.

Ficha de atividade 5

Atividade 01: Nas funções abaixo encontre o coeficiente angular e linear.

a) $y=2x+1$ b) $L=-3t$ c) $f(t)=-4t-3$ d) $f(x)=5$

Atividade 02: Complete as tabelas abaixo e construa um gráfico de seguimentos para cada uma delas.

a)

t	$f(t)=3t$
-2	
-1	
0	
1	
2	

b)

x	$f(x)=-3x$
-2	
-1	
0	
1	
2	

c)

x	$y=3x-1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

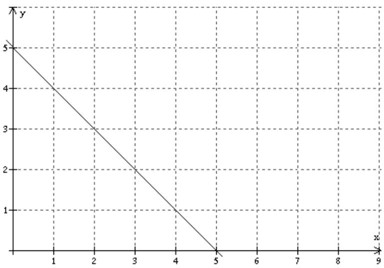
Analisando os gráficos construídos, o que você pode concluir sobre o coeficiente angular e o linear?

Concluídas as atividades, as duplas discutiam as respostas dadas até chegarem a uma resposta comum para todas as duplas. Após esta discussão institucionalizamos[1] os conceitos trabalhados neste encontro. Ao final, a ficha 6 foi distribuída para ser resolvida em casa.

[1] Consideramos institucionalização o momento em que o professor fixa convencional e explicitamente o conceito objeto do saber.

Ficha de atividade 6

Atividade 01: O gráfico abaixo representa o volume de uma caixa d'água de uma residência em função do tempo, sendo *x* o tempo em horas e *y* o volume em m^3



Observe o gráfico e responda:

a) Qual é a expressão matemática que representa o volume da caixa em função do tempo?

b) Qual é o volume da caixa no instante $x=0$?

c) Quantas horas levarão para a caixa estar vazia?

d) O gráfico acima representa uma função crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

e) Quais são os coeficientes da função que correspondem à representação gráfica acima?

5º Encontro: Fechamento da Intervenção

Planejado como o fechamento da intervenção de ensino, o encontro iniciou-se pela discussão da ficha 6, cujo objetivo foi o de explorar todos os conceitos trabalhados nos encontros anteriores. Após essa discussão, destinamos um momento para que os alunos pudessem expor eventuais dúvidas que ainda permaneciam sobre função afim.

Os Instrumentos Diagnósticos (Pré e Pós-testes)

O diagnóstico foi composto por 10 atividades, sendo quatro denominadas atividades do *contexto escolar* (tipicamente escolares) e seis denominadas atividades do contexto extra-escolar (relativas a situações que podem ser vividas pelos alunos fora da escola).

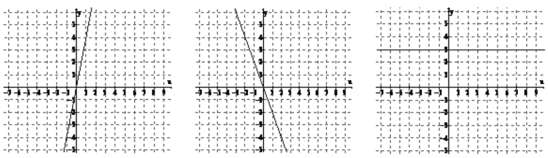
Dois dos quadros a seguir mostram as atividades do contexto escolar (um quadro com três atividades envolvendo representações gráficas e um quadro com uma atividade algébrica); enquanto os outros dois mostram as atividades do contexto extra-escolar.

Quadro 1. Atividades de Contexto Escolar, Envolvendo Gráfico, Presentes no Instrumento Diagnóstico.

Atividade 01: Construa um gráfico de segmentos com os dados da tabela abaixo.

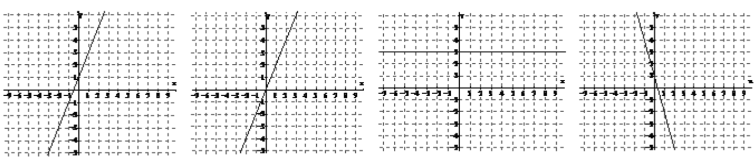
x	2	4	6	8
y	3	6	9	12

Atividade 02: Classifique as funções que estão representadas abaixo pelos seus gráficos, como crescente, decrescente ou constante.



Atividade 03: Associe a representação algébrica de cada uma das funções abaixo as suas respectivas representações gráficas.

FUNÇÕES: (I) y=2x (II) y=2x+1 (III) y=-3x+1 (IV) y=3



As atividades tratam de representações gráficas da função afim sob três perspectivas distintas: a primeira apresenta uma representação tabular e pede sua construção gráfica; a segunda requer a identificação do tipo da função afim a partir da interpretação dos gráficos; e a última atividade requer estabelecer relação entre as duas interpretações (gráficas e algébricas). Já a atividade 7, partindo da representação algébrica clássica da função afim, requer conhecimentos sobre coeficiente angular.

Quadro 2. Atividades de Contexto Escolar, Envolvendo a Representação Algébrica da Função Afim, Presentes no Instrumento Diagnóstico.

Atividade 07: Considerando que as funções da atividade anterior são do tipo $f(x)=ax+b$, responda: a) Quais são os coeficientes angular e linear de cada uma delas? b) Analisando as quatro funções apresentadas na atividade 07 e suas respectivas respostas, o que podemos concluir sobre o coeficiente angular?

Os próximos dois quadros apresentam as atividades do contexto extra-escolar, sendo que o Quadro 3 contém atividades relacionadas à representação gráfica e o Quadro 4 a atividades voltadas para a representação algébrica.

As atividades no Quadro 3 exploraram as três representações clássicas de uma função: a representação tabular, a algébrica e a gráfica. Essas atividades procuram evidenciar a relação existente entre essas formas de representação; transformação da representação tabular para a algébrica (atividade 02), transformação da representação tabular para a gráfica (atividade 03) e transformação da representação gráfica para a algébrica (atividade 08). Já a atividade 04, diferente das demais, enuncia uma relação funcional em linguagem natural, solicita que seja fornecida a representação gráfica da situação enunciada.

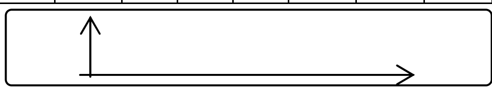
Quadro 3. Atividades de Contexto Extra-escolar, Envolvendo Diferentes Representações de Uma Função, Presentes no Instrumento Diagnóstico.

Atividade 02: Um motoboy cobra seus serviços da seguinte maneira: R$ 5,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por km rodado.
Baseado nessas informações preencha a tabela abaixo:

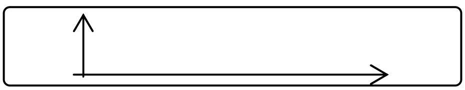
km rodado	1 km	3km	5 km	7 km	X km
Total cobrado em (R$)					

Atividade 03: A tabela abaixo representa o consumo de água num determinado condomínio durante algumas horas de um dia. Baseado na tabela abaixo, construa um gráfico de segmentos da variação do consumo em função do tempo.

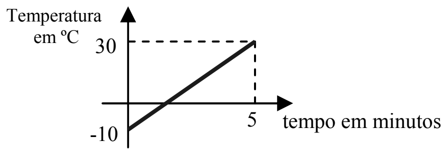
Horário	3 h	5h	7 h	9 h	11h	13 h	15 h	17 h	19 h
Consumo em m^3	5 m^3	7 m^3	10 m^3	11 m^3	13 m^3	17 m^3	18 m^3	14 m^3	9 m^3



Atividade 04: Uma bomba é capaz de bombear 5 litros d'água por minuto. Considerando que o reservatório que recebe a água desta bomba estava vazio quando ela foi ligada. Construa um gráfico que representa a quantidade de água deste reservatório durante o tempo que esta bomba ficará ligada.



Atividade 05: Uma barra de gelo (água em estado sólido) com temperatura inicial de -10º C foi aquecida até 30º C, passando para o estado líquido. O gráfico representa a variação da temperatura em função do tempo gasto nesta experiência:



a) Determine a função que fornece a temperatura da barra de gelo em relação à variação do tempo. Essa é uma função crescente ou decrescente?
b) Quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura atingiu 30º C?

As atividades no Quadro 4 partem da mesma perspectiva da atividade 04, ou seja, a relação funcional é enunciada em linguagem natural e, a partir de sua interpretação, o aluno encaminha os procedimentos necessários para sua realização.

Quadro 4. Atividades de Contexto Extra-escolar, Envolvendo Álgebra, Presentes no Instrumento Diagnóstico.

Atividade 01: João é um artesão que confecciona chaveiros de madeira. Sabendo que ele é capaz de confeccionar 6 chaveiros em uma hora, quantos chaveiros ele confeccionará em:

5 horas (Espaço para os cálculos)

Resposta: ________________

Atividade 02: Uma bomba é capaz de bombear 120 litros d'água por hora. Seja v=f(t) a função da quantidade d'água em função do tempo.
a) Construa, no espaço abaixo, o gráfico da quantidade d'água em função do tempo. Considere a quantidade de água em litros e o tempo em minutos.

Cole aqui o seu gráfico

b) Qual é a quantidade de água bombeada após 10 minutos?
c) A função v=f(t) é crescente ou decrescente?

Análise do Desempenho nos Testes Diagnósticos

Observa-se na Figura 2 que os grupos partiram de patamares muito próximos no pré-teste, sem diferença significativa entre eles, como mostra o teste t de Student (t (51) = -0,554; p = 0,582).

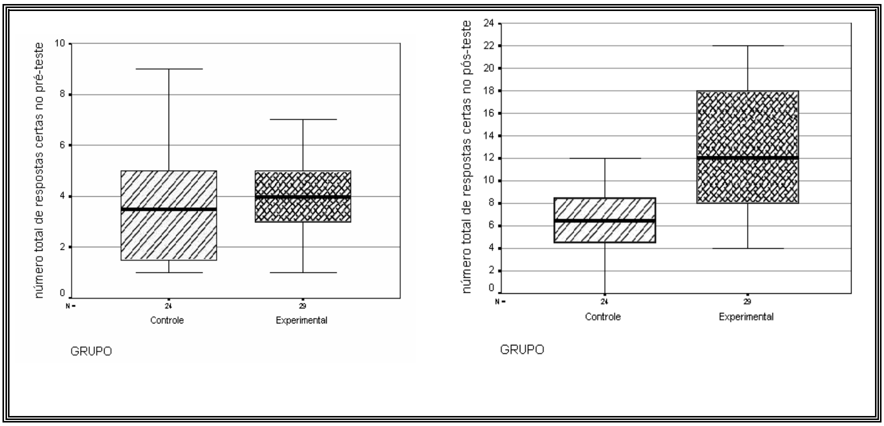


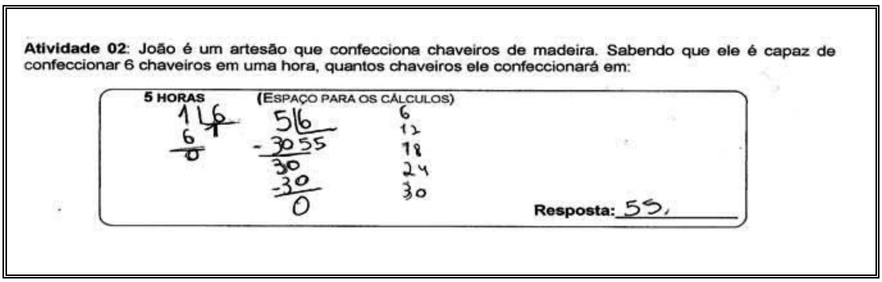
Figura 2. Desempenho Geral do GC e do GE nos Testes Diagnósticos.

Já no pós-teste, os grupos se diferenciam, visto que o desempenho do GE foi superior ao do GC ($t(51) = -5{,}450$; $p = 0{,}000$). Este resultado indica que o crescimento apresentado pelos alunos do GE está relacionado à intervenção de ensino.

Análise dos Tipos de Erros Apresentados pelos Alunos do GE

Com o objetivo de identificar as principais estratégias que conduziram os alunos ao insucesso, analisou-se a natureza dos procedimentos incorretos de resolução. Os erros foram agrupados conforme descrito e exemplifiacado a seguir[2].

Erro tipo 1 (E1) – erro relativo à proporcionalidade, em que o aluno não soube identificar a proporção existente entre as grandezas envolvidas, noção esta importante para o conceito de função afim. Exemplo:


Atividade 02: João é um artesão que confecciona chaveiros de madeira. Sabendo que ele é capaz de confeccionar 6 chaveiros em uma hora, quantos chaveiros ele confeccionará em:

5 HORAS **(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)**

56 | 55
-30
30
-30
0

6
12
18
24
30

Resposta: 55.

[2] Em alguns casos havia mais de um tipo de erro envolvido na realização de uma mesma atividade. Nesses casos, considerou-se o tipo de erro que mais contribuiu para o insucesso do aluno.

Erro tipo 2 (E2) – referente à ideia de variável, este erro decorre da falta de conhecimento de que as letras, quando desempenham o papel de variável, não representam um único número e sim números de uma maneira generalizada. Este tipo de erro está diretamente relacionado com a compreensão da representação algébrica da função afim. Exemplo:

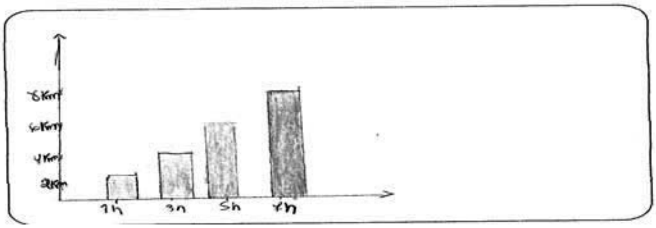
Atividade 02: Um taxista cobra as sua corridas da seguinte maneira: R$ 5,00 como valor fixo inicial da corrida, mais R$ 2,00 por km rodado.
Baseado nestas informações, preencha a tabela abaixo:

km rodado	1 km	3 km	5 km	7 km	X km
Total cobrado em (R$)	7,00	11,00	15,00	19,00	23,00

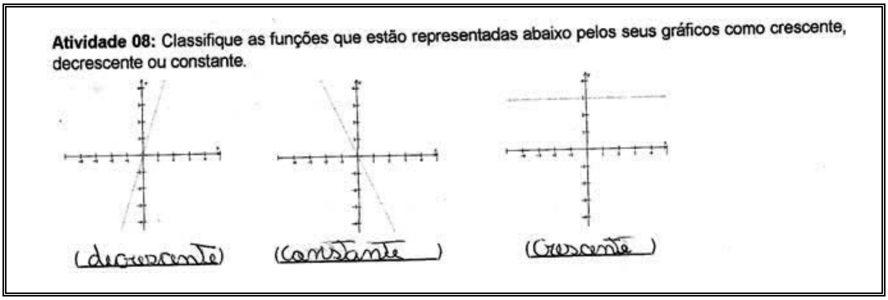
Erro tipo 3 (E3) – relativo à construção de gráficos, quando o aluno construía um gráfico diferente do que era solicitado. Esse tipo de erro não traz grandes prejuízos à compreensão do conceito da função afim, porém limita sua compreensão em diferentes representações. Exemplo:

Atividade 10: Construa um gráfico de segmentos com os dados da tabela abaixo.

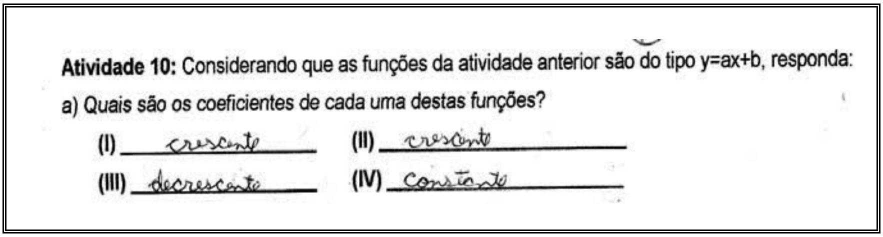
Distância percorrida	2Km	4Km	6Km	8Km
Tempo	1h	3h	5h	7h



Erro tipo 4 (E4) – não reconhece no gráfico as informações sobre a função afim, aconteceu quando o aluno não conseguia identificar se o gráfico em uma dada atividade representava uma função crescente, decrescente ou constante. Para nós, a análise do gráfico de uma função é de suma importância para a construção do conceito de função, pois muitas informações relevantes que estão por traz de um fenômeno modelado por uma função podem ser apresentadas por meio de um gráfico e o início de sua análise é, justamente, a análise do comportamento da função. Exemplo:



Erro tipo 5 (E5) – não conhece os coeficientes de uma função afim, é relativo à identificação do coeficiente angular e linear na representação algébrica. Esse tipo de erro está diretamente associado à representação algébrica da função afim. Entendemos que para a compreensão da representação algébrica de uma função desse tipo é fundamental ter conhecimento de seus coeficientes. Exemplo:



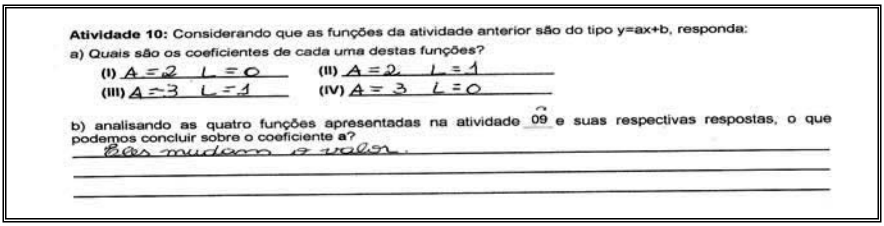
Atividade 10: Considerando que as funções da atividade anterior são do tipo y=ax+b, responda:

a) Quais são os coeficientes de cada uma destas funções?

(I) crescente (II) crescente

(III) decrescente (IV) constante

Erro tipo 6 (E6) – desconhecimento da relação do coeficiente angular de uma função afim com o seu crescimento/decrescimento, aconteceu quando o aluno ainda não conseguia relacionar o coeficiente com o comportamento do gráfico, embora reconhecesse o coeficiente angular de uma função. Esse tipo de erro está diretamente ligado à associação da representação algébrica com a representação gráfica de uma função afim, uma vez que o coeficiente angular determina o crescimento ou o decrescimento deste tipo de função. Exemplo:



Atividade 10: Considerando que as funções da atividade anterior são do tipo y=ax+b, responda:

a) Quais são os coeficientes de cada uma destas funções?

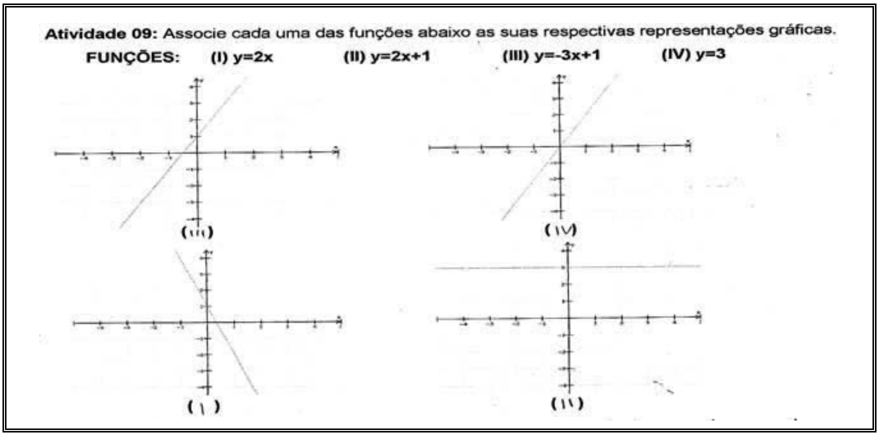
(I) A = 2 L = 0 (II) A = 2 L = 1

(III) A = 3 L = 1 (IV) A = 3 L = 0

b) analisando as quatro funções apresentadas na atividade 09 e suas respectivas respostas, o que podemos concluir sobre o coeficiente **a**?

Eles mudam o valor.

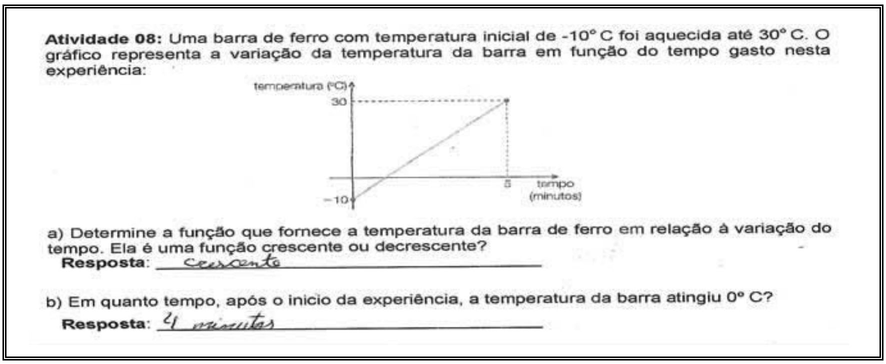
Erro tipo 7 (E7) – não reconhece a expressão algébrica de uma função afim por meio de sua representação gráfica, ocorreu quando o aluno não conseguia associar uma dada representação gráfica a uma expressão algébrica. Exemplo:



Atividade 09: Associe cada uma das funções abaixo as suas respectivas representações gráficas.

FUNÇÕES: **(I) y=2x** **(II) y=2x+1** **(III) y=-3x+1** **(IV) y=3**

Erro tipo 8 (E8) – obtenção de informações (explícitas ou implícitas) presentes no gráfico da função, aconteceu quando o aluno não conseguia localizar uma dada informação presente na representação gráfica da função ou não conseguia fazer uma leitura do gráfico que fosse além dos dados nele representados. Entendemos que esse tipo de leitura gráfica é fundamental para uma análise mais aprofundada da situação que o gráfico representa. Exemplo:



Atividade 08: Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10° C foi aquecida até 30° C. O gráfico representa a variação da temperatura da barra em função do tempo gasto nesta experiência:

a) Determine a função que fornece a temperatura da barra de ferro em relação à variação do tempo. Ela é uma função crescente ou decrescente?

Resposta: crescente

b) Em quanto tempo, após o inicio da experiência, a temperatura da barra atingiu 0° C?

Resposta: 4 minutos

A Tabela 1 apresenta a distribuição dos tipos de erros apresentados pelos alunos do GE no pré e no pós-teste.

Tabela 1. Número de Tipos de Erros no GE no Pré e no Pós-teste.

Tipos de erros	Pré teste	Pós teste	Diferença entre os erros do pré para o pós-teste
E1	5	3	2
E2	26	24	2
E3	73	41	32
E4	52	18	34
E5	69	55	14
E6	9	11	-2
E7	115	59	56
E8	50	11	39
Total	399	222	177

Nota-se que, no geral, a diminuição no número de erros foi de aproximadamente 44%, quando comparamos o pré com o pós-teste. Sabendo que a intervenção de ensino foi realizada em cinco encontros, tal redução em curto espaço de tempo mostra que a intervenção teve um resultado bastante favorável. Essa diminuição, contudo, não ocorreu de forma homogênea em relação a cada tipo de erro. Observamos que após a intervenção houve uma diminuição expressiva dos erros E3, E4, E7 e E8, visto que os erros E4, E7 e E8 apresentaram uma diminuição superior a 50% e o erro E3 diminuiu em aproximadamente 44%. Constatamos que esses erros ocorriam em atividades que envolviam a representação gráfica da função, seja na construção seja em sua interpretação. Tal resultado mostra que a intervenção proposta contribuiu para que os alunos do GE desenvolvessem conhecimentos necessários à construção e interpretação de gráficos de uma função afim.

No entanto, houve pouco avanço em relação aos erros E2 e E5: o erro E2 apresentou uma queda inferior a 8% e o erro E5 não passou dos 20%. Observamos que ambos os erros estão relacionados à representação algébrica da função afim, sendo que o erro E2 estava relacionado à ideia dos usos da letra como variável e o erro E5 estava associado à identificação dos coeficientes da função. Segundo nossa análise, esses erros estão relacionados à representação algébrica. De fato, a instrução inicial acerca da álgebra ocorre no 7º ano do ensino fundamental, com noções do uso da letra como incógnita, não sendo trabalhadas as noções referentes ao seu uso como variável.

A ideia de que as letras podem assumir o papel de variável no âmbito da álgebra, tradicionalmente só é introduzida no 9º ano do ensino fundamental com a instrução inicial de noções acerca das funções afim e quadrática, isto é, dois anos escolares à frente do ano em que a presente intervenção foi proporcionada. Portanto, o fato dos alunos não terem familiaridade com o pensamento algébrico dificultou a manipulação da representação algébrica da função. Acreditamos que uma intervenção com mais encontros voltados para o trabalho com o registro algébrico da função, poderia ser um caminho eficiente para a diminuição dos erros E2 e E5.

Conclusões e Discussão

A partir dos resultados obtidos é possível afirmar que a intervenção de ensino proposta neste estudo contribuiu para a aprendizagem dos alunos em relação à função afim.

Consideramos que a introdução deste conceito no 7º ano do ensino fundamental por meio da resolução de problemas e da modelação matemática (Biembengut & Hein, 2007) é uma estratégia viável e de grande valia para o processo de ensino-aprendizagem. De fato, a opção por tal método de ensino nos permitiu trabalhar com sucesso vários aspectos cruciais na introdução do conceito de função.

Diante dos resultados favoráveis, em que algumas noções parecem ter sido compreendidas pelos alunos do GE (como o crescimento e decrescimento de uma função, construção de gráficos), acreditamos que a introdução do conceito de função afim possa ocorrer já no 7º ano do ensino fundamental, podendo ser feita a partir da resolução de problemas no âmbito da modelação.

O fato dos alunos terem sempre à frente de si uma situação familiar e instigante como a bomba d'água, cuja solução envolvia o domínio das noções básicas da função afim, fez com que esses alunos tivessem interesse na aprendizagem dessas noções. Além disso, o resultado de tal aprendizado permitiu que os alunos pudessem manipular e obter diferentes comportamentos da bomba d'água, bem como entender o comportamento de outros fenômenos a ela relacionados por meio de sua modelação.

Ainda que algumas noções não tivessem sido plenamente compreendidas, como o uso da letra como variável, acreditamos que a utilização dessa noção já no 7º ano do ensino fundamental é uma possibilidade. Isto porque entendemos que o processo de aprendizagem não se dá de maneira sequencial, mas em forma espiral, em que as situações diversificadas contribuem para que, a cada nova volta, o conhecimento inicial seja expandido. Assim, defendemos a importância do aluno, desde cedo, passar a ter contato com as diversas significações que a letra pode ter no âmbito da álgebra, proporcionando, assim, a construção do conhecimento nesse campo da Matemática em que, geralmente, apresenta dificuldades.

Referências

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema*, 15, 5-23.

Bassanezi, R. C. (2006). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, São Paulo, SP: Contexto Ed.

Biembengut, M. S. & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no ensino*. São Paulo, SP: Contexto Ed.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF.

Campos, C. R. (2007). *A Educação Estatística: Uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação.* Tese de Doutorado não-publicada. Rio Claro, SP: UNESP.

D´Ambrósio, U. (2004). Ethnomathmatics and its place in the history and pedagogy of mathematics. Em P. C. Thomas, A. John, J. Dossey & L. Koehler. (Orgs.), *Classics in Mathematics Education Research* (pp. 194-199). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

D'Ambrosio, U. (1993) Etnomatemática: um programa. *Educação Matemática em Revista*, 1, 5-11.

D'Ambrosio, U. (1999). O Programa Etnomatemática e questões historiográficas e Metodológicas. *VI Congresso brasileiro de Filosofia*. São Paulo, Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm. Acesso em: 18 nov. 2010.

Jacobini, O. R. E. & Wodewotzki, M. L. L. (2001). Modelagem matemática aplicada no ensino de estatística nos cursos de graduação. *Bolema* ,15, 45-68.

McLone, R. R. (1984). Can mathematical modelling be taught? Em J. S. Berry, D. N. Burghes, I. D. Huntley, D. J. G. James & A. O. Moscardini (Orgs.), *Teaching and Applying Mathematical Modelling* (pp. 476-483). NY: Ellis Horwood Ltd.

Pires R. F. (2009). *O uso da modelação matemática na construção do conceito de função.* Dissertação de Mestrado não-publicada. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica São Paulo, SP.

A CONSTRUÇÃO DE ÁRVORES DE POSSIBILIDADES COM RECURSO COMPUTACIONAL: O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE KARINE E VITÓRIA

Rute Elizabete S. Rosa Borba e Juliana Azevedo
Universidade Federal de Pernambuco

Introdução

Problemas combinatórios, nos quais devem ser listadas ou enumeradas possibilidades, são situações ricas em termos de aprendizado e desenvolvimento matemático, uma vez que se caracterizam pela variedade de contextos e de tipos diferentes de problemas, sendo necessário que se analise cada situação com cuidado para identificar quais os elementos a serem escolhidos e de que forma devem ser combinados. Desse modo, situações combinatórias constituem-se em problemas na essência do que seja uma situação problematizadora, ou seja, situação na qual há dados e conhecimentos que possibilitam sua solução, mas não se tem de partida a estratégia de resolução já pensada, sendo necessária uma análise cuidadosa do que é posto, do que se deseja determinar e de forma(s) a se chegar à resposta esperada (Borba, 2010).

O levantamento de casos possíveis de situações combinatórias também auxilia na análise de probabilidades; pois para o julgamento do que seja provável, improvável e impossível, pensar em possibilidades se faz necessário e pode auxiliar a distinguir entre o que acontece na realidade e o que é possível de acontecer. Assim, a combinatória é estreitamente relacionada à probabilidade e à estatística.

Entendemos o *raciocínio combinatório* como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de *escolha* e/ou *ordenação* dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis. Este modo de pensar está presente em situações variadas do cotidiano, tais como organizações de equipes e de campeonatos esportivos, bem como é aplicado em variadas áreas do conhecimento, em situações classificatórias, por exemplo, da Biologia, Química, Estatística e Ciências da Computação.

Além da Combinatória ter aplicações práticas e estar relacionado a outras áreas do conhecimento, é importante o desenvolvimento do *raciocínio combinatório*, pois este possui um caráter hipotético-dedutivo; sendo, portanto, base de raciocínio científico no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras. Por esse motivo, e os anteriormente descritos, o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino na educação básica.

Como uma forma de pensamento, o *raciocínio combinatório* pode ser desenvolvido por interações com o meio social e cremos que a escola desempenha um importante papel nesse desenvolvimento. Para tanto, na escola pode-se utilizar recursos variados de ensino, tais como a análise e resolução de problemas combinatórios por intermédio de desenhos, de listagens, de elaboração de árvores de possibilidades e de construção e uso de fórmulas. Salienta-se que esses recursos podem, ou não, serem desenvolvidos com o auxílio de computadores.

Pelos motivos expostos, é importante o estudo de como ocorre o desenvolvimento do raciocínio combinatório e dos possíveis meios que podem ser ferramentas para o ensino da combinatória. Em particular, o uso de árvores de possibilidades pode ser um meio de entendimento das diferentes situações combinatórias, pois permite sistematicamente observar quais as possíveis combinações e selecionar os casos válidos para cada situação enunciada.

Neste capítulo discutiremos a natureza dos problemas combinatórios e o que estudos anteriores apontaram acerca do desenvolvimento do raciocínio combinatório. A análise de como um recurso computacional (o *software Diagramas de Árbol*), o qual permite a construção de árvores de possibilidades, pode ser uma ferramenta eficaz de ensino da Combinatória será apresentada a partir do estudo de caso de duas crianças de 10 anos de idade – Karine e Vitória – na época da pesquisa cursando o 5º ano escolar (2º ano do 2º ciclo) numa escola pública e que vivenciaram o uso do *software Diagramas de Árbol*.

Tipos de problemas combinatórios

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) recomendam que desde os anos iniciais do ensino seja tratada uma variedade de situações combinatórias – com significados diversos e por meio de recursos de solução diferentes.

Pessoa e Borba (2009), a partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), defendem que distintos significados presentes em problemas de Combinatória sejam abordados desde os anos iniciais de escolarização. Estas autoras – amparadas por resultados de investigação empírica apresentados a seguir – argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com problemas de *produto cartesiano*, *permutação, arranjo* e *combinação*. A justificativa é a de que há relações básicas de Combinatória contidas nestes quatro significados e levar os estudantes a terem contato com esta variedade de situações pode possibilitar um mais amplo desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Acredita-se que deve ser desenvolvido um trabalho contínuo com esses quatro significados e não uma ênfase inicial em um único significado combinatório (o *produto cartesiano* que é o problema explicitamente trabalhado nos anos iniciais) e, posteriormente, quando do estudo da Análise Combinatória, o trabalho com outros significados (*permutação*, *arranjo* e *combinação*).

Atividades com diferentes significados de problemas combinatórios podem levar os estudantes a observarem similaridades e diferenças entre as situações – em termos de conjunto(s) a partir do(s) qual(is) os elementos devem ser escolhidos; da ordenação implicando, ou não, em possibilidades distintas; da possibilidade, ou não, de repetição de elementos; e, em casos especiais, de condições impostas – como certos elementos ocupando determinadas posições. Assim, relações e propriedades invariantes (de *escolha*, de *ordenação* e de *repetição de elementos*, bem como de *condições* impostas à disposição desses elementos[1]) das situações combinatórias podem ser amplamente trabalhadas a partir de problemas de *produto cartesiano*, de *permutação*, de *arranjo* e de *combinação*.

Os problemas de *produto cartesiano* são os explicitamente trabalhados nos anos iniciais de escolarização e, por vezes, são tratados erroneamente como tipo único de situação combinatória que os estudantes têm condições de abordar inicialmente. O que caracteriza um *produto cartesiano*, diferentemente de outras situações combinatórias, é que devem ser combinados elementos diferentes de dois ou mais conjuntos distintos. Pode-se, por exemplo, solicitar que sejam determinados os possíveis casos de números de dois algarismos com o primeiro algarismo escolhido dentre o conjunto {2, 6 e 8} e o segundo algarismo dentre o conjunto {4, 5, 6 e 7}. Tem-se, assim, dois conjuntos a partir dos quais deve-se combinar um elemento de um conjunto com um de outro. Obtém-se 12 diferentes números de dois algarismos: 24, 25, 26, 27, 64, 65, 66[2], 67, 84, 85, 86 e 87. É possível que os estudantes generalizem – a partir da observação de vários casos – que o número de possibilidades geradas por conjuntos com n e com m elementos, respectivamente, pode ser determinado pelo produto $n \times m$. As relações invariantes de produtos cartesianos – em qualquer contexto utilizado – são essas: as escolhas são efetuadas a partir de dois ou mais conjuntos distintos e o número total de possibilidades pode ser obtido pelo produto dos números de elementos de cada

---

[1] Nesse capítulo não serão enfatizados os casos de repetição de elementos, nem de situações combinatórias condicionais nas quais há determinadas condições específicas – como alguns elementos estarem em certos posicionamentos.

[2] A repetição do algarismo 6 se dá, nesse caso, porque este faz parte da escolha de elementos do primeiro conjunto e de escolha de elementos do segundo conjunto.

um desses conjuntos distintos. O *princípio fundamental da contagem*[3] justifica esse produto, uma vez que há três possibilidades de escolha para o primeiro algarismo e quatro para o segundo algarismo, sendo o número total o resultado do produto 3 x 4.

O que caracteriza problemas de *permutação*[4] é que os elementos a serem escolhidos pertencem a um conjunto único (diferentemente dos problemas de *produto cartesiano* os quais implicam em escolhas de elementos de dois ou mais conjuntos). Uma particularidade das *permutações* é que todos os elementos compõem cada uma das possibilidades e as diferentes ordens em que são dispostos os elementos constituem as distintas possibilidades. Poder-se-ia ter, por exemplo, os números de quatro algarismos gerados a partir dos algarismos 1, 2, 3 e 4. As possibilidades, nesse caso, são: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4131, 4213, 4231, 4312 e 4321. Pelo *princípio fundamental da contagem* tem-se para a primeira escolha quatro possibilidades e, sem repetição, haverá três possibilidades para a segunda escolha, duas possibilidades para a terceira escolha e apenas uma para a quarta escolha. Dessa forma, há ao todo 24 possibilidades (resultante do produto 4 x 3 x 2 x 1).

Nos *arranjos* deve-se considerar como *relações combinatórias* a da *escolha* de *m* elementos dentre os *n* elementos de um conjunto único e a de que a *ordem* de

---

[3] Segundo Smole e Diniz (2003, p. 58), o *princípio fundamental da contagem* pode ser enunciado da seguinte forma: "... se temos um acontecimento formado por diversas etapas... no qual conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizar, multiplicando todos esses números, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar".

[4] *Permutações* podem ser consideradas como casos particulares de *arranjos* nos quais o número de elementos do conjunto de escolha (n) é igual ao número de elementos escolhidos (m).

escolha dos elementos gera possibilidades distintas. Dessa forma, *arranjos* e *permutações* assemelham-se entre si em termos de escolhas a partir de um conjunto único e da ordem dos elementos determinando possibilidades distintas. Entretanto, esses significados se diferenciam no sentido que em *permutações* todos os elementos são dispostos em ordens variadas e em *arranjos* têm-se alguns elementos escolhidos dentre o conjunto dado. Como exemplo pode-se ter as possibilidades de números de dois algarismos, sem repetição, formados a partir dos algarismos 1, 2, 3 e 4. Nesse caso, haveriam quatro possibilidades de escolha do 1º algarismo e três possibilidades de escolha do segundo algarismo, o que resulta – segundo o *princípio fundamental da contagem* – em 12 diferentes números: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42 e 43. Observa-se claramente que a ordem de escolha dos elementos gera possibilidades distintas, pois o número 12 é distinto do número 21, dentre outros.

Finalmente, no quarto tipo de problema combinatório – as *combinações* – também são escolhidos alguns elementos do conjunto, mas a ordem de escolha desses elementos não gera possibilidades distintas. Se, por exemplo, forem formados segmentos de retas a partir dos pontos A, B, C, D e E, tem-se ao todo 10 segmentos de retas distintos formados. Para a escolha do primeiro ponto há cinco possibilidades e quatro possibilidades para a escolha do segundo ponto. O produto resultante (5 x 4 = 20), deve, entretanto, ser dividido pela permutação entre si dos dois pontos escolhidos, uma vez que, por exemplo, são idênticos os segmentos de reta AB e BA, formados pelos pontos A e B. A permutação de dois elementos é 2 e, assim, as 20 possíveis possibilidades devem ser divididas por 2, resultando em 10 segmentos de reta distintos, quais sejam: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE. As propriedades combinatórias observadas nas *combinações* são, portanto, *relações* de *escolha* de elementos a partir de um conjunto maior (à semelhança de *arranjos*), mas, no que diz respeito à *ordenação,* a ordem de disposição dos elementos não gera *combinações* distintas.

Observa-se, em termos de *relações combinatórias*, que *permutações*, *arranjos* e *combinações* possuem em comum a propriedade de que são escolhidos elementos a partir de um único conjunto dado – diferentemente dos *produtos cartesianos* nos quais elementos são escolhidos de dois ou mais conjuntos. A ordem de escolha dos elementos é característica típica de *permutações* e *arranjos*, mas não geram distintas possibilidades no caso de *combinações* ou de *produtos cartesianos*.

Sondando o conhecimento combinatório

Os precursores dos estudos psicológicos sobre a Combinatória foram Inhelder e Piaget (1976), os quais investigaram a resolução de problemas de *permutação*. Estes pesquisadores apontaram estágios de desenvolvimento do raciocínio combinatório e observaram que em torno de 12 anos as crianças desenvolvem métodos sistemáticos de enumeração de todas as permutações de elementos de um conjunto. Segundo esses autores os níveis de compreensão dos problemas de permutação variam desde a dificuldade em compreender que os mesmos elementos podem ser arrumados de maneiras diferentes, passando por estágios nos quais conseguem – por ensaio e erro – encontrar algumas das permutações ou todas as permutações possíveis, até estágios mais avançados nos quais têm certeza que encontraram todas as possibilidades e conseguem generalizar procedimentos, de modo a saber determinar quantas são as permutações de conjuntos com mais elevados números de possibilidades.

Schliemann (1988) também pesquisou a resolução de *permutações*, sendo sua investigação realizada com adultos escolarizados (estudantes recém-aprovados no exame vestibular para a universidade) e com pouca escolarização (cambistas do jogo do bicho e outros trabalhadores do mesmo grupo sócio-econômico). Os desempenhos dos estudantes universitários foram significativamente superiores aos dos cambistas, mas salienta-se que, mesmo com pelo menos 12 anos de escolarização, grande parte dos estudantes encontrava-se em níveis baixos de raciocínio combinatório. Observou-se que o tempo de escolarização teve maior efeito no desempenho do que o fato de se ter tido instrução específica em Combinatória. Diferenças significativas também foram encontradas entre os desempenhos dos cambistas e dos trabalhadores de outras profissões, mas a experiência constante com o jogo do bicho não foi suficiente para promover uma abordagem sistemática nos problemas de *permutação*.

Miguel e Magina (2003) investigaram estratégias de estudantes de 1º ano de Licenciatura em Matemática na resolução de *permutações* simples e com repetição, de *arranjos* simples e com repetição e de *combinações*. No questionário aplicado foram considerados o tipo de problema combinatório, a ordem de grandeza da resposta e o número de etapas necessárias na determinação das possibilidades, dentre outras variáveis. Foram observados efeitos dessas variáveis no nível de dificuldade que os licenciandos apresentaram. Dentre as implicações colocadas, os autores apontaram que diagramas de árvores de possibilidades podem ser úteis no levantamento sistemático de possibilidades e devem prescindir ao uso de fórmulas.

Moro e Soares (2006) pesquisaram como crianças dos atuais 6º e 7º ano de escolarização resolvem problemas de *produto cartesiano*. As autoras descrevem níveis de raciocínio combinatório numa progressão de *respostas alheias ao contexto do problema*, passando por *respostas contextualizadas, mas sem indícios combinatórios* até chegar a *soluções combinatórias*. As autoras apontaram que estratégias mais bem sistematizadas possibilitaram o desenvolvimento progressivo de soluções combinatórias.

Pessoa e Borba (2010) analisaram o desempenho de 568 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio ao resolverem problemas de *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*. Além de observarem os desempenhos nos distintos significados de Combinatória, também foram descritas estratégias e formas de representação simbólica utilizadas pelos participantes do estudo. Desde os anos iniciais foram observadas variadas e ricas formas de abordar as situações combinatórias, evidenciando que o desenvolvimento do raciocínio combinatório inicia-se cedo. A maior dificuldade observada – em todos os níveis de ensino – foi a de determinar o número total de possibilidades, em particular nos problemas nos quais havia elevado número de possibilidades envolvidas.

Um grande número de participantes do estudo de Pessoa e Borba (2010) reconheceu as particularidades dos diferentes significados de combinatória, ou seja, as distintas relações combinatórias envolvidas em *produtos cartesianos*, *permutações*, *arranjos* e *combinações*. Observou-se um melhor desempenho com o aumento no nível de escolarização, mas salienta-se que estudantes de distintos anos de escolaridade utilizavam, por diversas vezes, as mesmas estratégias de resolução (desenhos, listagens, quadros, árvores de possibilidades, multiplicações, princípio fundamental da contagem, observação de regularidades e fórmulas, esta última usada apenas por estudantes do Ensino Médio). As estratégias variavam em estabelecimento, ou não, de relações combinatórias corretas e em menor ou maior sistematização utilizadas na solução apresentada. Melhores desempenhos foram obtidos quando o significado era o de *produto cartesiano* e mais fraco desempenho nos demais problemas combinatórios.

Spinillo e Silva (2010) e Silva e Spinillo (2011) testaram a hipótese de que a explicitação de princípios combinatórios em enunciados de problemas de *produto cartesiano* pode auxiliar crianças na resolução de problemas com esse significado combinatório. Participaram do estudo 40 crianças de sete e oito anos que resolveram problemas de *produto cartesiano* em duas situações: com os princípios omitidos ou com princípios explicitamente mencionados. Verificou-se que as crianças apresentaram desempenho significativamente melhor quando os princípios eram explicitados e também se saíram bem em situações de princípios omitidos quando esses eram resolvidos após os de situações com princípios explicitados. Concluiu-se que problemas de *produto cartesiano* podem ser resolvidos com maior sucesso por crianças de sete e oito anos de idade quando nos enunciados são explicitados os princípios desse significado combinatório.

O conjunto de estudos de sondagem evidencia a possibilidade de desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de um maior período de escolarização – mas não necessariamente pelo estudo específico da

Combinatória – e, em alguns casos particulares – como o de cambistas do jogo do bicho – por meio de experiências extra-escolares, como as vivenciadas no exercício de certas profissões. Dentro da escola, ricas experiências com situações combinatórias podem ser vivenciadas, nas quais os estudantes sejam levados a refletirem sobre propriedades e relações combinatórias gerais e específicas a cada tipo de problema.

Se a escola pode ter grande influência no desenvolvimento do raciocínio combinatório, é importante a investigação de processos de intervenção que possam possibilitar avanços na compreensão da Combinatória por parte dos indivíduos. Estudos dessa natureza são apresentados a seguir.

Serão enfatizados estudos realizados com estudantes, mas salienta-se que é também importante investigar o conhecimento e intervir nos saberes de professores, pois estudos (como o de Rocha & Borba, 2010) têm apontado que docentes precisam se apropriar de *conhecimentos dos conteúdos*[5] específicos (em particular da Combinatória), bem como de *conhecimentos didáticos dos conteúdos* (modos como se pode auxiliar estudantes a desenvolverem – por meio de intervenções significativas – seus raciocínios combinatórios). O domínio, por parte dos docentes, de conhecimentos da Combinatória – sob o ponto de vista matemático, cognitivo e

---

[5] Shulman (2005) aponta como conhecimentos imprescindíveis ao professor: a) conhecimento do conteúdo; b) conhecimento didático geral; c) conhecimento do currículo; d) conhecimento didático do conteúdo; e) conhecimento de estudantes e de suas características; f) conhecimento dos contextos educativos; e g) conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos.

educacional – é necessário para um bom ensino e, consequentemente, ricas aprendizagens em situações combinatórias.

Intervindo no desenvolvimento do raciocínio combinatório

Fischbein (1975) defendeu que a instrução escolar desempenha um grande papel no desenvolvimento do *raciocínio combinatório*. Segundo esse autor, técnicas combinatórias não são adquiridas espontaneamente, nem mesmo no período das operações formais, mas podem ser estimuladas desde o período das operações concretas por meio de intuições já possuídas pelas crianças. Estas conclusões foram tiradas a partir de estudo empírico (Fischbein, Pampu & Manzat, 1970) no qual a instrução – em particular com o uso de árvores de possibilidades – permitiu avanços no desenvolvimento deste modo de pensar, auxiliando estudantes, de 10 anos de idade, em suas faltas de capacidade de enumeração sistemática.

Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) objetivaram contribuir para reverter o quadro de dificuldade de muitos estudantes mexicanos em resolverem problemas que necessitam de análise combinatória. Para a superação de dificuldades dos estudantes, as autoras utilizaram um *software* – *Diagramas de Árbol* **-** Aguirre (2005) – que explora situações combinatórias por meio da construção de árvores de possibilidades. O *software* permite o levantamento de *produtos cartesianos*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*, utilizando cores para destacar possibilidades viáveis. Participaram da pesquisa 25 estudantes mexicanos de 11 a 13 anos e observou-se que o *software* permitiu que fossem representadas as situações combinatórias variadas e se desenvolvessem estratégias mais eficientes para abordá-las.

De modo semelhante, Ferraz, Borba e Azevedo (2010)[6] analisaram como o *software Diagramas de Árbol* pode auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório a partir da construção de árvores de possibilidades. Foram acompanhados 19 estudantes de 7º ano de escolarização, agrupados em duplas e trios, os quais resolveram oito problemas combinatórios. Cada problema possuía dois itens que envolviam números que levavam a menor (Item a) e a maior (Item b) número de possibilidades na solução, sendo o primeiro item solucionado com o auxílio do *software* e o segundo item por meio de estratégia de resolução escolhida pelos estudantes. Também foram realizadas entrevistas com pelo menos um integrante de cada dupla ou trio, acerca das vantagens e desvantagens do *software* utilizado.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) verificaram que a árvore de possibilidades – seja a virtualmente produzida por intermédio do recurso computacional, seja a que os estudantes construíam no lápis e papel – pode ser um recurso que auxilie os estudantes na compreensão dos diferentes significados presentes em problemas combinatórios. Apesar da expectativa anteriormente levantada, verificou-se, entretanto, que o uso do *software* para os primeiros itens do tipo a (com menor número de possibilidades), nem sempre foi suficiente para auxiliar os estudantes na generalização necessária para o item b – no qual a representação de todas as possibilidades era inviável, pois eram muitas.

---

[6] O *software Diagramas de Árbol* foi disponibilizado para uso do Geração - Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação – UFPE.

Os estudantes apontaram como principal vantagem do *Diagramas de Árbol* a praticidade na resolução das questões, uma vez que o *software* lista todas as possibilidades e, a partir destas, o estudante identifica os casos válidos (por meio do recurso de destaque por cores). Os estudantes indicaram como uma das maiores desvantagens a de, em casos de grande número de possibilidades, não ser possível visualizar todas ao mesmo tempo na tela.

Azevedo, Costa e Borba (2011) realizaram um estudo de intervenção utilizando o mesmo *software* – *Diagramas de Árbol* – com o objetivo de analisar como o mesmo pode ajudar crianças do 5º ano do Ensino Fundamental na compreensão de problemas combinatórios. Antes da escolha desse *software*, foram analisados (a partir do estudo de Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e buscando outras fontes) variados *software*s e objetos de aprendizagem. O *Diagramas de Árbol* foi escolhido diante das limitações dos demais identificados. Dentre os *software*s e objetos de aprendizagem analisados, o que melhor atendeu a requisitos básicos de eficiência de recursos computacionais (como os apontados por Gomes, Castro Filho, Gitirana, Spinillo, Alves, Melo & Ximenes, 2002) foi, também, o *Diagramas de Árbol.*

Participaram da pesquisa de Azevedo, Costa e Borba (2011) 16 estudantes de uma escola da rede municipal de ensino da cidade do Recife. Por meio da comparação de um teste inicial com um teste final realizado após duas sessões de intervenção, foi constatado um bom avanço na compreensão desses estudantes em problemas combinatórios. Este avanço foi notado principalmente em três tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *combinação* e *arranjo*).

Os avanços observados por Azevedo, Costa e Borba (2011) podem ser atribuídos principalmente, ao fato das pesquisadoras realizarem a intervenção ressaltando as propriedades e relações de cada situação combinatória, ou seja, enfatizando a seleção dos elementos dos conjuntos e a influência da ordenação desses elementos – uma vez que se tratava apenas de problemas sem repetição de elementos e não condicionais (nos quais determinados elementos devem, por exemplo, ocupar certas posições). Dessa forma, o uso do *software* em questão favoreceu, significativamente, na compreensão de problemas combinatórios por parte dos estudantes.

O conjunto de estudos realizados com o *software Diagramas de Árbol* aponta que um recurso computacional como este pode ser útil no ensino da Combinatória, uma vez que pode auxiliar na análise de *produtos cartesianos*, *permutações*, *arranjos e combinações*. O desenho da árvore como um todo – com todas as suas ramificações – efetuado pelo computador, possibilitará que os estudantes se concentrem na análise da situação apresentada, na identificação dos elementos a serem selecionados e na seleção das possibilidades válidas.

Barreto e Borba (2011) desenvolveram intervenções pedagógicas na Educação de Jovens e Adultos para auxiliar na superação de dificuldades com problemas combinatórios. Inicialmente, participaram da pesquisa dez estudantes do Módulo III da EJA (equivalente ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental). Posteriormente, nova coleta de dados foi efetuada com maior número de estudantes e de diferentes módulos. O método estruturou-se em três momentos: um pré-teste, uma intervenção e um pós-teste. No pré-teste, a maioria dos estudantes não apresentou acertos, sendo suas respostas sem estabelecimento de relação com o que era solicitado nos problemas. Nas intervenções foram abordados os significados da Combinatória, a partir da exploração de diferentes situações, chamando a atenção dos estudantes para a percepção de particularidades de cada significado, assim como se procurou analisar o uso de distintas formas de representações simbólicas (árvores de possibilidades e listagens). Alguns estudantes trabalharam apenas com árvores de possibilidades, outros apenas com listagens e outros com ambos. Apesar de apenas uma sessão de intervenção, nos pós-testes foram observados avanços nos desempenhos de todos os estudantes, o que mostra a importância de intervenções pedagógicas sistemáticas para auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Ambas as formas de representação utilizadas – árvores de possibilidades e listagens – auxiliaram os estudantes a pensarem sobre as propriedades e relações envolvidas e, assim, possibilitaram melhores desempenhos após a sessão de intervenção. Portanto, pensar sobre propriedades e relações combinatórias – auxiliado por formas de representação significativas – pode propiciar ricos desenvolvimentos do raciocínio combinatório.

O conjunto de estudos de intervenção aqui relatados evidencia que por meio do uso de árvores de possibilidades – construídas com ou sem auxílio de recurso computacional – estudantes de diferentes idades e experiências escolares podem vir a desenvolver um melhor entendimento de problemas combinatórios. A construção de árvores possibilita que sejam analisadas particularidades de distintos significados – *produtos cartesianos*, *permutações*, *arranjos* e *combinações*. A transparência das possibilidades elencadas por meio de árvores de possibilidades permite o estudante *visualizar* casos válidos e não válidos (como nas situações nas quais distintas ordens de disposição dos elementos não constituem casos diferentes).

A seguir tem-se a descrição de como uma dupla de crianças de 10 anos de idade – Karine e Vitória – participaram de um estudo no qual utilizaram o *software Diagramas de Árbol* para resolverem problemas combinatórios. São descritos seus conhecimentos iniciais e como foi o processo de intervenção do qual participaram, bem como são analisados os avanços em seus aprendizados após a construção de árvores de possibilidades no referido *software*.

O Estudo: A Participação de Karine e Vitória

Karine e Vitória estudavam, na época que participaram do estudo, no 5º ano (2º ano do 2º ciclo) do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal do Recife. Neste ano escolar os estudantes podem ter tido algum contato com problemas combinatórios, uma vez que grande parte dos livros didáticos para esse nível de ensino traz problemas combinatórios – explicitamente problemas de *produto cartesiano*, mas também implicitamente com outros significados (*permutação*, *arranjo* e *combinação*). Entretanto, no contato inicial com as meninas, havia pouca evidência da participação delas em instrução sistemática com os diferentes significados de problemas combinatórios.

Karine e Vitória foram participantes do estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011), sendo selecionadas como estudo de caso – para apresentação e discussão dos avanços em seus raciocínios combinatórios – por constituírem uma das duplas que apresentou melhores desempenhos após sessões de intervenção auxiliadas pelo uso do *software Diagramas de Árbol* (Aguirre, 2005). Salienta-se, entretanto, que todas as crianças do referido estudo apresentaram melhoras após as sessões de intervenção.

Antes de participarem do estudo de intervenção pedagógica em Combinatória, as duas meninas responderam individualmente, e por escrito, um teste de oito questões sendo dois problemas com cada significado da Combinatória (*produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*). Em cada significado, um dos problemas resultava em menor número de possibilidades (até 12) e o outro apresentava como resposta um maior número de possibilidades (entre 15 e 24).

Dois dias após o teste inicial, Karine e Vitória iniciaram suas participações em duas sessões de intervenção nas quais resolveram problemas combinatórios utilizando o *software Diagramas de Árbol*. A escolha do *software* deu-se pelos resultados obtidos em estudos anteriores (Sandoval, Trigueiros & Lozano, 2007; Ferraz, Borba & Azevedo, 2010), que, em alguns casos, envolveram crianças da idade de Karine e Vitória, bem como pela possibilidade de um aprendizado em um ambiente computacional no qual há alívio do trabalho manual de listagem de todas as possibilidades, ficando-se mais livre para concentrar-se na análise estrutural das situações. O referido *software* também traz a possibilidade de trabalhar com diferentes significados combinatórios ressaltados por Pessoa e Borba (2010).

Na primeira sessão as meninas resolveram no *software* – com a ajuda das pesquisadoras – os oito problemas do teste inicial (apresentados no Quadro 1).

Quadro 1. Situações-problema resolvidas no teste inicial e trabalhadas na primeira sessão de intervenção.

Produto Cartesiano:

1. Numa lanchonete há quatro tipos de suco (laranja, graviola, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender quatro animais (um cachorro, um passarinho, um peixinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa seis frutas (mamão, manga, abacaxi, laranja, banana e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Quatro crianças (Joaquim, Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar as letras X, Y, Z, K e W e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que se repitam as letras?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba (2011, p. 3).

Uma das pesquisadoras apresentou os procedimentos básicos de uso do *software* para que as crianças se familiarizassem com os recursos oferecidos pelo *software*. Karine e Vitória foram, então, solicitadas a falarem como inicialmente tinham entendido cada uma das questões e, com o auxílio das pesquisadoras, resolviam as situações utilizando o *software*. Elas definiam as variáveis envolvidas (tipo de suco e tamanho de copo, por exemplo) e listavam os elementos de cada um dos conjuntos. A partir da observação da árvore gerada pelo computador, as meninas discutiam com as pesquisadoras e chegavam à resposta de quantas eram as possibilidades em cada um dos problemas apresentados.

Na segunda sessão, realizada cinco dias após a primeira, as meninas responderam a mais quatro problemas (um de cada significado combinatório) por meio do uso do *Diagramas de Árbol*, com pouco auxílio das pesquisadoras. Nas quatro situações trabalhadas o número total de possibilidades variava entre 15 e 24 (Quadro 2).

Quadro 2. Situações-problema trabalhadas na segunda sessão de intervenção.

Produto Cartesiano: 1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio havia cinco opções de comida (cachorro quente, coxinha, empada, brigadeiro e bolo) e quatro tipos de bebida (suco de laranja, suco de morango, refrigerante e água). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida e um tipo de bebida? **Combinação:** 2. Felipe, Sandra, Carla, Francisco, Henrique e Ana vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas? **Arranjo:** 3. Cinco turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C, Turma D e Turma E) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e segundo lugar no torneio? **Permutação:** 4. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba (2011, p.4).

A maior ordem de grandeza dos números visava verificar se as crianças poderiam lidar bem com as situações nas quais a árvore completa não estivesse visível, o que exigiria delas alguma generalização da situação. Por exemplo, se num ramo há seis possibilidades e há quatro ramos, então, há no total 6 x 4 possibilidades. Dessa forma, as crianças tinham que analisar cada situação, definir as variáveis envolvidas, listar os elementos de cada conjunto e interpretar a árvore gerada pelo *software*.

Uma semana após a realização da segunda sessão de intervenção, Karine e Vitória realizaram, individualmente e por escrito, o segundo teste, com o objetivo de se verificar os avanços ocorridos em suas compreensões de distintas situações combinatórias. As questões do segundo teste foram elaboradas usando os mesmos critérios do teste inicial, como se pode observar no Quadro 3. Havia, assim, oito problemas, sendo dois de cada significado combinatório e metade dos problemas resultava em um número menor de possibilidades e a outra metade tinha como resposta um número maior de possibilidades.

Quadro 3. Situações-problema apresentadas no teste final.

Produto Cartesiano:

1. Jane possui cinco blusas (amarela, rosa, laranja, vermelha e cinza) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?
2. Para um teste de teatro estão inscritos quatro meninos (Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Roberta, Caroline, Kátia e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

Combinação:

3. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Roberto, Ângela, Luiza e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

4. Sete pessoas (Beatriz, Joana, Carlos, Marcos, Fátima, George e Marina) foram apresentadas umas às outras. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

Arranjo:

5. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os algarismos 2, 4, 6 e 8?
6. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há cinco alunos (Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras possíveis estes alunos podem ser eleitos para os cargos de representante e vice-representante?

Permutação:

7. Gabriela ganhou um porta-jóias com três compartimentos. Ela possui um anel, um colar e uma pulseira para guardar no seu novo porta-jóias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas jóias?
8. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba (2011, p. 4).

A seguir, apresentaremos como Karine e Vitória procederam nas fases de teste do estudo (na avaliação inicial e na avaliação final) e também discutiremos como o *software* foi utilizado nas sessões de intervenção. Além disso, analisaremos as estratégias utilizadas antes e após as sessões de intervenção.

A compreensão inicial de Karine sobre situações combinatórias

Inicialmente, Karine acertou apenas os dois problemas de *produto cartesiano.* Este significado combinatório é o único que é explicitamente trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, provavelmente, Karine havia tido algum contato anterior com problemas deste tipo. Ela utilizou procedimentos semelhantes na resolução dos dois problemas, nos quais listou os elementos dos dois conjuntos dados e, por intermédio de um produto, obteve o total de possibilidades da situação. Na Figura 1 pode-se observar como Karine resolveu, no teste inicial, do segundo problema de *produto cartesiano* – o que resultava em maior número de possibilidades.

Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

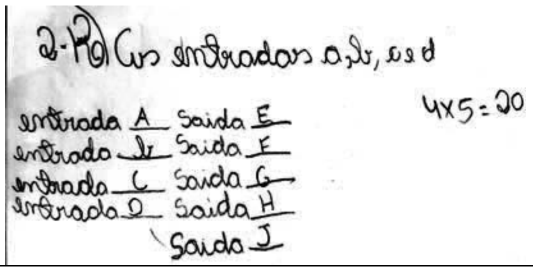


Figura 1. Solução correta de Karine, no teste inicial, do segundo problema de *produto cartesiano*.

Karine, de alguma forma, reconheceu que nos demais problemas havia escolha de possibilidades e, portanto, de natureza multiplicativa, mas utilizou procedimentos incorretos para resolvê-los. Na Figura 2 pode-se observar a sua solução para o primeiro problema de *combinação* – o qual resultava em um menor número de possibilidades.

Na loja de bichos de estimação há para vender quatro animais (um cachorro, um passarinho, um peixinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

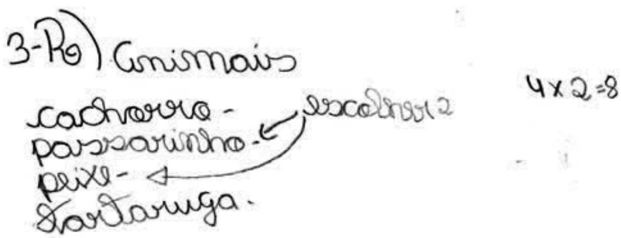


Figura 2. Solução incorreta de Karine, no teste inicial, do primeiro problema de *combinação*.

Karine incorretamente multiplicou os valores dados no enunciado do problema (4 x 2 = 8). Apesar de reconhecer a natureza combinatória da situação, ela erroneamente generalizou que a solução pode ser obtida por uma multiplicação direta dos dados do problema. Se ela tivesse listado as diferentes possibilidades teria percebido que são apenas seis as possibilidades na situação apresentada: cachorro e passarinho; cachorro e peixe; cachorro e tartaruga; passarinho e peixe; passarinho e tartaruga; e peixe e tartaruga.

Os mesmos procedimentos foram utilizados para os demais problemas de *combinação* com maior número de possibilidades, de *arranjos* e de *permutações* com menor e maior número de possibilidades. Na Figura 3 pode-se observar como Karine reconheceu, de alguma forma, a natureza combinatória do primeiro problema de permutação, entretanto, efetuou uma multiplicação não adequada para a situação e chegou à resposta incorreta de nove maneiras possíveis de se permutar três elementos.

De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

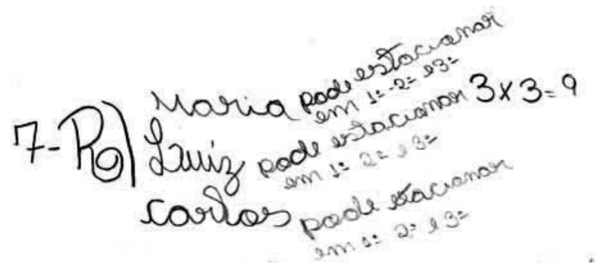


Figura 3. Solução incorreta de Karine, no teste inicial, do primeiro problema de *permutação*.

A incorreta generalização efetuada por Karine – de que em todos os problemas combinatórios é suficiente multiplicar-se diretamente as quantidades enunciadas – nos leva a questionar os seus acertos iniciais nos problemas de *produto cartesiano*. Ela pode ter obtido respostas corretas nesses casos por ter aprendido um determinado procedimento, mas não há evidências dela ter compreendido porque fez uso do produto das quantidades enunciadas.

Conclui-se que o conhecimento inicial de Combinatória de Karine era muito deficiente.

A compreensão inicial de Vitória sobre situações combinatórias

Vitória no teste inicial também apresentou um fraco desempenho, acertando, como Karine, apenas os dois problemas de *produto cartesiano*. Por serem da mesma turma, elas devem ter tido, provavelmente, ensino desse tipo de significado combinatório. Na Figura 4 pode-se observar que Vitória usou um produto – procedimento usualmente ensinado para esse significado combinatório – para resolver a primeira questão de *produto cartesiano*. Ela também fez uso do mesmo procedimento no segundo problema desse significado.

Numa lanchonete há quatro tipos de suco (laranja, graviola, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco?

$\boxed{1.}$ $\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline 12 \end{array}$ Pode-se toma 12 maneiras diferentes

Figura 4. Solução correta de Vitória, no teste inicial, do primeiro problema de *produto cartesiano*.

Não houve reconhecimento inicial, por parte de Vitória, da natureza combinatória dos problemas de *combinação*, que foram resolvidos em seguida aos de *produto cartesiano*. As *combinações* – de menor e de maior número de possibilidades – foram resolvidas incorretamente por meio de estratégias aditivas. Nos dois problemas Vitória subtraiu os dados enunciados, como se pode observar na Figura 5 que mostra como ela resolveu o segundo problema de *combinação* – o qual resultava em maior número de possibilidades.

> Márcia tem em casa seis frutas (mamão, manga, abacaxi, laranja, banana e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?
>
> 4) 6
> \- 2
> 4
> Ela poderá fazer 4 maneiro diferentes

Figura 5. Solução incorreta de Vitória, no teste inicial, do segundo problema de *combinação*.

Nos problemas que se seguiram, Vitória ora evidencia um reconhecimento, até certa extensão, da natureza combinatória das situações ou da natureza multiplicativa das mesmas, porém, não consegue, em nenhum caso, chegar a soluções corretas. No problema de *arranjo* de menor número de possibilidades, conforme se pode observar na Figura 6, a criança tenta listar todos os possíveis casos para o primeiro problema de *arranjo* – o qual resultava em menor número de possibilidades.

Quatro crianças (Joaquim, Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

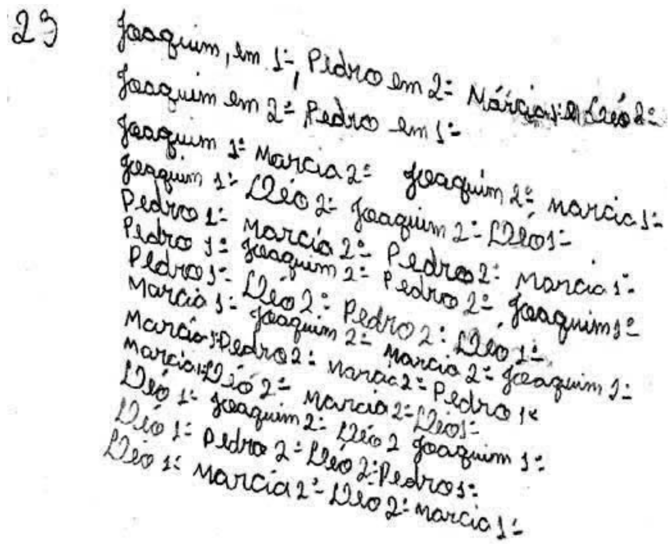


Figura 6. Solução incorreta de Vitória, no teste inicial, do primeiro problema de *arranjo*.

Embora tenha usado um procedimento válido, a falta de sistematização na sua resolução, não permitiu que Vitória enumerasse corretamente as 12 possibilidades. Ela repetiu casos e incorretamente concluiu que são 23 possibilidades.

A listagem de possibilidades foi uma estratégia bem sucedida observada em estudos anteriores (Pessoa & Borba, 2009, dentre outros), mas a listagem precisa ter sistematização (como, por exemplo, listar primeiro todos os casos em que Joaquim é o primeiro, depois todos os casos em que respectivamente Pedro, Márcia e Léo são primeiros). A listagem também só se mostra uma eficiente estratégia de resolução para casos nos quais não há muito grande número de possibilidades, a não ser que sejam classificados os casos e se efetue um procedimento de adição dos diferentes tipos de casos. No problema aqui discutido poder-se-ia, por exemplo, pensar que há três casos nos quais cada criança está em primeiro lugar e como são quatro crianças, há ao todo 12 diferentes possibilidades.

Vitória voltou a utilizar procedimentos multiplicativos nos três últimos problemas do teste inicial (o *arranjo* de maior número de possibilidades e as duas *permutações* – de menor e maior número de possibilidades). Os produtos por ela registrados, porém, não são suficientes para a resolução dessas situações. Se ela buscou utilizar de forma genérica um procedimento que dá certo em outras situações combinatórias (como *produtos cartesianos*), ela não percebeu que o produto direto dos números enunciados ou implícitos pode não resolver todos os problemas de Combinatória.

No caso do problema de *arranjo* com maior número de possibilidades (*Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar as letras X, Y, Z, K e W e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que se repitam as letras?*), Vitória efetuou o produto 5 x 2 = 10, quando na realidade deveria ter sido 5 x 4 = 20, pois, segundo o *princípio fundamental da contagem* há 5 elementos para a escolha da primeira letra e restam quatro elementos para a segunda letra, uma vez que restringiu-se à não repetição de letras.

No caso do problema de *permutações* com maior número de possibilidades (*Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?*), o produto por ela efetuado foi 4 x 4 = 16, quando o correto seria 4 x 3 x 2 x 1 = 24, uma vez que tendo-se escolhido uma cor de bola para o primeiro compartimento, a mesma cor não poderá ocupar o segundo, terceiro ou quarto compartimentos, havendo, assim, três elementos de escolha para o segundo compartimento, dois elementos de escolha para o terceiro compartimento e apenas um para o quarto compartimento (segundo o *princípio fundamental da contagem*).

Observam-se algumas semelhanças e diferenças entre os procedimentos iniciais de Karine e Vitória. Karine acertou os dois problemas de *produto cartesiano* por ter utilizado um procedimento único para todos os significados – de produto dos números enunciados ou implícitos – e, dessa forma, levanta-se dúvidas se, de fato, compreendia inicialmente a validade de produtos nesse significado combinatório. Por outro lado, ela pareceu evidenciar o reconhecimento de algumas semelhanças entre os oito problemas por ela inicialmente resolvidos, já que os resolveu pelo mesmo procedimento. Vitória também possuía um entendimento inicial muito frágil de Combinatória, uma vez que utilizou procedimento válido apenas para *produtos cartesianos*, e não reconheceu semelhanças destes com as *combinações* (que ela inicialmente resolveu por subtrações inadequadas), *arranjos* (que ela inicialmente resolveu por listagem ou produto inadequados) ou *permutações* (que ela inicialmente respondeu por meio de produtos inadequados).

Discutiremos, na seção seguinte, como as duas crianças resolveram, com o uso do *software Diagramas de Árbol*, os mesmos oito problemas que responderam no teste inicial.

O uso do Diagramas de Árbol por Karine e Vitória

Na primeira sessão de intervenção, Karine e Vitória foram apresentadas aos recursos básicos do *software Diagramas de Árbol*. Elas sentaram lado ao lado com o computador à sua frente e uma das pesquisadoras sentou ao lado delas para conversar com as mesmas, ao passo que a outra pesquisadora ficou à distância observando e tomando nota do que ocorreu.

Na tela de abertura as crianças puderam perceber que o *software* possui um link no qual são dadas algumas *instruções gerais* (sobre a construção de árvores e sobre os outros links), bem como links para *observação de exemplos* ou de *recuperação de árvores* anteriormente construídas e salvas na *biblioteca*. O link mais utilizado ao longo da intervenção, porém, foi o de *criação de árvore*, utilizado para a resolução de cada um dos problemas trabalhados.

Uma vez selecionado o link de *criação de árvores*, Karine e Vitória passaram a discutir a escolha de níveis e elementos da situação combinatória a ser resolvida. Na Figura 7 pode-se observar a entrada de dados para o primeiro problema de *produto cartesiano* resolvido pelas crianças: *Numa lanchonete há quatro tipos de suco (laranja, graviola, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de três tamanhos (pequeno, médio e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco?*

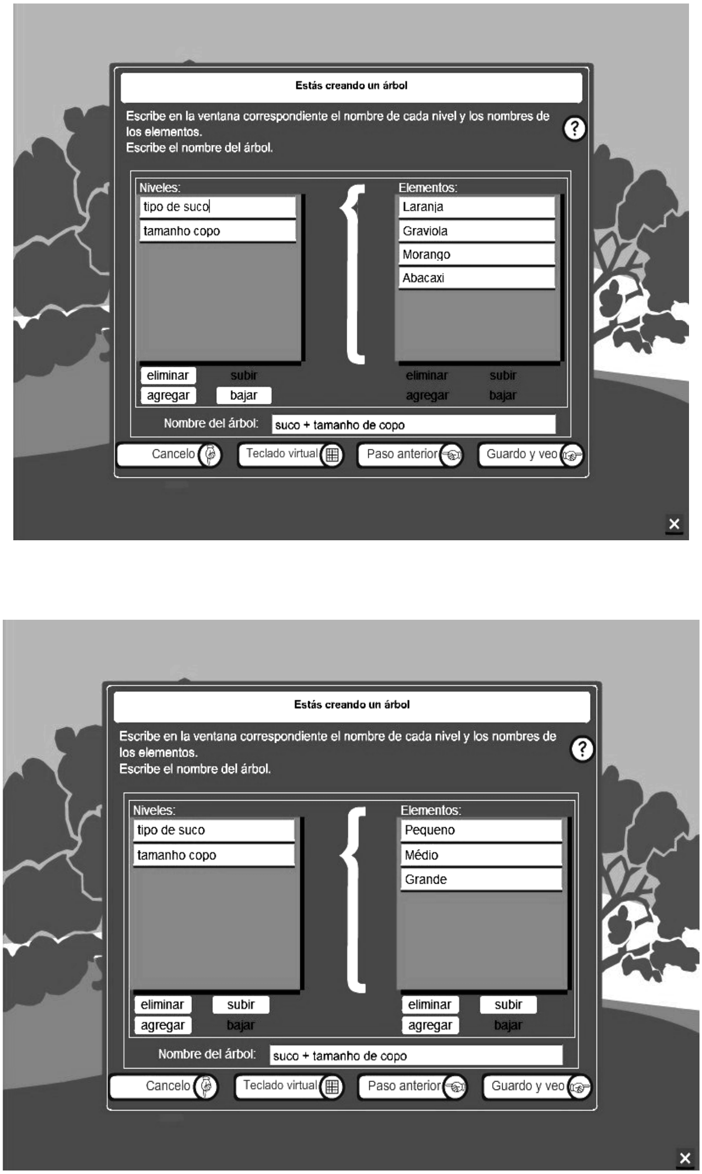


Figura 7. Telas de definição do primeiro problema de *produto cartesiano* resolvido pelas crianças.

Karine e Vitória puderam perceber que nesse caso havia duas escolhas (denominadas de *níveis* no *software*) a serem efetuadas: a escolha do tipo de suco em função das quatro diferentes frutas e a escolha do tamanho do copo. Esse momento inicial de resolução do problema foi de extrema importância, pois foi necessário pensar-se nas relações combinatórias presentes na situação – no caso, os dois conjuntos de escolha e os elementos de cada um dos conjuntos.

Uma vez definidos os níveis e elementos, bem como havendo dado um título para a árvore, o próprio *software* gerou o diagrama desejado, como se observa na Figura 8.

Além dos recursos de *zoom* (indicados pelas lupas com sinais + e -), a pesquisadora destacou que havia o de subir e descer na tela (indicado pelas quatro setas), para o caso de não ser visível de uma vez só todas as possibilidades, bem como o recurso de usar diferentes cores para destacar casos específicos – recurso muito útil no caso de *combinações*, como se pode observar a seguir.

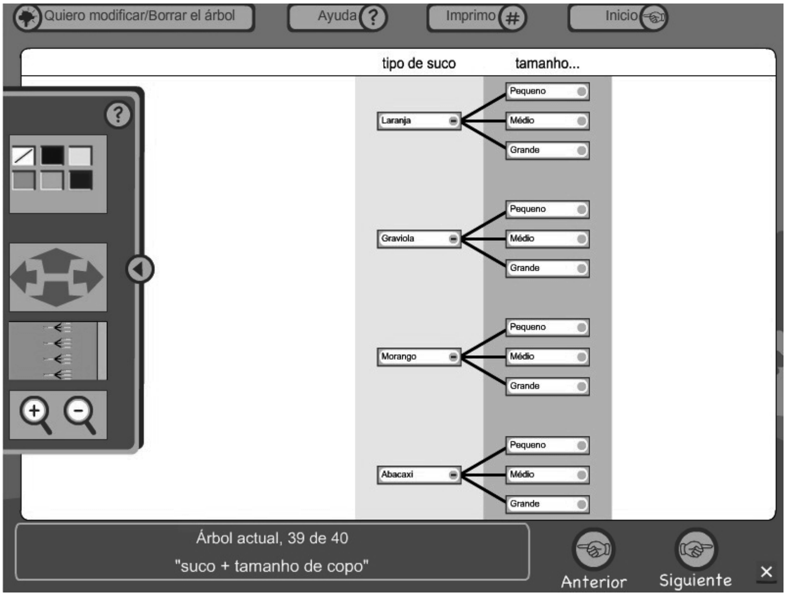


Figura 8. Tela de árvore gerada para o primeiro problema de *produto cartesiano* resolvido pelas crianças.

No caso de *permutações*, *arranjos* e *combinações* a entrada de dados era um pouco diferente, uma vez que para esses significados combinatórios há apenas um conjunto base a partir do qual os elementos devem ser escolhidos, mas há diferentes níveis dentro dessa escolha que depende do número de escolhas a serem efetuadas.

Na Figura 9 pode-se observar a tela do diagrama gerado para o primeiro problema de *permutação*: *De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?* A partir deste diagrama, Karine e Vitória puderam visualizar as possibilidades da situação que estavam resolvendo e enumeraram os casos válidos. Procedimentos semelhantes foram utilizados nos problemas de *arranjo*.

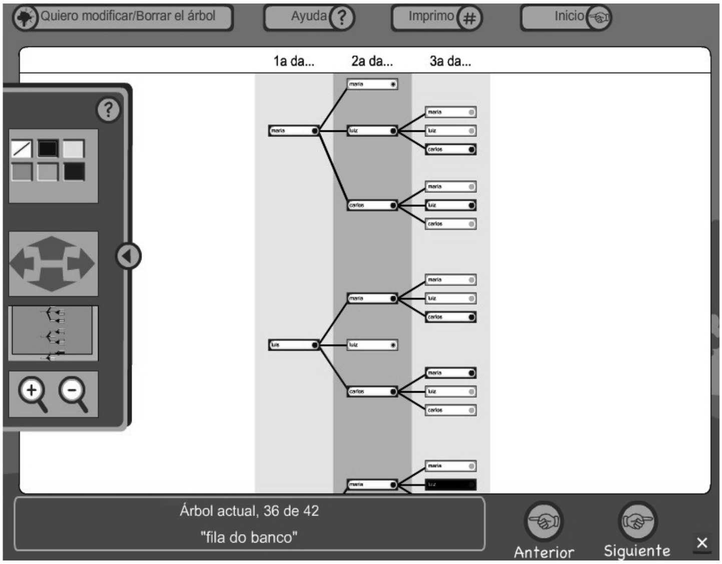


Figura 9: Tela da árvore gerada para o primeiro problema de *permutação* resolvido pelas crianças.

No caso de *combinações*, Karine e Vitória discutiram – inicialmente com o auxílio da pesquisadora - que nem todos os casos deveriam ser enumerados, uma vez que a ordem de apresentação dos elementos não representava possibilidades diferentes. A Figura 10 apresenta a tela do diagrama gerado para o primeiro problema de *combinação* (*Na loja de bichos de estimação há para vender quatro animais (um cachorro, um passarinho, um peixinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?*) que Karine e Vitória resolveram e a partir do qual perceberam que nesse problema apenas seis casos deveriam ser considerados válidos (os casos que elas destacaram em vermelho).

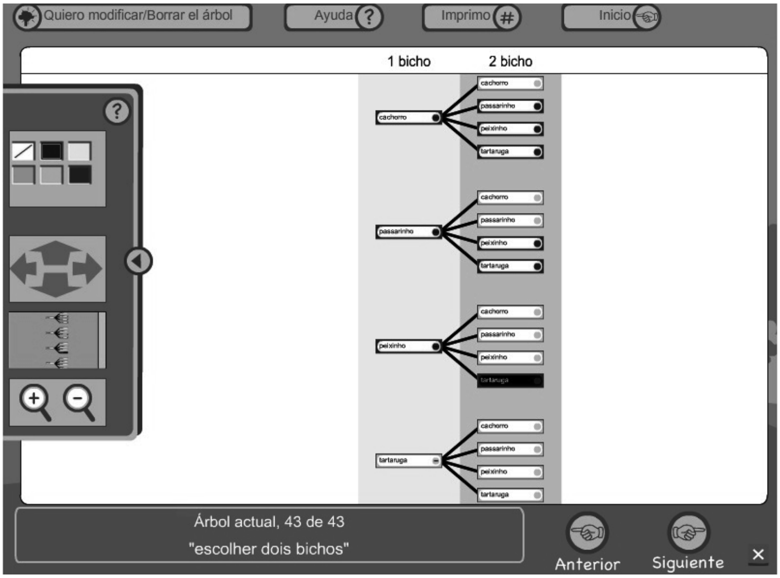


Figura 10: Tela da árvore gerada do primeiro problema de *combinação* resolvido pelas crianças.

Na primeira sessão de intervenção as pesquisadoras deram maior apoio na resolução do primeiro problema de cada significado, mas estimulavam Karine e Vitória a resolverem com maior autonomia o segundo problema de cada um dos significados. Já na segunda sessão de intervenção Karine e Vitória estavam bem confiantes no uso do *software* e o utilizaram com bastante autonomia, sem praticamente nenhum suporte das pesquisadoras.

Observou-se que nas duas sessões de intervenção Karine e Vitória se envolveram ativamente. Elas pensaram na situação apresentada, inseriram os dados dos problemas e criaram títulos para as árvores a serem geradas. Essas etapas as auxiliaram a pensar nas *relações combinatórias*, principalmente as referentes à *escolha* e à *ordenação dos* *elementos*, em cada uma das situações trabalhadas. Após a geração da árvore pelo computador, as crianças enumeraram os casos válidos, levando-as mais uma vez a refletirem sobre as situações combinatórias resolvidas.

A seguir, apresentaremos e discutiremos os avanços no raciocínio combinatório de cada uma das crianças, a partir dos desempenhos apresentados no teste final ocorrido após a segunda sessão de intervenção. Esses resultados refletem a repercussão que o uso do *Diagramas de Árbol* causou no modo de pensar de Karine e de Vitória quanto a problemas combinatórios.

O que Karine aprendeu a partir da construção de árvores de possibilidades

O desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine foi notável, pois no teste final ela apresentou solução correta para todos os problemas. De um acerto inicial de apenas dois problemas, ela avançou para o acerto de todas as oito situações no teste final.[7]

Em todos os problemas da avaliação final, Karine usou árvores de possibilidades, o que evidencia que a construção desse tipo de diagrama – pelo computador – teve forte influência na sua escolha de estratégia para a resolução das diferentes situações. As representações de árvores por ela construídas evidenciam que Karine percebeu e lidou adequadamente com as *relações de escolha* e *ordenação* nos

[7] Houve avanço das oito crianças do estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011) que participaram da intervenção com o *Diagramas de Árbol*. Os resultados no teste final foram (dentre possíveis 8 acertos): **Criança 1** – 3 acertos; **Criança 2** – 4 acertos; **Criança 3** – 5 acertos; **Criança 4** – 8 acertos; **Criança 5** – 6 acertos; **Criança 6** – 4 acertos; **Criança 7** – 6 acertos; e **Criança 8** – 7 acertos. Karine e Vitória foram, respectivamente, a Criança 4 e a Criança 8.

diferentes problemas, de *produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo* e *combinação*.

Nos problemas com menor quantidade de possibilidades Karine discriminou nas árvores todas as possibilidades, tendo o cuidado de não listar os casos já contemplados. Pode-se observar esse cuidado na Figura 11, por exemplo, no primeiro problema de *combinação* do teste final (o qual resultava em menor número de possibilidades).

Uma escola tem cinco professores (Paulo, Roberto, Ângela, Luiza e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

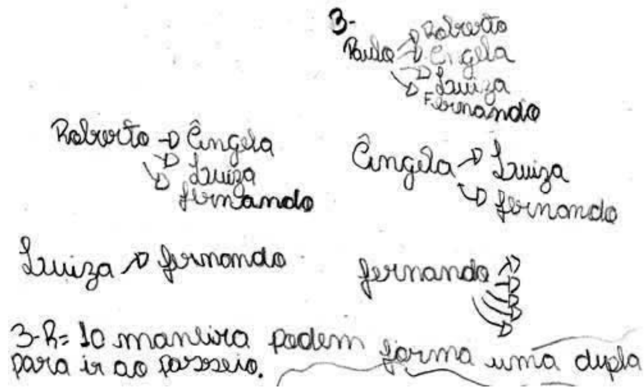


Figura 11. Solução correta de Karine para o primeiro problema de *combinação* do teste final.

Observa-se que Karine listou quatro combinações com Paulo, três com Roberto (já que a combinação com Paulo já estava listada), duas combinações com Ângela (uma vez que as combinações com Paulo e Roberto já constavam em ramos anteriores da árvore) e apenas uma combinação com Luiza (uma vez que todas as outras combinações já haviam sido listadas).

A relação combinatória da ordenação ficou clara para Karine, pois em problemas de *arranjos* (nos quais a ordem de apresentação dos elementos implica em possibilidades diferentes) ela não usou o procedimento acima descrito para *combinações* (no qual casos repetidos não foram escritos na árvore). Na Figura 12 pode-se observar a sua solução para o primeiro problema de *arranjo* do teste final. E na Figura 13, fica evidente o avanço no raciocínio de Karine na solução do último problema, a *permutação* que resultava num maior número de possibilidades.

Usando os algarismos 2, 4, 6 e 8, demonstre todos os números formados por dois algarismos distintos. Quantos são eles?

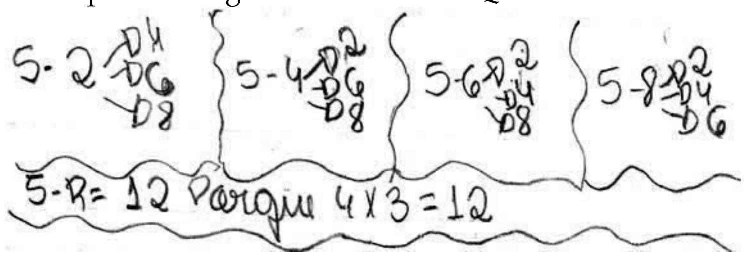


Figura 12. Solução correta de Karine para o primeiro problema de *arranjo* do teste final.

Quatro torcedores estão indo para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a lado?

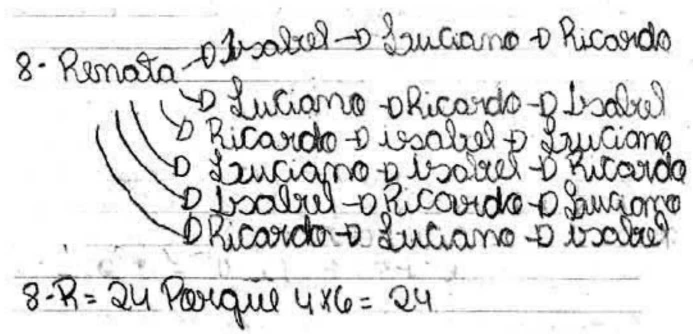


Figura 13. Solução correta de Karine para o segundo problema de *permutação* do teste final.

Karine construiu a árvore para o caso de Renata se sentar mais à esquerda e concluiu que seriam seis essas possibilidades. Se as outras três crianças também podem se posicionar mais à esquerda, o número total de possibilidades é 4 x 6 = 24, como Karine bem observou. Esse é um caso também observado em estudos anteriores (como Pessoa & Borba, 2009), no qual as crianças observam certa regularidade e a partir dela generalizam qual o total de possibilidades da situação.

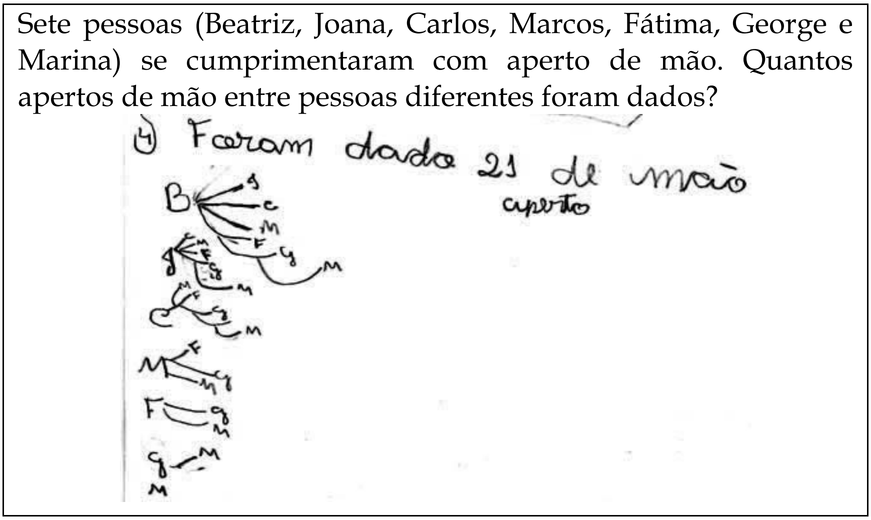
Há, assim, evidências claras de que Karine se beneficiou da intervenção com o *software Diagramas de Árbol*, pois fez uso dessa forma particular de representar possibilidades, levando em consideração as particularidades de cada significado combinatório. Fica também bem evidente a sua segurança ao apresentar as árvores, seguidas de resposta e justificativas, como se pode observar nas Figuras 11. 12 e 13.

O que Vitória aprendeu a partir da construção de árvores de possibilidades

No teste final Vitória também apresentou excelente avanço em desenvolvimento do seu raciocínio combinatório. Ela que havia acertado apenas dois problemas no teste inicial, passou a acertar sete no teste final. Salienta-se que Vitória deixou de responder a última questão, pois havia chegado a hora do recreio e ela não quis mais continuar a resolver o teste. Possivelmente ela teria acertado essa última questão que deixou em branco. Dos sete problemas respondidos, ela construiu árvores em três dos problemas (nas duas *combinações* e no *arranjo* de menor número de possibilidades). Nos dois problemas de *produto cartesiano* ela utilizou um produto direto e nos dois últimos problemas por ela respondidos (*arranjo* de maior número de possibilidades e *permutação* de menor número de possibilidades) Vitória usou o procedimento de listar as diferentes possibilidades.

Observa-se que no teste final Vitória variou os procedimentos de solução utilizados e, diferentemente do teste inicial no qual utilizou alguns procedimentos incorretos, ela apresentou soluções corretas e sistematicamente controladas. Dessa forma, acertou todos os problemas por ela respondidos.

Assim como Karine, Vitória não listou casos repetidos em problemas de *combinação*. Esse cuidado pode ser observado na Figura 14 na qual se pode observar que ela gradativamente, e corretamente, diminuiu o número de possibilidades para o problema que resultava em maior número de possibilidades.


Sete pessoas (Beatriz, Joana, Carlos, Marcos, Fátima, George e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

4) Foram dado 21 de mão
aperto

Figura 14. Solução correta de Vitória para o segundo problema de *combinação* do teste final.

No segundo problema de *arranjo* – que resultava em maior número de possibilidades, Vitória, corretamente listou casos com mesmos elementos, mas em ordem diferente, já que esta é uma relação particular desse significado combinatório. Observa-se, assim, na Figura 15, uma listagem correta de possibilidades para o problema.

O procedimento de listagem também foi utilizado no único problema de *permutação* que ela respondeu no teste final. Sua listagem foi bem sistematizada de modo a não se perder nas ordenações dos elementos.

A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há cinco alunos (Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para os cargos de representante e vice-representante?

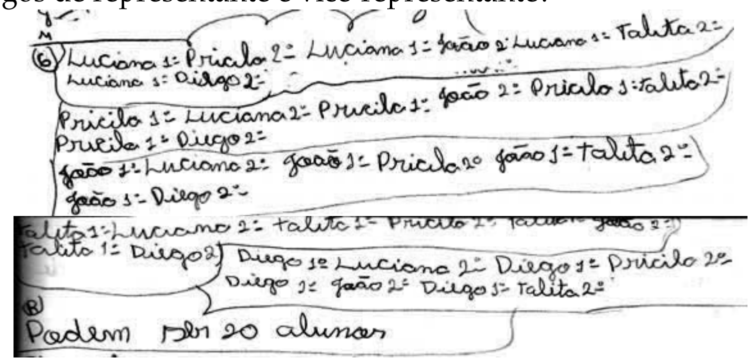


Figura 15. Solução correta de Vitória para o segundo problema de *arranjo* do teste final.

Observa-se que Vitória não se restringiu ao uso de árvores de possibilidades, mas soube usar outros procedimentos também de forma correta. Isso evidencia que ela não aprendeu um procedimento mecânico, mas, sim, entendeu as relações combinatórias presentes nas diferentes situações e as levou em consideração em suas soluções no teste final. Há, semelhantemente ao ocorrido com Karine, claras evidências de que Vitória desenvolveu significativamente a sua compreensão dos problemas combinatórios.

Conclusões e Discussão

O uso do *software Diagramas de Árbol*, assim como em estudos anteriores descritos nesse capítulo (Sandoval, Trigueiros & Lozano, 2007) mostrou-se uma rica ferramenta de ensino da Combinatória. Por intermédio de seu uso, Karine e Vitória ampliaram suas compreensões de problemas combinatórios. Se inicialmente acertaram apenas os problemas explicitamente enfocados nos anos iniciais de escolarização, na avaliação final deram evidências de compreensão dos diferentes significados combinatórios: *produto cartesiano*, *permutações*, *arranjos* e *combinações*.

O estudo relatado nesse capítulo reforça as conclusões de Fischbein (1975), no sentido que a instrução em combinatória por meio do uso de árvores de possibilidade é um recurso que pode auxiliar os estudantes a avançarem em suas compreensões de situações combinatórias. Esse recurso possibilita que os estudantes construam compreensões articuladas (como sugeridas por Vergnaud, 1986) entre as situações combinatórias, ou seja, percebam propriedades comuns a diferentes estruturas de problemas e significados envolvidos, mas também entendam que há relações que diferenciam os diferentes tipos de problemas.

Acredita-se que o sucesso no desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e de Vitória não se deve ao fato de meramente terem aprendido a usar mecanicamente um recurso de cálculo, mas, sim, por terem aprendido a analisar as diferentes soluções, em termos das *relações combinatórias* (de *escolha* e de *ordem*, dentre outras). Essa conclusão se baseia no fato de que as crianças utilizavam árvores de possibilidade e outros procedimentos adequados para os diferentes significados envolvidos nos problemas, ou seja, nos *produtos cartesianos, permutações*, *arranjos* e *combinações*. Quando usavam árvores para diferentes significados, as usavam adequadamente para as dadas situações.

As autoras deste capítulo estão presentemente desenvolvendo outro estudo no qual os estudantes participam de distintas formas de intervenção, para se observar se há diferença entre a construção de árvores pelo computador ou em lápis e papel pelas próprias crianças. O foco deste estudo em andamento é o papel que as representações simbólicas desempenham na solução de problemas combinatórios.

Espera-se com a divulgação dos resultados do presente estudo e em estudos futuros contribuir para tornar o ensino da Combinatória – desde os anos iniciais de escolarização – uma ferramenta rica para o desenvolvimento matemático dos estudantes, em particular no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Referências

Aguirre, C. (2005). *Diagrama de Árbol***.** Multimidea.

Azevedo, J., Costa, D. & Borba, R. (2011). O impacto do *software* Árbol no raciocínio combinatório. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME* (CD-ROM), Recife: Brasil.

Barreto, F. & Borba, R. (2011). Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* – CIAEM/IACME (CD-ROM), Recife: Brasil.

Borba, R. (2010). O pensamento combinatório na Educação Fundamental. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (CD-ROM), Salvador: Brasil.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática.* 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental.

Ferraz, M., Borba, R. & Azevedo, J. (2010). Usando o *software* Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (CD-ROM), Salvador: Brasil.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children,* Reidel, Dordrecht.

Fischbein, E., Pampu, I. & Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British Journal of Educational Psychology,* 40.

Gomes, A. S., Castro Filho, J., Gitirana, V., Spinillo, A., Alves, M., Melo, M. & Ximenes, J. (2002). Avaliação de *Software* Educativo para o Ensino da Matemática. *Anais do XXII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação* (CD-ROM), Florianópolis: Brasil.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1976). *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora.

Leite, M., Pessoa, C., Ferraz, M. & Borba, R. (2009). *Software*s Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. *Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (CD-ROM), Ijuí: Brasil.

Miguel, M. & Magina, S. (2003). As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. *Anais* *do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (CD-ROM), Santos: Brasil.

Moro, M. L. & Soares, M. T. (2006). Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* (CD-ROM), Águas de Lindóia: Brasil.

Pessoa, C. & Borba, R. (2009). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké* – Cempem – FE – Unicamp, 17, 31.

Pessoa, C. & Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (CD-ROM), Salvador: Brasil.

Rocha, C. & Borba, R. (2010). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diferentes olhares. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (CD-ROM), Salvador: Brasil.

Sandoval, I., Trigueiros, M. & Lozano, D. (2007). Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. *Anais da XII Conferencia Interamericano de Educación Matemática* (CD-ROM), Querétaro, México.

Schliemann, A. (1998). A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. Em T. N. Carraher & D. Carraher & A. Schliemann (Orgs.). *Na vida dez, na escola zero* (pp. 85-100). São Paulo: Cortez.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2, 1-30.

Silva, J. F. G. & Spinillo, A. G. (2011). Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes**.** *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* – CIAEM/IACME (CD-ROM). Recife, Brasil.

Smole, K. S. & Diniz, M. I. (2003). *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Editora Saraiva.

Spinillo, A. G. & Silva, J. F. G. (2010). Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? *Proceedings of the* 34rd *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 216-224. Belo Horizonte, Brasil.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica,* 1, 75-90.

ÁLGEBRA INICIAL, OBJETOS DIGITAIS DE APRENDIZAGEM E MANIPULATIVOS: TRAJETÓRIAS DE ESTUDOS DE INTERVENÇÃO NA ESCOLA

Raquel Santiago Freire e José Aires de Castro Filho
Universidade Federal do Ceará

Introdução

A compreensão de conceitos matemáticos tem sido investigada por diversos pesquisadores com o objetivo de trazer contribuições para o ensino e a aprendizagem (Brizuela, 2004; Franchi, 1995; Spinillo, 1994; Vergnaud, 1990). O ensino de Matemática deve estar respaldado por um currículo que estimule atividades práticas e vivências de situações que favoreçam a formação de conceitos. No entanto, percebe-se uma estrutura curricular fragmentada, dividindo os conteúdos em blocos, sendo os principais a aritmética, a álgebra e a geometria.

O desenvolvimento do raciocínio algébrico permite que os alunos façam a modelagem de situações, generalizem padrões aritméticos e estabeleçam relações entre duas grandezas, traduzam informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica, generalizem regularidades e identifiquem os significados de expressões. Dessa maneira, o estudo da álgebra desenvolve habilidades como a observação e interpretação de regularidades, abstração e generalização de fenômenos matemáticos.

Segundo Usiskin (1995), o trabalho com padrões e generalizações é primordial, pois envolve aspectos importantes, não só para a álgebra, como também para a aritmética. Para o autor, é impossível estudar álgebra adequadamente, sem lidar implícita ou explicitamente com o estudo de padrões. Para isso, é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam compreendidos dentro do contexto aritmético. Se isso não acontecer ou se os alunos tiverem concepções errôneas a respeito dessas relações, seu desempenho em álgebra poderá ser prejudicado. Neste caso, algumas dificuldades que o aluno tem em álgebra não são de álgebra propriamente dita, e sim dificuldades conceituais em aritmética que não foram superadas.

Outro aspecto da álgebra é o pensamento relacional (Franke, Carpenter & Battey, 2008). Este pensamento está ligado à capacidade de compreender e deduzir procedimentos matemáticos de forma significativa e não procedimental. Por exemplo, ao resolver a expressão 78 + 34 – 34, ao invés de começar pela operação 78 + 34 e depois subtrair 34 do resultado, o pensamento relacional deduz que 34 – 34 é zero e, portanto, o resultado será 78.

Muitos autores apontam as dificuldades dos alunos com álgebra, sendo tais dificuldades explicadas, em parte, pelas diferenças entre o raciocínio aritmético e o algébrico. Para Lins e Gimenez (1997), a aritmética estuda as relações quantitativas sobre coleções de objetos, compreensão de número e suas relações, sendo o núcleo principal dos anos iniciais do ensino fundamental com objetivo de desenvolver o sentido do número na criança. Já a álgebra trabalha com generalizações de modelos, para produção de significados numéricos envolvendo igualdade ou desigualdade.

Além da dificuldade de entender a diferença entre dois conceitos, o ensino da álgebra se torna ainda mais complexo por enfatizar procedimentos de cálculo, regras e passos para a resolução de problemas, requerendo o uso de símbolos e letras de modo abstrato e sem referentes, transformando a linguagem algébrica em uma atividade de mera manipulação simbólica sem significado.

Kaput (1998) afirma que a aprendizagem centrada no formalismo da linguagem algébrica dificulta a aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento algébrico. Segundo o autor, a álgebra na escola deve ser trabalhada desde cedo de forma integrada. Essa corrente, denominada por alguns autores álgebra inicial, tem sido objeto de inúmeros estudos (e.g., Schliemann, Carraher, Brizuela & Pendexter, 1998).

O presente trabalho discute pesquisas realizadas acerca do desenvolvimento de conceitos algébricos. Inicialmente, será apresentada uma fundamentação teórica sobre álgebra inicial e discutidas pesquisas realizadas acerca desse tópico. Em seguida serão descritos dois estudos que pretendem preencher lacunas ainda pouco esclarecidas pelas pesquisas na área. O primeiro desses estudos investigou como alunos dos anos iniciais desenvolvem conceitos algébricos a partir de uma sequência de atividades com objetos digitais de aprendizagem e manipulativos; o segundo estudo mostrou como professores dos anos iniciais utilizam e planejam atividades (recursos digitais e manipulativos) no cotidiano escolar. Assim, pretende-se contribuir para a discussão acerca do desenvolvimento do conceito algébrico de estudantes e docentes com o intuito de propor mudanças na prática docente e gerar reflexões sobre o currículo escolar.

A Álgebra Inicial

As primeiras pesquisas sobre álgebra nos anos iniciais (ou álgebra inicial) foram realizadas por Davydov (1969), mostrando como crianças soviéticas, fora do contexto escolar, resolviam situações-problema sobre representações algébricas. Nessas pesquisas constatou-se que crianças que trabalhavam com esse tipo de pensamento, apresentavam um raciocínio elaborado sobre as representações quando comparadas a adolescentes que estudavam esse conteúdo.

Mais recentemente, a álgebra inicial tem sido investigada por pesquisadores como Schliemann, Goodrow e Lara-Roth (2001), Kieran (2006), Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998), Kaput e Blanton (2001), Peled e Carraher (2007). Essas pesquisas apontam como aritmética e álgebra podem ser trabalhadas de forma a desenvolver uma linguagem matemática ao longo do ensino fundamental de modo que os estudantes compreendam a elaboração de fórmulas através da generalização do raciocínio, aprendendo a montar algoritmos e equações através de uma lógica de raciocínio algébrico que comprovem sua utilidade.

Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998) investigaram como situações-problema podem apoiar o pensamento algébrico. Durante a pesquisa, cada aluno resolveu, individualmente, os problemas através de notação escrita ou de outras estratégias de resolução. Essas situações-problema descreviam relações de quantidades de dois personagens que podiam continuar iguais ou podiam ficar diferentes. Por exemplo:

> Bárbara e Joana fazem aniversário no mesmo dia. Bárbara ganhou 7 presentes das suas amigas e Joana também

> ganhou 7 presentes das suas amigas. Quando a festa acabou, as duas garotas tiveram uma festa surpresa feita por suas famílias e receberam mais presentes. Bárbara recebeu mais 6 presentes da sua família. Joana recebeu mais 3 presentes da sua. Você acha que no final do dia Joana tem a mesma quantidade de presentes que Bárbara? (Schliemann e cols, 1998, p. 39)

Nesta situação, inicialmente Bárbara e Joana possuem a mesma quantidade de presentes (7 = 7). Depois as quantidades se modificam, pois Bárbara recebeu mais seis presentes e Joana três, ou seja, $7 + 6 \neq 7 + 3$. Portanto, para resolver este problema, os estudantes teriam que relacionar as quantidades que se modificariam no decorrer do problema. Durante o estudo, nem todos os alunos utilizaram a notação acima ou utilizaram os símbolos de igual ou diferente, mas utilizaram outras formas de representação, sejam escritas ou mentais. Muitas vezes esses estudantes desenhavam a quantidade de presentes no papel e faziam as transformações, para que, no final da situação, comparassem a quantidade de presentes que Bárbara e Joana haviam recebido. Segundo os autores, diferentes formas de resolução são importantes para que os alunos compreendam a situação e a resolvam corretamente.

Essas situações-problema também envolviam quantidades desconhecidas, como no exemplo a seguir:

> Rosa e Claudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Claudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Claudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então

> foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de Claudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra? (Schliemann e cols, 1998, p. 40)

Diferentemente do problema anterior, os alunos não encontram uma quantidade numérica implícita na situação-problema; porém, podem compreender as relações existentes sem, necessariamente, ter números.

Os resultados indicam que a maioria dos alunos entende as relações existentes nos problemas, aparecendo ou não as quantidades. Nos problemas com quantidades numéricas, preferiam registrar os cálculos por escrito ao invés de raciocinar sobre as transformações ocorridas no problema. Já para resolver os problemas com quantidades desconhecidas, os alunos elaboravam estratégias de representação, como o uso de letras ou ícones para resolver o problema.

Essas pesquisas apontam que os alunos dos anos iniciais podem criar suas representações e notações diferentes daquelas impostas pela escola. Dessa forma, é fundamental que pesquisadores e professores explorem cada vez mais atividades relacionadas com a organização social e material de práticas culturais e atentem para as representações inventadas pelas crianças. Tais estudos foram realizados em escolas americanas. Entretanto, já há investigações sobre álgebra inicial realizadas no Brasil.

Pinto (2001) investigou como crianças de oito anos resolvem uma sequência didática (ver Araújo, Brito Lima, Da Rocha Falcão, Lessa, Oliveira & Leitão, 2000) de estruturas algébricas com o objetivo de construir significados em álgebra (transformações, representação icônica e simbólica, equivalência, incógnita e relação entre quantidades). Durante a aplicação da sequência didática, a autora observou dificuldades das crianças em compreender conceitos de transformação e relação entre duas quantidades iguais, mas a intervenção da pesquisadora com reflexões sobre as situações foi fundamental para que os alunos superassem as dificuldades encontradas durante a resolução da sequência.

Essas pesquisas mostram a importância de criar diversas situações para favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais. Os dois estudos que serão discutidos no presente capítulo pretendem apontar que aspectos específicos dos conceitos algébricos podem ser suscitados com a utilização de uma série de atividades, envolvendo situações-problema, manipulativos e materiais digitais. Também se discute em um dos estudos de que forma os materiais podem ser usados pelos professores e como essa utilização favorece a reflexão sobre conceitos algébricos.

Os Estudos

Os estudos realizados, de cunho qualitativo, descrevem situações relativas a um fenômeno, verificando como ele se manifesta nas atividades, procedimentos e interações cotidianas, explorando-o em sua complexidade (Schwandt, 1998).

O primeiro estudo investigou como alunos do terceiro e quinto anos resolviam atividades relacionadas ao pensamento algébrico; enquanto que o segundo estudo analisou o conhecimento de professoras dos anos iniciais do ensino fundamental ao realizar atividades ligadas ao pensamento algébrico.

Atividades Realizadas e Materiais Utilizados

Os dois estudos envolviam diversas atividades: (1) Situações-problema; (2) Objeto de aprendizagem (OA) Balança Interativa; (3) Objeto de aprendizagem (OA) Feira dos pesos; (4) Balança de dois pratos para encontrar o valor do peso de objetos com formatos diferentes; (5) Balança de dois pratos para comparar potes de formatos iguais com pesos diferentes. Essas atividades são descritas a seguir.

Situações-problema

Essas atividades, baseadas no estudo der Schliemann, Carraher, Brizuela e Jones (1998), consistem em oito situações-problema, divididas em dois grupos: o primeiro consta de quatro problemas nos quais as quantidades das transformações aparecem; e o segundo grupo é composto de quatro problemas nos quais as quantidades das transformações não aparecem. O objetivo é examinar se os estudantes compreendem que uma equação não se altera ao adicionarmos ou subtrairmos quantidades iguais para cada um de seus membros. Se, porém, as quantidades adicionadas ou subtraídas forem diferentes, os membros da equação serão diferentes, ou seja, teremos uma inequação.

Objeto de aprendizagem Balança Interativa

Os Objetos de Aprendizagem (OA) são recursos digitais para uso educacional disponíveis na *Internet* e podem ajudar na formação de conceitos por parte dos alunos e na prática docente (Direne e cols., 2009; Wiley, 2001).

O OA *Balança Interativa*[1] (Figura 1) baseia-se na manipulação simulada de uma balança de dois pratos no contexto de um jogo que consiste em descobrir os valores que são associados às letras. Na tela do programa, além da balança de dois pratos, temos desenhos de pesos com letras que representam os pesos desconhecidos, e desenhos de pesos com números que representam os pesos conhecidos. O usuário deverá utilizar o OA para pesar os pesos conhecidos e desconhecidos, podendo encontrar seus valores através do equilíbrio ou desequilíbrio na balança. A balança fica em equilíbrio quando os pesos dos dois lados são iguais, o desequilíbrio acontece quando um dos pratos da balança fica mais pesado do que outro.

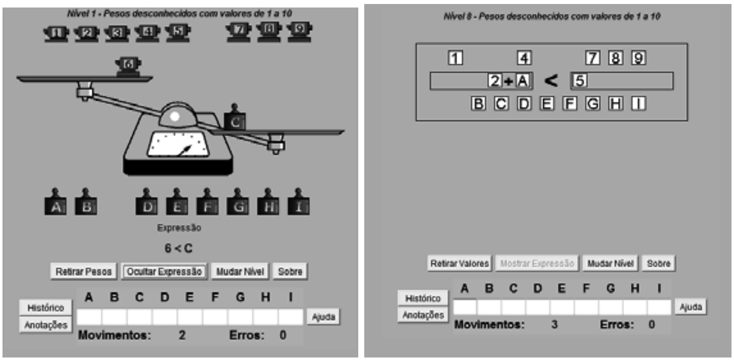


Figura 1: Tela do OA *Balança Interativa* no primeiro e no oitavo níveis.

O OA possui dez níveis. Nos níveis 1 a 5, os alunos trabalham com a representação simulada da balança, em um grau crescente de dificuldade. À medida que desenvolvem estratégias para encontrar os pesos desconhecidos, os alunos também desenvolvem princípios que podem ser usados na

[1] http://www.proativa.virtual.ufc.br/oa/balanca/balanca.html

resolução de equações e inequações. Nos níveis 6 a 10, os alunos trabalham somente com a representação simbólica de equações e inequações.

Objeto de aprendizagem Feira dos Pesos

Assim como na *Balança Interativa,* o OA *Feira dos Pesos*[2] (Figura 2) simula uma balança de dois pratos. O OA possui cinco níveis e permite fazer comparações entre os pesos cujos valores são desconhecidos, tendo o aluno que colocar esses pesos em ordem crescente de acordo com suas manipulações. Por exemplo, se o peso A é maior do que B e maior do que C, e C é menor do que B e menor do que A, a ordem dos pesos será: C, B e A.

No primeiro nível o OA oferece três pesos desconhecidos, todos do mesmo tamanho, mas com pesos diferentes para que o usuário possa classificar do maior para o menor ou do menor para o maior. No segundo, terceiro e quarto níveis tem-se que ordenar do maior para o menor ou vice-versa quatro, cinco, seis pesos todos com o mesmo tamanho. No último nível o OA continua a oferecer seis pesos, no entanto, eles possuem formatos e pesos diferentes.

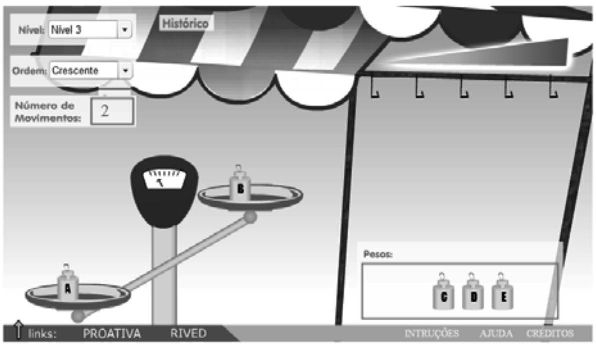


Figura 2: Tela do OA Feira dos Pesos no terceiro nível.

[2] http://www.proativa.virtual.ufc.br/oa/feiradosPesos/feiradosPesos.html

O OA conta o número de movimentos realizados, ou seja, a quantidade de manipulações que o aluno fez para descobrir a sequência dos pesos desconhecidos. Ele não conta a quantidade de erros, pois o objetivo principal é saber se, ao final das manipulações, os alunos conseguem descobrir a real sequência entre os pesos desconhecidos.

Atividades com a balança de dois pratos

Utilizou-se uma balança de dois pratos idêntica àquelas utilizadas em feiras livres para a realização de duas atividades.

Na primeira atividade, o objetivo era descobrir o peso de recipientes, utilizando os seguintes pesos: 50g, 100g, 200g, 500g, 1 kg e 2kg. Os recipientes pesavam: 150g, 300g, 350g, 400g, 450g e 900g. Foram assim distribuídos para que o usuário pudesse colocar mais de um peso em um lado da balança e, em algumas vezes, como no caso de 400g, 450g e 900g, tivessem que colocar pesos nos dois pratos da balança. Por exemplo, para descobrir o peso de 400g, é necessário colocar no prato do peso desconhecido, o peso de 100g e no outro prato o peso de 500g.

A proposta da segunda atividade era colocar recipientes de diferentes pesos e de igual tamanho em sequências crescente ou decrescente. Os pesos variavam de 50 em 50 gramas, de modo que o recipiente branco estava vazio e o recipiente amarelo pesava 300 gramas. O objetivo dessa atividade é similar à atividade com o OA Feira dos Pesos.

Todas essas atividades tinham o objetivo de introduzir conceitos e notações algébricas para se trabalhar equivalência entre quantidades conhecidas e desconhecidas. Além do mais, objetos concretos desconhecidos podem estimulam os alunos a realizar cálculos com quantidades desconhecidas e estabelecer comparações diretas entre os objetos na balança.

A seguir, descrevemos, separadamente, os estudos e os resultados obtidos, seguidos de uma discussão acerca de cada um deles.

Estudo 1: o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos

O objetivo desse estudo foi compreender como os alunos utilizam as noções iniciais no campo da álgebra durante atividades que envolviam situações-problema, manipulativos e objetos de aprendizagem digitais.

O estudo foi realizado com quatro alunos do terceiro ano (oito anos) e quatro alunos do quinto ano (dez anos) de uma escola pública em Fortaleza. Os alunos foram escolhidos através de sorteio, dentre os que tinham disponibilidade para participar. A cada dia, o aluno realizava individualmente uma das atividades acima descritas em seções que duravam em média 45 minutos. Ao total foram realizadas cinco sessões com cada aluno.

Durante as atividades, os alunos eram entrevistados com base no método clínico (Piaget & Inhelder, 1982), havendo perguntas-chave e outras que variavam de acordo com as respostas do entrevistado, fazendo sempre novas perguntas para esclarecer respostas anteriores (Carraher, 1989).

Resultados do Estudo 1

Para a realização das análises, descreveremos como os alunos participaram das atividades, fazendo um recorte das suas falas. Nos protocolos, os alunos serão identificados por suas iniciais. Na análise de suas respostas descreveremos as estratégias de resolução adotadas no decorrer das seguintes atividades: situações-problema, balança de dois pratos (medindo pesos), OA *Balança Interativa*, balança de dois pratos (comparando pesos) e o OA *Feira dos Pesos*.

Situações-problema

Nesta atividade, a maioria dos alunos compreendeu as relações nos problemas, independentemente destes explicitarem ou não as quantidades. Nos problemas com quantidades explícitas, os alunos preferiam registrar por escrito o cálculo em vez de raciocinar sobre as transformações que ocorriam no problema. Já para resolver os problemas nos quais as quantidades não estavam explícitas, alguns alunos argumentavam que não era possível resolver problemas sem números. Essa tendência de achar que precisam de número para resolver um problema pode ser consequência do treinamento aritmético, que focaliza principalmente procedi-mentos escritos.

Apesar desta dificuldade, os alunos conseguiram resolver os problemas sem números com ajuda dos pesquisadores, demonstrando compreensão de incógnitas, como demonstra o exemplo a seguir:

> A: [a aluna começa a ler o problema]. Rosa e Cláudia colecionam selos. Antes do Natal Rosa e Claudia tinham a mesma quantidade de selos. Rosa colocou todos seus selos em um álbum. Claudia colocou seus selos em dois álbuns. Depois do Natal elas pegaram todos os selos que ganharam de seus familiares e viram que tinham recebido a mesma quantidade de selos e então foram colocar nos seus álbuns. Você acha que Rosa tem a mesma quantidade de selos de

Claudia? Ou você acha que uma tem mais selos que a outra? Se a Rosa colocou seus selos em um álbum e Claudia em dois álbuns, eu acho que a Claudia tem mais que a Rosa.
E: Será que quando a gente tem dois álbuns tem mais figurinhas?
A: Ham ram [dizendo que sim].
E: Mas aqui no problema não tem dizendo que elas tinham a mesma quantidade de selos?
A: Os dois álbuns, sabendo dividir, fica a mesma quantidade.
E: Como assim?
A: Sabendo dividir, pode ter dez aqui e dez aqui.
E: Mas se eu tenho um álbum eu tenho menos figurinhas de quem tem dois álbuns?
A: Pode [fica pensando].
E: Mas e ai? Nesse problema aqui, elas tem a mesma quantidade ou quantidade diferente?
A: Não importa a quantidade de álbum eu acho que ela dividiu os seus selos em um álbum e a Rosa colocou todos em um álbum.

Inicialmente, ao ler o problema, a aluna se enganou, dizendo que Cláudia tinha mais por ter dois álbuns. Ao ser questionada, ela entendeu a relação do problema e confirmou sua idéia, dizendo que não importa a quantidade de álbuns, pois Claudia "dividiu" o total de selos em dois e Rosa colocou "todos" em um álbum. Quando a aluna disse que Cláudia "dividiu" seus selos para colocar em dois álbuns, e Rosa colocou "todos" seus selos em um álbum, ela estava usando um esquema de pensamento que pode ser traduzido da seguinte forma:

$$x = y1+y2$$
$$x\ (+z) = y1+y2\ (+z)$$

Segundo a aluna, a quantidade de selos de Cláudia (y1 + y2) é igual à quantidade de Rosa (x); mesmo que tenha dividido em dois álbuns, continua igual, pois receberam a mesma quantidade de selos. Portanto, a resolução de problemas como esse propicia situações em que os conceitos de incógnita e equivalência podem ser trabalhados de maneira significativa, como ocorreu no exemplo anterior.

Balança de dois pratos (medindo pesos)

Nessa atividade, verificou-se o pensamento algébrico quando os alunos usaram uma subtração indireta para constatar que acrescentar um peso em um prato da balança é equivalente a subtrair o valor desse peso no outro prato. Inicialmente, durante essa atividade, os alunos precisavam do auxílio dos pesquisadores para entender a lógica desse pensamento, mas depois realizavam os procedimentos de forma autônoma. Essa estratégia foi documentada em estudos anteriores sobre a balança de dois pratos (Lessa, 1996), correspondendo ao conhecimento de que retirando quantidades iguais dos dois lados, a igualdade não se altera. Essa estratégia também foi utilizada quando a relação não era de igualdade, demonstrando que os usuários estão pensando em termos de relações entre os valores no prato e não apenas buscando o equilíbrio ou igualdade.

Uma situação similar foi trabalhada com o uso do OA Balança Interativa, que propiciou diferentes estratégias em relação ao uso da balança de dois pratos.

Balança Interativa

Na situação de encontrar o valor dos pesos com a balança de dois pratos, foram identificadas três estratégias (estimativa, análise do intervalo e subtrativa). Já na situação usando o OA, foram identificadas seis estratégias (análise do intervalo, busca pela metade, intercala pesos, eliminação dos pesos já registrados, sequência de pesos e valores extremos[3]). Portanto, verifica-se que o número de estratégias utilizadas durante a resolução do OA foi maior do que na utilização da balança de dois pratos. Também se observou que todas as estratégias utilizadas na balança de dois pratos envolviam uma estimativa, o que não foi observado nas estratégias encontradas no uso do OA. Isso acontece porque na balança de dois pratos o aluno pode estimar o peso com a mão enquanto no computador, tal estimativa não é possível. Dessa forma, o raciocínio utilizado no OA está mais próximo do algébrico, uma vez que o aluno trabalha com pesos desconhecidos sem determinar um valor inicial para eles.

Balança de dois pratos (comparando pesos)

Durante essa atividade os alunos estimavam os pesos dos recipientes com a mão, criando hipóteses sobre seu valor e testando na balança de dois pratos. Durante a atividade, os alunos faziam comparações sistemáticas entre os recipientes, comparando um recipiente do conjunto com todos os outros para descobrir se ele era realmente o mais leve ou o mais pesado. Esta classificação dos recipientes na balança de dois pratos permitiu que os alunos operassem e fizessem relações entre valores desconhecidos, comparassem e seriassem diversos elementos dentro de um conjunto não numérico.

---

[3] Uma descrição mais completa dessas estratégias é encontrada em Freire (2007) e Freire e Castro-Filho (2006).

Esse tipo de raciocínio explora um contexto diferente do que costumam trabalhar em aritmética e em atividades estritamente numéricas ensinadas na escola. Essa atividade também permitiu que eles elaborassem uma estratégia para descobrir a relação entre os recipientes que chamamos de inferência transitiva. Essa estratégia também foi encontrada na atividade com o OA Feira dos Pesos e será explicada a seguir.

OA Feira dos Pesos

As estratégias usadas nessa atividade foram similares às estratégias identificadas na atividade anterior. No entanto, destacamos o uso da inferência transitiva quando o aluno realizava uma comparação indireta para descobrir a relação entre os pesos. Por exemplo, se A é maior do que B e B é maior do que C, então C é maior do que A. Se o aluno entender o silogismo, não precisa comparar diretamente A e C para descobrir a relação entre os pesos. No uso desse OA, também não se observou o uso de estimativas.

Comentários sobre o Estudo 1

Analisando as atividades propostas, percebemos que elas favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, como o trabalho envolvendo valores desconhecidos, o estabelecimento de relações de igualdade e desigualdade, e o uso de inferência transitiva com valores desconhecidos. Destacamos que essas formas de raciocinar surgiram mesmo entre as crianças mais novas (8 anos). Portanto, pode-se concluir que o pensamento algébrico pode ser trabalhado nos anos escolares iniciais a partir de situações como aquelas realizadas neste estudo.

Entretanto, para que tais atividades venham a ser efetivamente utilizadas, é preciso que os professores compreendam estes conceitos e estejam familiarizados com as atividades. Este foi o principal objetivo do Estudo 2.

Estudo 2: o desenvolvimento de conceitos algébricos por uma professora

O segundo estudo se caracteriza por um estudo de caso em que procuramos investigar, a partir de uma proposta de formação, como uma professora dos anos iniciais do ensino fundamental de outra escola pública de Fortaleza compreendia e utilizava atividades de álgebra inicial baseadas em objetos digitais de aprendizagem, situações-problema e manipulativos. Para tal, a professora foi acompanhada tanto no momento em que participou de uma oficina de formação focando nos materiais e situações anteriormente descritos; como posteriormente, quando passou à utilização desses recursos em sala de aula.

Durante as aulas, observamos como a professora manifestava conhecimentos acerca do pensamento algébrico. Ao final de cada aula também entrevistamos a professora para que ela pudesse refletir sobre sua aula. Analisamos como introduzia a atividade, que conceitos ou representações utilizava e quais as interações que aconteciam durante cada atividade. Muitas vezes, durante a observação da prática docente, anotamos as falas dos alunos e da professora. Dessa maneira, o estudo do conhecimento matemático da professora se manifestou a partir das relações que estabelecia com os alunos.

Resultados do Estudo 2

Nesta seção, mostraremos como o conhecimento algébrico se manifestou em diversos momentos na prática em sala de aula. Fizemos um recorte do diálogo entre a professora e seus alunos para mostrar como esta trabalhava com este conhecimento com os alunos. Esses diálogos representam a forma como o conhecimento algébrico da professora se manifestava em sala de aula.

Destacamos cinco categorias de análise sobre o conhecimento algébrico: exploração do sentido de equações, entendimento do pensamento relacional, inequações e o trabalho com quantidades desconhecidas, trabalho com letras e generalização. Essas categorias de análise são descritas a seguir.

Exploração do sentido de equações

Neste tópico mostraremos como a professora criou situações que visavam favorecer o entendimento de equações a partir da ideia de que dois termos se relacionam, ao invés de ser um resultado de uma operação.

Por exemplo, na aula com a balança de dois pratos (medindo pesos), a professora estimulou os alunos a pensarem que as quantidades em um prato da balança se relacionavam com as quantidades no outro prato ao invés de representar um resultado. Entendemos que essa atividade favoreceu a compreensão dos diferentes sentidos atribuídos ao sinal de igual, fazendo com que os alunos compreendessem este sentido antes de se deparar com uma expressão algébrica.

Percebemos que a condução da aula ajudou os alunos a interagir com diversas situações ligadas ao pensamento algébrico, motivando-os a buscarem o valor de pesos de objetos usando pesos conhecidos em uma balança de dois pratos. Algumas vezes, o peso desconhecido não podia ser descoberto pela soma dos pesos conhecidos. Dessa maneira, os alunos desenvolviam uma estratégia subtrativa para encontrar o valor do peso desconhecido. Por exemplo, um recipiente desconhecido pesava 400 gramas, mas os alunos só tinham os pesos conhecidos de 50, 100, 200 e 500 gramas. Assim, os alunos colocavam o recipiente desconhecido com o peso de 100 gramas de um lado da balança e o peso de 500 gramas do outro lado.

Encontramos, ainda, o entendimento de equações no uso de outras atividades, quando a professora criava situações de igualdade e instigava os alunos a interpretarem essa igualdade como uma relação. Em uma entrevista posterior à aula com o OA Balança Interativa, ela reconhece esse sentido de equação:

> Pesquisadora: O que você achou de interessante nesta atividade?
> Professora: Eles procurarem meios para ter menos movimento.
> Pesquisadora: O que você acha que eles aprenderam hoje?
> Professora: Bem, acho que a relacionar, né?
> Pesquisadora: Relacionar quantidades?
> Professora: É...
> Pesquisadora: E como você acha que relacionar é importante?
> Professora: Assim... eu acho que eles começaram a entender esse negócio de movimentar os números.
> Pesquisadora: Como assim?
> Professora: Eles entendem que tudo que tem em um prato tem que ser igual no outro.

A professora demonstra compreender a importância do trabalho de equivalência entre membros de uma equação. Consideramos que esse conhecimento acerca da importância de se trabalhar com diferentes situações para o desenvolvimento da noção de igualdade é fundamental para se começar a trabalhar com o pensamento algébrico nos anos iniciais.

Entendimento do pensamento relacional

No momento em que a professora estava realizando atividades que envolviam comparação entre os pesos conhecidos e desconhecidos, ela encorajou seus alunos a usar um pensamento relacional. Por exemplo, em uma das situações, os alunos tinham que encontrar o valor de um saquinho. Na balança, tinha três saquinhos iguais com valores desconhecidos em um lado da balança. Os alunos foram colocando pesos do outro lado e conseguiram o equilíbrio com um peso de 100 gramas junto com o peso de 50 gramas. Ao encontrarem o valor do peso a professora pergunta:

> Professora: E quanto pesa somente 1?
> Alunos: 50 gramas. [Respondem todos juntos].
> Professora: Por quê?
> [Vários alunos respondem ao mesmo tempo]
> Professora: Pera! Deixa o Lucas, falar. Diga Lucas, por que vocês acham que cada saquinho é 50 gramas?
> Aluno: Porque é cento e cinquenta gramas, cada um vale cinqüenta. Cinquenta, cinquenta e cinquenta é cento e cinqüenta.

Para encontrar o valor dos saquinhos, os alunos relacionaram a quantidade de saquinhos com o peso do outro lado da balança. Observamos que a professora podia ter explorado mais essa situação, questionando, por exemplo, como encontrariam o valor se fossem quatro saquinhos ao invés de três, ou colocando um peso desconhecido do outro lado que equilibrasse a balança, perguntando como eles fariam para encontrar o valor dos saquinhos se conhecessem o valor desse peso.

Inequações e o trabalho com quantidades desconhecidas

O trabalho com relações e comparações entre quantidades desconhecidas foi realizado em vários momentos com a balança de dois pratos e com os OA Balança Interativa e Feira dos Pesos. No recorte a seguir, percebemos o conhecimento da professora sobre a importância de trabalhar com relações de desigualdade. A entrevista aconteceu após a professora ter usado o OA Feira dos Pesos.

> Pesquisadora: O que você acha que eles aprenderam nessa atividade?
> Professora: Assim... eu vi que hoje eles não estavam buscando somente a igualdade como a gente fez na aula passada com a balança [atividade com a balança de dois pratos pesando objetos] eles estavam trabalhando com a diferença também.
> Pesquisadora: Como assim diferença?
> Professora: Porque aqui a balança não entrou em equilíbrio, né? Eles trabalham também com as... inequações. Isso. Assim eles vêem *maior que* um peso, *menor do que* outro peso. Isso também é importante trabalhar, né?

> É assim, eu já trabalhava isso com eles pedindo para colocarem o sinal, mas aqui eles que fazem a relação dos pesos.
> Pesquisadora: Como assim o sinal?
> Professora: Assim, eu coloco 4 e 7, aí eles colocam qual o sinal entre esses números.
> Pesquisadora: Ah, o sinal de *maior que* e *menor que*?
> Professora: É!
> Pesquisadora: E aqui como eles fazem?
> Professora: Eles que criam a situação, né? Eles analisam...
> Pesquisadora: E porque isso é importante para que eles aprendam sobre álgebra?
> Professora: Hum... deixa eu ver. Bem, na situação que eu fazia para eles colocarem o sinal, trabalhavam só com o sinal e com o número. Aqui na Feira dos pesos eles trabalham de forma mais geral, analisando a situação, tem que analisar todo um contexto. Ah! Além do mais não tem um número, né?
> Pesquisadora: Como assim?
> Professora: Assim, eu acho que pode trabalhar várias coisas da álgebra, os alunos entendem a inequação como eu já disse e trabalham com um elemento desconhecido. Eu acho que é isso. Porque comparam uma coisa desconhecida com outra, e essa comparação não é uma coisa igual, mas diferente.

Durante as observações percebemos a motivação da professora para criar várias atividades nas quais os alunos pensassem sobre as relações de desigualdades. Nesta entrevista, ela afirma com clareza como poderia trabalhar inequações e a importância de relacionar pesos com valores desconhecidos. Esse reconhecimento não se deu devido ao objeto de aprendizagem em si, mas devido a todo o contexto que a professora trabalhou durante a pesquisa desde o momento da oficina, passando pelo planejamento das atividades e emergindo na prática em sala de aula.

Outro aspecto observado foi o uso de letras para representar incógnitas, como discutido a seguir.

O uso de letras para representar incógnitas

O trabalho com valores desconhecidos e incógnitas foi muito frequente durante as atividades com os OA *Feira dos Pesos* e *Balança Interativa*. A professora comentou na entrevista que os alunos ao utilizar o OA *Feira dos Pesos* pensavam nas relações e utilizaram mais as incógnitas no laboratório, pois "falavam constantemente em letras". Segundo a professora, as crianças se referiam às letras para falar sobre as ordens dos pesos (*Feira dos Pesos*) ou seus valores (*Balança Interativa*). Em seus diálogos, os alunos constantemente se referiam a um recipiente pela letra: "O B é maior que o C", "O D é menor do que A" etc. Isso acontecia porque no contexto da atividade os recipientes eram reconhecidos pelas letras.

Vale ressaltar que essa característica dos materiais digitais não os torna vantajosos em relação ao material concreto, pois os recipientes das atividades com o material concreto também poderiam representar letras ao invés de cores, como o material utilizado pela professora durante as aulas. O que propiciará essa característica é o planejamento que professores farão antes da atividade. Depois de perceber seus alunos conversando sobre quantidades desconhecidas representadas por letras, nas atividades no laboratório, a professora reconheceu que também poderia trabalhar esse conceito de incógnita em sala de aula.

> Pesquisadora: Você disse que aqui [no laboratório de informática] eles falavam mais sobre letras para representar quantidades. Mas isso não poderia ser feito em sala?
> Professora: Podia...
> Pesquisadora: Como?
> Professora: Era só colocar as letras naqueles potinhos.

Em todas as atividades a professora conversava com os alunos ou com as duplas de alunos para ver como estavam resolvendo as atividades. Em entrevista após uma aula com o OA Feira dos Pesos, observou que seus alunos desenvolviam o entendimento de incógnita e valor desconhecido quando relacionavam e comparavam as quantidades desconhecidas.

> Pesquisadora: Houve alguma coisa que chamou sua atenção?
> Professora: Achei legal porque eles falavam dos pesos sem dificuldade. Eu ficava perguntando a eles e eles conseguiam relacionar os pesos mesmo sem saber o valor deles, isso é... E eu vi que eles não tiveram dificuldade. E quando eles falavam comigo ou com os outros [colegas] dos pesos eles não chamavam pela representação numérica deles e sim pela letra.
> Pesquisadora: E por que você acha isso interessante?
> Professora: Porque eles podem fazer a representação da letra com a quantidade, não?

Nessas falas da professora, destacamos alguns pontos importantes sobre o trabalho realizado em sala de aula: (1) reconhecimento de que os alunos relacionavam uma quantidade qualquer com letras ou as comparavam mesmo sem saber seu valor numérico; (2) importância de começar a trabalhar com representações de quantidades e utilização de símbolos como incógnita; e (3) reflexão de que poderia ter modificado a atividade para trabalhar com representação de quantidades desconhecidas usando letras.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), as equações precisam ser escritas, preferencialmente, usando letras para designar a "incógnita", termo que pode aparecer de forma natural no trabalho na sala de aula. Para o autor, é muito possível que alguns alunos sugiram que em vez de 1+ ___ = 9 se escreva 1+ x = 9. Caso essa sugestão não surja espontaneamente por parte dos alunos, o professor terá de decidir qual o momento oportuno para introduzir a linguagem algébrica.

Esse trabalho com letras é um passo importante para se desenvolver o sentido de generalização, como discutido a seguir.

Generalizações

O aspecto generalizador da álgebra acontece quando se trabalha com padrões numéricos ou geométricos, promovendo o desenvolvimento da investigação e descoberta de uma regra geral que identifique casos particulares.

Embora as atividades desenvolvidas neste estudo não tivessem o objetivo de desenvolver a compreensão sobre padrões, observamos uma ação dos alunos a partir de sua curiosidade e a motivação da professora em despertar nos alunos a necessidade de fazer generalizações.

Na atividade de comparação de pesos com a balança de dois pratos, depois que os alunos descobriram a relação entre os seis recipientes de cores diferentes, um dos alunos perguntou à professora quanto valia cada recipiente daquele. A professora pegou os pesos conhecidos e pediu que o aluno encontrasse o valor de cada um. Os recipientes estavam em ordem crescente e o aluno começou a encontrar o valor do peso a partir do mais leve. O primeiro recipiente (de cor branca) pesava menos que 50 gramas. O aluno ainda balançou o recipiente, dizendo: "Não tem nada". O recipiente seguinte (de cor preta) pesava 50 gramas, o próximo (recipiente verde) pesava 100 gramas, depois (recipiente de cor vermelha) pesava 150 gramas, o seguinte (recipiente de cor azul) pesava 200 gramas e o último (recipiente de cor amarela) pesava 250. Professora e alunos discutem:

> Alunos: Vai sempre de cinquenta em cinquenta.
> Professora: E se eu tivesse outra cor aqui? [aponta para um suposto pote depois do amarelo].
> Alunos: Ia ser trezentas. Trezentas gramas, tia!
> Professora: E se eu tivesse outro?
> Alunos: Trezentos e cinquenta.

A professora, então, pergunta individualmente para alguns alunos, até que um deles responde: "Vai ser sempre o peso do último pote mais 50!". Esse raciocínio é semelhante a estabelecer regras usadas em progressões aritméticas ou em funções, como uma expressão tipo $A_n = A_{n-1}+50$. Portanto, podemos afirmar que essa situação permitiu aos alunos explorar um aspecto importante para o entendimento da generalização, pois observaram e analisaram uma determinada situação, compreendendo uma regra geral e fazendo conjecturas sobre esta situação.

Comentários sobre o Estudo 2

Durante esse estudo percebemos que as atividades permitiram que a professora trabalhasse aspectos do pensamento algébrico mesmo nos anos iniciais. Vimos que algumas atividades favoreceram o surgimento de determinadas formas de pensamento ou estratégias diferentes das formas tradicionalmente exploradas no pensamento aritmético.

Na próxima seção, discutiremos esses aspectos com mais detalhes, relacionando-os com estudos anteriormente realizados.

Conclusões e Discussão

Este capítulo abordou a compreensão de conceitos algébricos por alunos e por professores dos anos iniciais do ensino fundamental, utilizando atividades manipulativas e recursos digitais.

Os resultados mostram que estudantes de anos elementares podem realizar conjecturas e argumentos, estabelecer generalizações sobre dados e relações matemáticas expressas através de representações formais como letras (Kaput, 1998).

A trajetória de estudos aqui abordados avança em comparação com pesquisas anteriores em alguns aspectos. Primeiramente, mostramos que mesmo alunos do terceiro ano do ensino fundamental já são capazes de apresentar um raciocínio algébrico nas atividades propostas.

Analisando as atividades do primeiro estudo, observamos que os alunos demonstraram pouca dificuldade ao trabalhar com as situações propostas que diferem das usualmente apresentadas na escola. Por exemplo, ao longo do estudo percebemos que nas situações-problema, os alunos utilizaram cálculo mental e tiveram bom desempenho durante, demonstrando capacidade de estabelecer relações com partes desconhecidas. Ao classificar recipientes na balança de dois pratos, os alunos operavam e faziam relações sobre pesos desconhecidos. Observamos, ainda, que lidavam com conceitos algébricos quando falavam sobre a igualdade ou desigualdade de relações.

Quando os alunos resolviam as situações-problema, estavam generalizando o modelo daquela situação e desenvolvendo um procedimento algébrico, pois essa atividade tem o objetivo de simplificar e resolver relações entre grandezas. Em todas as situações-problema os alunos raciocinavam sobre as relações entre quantidades conhecidas e desconhecidas. A manipulação e resolução das atividades permitiam que eles entrassem em contado com as primeiras noções algébricas, principalmente ao pensar sobre as estruturas de uma equação e trabalhar com o sentido relacional. Na realidade, as atividades aqui trabalhadas estimulavam os alunos a fazer relações entre quantidades e entender o sentido do sinal de igual em tarefas que envolvem o pensamento algébrico. Além disso, os alunos eram levados a argumentar, justificando como fizeram e encontraram as relações entre as quantidades.

As análises mostraram que as atividades envolvendo materiais digitais favoreceram uma forma de pensamento mais próxima da álgebra. Por exemplo, nas atividades com o OA *Feira dos Pesos*, os alunos nunca descobriam o valor dos pesos e podiam escolher como queriam ordená-los (ordem crescente e decrescente). Esse trabalho com valores desconhecidos favorece a compreensão do sentido de incógnita.

Outro avanço em relação aos estudos apresentados foi observar como os professores podem começar a desenvolver esses conceitos com seus alunos, passo essencial para que os resultados de pesquisas cheguem à sala de aula.

O estudo com a professora mostrou que ela foi capaz de refletir sobre o uso de representações, entender a álgebra como uma atividade de relação e desenvolver diferentes modos de produzir significado. Isso possibilitou que explorasse com seus alunos situações relacionadas ao pensamento algébrico, aprimorando sua capacidade de usar materiais para explorar conceitos algébricos. É importante que os professores encorajem seus alunos a pensar de forma algébrica desde cedo, o que poderá servir como um suporte para uma compreensão mais sofisticada da álgebra nos anos escolares posteriores. Muitos estudantes não têm a oportunidade de desenvolver esse tipo de pensamento no ensino fundamental porque professores não conhecem e, portanto não trabalham com esses conceitos.

Esses dados sugerem que é preciso investir na formação inicial e continuada de professores de anos iniciais para a compreensão do ensino de Matemática a partir de uma articulação entre os conteúdos. Não se pode mais pensar em um currículo separado sem conexão da aritmética com os conhecimentos algébricos. Como afirmam Lins e Gimenez (1997), a álgebra precisa ser vista como atividade que envolve, assim como a aritmética, números e operações, igualdades e desigualdades, e a aritmética precisa ser vista, assim como a álgebra, como uma ferramenta que faz parte do processo de organização da atividade humana.

As atividades usadas pela professora no estudo apresentado permitem constatar os avanços do conhecimento docente sobre conceitos algébricos em sua atividade de sala de aula. O conhecimento da professora que participou do planejamento e da prática em sala de aula aponta para uma relação mais próxima do pensamento algébrico e desenvolvimento do sentido de símbolo (Arcavi, 1994). Pesquisas desta natureza podem contribuir para a formação do professor, favorecendo sua compreensão sobre conceitos algébricos e sobre como estimular e desenvolver o pensamento algébrico de seus alunos na sala de aula.

Contudo, ainda é preciso investir em atividades que trabalhem outros aspectos relacionados a conceitos algébricos como padrões e funções, utilização de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas e análise da variação em diversos contextos. É preciso também investir na formação de professores para a utilização desses conceitos de forma que esse conhecimento seja aplicado de forma mais ampla do que no contexto dessa pesquisa.

Referências

Araújo, C. R.; Brito Lima, A. P.; Da Rocha Falcão, J. T; Lessa, M. M. L.; Oliveira; Leitão, S. M. (2000). Negotiating algebraic sense-making in the context of student-student-teacher interaction activities. *Anais da III Conference for Sociocultural Research. Contion Center*. São Paulo, Campinas: UNICAMP.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14, 3, 24-35.

Brizuela, B. M. (2004). *Desenvolvendo matemática na criança: explorando notações*. Porto Alegre: Artmed.

Carraher, T. N. (1989). *O método clínico: usando os exames de Piaget.* São Paulo: Cortez.

Davydov, V. (Org.). (1969). *Soviet studies in mathematics education:* Psychological abilities of primary school children in learning mathematics (v. 6). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Direne A. I.; Carvalho, E. M.; Castilho, M.; Ramos, G.; Marczal, D. & Pimentel, A. (2009). Objetos de Aprendizagem Generalizáveis para o Currículo de Matemática do Ensino Médio. *Anais do XV Workshop sobre Informática na Escola.* Sociedade Brasileira de Computação, Bento Gonçalves/RS, 1693-1702.

Franchi, A. (1995). *Compreensão das situações multiplicativas elementares*. Tese de Doutorado não-publicada. Curso de Pós-graduação em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Franke, M.; Carpenter, T. & Battey, D. (2008). Content matters: Algebraic reasoning in teacher professional development. Em J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Orgs.), *Algebra in the early grades*. (pp 333-359). New York, NY: Routledge.

Freire, R. S. (2007). *Ambientes computacionais para o desenvolvimento do pensamento algébrico no Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado não-publicada Curso de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, CE.

Freire, R. S. & Castro-Filho, J. A. (2006). Desenvolvendo conceitos algébricos no ensino fundamental com o auxílio de um Objeto de Aprendizagem. *Anais do XII Workshop de Informática na Escola. Sociedade Brasileira de Computação*, Campo Grande/MG.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. Em National Council of Teachers of Mathematics & the Mathematical Sciences Education Board (Orgs.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I. Em H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Orgs.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* v. 1 (pp. 344-350). The University of Melbourne, Australia.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. Em A. Gutierrez & P. Boero (Orgs.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: Past, present and future (pp. 11-50). Roterdham: Sense.

Lessa, M. M. L. (1996). *Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra:* um estudo comparativo**.** Dissertação de Mestrado não- publicada. Curso de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE

Lins, R. C. & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, SP: Papirus Editora.

Peled, I. & Carraher, D. W. (2007). Signed numbers and algebraic thinking. Em J. Kaput; D. Carraher & M. Blanton (Orgs.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 303-327). Mahwah-N: Erlbaum.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1982). *A psicologia da criança*. São Paulo: DIFEL.

Pinto, G. A. T. (2001). *A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças do segundo ano do primeiro ciclo do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado não-publicada. Curso de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE

Ponte, J. P.; Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. [on line] Ministério da Educação, Portugal, Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC), Portugal. Disponível em: <area.dgidc.min-edu.pt/.../003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf>. Acesso em: 05 out.2010.

Schliemann, A. D.; Carraher, D.W.; Brizuela, B. & Pendexter, W. (1998). Solving algebra problems before algebra instruction. Second Early Algebra Meeting. UMass-Dartmouth/Tufts University (electronic publication: www3.umassd.edu/classes/EAR601GS).

Schliemann, A. D; Carraher, D.; Brizuela, B. & Jones, W. (1998). *Solving algebra problems before algebra instruction*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Schliemann, A. D.; Goodrow, A. & Lara-Roth, S. (2001). *Functions and Graphs in Third Grade*. Symposium Paper, Research Presession. Orlando-FL: NCTM.

Schwandt, T. (1998). Three epistemological stances for qualitative inquiry. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Orgs.), *The landscape of qualitative research*: Theories and issues (pp. 221-259). Thousand Oaks: Sage.

Spinillo, A. G. (1994). O conhecimento matemático de crianças antes da matemática na escola. *A Educação Matemática em Revista* (SBEM), 2, 3, 41-50.

Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. Em A. F. Coxford & A. P. Shulte (Orgs.), *As ideias da álgebra* (pp. 9-22). São Paulo: Atual.

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 13, 133-70.

Wiley, D. A. (2001). Connecting learning objects to instructional theory: a definition, a metaphor and a taxonomy. Em D. A. Wiley (Org.), *The Instructional Use of Learning Objects*: Online Version, pp. 1-35. Disponível em: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc. Acesso em: mai 2011.

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: ASPECTOS PSICOLÓGICOS E DIDÁTICOS ENVOLVIDOS NA GESTÃO DA SALA DE AULA

Claudia Roberta de Araújo Gomes, Claudia Patrícia Silvério da Silva e Roberta Magna Almeida Cordeiro
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Introdução

São inúmeras as dificuldades com as quais se defronta a educação básica no Brasil. Se apenas recentemente tais dados começam a ser sistematizados de forma mais cuidadosa, através das avaliações em larga escala, o problema em si é muito mais antigo. As crises remetem a fatores vinculados às políticas de gestão da educação. Embora estes sejam relevantes, há todo um conjunto de aspectos especificamente *didático-pedagógicos* que não podem ser minimizados no esforço de melhoria do sistema escolar. A sala de aula tem sua especificidade enquanto sistema no contexto maior do funcionamento social.

Os alunos que a escola vai formar têm necessidade, para sua vida adulta, de adquirir um saber funcional, não cristalizado, adaptável a situações imprevistas, e de aprender a estabelecer relações entre diferentes domínios do saber, explorando as particularidades de cada um deles. A formação dos estudantes, bem como a formação profissional dos professores, não pode deixar de levar em conta tais necessidades.

Partindo da Psicologia da Educação Matemática, como campo de reflexão e pesquisa, toma-se como premissa teórica o referencial construtivista tributado à Psicologia Cognitiva, particularmente o enfoque teórico de Jean Piaget e de Lev Vygotsky, e a Didática da Matemática, a partir dos construtos teóricos de Gérard Vergnaud, com a Teoria dos Campos Conceituais, e Guy Brousseau com a Teoria das Situações Didáticas, em especial, a noção de contrato didático.

Os pesquisadores em didática de conteúdos específicos estudam as condições no contexto escolar nas quais a maior parte dos alunos pode experimentar o tipo de aprendizagem mencionado acima, bem como os obstáculos para que isso ocorra. Tais condições e obstáculos dependem de vários fatores: dos conteúdos científicos a serem ensinados, dos conhecimentos dos alunos, das condições que limitam o professor, mas também do fato de que o professor utiliza, ou não, certa liberdade de escolha de que dispõe. No entanto, o professor pode, em geral, escolher como executar o programa, a maneira de organizar as relações entre as noções em estudo, a articulação entre a dimensão funcional do conhecimento e seu caráter de saber culturalmente estabelecido e, finalmente, pode estabelecer os papéis que ele próprio e os alunos devem desempenhar na sala de aula.

Explorar essa liberdade é fazer escolhas entre diversas possibilidades a partir do conhecimento da situação. Este é o ponto onde a didática das ciências pode ajudar os professores, propondo-lhes referenciais para organização a priori do material a ser ensinado, para conhecimento da realidade da sala de aula com respeito às previsões e às tomadas de decisão diante de situações imprevistas, buscando uma melhor adequação entre o planejado e o efetivamente realizado. Soma-se a isto, o grande desafio educacional dos próximos anos que diz respeito à necessidade de se diminuir a distância entre pesquisa e a sala de aula. O processo de ensino-aprendizagem em seu contexto sócio-institucional, a sala de aula, se constitui em um objeto complexo de intervenção e pesquisa na medida em que abarca, indissociavelmente, um tripé de aspectos constituídos por um *conteúdo específico*, ensinado por um *professor* "de carne e osso" a um *aluno* igualmente concreto e real, conforme ilustrado na Figura 1:

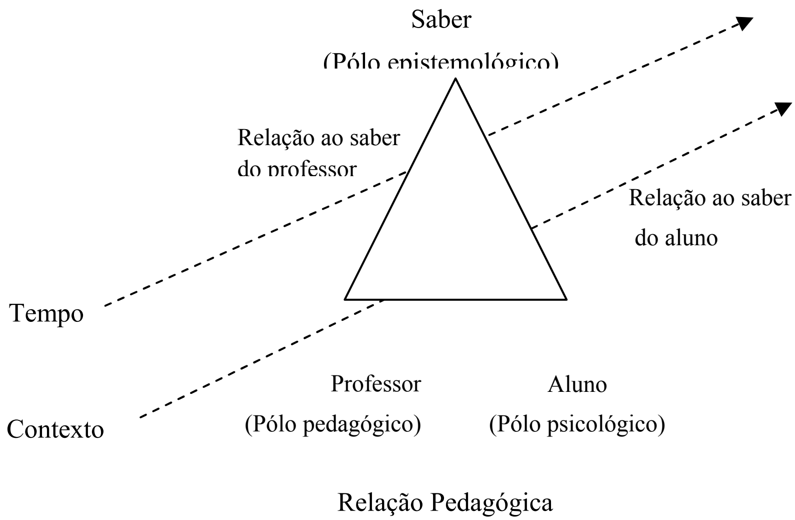


Figura 1. O "Tripé" Constitutivo do Objeto de Estudo da Didática de Conteúdos Específicos.

A consideração desse objeto complexo em sua natureza tríplice tem consequências teóricas importantes:

(i) O *aluno* que aprende não aprende sempre da mesma forma, independentemente do conteúdo com o qual ele seja confrontado. A aprendizagem, enquanto processo psicológico, não é algo genérico, mas sofre influências importantes em função do objeto que se tenta aprender. Nesse sentido, propomos que a aprendizagem deva ser sempre considerada como aprendizagem DE alguma coisa, ao invés da aprendizagem no sentido intransitivo. Em função disso, é fundamental determinar a que *conteúdo específico* (e.g., matemático, científico, linguístico, etc.) refere-se o processo de ensino-aprendizagem que se pretende estudar.
(ii) O *professor*, por outro lado, deixa de ser entendido como um mero 'transmissor de conteúdos', e passa a ser visto como um mediador do processo de construção do conhecimento, um *sujeito psicológico e didático*, que tem uma relação com o saber que ele pretende ensinar, marcada pela sua formação, tanto do ponto de vista cognitivo quanto subjetivo. Assim, ele é um pólo importante a ser considerado no *triângulo das situações didáticas* (Brousseau, 1998).
(iii) O *saber* que é colocado em cena na relação didática tem a sua epistemologia e não chega à sala de aula tal qual foi produzido na comunidade científica. Ele é modificado, tanto no nível da *transposição didática externa* (Chevallard, 1985), adquirindo uma roupagem didática; quanto no nível da *transposição didática interna*, quando o professor cria um metatexto, a partir do texto que aparece nos referenciais curriculares e no livro didático.
(iv) A *sala de aula* é um espaço onde acontecem múltiplas interações: professor-aluno; professor-saber; aluno-saber; aluno-aluno. A partir dessas relações *fenômenos didáticos*

emergem e é a gestão desses fenômenos que baliza a forma como tais relações serão estabelecidas e que proporcionarão a construção dos conceitos pelos alunos. Por outro lado, essas relações também passam a existir em função de uma série de *regras* e *expectativas* que regem as interações, os ritmos, enfim, a "ecologia" de tal microcultura. Tais regras e expectativas são frequentemente implícitas, e constituem um *contrato didático* (Schubauer-Leoni, 1986; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1985) cuja importância na compreensão do funcionamento da sala de aula é inegável.

(v) O *desenvolvimento conceitual,* por sua vez, se constitui como um processo para o qual o acervo de experiências sócio-culturais (muito especialmente escolares) contribui intensamente. O *conceito*, enquanto entidade psicológica baseia-se em três aspectos fundamentais: *invariantes operatórios* que lhe dão amplitude funcional (um conceito abrange um conjunto limitado, porém extenso de elementos), *suportes simbólico-representacionais*, muitos dos quais compartilhados socialmente, que servem de manifestação sensível para o conceito (símbolos linguísticos, gráficos, ilustrações etc.), e, finalmente, conjunto de *situações* que contextualizam o uso desse conceito, enquanto cenários sócio-culturais de aplicação do mesmo (Vergnaud, 1990). Os conceitos organizam-se em *campos conceituais* (Vergnaud, op.cit.), de vez que nenhuma situação pode ser eficientemente manejada a partir da mobilização de um único conceito, e cada conceito, por sua própria natureza (enquanto esquema explicitado), abrange mais de uma situação (de fato, toda uma família delimitada de situações). A consideração de tais campos conceituais, no âmbito de determinado domínio do conhecimento (matemático, científico, linguístico, etc.) é fundamental para a preparação do trabalho didático-pedagógico.

Os aspectos acima discutidos configuram um objeto de reflexão e pesquisa do complexo *sistema didático*. Tal objeto tem a sala de aula como lócus privilegiado, onde um professor com expectativas reais e subjetivas se propõe a ensinar a alunos reais e também subjetivos (que são detentores de determinados conhecimentos que ultrapassa os limites da escola) conhecimentos específicos especialmente adaptados para a transmissão via escola.

Partindo de tais premissas, uma série de estudos foram conduzidos com o objetivo de explorar os aspectos subjetivos envolvidos na aprendizagem da matemática. Algumas inquietações surgiram e se tornaram mote para as pesquisas desenvolvidas e que serão parcialmente discutidas nesse capítulo: (i) Quais aspectos psicológicos e didáticos estão envolvidos nesta gestão da sala de aula de matemática?; e (ii) Como investigar a formação de professores que ensinam matemática?

Apresentaremos, a seguir, recortes de duas pesquisas que refletem sobre os aspectos acima discutidos e ratificam a necessidade de construir uma reflexão interdisciplinar entre a Psicologia da Educação Matemática, a Didática das Ciências e a Didática da Matemática.

Um Estudo de Caso Acerca da Formação de Professores para o Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental[1]

Não é de hoje, que a matemática, como disciplina do currículo escolar, tem sido tema de discussões no âmbito

---

[1] Trabalho baseado na Dissertação de Mestrado de Roberta Magna Almeida Cordeiro (PPGEC, UFRPE, 2011).

educacional, bem como tem levantado o interesse de pesquisadores dessa área.

O processo de aprendizagem da matemática, na educação formal, inicia-se nos primeiros anos do ensino fundamental, nos quais deverão ser construídas as bases de aquisições posteriores. Assim, cada indivíduo carregará consigo uma matemática provinda das relações que se estabeleceram dia após dia, e isso faz com que ela possa estar carregada de sentimentos que vão desde a paixão, até uma rejeição profunda deixada por seus professores.

Quando se avalia o ensino de matemática no inicio da escolarização, percebe-se que a grande maioria dos alunos não utiliza com sucesso os conceitos matemáticos para solucionar problemas, sendo, portanto, nessa fase que surge o tabu dessa disciplina. Sem dúvida, o processo de formação dos professores não é o único motivo para essa insatisfação com a matemática; mas, parte desse e de outros problemas relativos ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina podem ser atribuídos a essa formação.

Segundo Curi (2004), as influências que procedem da formação docente inicial também interferem na constituição do conhecimento dos professores, e, neste sentido, quando os professores têm pouco conhecimento dos conteúdos que devem ensinar, surgem as dificuldades para conduzir situações didáticas proveitosas. Gurgel (2008, p.50), afirma que "o currículo dos cursos de Pedagogia, principal entrada na profissão, não contempla o *quê* e o *como* ensinar nem prepara para a realidade escolar". Diante disso, destaca-se a necessidade de examinar os cursos de formação inicial do professor polivalente, buscando compreender melhor esse processo de formar professores de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental.

Fiorentini e cols (2002) comentam que nas últimas décadas tem-se um aumento significativo de pesquisas sobre a formação de professores para o ensino da matemática. Porém, esse dado, segundo o autor, não se aplica a pesquisas acerca da formação de professores para ensinar essa disciplina nos anos iniciais do ensino fundamental. É também pequeno ainda, segundo o autor, o número de trabalhos voltados para a formação de professores nos cursos de Pedagogia; quadro este, entretanto, que já começa a se modificar face à obrigatoriedade de formação de professores no ensino superior, para todos os níveis.

Diante disso, tentando contribuir para uma melhor compreensão deste tema, buscou-se analisar o processo de formação de professores para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental em um curso de Licenciatura em Pedagogia de uma universidade pública da cidade do Recife.

Conhecimentos Docentes: Um Referencial Teórico

A decisão sobre a fundamentação teórica a ser utilizada nessa pesquisa se deve, sobretudo à preocupação em tentar compreender o processo de formação profissional de professores que irão ensinar matemática, e em que medida esse processo propicia envolvimento e conhecimento da educação matemática.

Segundo Montalvão e Mizukami (2002), observa-se um aumento expressivo de estudos que buscam investigar as especificidades, a natureza e os processos de construção de conhecimentos ou saberes dos professores, e tais estudos estão intimamente relacionados aos debates acerca da formação de professores.

Trata-se de um campo fértil de pesquisa que, mesmo com grande amplitude, tem uma história relativamente recente, resultante do desenvolvimento do movimento de profissionalização do ensino ocorrido nos Estados Unidos nas décadas de 80 e 90, e que demandava a construção de um repertório de conhecimentos profissionais para o ensino que pudesse subsidiar cursos de formação de professores (Nunes, 2001).

No estudo desses conhecimentos docentes, alguns pesquisadores (Perrenoud, 1999; Pimenta, 1999; Tardiff, 2002) apontam tipos de conhecimentos que devem ser do domínio do professor, e que revelam a complexidade implicada no processo de formação inicial desse profissional. No caso específico do professor para anos iniciais do ensino fundamental, agrega-se outro desafio que é construir competências específicas para trabalhar diferentes áreas do conhecimento.

Pesquisadores da área da educação matemática também se dedicam ao estudo dos conhecimentos docentes. Fiorentini (1999) considera o saber docente um saber reflexivo, plural e complexo, contextual, afetivo e cultural que forma uma teia de saberes, mais ou menos coerentes, imbricados de saberes científicos e saberes práticos. García Blanco (2003) aponta alguns aspectos que deveriam estar refletidos no conteúdo de formação de professores para o ensino da matemática: o conhecimento "de" e "sobre" a matemática, considerando as variáveis curriculares; o conhecimento "de" e "sobre" o processo de geração das noções matemáticas; o conhecimento sobre as interações em sala de aula; e o conhecimento sobre o processo instrutivo. Para Llinares (1996) o conhecimento específico para o ensino da matemática é formado pela integração de três domínios de conhecimento: conhecimento de matemática, conhecimento sobre a aprendizagem de noções matemáticas e conhecimento do processo instrutivo. Shulman (1986) identifica três categorias considerando que cada área do conhecimento tem uma especificidade própria que justifica a necessidade de estudar o conhecimento do professor tendo em vista a disciplina que ele irá ensinar: o conhecimento do conteúdo da disciplina, que envolve sua compreensão e organização; o conhecimento pedagógico (ou didático) do conteúdo da disciplina, combinação entre o conhecimento da disciplina e o conhecimento de como ensiná-la; e o conhecimento do currículo, que engloba a compreensão do programa e os respectivos materiais didáticos a serem utilizados para a aprendizagem pretendida.

Poderiam ser destacados ainda outros conhecimentos; entretanto, diante do problema de pesquisa a ser investigado, adota-se aqui a abordagem teórica de Shulman (1986) como fundamentação principal.

Na educação matemática, os estudos sobre conhecimentos de conteúdos, conhecimento didático desses conteúdos e conhecimento dos currículos de matemática relativos aos anos inicias do ensino fundamental têm, de acordo com Curi (2004), uma forte demanda, que se deve ao fato de que os cursos de formação de professores polivalentes no Brasil (ver Parecer CNE/CP 9 de 08.05.2001) não conferem destaque aos conhecimentos referentes às áreas de conhecimento em seus projetos curriculares.

Percurso Metodológico

Com finalidade de investigar uma formação em especial, a pesquisa foi desenvolvida em um curso de licenciatura em pedagogia de uma universidade pública. A escolha desse curso foi atrelada ao diferencial de sua proposta em relação à forma como tradicionalmente vinham sendo formados os professores desses anos de ensino. Assim, desde a sua implantação, em 2005, esse curso enfatiza a base conceitual em sua matriz curricular acompanhada pela base metodológica, caracterizando uma experiência inovadora e garantindo-lhe o reconhecimento nacional.

Dessa maneira, como o intuito da pesquisa é obter uma visão o mais completa possível de como se constroem as reflexões conceituais e metodológicas sobre a educação matemática desse curso de formação, os objetos de estudo da pesquisa foram os componentes curriculares referentes à educação matemática do referido curso, sendo estes: (i) Matemática na Prática Pedagógica I e II (2º e 3º períodos do curso respectivamente); e (ii) Metodologia do Ensino da Matemática I e II (5º e 6º períodos do curso respectivamente).

O estudo desenvolvido envolveu como instrumentos de construção de dados: (i) pesquisa documental no Projeto Pedagógico do curso, nas ementas e nos programas dos componentes curriculares; e (ii) observação e gravação em vídeo das aulas dos componentes curriculares de ensino de Matemática, para acompanhar de perto o processo de formação.

A análise, no que diz respeito aos dados obtidos durante o desenvolvimento dos componentes curriculares, foi feita a partir de categorias construídas com base nos conhecimentos matemáticos apontados por Shulman (1992 apud Curi, 2004): conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. O Quadro 1 indica as principais características relacionadas a cada um desses conhecimentos.

Quadro 1. Características dos Conhecimentos do Conteúdo, Pedagógico e Curricular (Shulman, 1992 apud Curi 2004).

Referencial Teórico*	Análise dos Dados
Conhecimento do Conteúdo	• Conhecimentos de conteúdo matemático trabalhados na formação
• Conhecimento profundo do conteúdo matemático, envolvendo sua compreensão e organização; • Compreensão da relação entre tópicos do conteúdo disciplinar e entre a disciplina e outras áreas do conhecimento; • Domínio para trabalhar os conteúdos como instrumentos para leitura e compreensão do mundo.	
Conhecimento Pedagógico do Conteúdo	• Conhecimentos utilizados para tornar o conhecimento matemático compreensível
• Combinação entre o conhecimento da disciplina e o conhecimento de como ensiná-la; • Conjuntos de conhecimentos que inclui aspectos da racionalidade técnica associados a capacidades tais como improvisação, julgamento, intuição; • Conhecimentos de ação pedagógica que permite ao professor recorrer aos conhecimentos requeridos	

para ensinar algo num dado contexto e para elaborar planos de ação;	
Conhecimento Curricular	• Organização dos conteúdos, incluindo o planejamento; • Materiais utilizados na formação
• Conhecimento do conjunto de conteúdos a serem ensinados nos diferentes níveis de escolarização, bem como, aos respectivos materiais didáticos a serem utilizados para a aprendizagem pretendida; • Capacidade de fazer articulações, e a evolução curricular do conteúdo a ser ensinado	

Construção Analítica dos Dados

Os dados aqui apresentados são resultados: da pesquisa documental; e do acompanhamento realizado durante o segundo semestre de 2009 e o primeiro semestre de 2010 nos componentes curriculares de Matemática na Prática Pedagógica I e II, e Metodologia do Ensino da Matemática I e II.

Pesquisa Documental

O Projeto Político Pedagógico do Curso afirma construir em sua proposta uma sintonia entre os princípios que norteiam a formação de professores e que foram instituídos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), pelas Diretrizes Nacionais para a

Educação Infantil para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, as recomendações constantes nos Parâmetros e Referenciais Curriculares para a Educação Básica, bem como as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Graduação em Pedagogia, Licenciatura. Dessa forma, prevê "uma formação de nível superior com foco principal no ensino da Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental", destacando ainda "uma articulação estruturada da reflexão teórica à atuação prática". (Brasil, 2007, p.6)

Pode-se ainda salientar que alguns dos princípios norteadores dessa formação, segundo o Projeto Político Pedagógico, mantêm relação com as categorias de análise a serem utilizadas nessa pesquisa, entre os quais se destacam:

> "Garantir o acesso ao repertório de conhecimentos específicos da docência, propiciando referenciais teórico-metodológicos que instrumentalizem o docente em sua atuação". (Brasil, 2007, p.16)
>
> "Desenvolver modos de ensinar diferentes linguagens, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano, particularmente de crianças". (Brasil, 2007, p.19)

De maneira geral, o que foi proposto nas ementas guarda bastante proximidade do que propõem os PCN de matemática para os anos iniciais do ensino fundamental. Convém destacar a atenção dada ao estudo dos blocos de conteúdos, contemplados pelos Parâmetros, ao recurso aos jogos e à resolução de problemas, porém sob a mesma análise não há referência explicita nas mesmas aos temas transversais, ao recurso à história da matemática e ao tratamento da informação.

Os objetivos propostos nos Planos de Ensino, dos dois componentes, estão compatíveis com as ementas dos componentes curriculares. Também os conteúdos programáticos estão em conformidades com estas, sendo ainda nestes documentos explicitado o trabalho com o uso história da matemática e o tratamento da informação, que não constavam nas ementas.

Acompanhamento dos Componentes Curriculares

Ficou nítido no componente curricular *Matemática na Prática Pedagógica I* um maior foco no conhecimento do conteúdo matemático, em acordo com o que propõe o Projeto Pedagógico do Curso para este componente, mas também estando presente uma atenção para o conhecimento curricular e, em menor grau, para o conhecimento pedagógico. Foram desenvolvidos os seguintes conteúdos: reconhecimento do sistema decimal e compreensão de suas características, bem como o conhecimento de sua história; operações com números naturais; e resolução de situações-problemas, envolvendo o reconhecimento da possibilidade de diferentes soluções.

Os conteúdos contemplados pelo componente estão entre os blocos de conteúdos previstos para os anos iniciais como recomendam os PCN de matemática. Outros conteúdos também citados pelos PCN não foram observados neste componente, como por exemplo, o trabalho com grandezas e medidas e o tratamento da informação.

Cabe destacar que o trabalho realizado com os conteúdos buscou aprofundar os conceitos que os graduandos já possuem, proporcionando-lhes reflexões sobre tais conceitos matemáticos, bem como aperfeiçoando procedimentos conhecidos e, caso necessário, construindo novos.

Preciso lembrar que essa disciplina de matemática na pratica pedagógica, essa é a um né? Ela se refere a gente discutir conteúdos matemáticos, os principais fundamentos, em consonância com os documentos principais, que são os antigos PCNs, que vão passar a ser as OCNs, que são Orientações Curriculares Nacionais, a LDB e alguns documentos que existam voltados para os anos iniciais do ensino fundamental. O que eu pensei em trabalhar hoje foram as quatro operações. Não é ensinar novamente a somar, subtrair, multiplicar e dividir, mas é aprofundar a discussão já a partir do que a gente viu no sistema de numeração, no sistema de base, no sistema posicional, pra gente ver como é que os algoritmos das operações estão relacionados a questão posicional.

Figura 2. Recortes da Fala da Professora com Relação à Forma como os Conteúdos Seriam Trabalhados.

Apesar de não ser o foco do componente o conhecimento pedagógico do conteúdo, o trabalho com os conteúdos matemáticos também envolveu algumas vezes uma reflexão a respeito de metodologias utilizadas no seu ensino. Assim, em algumas atividades a professora solicitou que os alunos demonstrassem de que forma eles ensinariam tais conteúdos. Porém, tais atividades apenas foram realizadas individualmente e entregues de maneira escrita a professora. Por isso, considera-se que o trabalho com o conhecimento pedagógico do conteúdo neste componente não foi significativo. Mas há que se considerar que, como já foi dito, esse não é o foco principal deste componente.

Com relação a momentos em que o conhecimento curricular foi intencionalmente trabalhado em sala, pode-se citar o trabalho com os PCN de Matemática, com o intuito de observação dos conteúdos matemáticos e sua organização para os anos iniciais do ensino fundamental. Entretanto, como essa atividade limitou-se apenas a realização de uma síntese dos Parâmetros, por parte dos alunos, não havendo um momento de discussão voltado para a sua análise, considera-se aqui que essa atividade não proporcionou um conhecimento suficiente.

O componente curricular *Matemática na Prática Pedagógica II* sinaliza o trabalho com o sistema numérico decimal, com os algoritmos das operações fundamentais e sua aplicação, com os números naturais e racionais, bem como a exploração do tratamento da informação. Ao longo do desenvolvimento dos encontros do componente observou-se que estes seguiram o que estava proposto no plano, com relação ao conteúdo, tendo sido inclusive acrescentado o trabalho com geometria e frações, que inicialmente não estava previsto no plano de ensino. Por outro lado, mesmo tendo sido elencado no plano, não foi observado o trabalho com o tratamento da informação.

Pronto o que a gente buscou nessa atividade? Então o conteúdo explorado ai qual é? Formas geométricas, é um campo da matemática a geometria né? Mas alem disso será que só tem formas geométricas aí? Hoje nos mexemos mais, exploramos as formas geométricas, mas será que só tem isso? O trabalho mesmo qual foi? Conjugação de peças, medir, medimos o lado do triangulo não é? Quando você pega quadrado triângulo você tá fazendo o que? Medida desse lado com a medida do triângulo, comparando medidas, você está associando formas, tem toda uma matemática que você ta executando aí, então essa brincadeira é rica nesse sentido né? Alem de explorar as formas geométricas, puxa a reboque outros conceitos que são essenciais para a geometria e a geometria não é só ver a figura e dizer se é plana, quadrado, retângulo.

Figura 3. Recorte Referente aos Conteúdos Abordados no Componente Curricular Matemática na Prática Pedagógica II.

Apesar de não ser o foco do componente, a ementa deste apresentou em seu conteúdo programático alguns tópicos que estariam voltados para o conhecimento pedagógico do conteúdo; entre estes, apenas se observou o trabalho com a utilização de jogos como estratégia para explorar conceitos matemáticos, e ainda, segundo o próprio professor formador, destacou nos encontros, como forma de motivação para a aprendizagem da matemática.

Essas são brincadeiras que o pessoal das series iniciais hoje tem feito pra motivar as crianças pra fazer com que as crianças gostem de matemática porque o que se esta observando é que elas estão saindo da escola sem gostar de matemática, parece que a matemática não tem nenhum atrativo, então situações dessa né? Problemas simples como esse começam a enriquecer as crianças porque alem de brincar na sala elas vão levar pra casa vão mostrar aos amiguinhos da rua, ao tio, a tia, ao avô, ao pai, e aí ela começa e isso é importante na aprendizagem.

Figura 4. Recorte de Abordagem Referente à Relevância do Uso de Jogos no Ensino de Matemática

Com relação ao conhecimento curricular, apesar deste conhecimento não ser o foco do componente, tanto na ementa quanto no plano de ensino, havia referência a uma abordagem sobre as orientações para o ensino da matemática nos programas e referenciais curriculares, no que se refere a que matemática presente nos anos iniciais do ensino fundamental. Entretanto, ao longo do desenvolvimento dos encontros não se verificou nenhuma atividade voltada para o trabalho com o conjunto de conteúdos a ser trabalho nesse nível de escolarização. Também não houve referência ao longo dos encontros sobre a evolução curricular desses conteúdos e suas possíveis articulações.

O componente *Metodologia do Ensino da Matemática I* tem um foco maior no conhecimento pedagógico do conteúdo e no conhecimento curricular, entretanto, o conhecimento do conteúdo também se fez presente ao longo de todo o desenvolvimento do componente permeando os outros conhecimentos, na medida em que foi por meio dele que os outros conhecimentos puderam ser trabalhados.

Apesar de não ser o foco do componente, este traz em seu plano de ensino os seguintes pontos relacionados mais diretamente ao trabalho com o conhecimento do conteúdo: operações fundamentais, sistemas de medição e elementos básicos da geometria. Destes, apenas não foi observado o trabalho com o sistema de medições. Cabe ainda destacar sobre isso que embora tenham sido apontados os trabalhos diretos com o estudo destes componentes, como já foi mencionado, esses conteúdos apareceram apenas por meio do estudo da forma de como ensiná-los.

O plano de ensino do componente apresenta como objetivo principal “contribuir com conhecimentos para a formação do aluno de pedagogia quanto a sua prática em sala de aula, utilizando recursos e conhecimentos necessários ao ensino de matemática", o que vai tanto ao encontro das características especificadas como do conhecimento pedagógico do conteúdo referido por Shulman (1986), quanto ao encontro da proposta de formação do curso.

Assim, ao longo do acompanhamento dos encontros deste componente foi possível verificar que este se voltou para esse foco no conhecimento pedagógico do conteúdo tendo sido realizadas atividades com esse intuito.

> O que é metodologia do ensino da matemática? [...] Deu pra entender o que a colega de vocês falou? Ela toca em elementos fundamentais que são os métodos de ensino da matemática a minha função aqui é basicamente essa, discutir com vocês o que é que tem de importante na matemática e como ela deve ser trabalhada aqui na sala, e que vocês levem pra escola e façam com que os alunos aprendam certo?
>
> O grupo fez um resgate da importância dos materiais, como devem ser trabalhados em sala como instrumento facilitador da aprendizagem. Então é fundamental que o profissional do ensino se envolva com essas técnicas, e isso vai mostrar a sua competência de trabalho, quando ele começa a explorar recursos, e vai possibilitar aos alunos outros caminhos de aprendizagem, porque tem criança que vai aprender de um jeito e outra de outro e aí?
>
> O mesmo conteúdo eu vou poder trabalhar de quatro formas diferentes. O professor de hoje tem que se apróprias dessas ferramentas, além do ensino formal eu preciso trabalhar jogos, conhecer bem os algoritmos, os mecanismos de facilitação da aprendizagem dos algoritmos, e tudo isso diz respeito a metodologia do ensino né? Desenvolver métodos.

Figura 5. Recorte Referente a Alguns Momentos de Trabalho com o Conhecimento Pedagógico.

Foi bastante relevante o trabalho realizado relativo às teorias de aprendizagem e suas aplicações no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, bem como o trabalho que foi desenvolvido por todo o semestre relativo aos projetos de pesquisa no ensino de matemática nas séries iniciais realizado pelos alunos. Entretanto, considera-se aqui que esta atividade teria sido mais enriquecedora se tivesse envolvido uma maior interação entre as equipes nos encontros para socialização e discussão do andamento e resultados dos trabalhos. Porém, é válido destacar aqui um empenho em, por meio dessa atividade de pesquisa, tentar articular o estudo realizado na formação com situações reais e cotidianas em sala de aula.

Entretanto, muitos dos pontos elencados no plano de ensino não foram abordados no componente, tais como: analisar situações do cotidiano que valorizam a compreensão de conceitos matemáticos; discutir avaliação no ensino de matemática nas séries iniciais; metodologia de resolução de problemas como estratégia de ensino de matemática; recursos tecnológicos aplicados as diversas metodologias de ensino de matemática; situações de ensino a partir do tratamento da informação; trabalhar a coleta e organização de dados para construção/interpretação de gráficos e tabelas.

O conhecimento curricular se fez presente neste componente por meio de algumas atividades, como por exemplo, o estudo das orientações sobre a seleção e organização de conteúdos contidos nos PCN. Também foi observado o estudo sobre o uso de jogos, análise e elaboração de situações didáticas a partir de materiais didáticos. Considera-se aqui que essas atividades foram bem exploradas, tendo sido destinado mais de um encontro para sua realização, porém com relação a atividade de pesquisa, como já foi referido anteriormente neste trabalho, poderia ter sido melhor explorada nos encontros, e mais especificamente, com relação ao conhecimento curricular poderia ter proporcionado aos alunos uma maior aproximação com as situações vivenciadas no âmbito da sala de aula referente aos uso dos materiais didáticos.

O componente curricular *Metodologia do Ensino da Matemática II* atribui um peso maior ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Foi bastante explorado pela professora o uso de recursos e materiais didáticos para o ensino da matemática, principalmente a utilização de jogos, bem como houveram momentos voltados para as metodologias utilizadas no ensino de matemática. Foram feitas atividades que solicitavam que os alunos explicitassem como ensinariam determinados conteúdos e propostas de elaboração, pelos alunos, de situações-problemas conjuntamente com a demonstração de como resolvê-las, ou de como ensinar a resolvê-las.

Entretanto, a maior parte do trabalho voltado para a construção do conhecimento pedagógico envolveu aulas e demonstrações expositivas por parte da professora, tanto dos recursos quanto das metodologias. Assim, considera-se aqui que, ainda que os momentos destinados a construção do conhecimento pedagógico não possam ser considerados ineficazes e insuficientes, poderiam ter sido mais enriquecidas as reflexões sobre esse conhecimento se tivessem ocorrido mais discussões em cima das produções dos alunos.

O que vocês trabalharam nessa aula já é um exemplo pratico de que a metodologia de se trabalhar atividades práticas e utilizar jogos em sala de aula é outra. Eu vou fazer uma apresentação no PowerPoint onde eu vou explicar de uma maneira geral, aqui tem todas as possibilidades, ou quase todas, quando a gente for utilizar atividades lúdicas na sala de aula, o que é possível levar em consideração tanto com relação a cabeça da criança, o que é que pode se passar, como é que a gente pode fazer pra ela aprender, quanto do ponto de vista da harmonia da sala de aula, porque também é preciso ter o espaço próprio

Figura 6. Recorte Relacionado a Momento do Trabalho com o Conhecimento Pedagógico

O trabalho com os conteúdos nesse componente envolveu noções de geometria e resolução de problemas, sendo a proposta da professora que as atividades estivessem sempre mais voltadas e articuladas com o uso de materiais didáticos e com a demonstração de metodologias para seu ensino. Porém, mesmo com essa intenção, o trabalho dos componentes foi realizado tendo em vista um maior aprofundamento por parte dos alunos dos conceitos matemáticos envolvidos nesses conteúdos.

Com relação ao conhecimento curricular não foi realizado trabalho com observação dos conteúdos matemáticos e sua organização por meio da observação dos PCN de matemática. Também não foi observada a realização de nenhuma discussão ou atividades envolvendo o planejamento, como por exemplo, a elaboração de planos de aulas.

Na questão dos materiais didáticos apenas foram abordados o uso de filmes, como no caso do vídeo "Donald no país da matemágica", e o jogo "Cálculo Plus" voltado para o trabalho com as operações fundamentais. Porém, com observado em relação ao planejamento, não foram exploradas atividades e discussões que proporcionassem uma maior reflexão sobre a utilização desses recursos para o ensino. Sendo assim, mesmo considerando que o conhecimento curricular não é o maior foco desse componente, considera-se que a atenção dada a ele ficou aquém da esperada.

O cerne dessa pesquisa recaiu sobre a análise da formação de professores para o ensino de matemática, considerando as três vertentes de conhecimento apontadas por Shulman (1986, 2005). Assim, identificou-se que, no curso analisado, a educação matemática recebe um espaço significativo na formação de professores para os anos iniciais do ensino fundamental. Isso foi observado em relação aos quatro componentes curriculares, apresentados em sua matriz curricular, destinados à formação voltada especificamente para o ensino deste conhecimento, e que buscam contemplar igualmente tanto sua base conceitual quanto metodológica.

Deve-se ressaltar a relevância que a proposta pedagógica bem estruturada e bem desenvolvida desse curso tem para a formação desses futuros professores que, além de ter acesso à metodologia do ensino da matemática, tiveram também acesso a conceitos e procedimentos matemáticos básicos, aspecto esse inovador quando comparados a cursos de formação que apenas enfatizam a base metodológica.

A análise leva, de maneira geral, a uma avaliação favorável quanto aos conteúdos abordados pelo curso. No entanto, o estudo de cada um desses temas desdobra-se numa rede de conceitos e procedimentos que nem os textos trabalhados, nem as discussões poderiam dar conta, considerando o período que a formação oferece. É o caso, por exemplo, do tratamento dos conteúdos geométricos e dos conteúdos referentes ao tratamento da informação que são, geralmente, conteúdos desconhecidos dos professores. Destaca-se que as abordagens sobre números e operações foram as mais frequentes.

Com relação ao conhecimento pedagógico, como apresentado na análise dos componentes, a formação conseguiu contemplar algumas questões de natureza didática como a idéia da contextualização, da resolução de problemas, da utilização de materiais didáticos e de jogos; e ainda, sobre o modo pelo qual conteúdos específicos podem ser apresentados em situações de ensino.

Por outro lado, não foi dada atenção às discussões sobre os conhecimentos prévios dos alunos e as hipóteses que formulam o papel constitutivo do erro. A incorporação de recursos tecnológicos e o estabelecimento de conexões entre conteúdos matemáticos também não foram estimuladas. Da mesma maneira, seria desejável um aprofundamento dos conhecimentos sobre o planejamento do ensino, sobre rotina e recursos instrucionais, sobre características das interações entre conteúdos e sobre as tarefas realizadas.

Entretanto, o que se pode indicar é que, até o momento, essa formação parece ainda necessitar de um maior aprofundamento quanto ao conhecimento pedagógico do conteúdo e quanto ao conhecimento curricular, e até mesmo o trabalho com o conhecimento do conteúdo (que dos três pode ser considerado o que mais efetivamente se realizou), ainda necessita voltar mais a atenção para a sua real articulação com outras áreas de conhecimento e com o cotidiano extra-escolar.

Um estudo das Representações Sociais da Relação com o Saber Matemático em Função do Gênero[2]

Nos últimos anos, estudos realizados no país e no exterior assinalam a necessidade de discutirmos as diferenças de desempenho escolar não apenas no ambiente acadêmico, mas, principalmente, dentro do contexto educacional e entre os membros da comunidade escolar. Analisando as desigualdades entre os estudantes sob o prisma das mais diversas categorias, tais investigações buscam tanto ampliar o entendimento sobre a realidade local e escolar, quanto desenvolver conhecimentos sobre a prática e a formação de professores no âmbito da sala de aula. Entretanto, essas pesquisas não têm atingindo a população como um todo, nem tampouco alcançado o seu público alvo que, em tese, seriam os(as) diretores(as) de escola, os(as) supervisores(as), os(as) professores (as), os(as) orientadores(as) educacionais, os(as) psicólogos(as), os(as) alunos(as), suas mães e seus pais.

Assim como outros investigadores (e.g., Carvalho, 2001; Felicio & Fernandes, 2005; Fernandes & Natenzon, 2003) e em face da emergência de tratar nos cursos de formação de professores trabalhos que investigam a influência de variáveis (como o gênero, a classe social, a etnia etc.) consideradas relevantes para explicar as diferenças no desempenho escolar entre estudantes, também, buscamos investigar este tema (Silvério da Silva, 2007, 2008, 2010, 2011; Silvério da Silva & Araújo Gomes, 2008, 2010).

---

2 Trabalho proposto a partir da Dissertação de Mestrado de Claudia Patricia Silvério da Silva, PPGEC, UFRPE (2011).

Considerando o gênero como um possível fator para explicar diferenças de desempenho escolar, observamos que alguns pesquisadores garantem que a relação de meninos e meninas com os mais distintos saberes não é a mesma (Arruda, 2002; Bakos, Denburg, Fonseca & Parente, 2010; Carvalho, 2001, 2004; Felder, Felder, Mauney, Hamrin & Dietz, 1995; Fuchs & Woessmann, 2004; Soares & Alves, 2003). Na matemática, estudos sobre o desempenho escolar na educação básica chamaram nossa atenção por apresentarem resultados estatisticamente desiguais entre meninos e meninas (Brasil, 1996, 1998, 2000, 2002, 2004, 2006, 2008; OCDE, 2001, 2004, 2007).

Constata-se, por exemplo, que os meninos/rapazes apresentam um desempenho significativamente superior ao desempenho das meninas/moças após os quatro primeiros anos de escolarização (Andrade, Franco & Carvalho, 2003, 2006; Arruda, 2002, Da Rocha Falcão, 2007). Preocupadas em examinar esta suposta inadequação feminina à aprendizagem da matemática e esta aparente vantagem masculina no desempenho escolar do referido saber realizamos algumas análises que mostraram que o tratamento diferenciado de meninos e meninas, por parte do(a) professor(a), pode ser considerado uma das principais causas para as diferenças nas performances dos estudantes de ambos os gêneros na Matemática. Diante disso, é possível afirmamos que a organização didática e a prática docente em sala de aula podem exercer grande influência sobre a relação de meninos e meninas com o saber matemático.

Consideramos que a forma como a prática docente é gerida e se organiza no ambiente escolar está diretamente associada às concepções que os(as) professores(as) constroem sobre seus alunos, suas alunas e o saber matemático. Em sendo assim, buscamos apreender as representações sociais dos licenciandos em matemática que atuaram lecionando esta disciplina, no ano letivo de 2010, sobre as relações que os estudantes de ambos os gêneros instituem com este conhecimento.

Para tanto, elegemos como referencial teórico a Teoria das Representações Sociais propostas por Moscovici (1961, 1976) e o seu desdobramento apresentado por Abric (1976), bem como enquanto referencial metodológico a análise de conteúdo sugerida por Bardin (1979), com o objetivo de guiar nossas reflexões sobre o conjunto de concepções, crenças, valores e modelos culturais pensados e vividos pelos licenciandos no contexto acadêmico, social e de prática docente em sala de aula.

Representações Sociais, Relações com o Saber Matemático e Gênero

Investigar os comportamentos e as atitudes de professores, alunos e alunas, ante ao conhecimento matemático, nos direcionou ao estudo das representações sociais da relação dos indivíduos com este saber. Presentes em todos os contatos interpessoais, em todos os objetos produzidos ou consumidos e em todas as comunicações socialmente trocadas, as representações sociais correspondem a uma forma de conhecimento ou um ato do pensamento que tem como objetivo prático contribuir para construção de uma realidade comum a um conjunto social (Charlot, 2000; Jodelet, 2001; Moscovici, 1976, 1981).

Notadamente, produzindo conhecimentos plurais que podem reforçar a identidade dos sujeitos e influenciar as suas práticas nos diferentes ambientes, tais representações são “fundamentais para compreender a relação entre os diversos grupos sociais e as diversas atitudes e comportamentos face à escola ou, a um nível mais restrito, para compreender a comunicação em sala de aula" (Gilly, 1989, p. 383). Nesta perspectiva, embasando e contrapondo práticas que corrigem ou estimulam desigualdades e que conciliam ou fazem divergir pontos de vista individuais e sociais, as representações sociais são uma possibilidade teórica relevante para compreensão e explicação da dinâmica e da complexidade dos fenômenos didáticos em sala de aula.

Presentes não somente nas declarações de professores e professoras em sala de aula, as representações docentes são expressas nas diversas ações que realizam junto a seus alunos e suas alunas, no ambiente escolar (Cardoso, 2004). Manifestadas, portanto, através das relações sociais, das expectativas, dos procedimentos de ensino e dos instrumentos de avaliação e de ordenamento em sala de aula, as representações docentes são elementos que organizam e estruturam as práticas pedagógicas que possibilitam a apropriação do saber.

Interferindo diretamente sobre as relações professor – alunos/alunas no cenário didático, estas representações podem impor e legitimar o tratamento diferenciado de meninos e meninas no ambiente escolar e, em consequência, fazer com que os sujeitos da aprendizagem se relacionem de formas diferentes com uma área do conhecimento. Desta maneira, analisar as diferenças relacionadas ao gênero dos estudantes no desempenho escolar em matemática também perpassa pelo estudo das representações sociais dos professores desta disciplina sobre a relação instituída por alunos e alunas com este saber.

Segundo Charlot (2000), Chevallard (1988) e Schubauer-Leoni (1986, 1988), individual e coletivamente, os sujeitos estabelecem relações pessoais com os diversos saberes em jogo na relação didática. Neste sentido, através destas relações, particularmente, alunos e alunas interagem "com um objeto, um 'conteúdo de pensamento', uma atividade, uma relação interpessoal, um lugar, uma pessoa, uma situação, uma ocasião, uma obrigação etc. ligados de certa maneira com o aprender e o saber" (Charlot, 2000, p. 81), ou seja, aproximam-se da escola, dos professores, dos pais, dos amigos, dos conhecimentos e de tudo mais que estiver relacionado ao processo de aprendizagem num dado momento.

Os professores, por sua vez, diante destas diferenças nas relações instituídas por alunos e alunas com o saber matemático, criam expectativas distintas e, de certo modo, elegem um determinado grupo de estudantes o qual se supõe que terá sucesso e, um grupo que, se supõe, será fadado ao fracasso nesta disciplina. As crenças dos professores sobre o sucesso e o fracasso de meninos e meninas na matemática podem transmitir expectativas negativas para a maioria dos alunos e, em particular, das alunas, pois exprimem claras discriminações e preconceitos de natureza social e de gênero (Cachapuz, Gil-Perez, Carvalho, Praia & Vilches, 2005) que interferem negativamente sobre a aprendizagem deste conhecimento.

Assim, a fim de contribuir para compreensão de uma das possíveis causas para as diferenças de desempenho escolar em função do gênero na matemática, propusemos analisar as representações sociais dos licenciandos em matemática sobre a relação dos alunos e das alunas com este saber.

Estratégia Metodológica para Construção e Análise dos Dados

Considerando que as representações sociais proporcionam uma visão funcional do mundo, que permitem ao indivíduo ou ao grupo de indivíduos darem sentido a suas condutas e compreenderem a realidade através de seu próprio sistema de referência (Santos, 2005), sugerimos trabalhar com a Teoria das Representações Sociais, posto que este referencial permite, ao mesmo tempo, apreender o produto e o processo simbólico da atividade mental dos nossos professores de matemática, quando confrontados à ideia de relações com o saber.

Caracterizada pela complexidade e pela multidimensionalidade dos seus objetos de investigação, os estudos sobre as representações sociais sugerem a adoção de uma abordagem plurimetodológica de pesquisa, na qual podemos utilizar diferentes instrumentos para construção e para análise de dados. Em nossa pesquisa optamos por utilizar a abordagem qualitativa de investigação e o método de associação livre, uma técnica que, segundo Abric (1994, p. 66), tem como objetivo "coletar elementos constitutivos do conteúdo de uma representação".

Identificando o campo semântico das representações sociais de 110 licenciandos em matemática de sete instituições de educação superior da capital e da zona da mata do estado de Pernambuco sobre a relação dos alunos e das alunas com o saber matemático. A associação livre possibilitou-nos acessar as concepções dos investigados acerca desta relação. Sendo assim, depois de organizados os elementos constitutivos do universo semântico das representações sociais destes sujeitos, os dados construídos foram dissolvidos a partir do conjunto de técnicas de análise de conteúdo proposta por Bardin (1979) com o intuito de descrever sistematicamente o significado destas comunicações, como veremos a seguir.

Representações Sociais das Relações dos Gêneros com o Saber Matemático

Reunidas as evocações, constatamos a presença de diversos termos comuns associados às expressões indutoras "relação dos alunos (meninos) com o saber matemático" e "relação das alunas (meninas) com o saber matemático". Esta constatação, sem uma análise criteriosa, nos levaria, equivocadamente, a crer na equivalência entre tais representações. Todavia, observado o critério de saliência[3] (Moliner, 1994) dos termos elencados pelos licenciandos, verificamos algumas diferenças na sua estrutura e na sua organização sobre as quais teceremos algumas considerações.

Por exemplo, a indicação das palavras *dificuldade*, *desinteresse*, *medo* e *interesse* entre os termos mais frequentes nos estudos na área e importantes das representações sociais não foi garantia para que estas expressões ocupassem a mesma posição na sua organização e na sua estrutura interna. Particularmente, nas representações sociais as quais estudamos, encontramos em comum apenas os termos

[3] Exame conjugado da frequência (Fq) e da Ordem Média de Evocação (OME) de cada palavra indicada.

dificuldade e *interesse* que, respectivamente, revelaram aspectos associados ao saber matemático e às relações de cada um dos gêneros com ele.

Entretanto, na representação social da relação dos alunos (meninos) com o saber matemático, em especial, observamos a ocorrência de outros elementos que também determinaram a sua estrutura e a sua significação enquanto "conjunto organizado de informações" (Abric, 2003, p. 59). Neste sentido, portanto, as palavras *desinteresse*, *brincadeira*, *facilidade* e *afinidade*, especificamente, ofereceram a estabilidade e a coerência que definiu a relação dos alunos (meninos) com o saber matemático.

Diferentemente da relação feminina com este saber, para os licenciandos em matemática, em termos de frequência, a relação masculina organizou-se de maneira *mais próxima* e *eficaz* que a primeira. Acreditando numa suposta *afinidade* e *facilidade* maior dos alunos do gênero masculino em interagirem com esta área do conhecimento, os sujeitos investigados poderão reproduzir, no exercício de suas atividades docentes, uma concepção elitista e sexista com relação ao saber matemático (Knjnick, 1996; Walkerdine, 1995, 1998).

Frequentemente assinaladas pelo senso comum, pela mídia, pela comunidade escolar e pela literatura acadêmica, tais concepções deformadas, distorcidas ou empobrecidas sobre a matemática podem ser responsabilizadas pela construção de obstáculos, permanentes ou transitórios, frente à aprendizagem ou à apropriação de conteúdos deste conhecimento. Podendo, por conseguinte, promover a reprodução de diferenças, distinções e desigualdades entre os gêneros em sala de aula, as referidas visões necessitam ser trabalhadas com o intuito de evitar a formação de preconceitos e discriminações face a meninos e meninas, no contexto escolar.

Compondo, ainda, os elementos da representação social da relação dos alunos (meninos) com o saber matemático, ressaltamos que os licenciandos investigados indicaram a expressão *brincadeira* como um dos elementos mais relevantes. Através dela as dimensões didático-pedagógica e social da relação dos estudantes com o saber também se fizeram presentes e revelaram que os sujeitos de nossa pesquisa acreditam na possibilidade de meninos e meninas aprenderem de maneira diferente e obterem melhores resultados através da aplicação de métodos de ensino diferenciados.

Todavia, considerando que tratamento diferenciado de meninos e meninas por parte do professor(a) de matemática pode ser compreendido como uma das principais causas para as diferenças no desempenho escolar entre os gêneros nesta área do conhecimento, a representação diferenciada de alunos e alunas face às suas relações com este saber, da mesma forma, pode justificar as diferenciações nas performances destes sujeitos na matemática (Fennema, 2000). Desta maneira, apresentadas as análises acima, examinaremos algumas considerações relativas ao nosso estudo acerca das representações sociais da relação dos estudantes com o saber matemático e das suas influências sobre as diferenças devidas aos gêneros em termos de desempenho escolar na Matemática.

Compreendendo que o conhecimento científico é constituído através de um processo dinâmico e contínuo de investigação, no qual os saberes elaborados apresentam um caráter provisório, acreditamos que o produto parcial da análise de nossa pesquisa, também, assume um caráter de transitoriedade. Entretanto, apesar de não pretendermos elaborar conclusões ou verdades rígidas, acabadas e infalíveis sobre diferenças de desempenho escolar na Matemática, pretendemos colaborar para construção de reflexões que subsidiem algumas discussões sobre a complexidade das questões axiológicas, das concepções alternativas e da avaliação nesta área do conhecimento.

Objetivando identificar os sentidos e os significados construídos pelos docentes, constatamos que de maneira geral eles não representam a relação de seus alunos e de suas alunas com o saber matemático equivalentemente. Muito pelo contrário, o fato de meninos e meninas serem percebidos como sujeitos com papeis sociais diferentes, em nossa sociedade, alimenta a crença de que seus alunos e suas alunas relacionar-se-iam de modo diferente com esta disciplina no ambiente escolar.

Acreditando, deste modo, que os gêneros não interagem da mesma maneira com o saber matemático, é bem provável que os licenciandos em matemática, quando em exercício da profissão docente em sala de aula, tratem diferentemente os seus alunos e as suas alunas em suas relações didáticas ou contratuais. Neste sentido, as representações docentes podem fortemente influenciar sobre a forma como o contrato didático é gerido/negociado em sala de aula, bem como colaborar para o desenvolvimento de diferenças associadas ao gênero dos estudantes na aprendizagem da Matemática.

Segundo nossa análise, verificamos que a palavra *dificuldade*, comum a ambas as representações, foi em média 60% mais evocada na representação social da relação das alunas (meninas) com o saber matemático do que na representação social dos alunos (meninos). Esta observação colaborou para percebermos que os licenciandos concebem as estudantes do gênero feminino como menos preparadas que os do gênero masculino a relacionarem-se com o saber matemático e apropriarem-se dele no ambiente escolar.

Outra constatação foi que a relação dos estudantes do gênero masculino com a matemática é concebida como uma relação mais fácil e mais próxima do que a feminina, por boa parte dos sujeitos investigados. Por outro lado, a relação das meninas é percebida como uma relação permeada pela dedicação, atenção e esforço ante ao estudo deste conhecimento. Em face de tais observações, podemos compreender que os licenciandos em matemática que foram sujeitos de nossa investigação compartilham da crença que o sucesso de meninos e meninas em Matemática está associado a características como habilidade e esforço, respectivamente.

Faz-se necessário, assim, previamente modificarmos as concepções epistemológicas inadequadas e mesmo incorretas dos(as) professores(as) em exercício e/ou em formação sobre a matemática e as relações com este saber. Nestes termos, sugerimos que educadores e pesquisadores em didática das ciências e da matemática dediquem-se a investigar a complexidade desta e de outras questões ligadas às relações de gênero e à matemática e a discutirem-nas junto aos cursos de formação de professores, à população como um todo e à comunidade escolar.

Diante deste cenário, verificarmos que se as representações dos licenciandos sobre as relações dos alunos (meninos) e das alunas (meninas) com o saber matemático é diferente, então o tratamento de alunos e alunas, por parte destes sujeitos, será diferenciado e, consequentemente, meninos e meninas poderão apresentar diferenças associadas ao gênero no que refere à aprendizagem e ao desempenho escolar nesta área do conhecimento. Posto desta maneira, até onde pudemos investigar, sentimos várias inquietações relativas às questões acima e, igualmente, esperamos que este sentimento seja compartilhado com outros professores e pesquisadores que busquem novas respostas e que também construam novas perguntas associadas às relações de gênero e o desempenho escolar em Matemática.

Conclusões e Discussão

O foco neste capítulo busca apresentar a reflexão que se tem delineado para a temática "Formação de Professores" como linha de pesquisa. Entendemos, nesse sentido, que esta discussão é ampla e resvala em muitos desdobramentos, que se configuram em várias dimensões, quais sejam: a didática, a psicológica, a metodológica entre outras.

Considerando a psicologia da educação matemática como a grande área que reflete os aspectos de intersecção entre a psicologia, a educação e a matemática, enfatizando assim os componentes psicológicos inseridos nas diferentes formas de aprender – como se aprende, como o sujeito constrói conhecimentos, como guarda informações, como se relaciona com o outro, etc. – e relacionando isto às especificidades do conhecimento matemático que o professor adquire em sua formação inicial, percebemos a importância de refletir no campo da Didática das Ciências e, em especial, na Didática da Matemática, ampliando assim as formas de compreender os fenômenos que se deseja investigar.

Tomando como referência a temática da constituição da subjetividade dos sujeitos didáticos na sala de aula de matemática, investigamos a formação de professores nos diversos níveis e modalidades de ensino da educação básica.

O interesse central residiu em compreender quais os aspectos psicológicos e didáticos que estavam envolvidos nesta gestão da sala de aula de matemática, e como investigar a formação destes profissionais.

Na primeira parte, analisamos o processo de formação do professor dos anos iniciais (pedagogos), que não tem uma formação específica que atenda a área específica de conhecimento para a qual debruça seu olhar enquanto educador. Nosso interesse em investigar este público, demanda a compreensão que esta formação deve favorecer o trabalho deste professor quando o mesmo ensina matemática, demonstrando a apropriação do saber que lhe é necessária para essa ação docente. O que se pretendeu por meio deste estudo foi dar visibilidade a práticas formativas para o ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, com o intuito de levantar práticas interessantes, identificar possíveis faltas e apontar possibilidades. Pelas limitações deste estudo, entretanto, não se pode fazer afirmações sobre se os alunos saem dessa formação com fundamentação sólida nas três vertentes para se tornarem bons e boas professores/as de matemática, podendo esse aspecto ser ponto de partida para futuras investigações.

No segundo momento, discutimos qual a representação que têm os futuros professores da matemática com formação específica na licenciatura em matemática. Esse trabalho configura uma reflexão clara sobre as questões de gênero envolvidas nessa formação, salientando o papel importante que as reflexões da psicologia social e da psicologia da educação matemática podem trazer para este trabalho.

Desta maneira, portanto, durante toda a nossa investigação, buscamos compreender as diferenças de desempenho escolar em função do gênero na Matemática, a partir da ideia do tratamento diferenciado de meninos e meninas por parte do professor ou da professora deste componente curricular (Fennema, 2000). A ação docente diferenciada em sala de aula, por sua vez, nos conduziu ao estudo sistemático das representações sociais dos professores de tal disciplina sobre as relações de gênero com esta área do conhecimento.

Fica clara a necessidade de re-significarmos a imagem da natureza da matemática construída socialmente e reproduzida através do senso comum e da comunidade escolar/acadêmica, visto que somente modificando as concepções empobrecidas que os/as professores (as) em exercício e/ou em formação têm a respeito deste saber e da relação de alunos e alunas com este saber poderemos evitar o fracasso generalizado e a crescente recusa, quando não rejeição, dos estudantes à aprendizagem desta disciplina.

Deste modo, pesquisar acerca da subjetividade dos sujeitos didáticos deve envolver aspectos variados da gestão da sala de aula; isso implica analisar desde processos de formação dos professores (biográficos, constituição da ação na formação, representação, entre outros) até o trabalho real do professor na sala de aula, na interação com os outros sujeitos (contratos diferenciais) e com as novas ferramentas didáticas. Nesse sentido, vale a pena lembrar algumas das sábias palavras do nosso Jean Piaget de que a principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe.

Referências

Abric, J. C. (1976). *Jeux, conflits et représentations sociales*. Thèse de Doctorat d'État de L'Université de Provence. Aix-en-Provence: L'Université de Provence.

Abric, J. C. (2003*). L'analyse structurale des representations*. Em S. Moscovici. *Méthodologie des sciences sociales*. Paris: PUF

Abric, J. C.(1994). Méthodologie de recueil des représentations sociales. Em J. C. Abric *Pratiques sociales et représentations* (pp. 59-82). Paris: Presses Universitaires de France.

Andrade, M. ; Franco, C. & Carvalho, J. B. P. (2006). Gênero e desempenho em Matemática ao final do ensino médio: quais as relações? *Anais do XV Encontro Nacional de Estudos Populacionais*. Caxambu: ABEP

Arruda, L. (2002). Desvelando desigualdades de oportunidades em ciências e em matemática relacionadas ao gênero do aluno: uma aplicação de modelagem multinível ao SAEB 99. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências,*Belo Horizonte: ABRAPEC, 67-83.

Bakos, D. G. S. ; Denburg, N. ; Fonseca, R. P. & Parente, M. A. P. (2010). A cultural study on decision making:

performance differences on the Iowa gambling task between selected groups of brazilians and americans. *Psychol. Neuroscience.* (Online), 3, 1, 101-107.

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70

Brasil, Conselho Nacional de Educação (2001). *Parecer CNE/CP n.9. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília, DF

Brasil (1996). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional* 1995. Brasília: MEC/SEB

Brasil (1998). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 1997*. Brasília: MEC/SEB

Brasil (2000). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 1999*. Brasília: MEC/SEB

Brasil, (2002). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 2001.* Brasília: MEC/SEB

Brasil (2004). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 2003.* Brasília: MEC/SEB

Brasil (2006). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 2005.* Brasília: MEC/SEB

Brasil (2008). Ministério da Educação e Cultura. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Sistema de Avaliação da Educação Básica: Relatório Nacional 2007.* Brasília: MEC/SEB

Brasil. UFRPE. (2007). *Projeto Político Pedagógico do Curso de Graduação em Pedagogia, Licenciatura*. Pernambuco.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques* (didactique des mathématiques *1970-1990).* Textos organizados por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. & Warfield, V. Grenoble: La Pensée Sauvage

Cachapuz, A.; Gil-Perez, D.; Carvalho, A. M. P.; Praia, J. & Vilches, A. (2005). *A necessária renovação do ensino de ciências*. São Paulo: Cortez

Cardoso, O. P. (2007). Representações dos professores sobre saber histórico escolar. *Cadernos de Pesquisa*. 37, 130, 209-226.

Carvalho , M. P. (2004). O fracasso escolar de meninos e meninas: articulações entre gênero e cor/raça. *Cadernos Pagu*. Campinas: UNICAMP, 22, 247-290.

Carvalho, M. P. (2001). Estatísticas de desempenho escolar: o lado avesso. *Educação & Sociedade,* 77, 231-252.

Carvalho, M. P.(2001). Mau aluno, boa aluna? Como as professoras avaliam meninos e meninas. *Revista de Estudos Feministas*. Florianópolis, 554-574.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, La penséeSauvage.

Chevallard, Y. (1988). Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport official. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique.* Année: IMAG, 211-235.

Curi, E. (2004). *Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos*. Tese de Doutorado não-publicada. Curso de Pós-graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica São Paulo. São Paulo, SP.

Da Rocha Falcão, J. T. (2007). Dez mitos acerca do ensino e da aprendizagem da matemática: síntese de pesquisas e reflexões teóricas 1986/2006. Anais do *IX Encontro*

Nacional de Educação Matemática.(CD-ROM), Belo Horizonte: Brasil.

Felder, R. M. ; Felder, G. N. ; Mauney, M. ; Hamrin, J. R., C. E. & Dietz, E. J. (1995). A longitudinal study of engineering student performance and retention. *Washington: Journal of Engineering Education*, 84, 2, 151-163.

Felicio, F. & Fernandes, R. (2005). O efeito da qualidade da escola sobre o desempenho escolar: uma avaliação do ensino fundamental no estado de São Paulo. *Anais do XXXIII Encontro Nacional de Economia.*

Fennema, E. (2000). Gender and mathematics: what is known and what do is wish was known? *Fifth Annual Forum of the National Institute for Science Education.* Detroit, Michigan.

Fernandes, R. & Natenzon, P. (2003). A evolução recente do rendimento escolar das crianças brasileiras: uma reavaliação dos dados do SAEB. *Estudos em Avaliação Educacional.*

Fiorentini D.; Nacarato, A. M. & Pinto, R. A. (1999). *Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada.* Quadrante, Lisboa: APM, n.8.

Fiorentini D.; Nacarato, A. M.; Ferreira, A. C.; Lopes, C. S.; Freitas, M. T. M. & Miskulin, R. G. S. (2002). Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, 36, 137-160.

Fuchs, T. & Woessmann, L. (2004). *What accounts for international differences in student performance? A Re-Examination Using PISA Data*. Washington: CESifo and IZA Bonn.

Garcia Blanco, M. M. (2003). A formação inicial de professores de matemática: fundamentos para a definição de curriculum. Em D. Fiorentini (Org.), *Formação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas, SP: Mercado de Letras.

Gilly, M. (1989). Les representations socials dans le champ educatif. Em D. Jodelet, *Representations Sociales: un domaine en expansion*. Paris: PUF, 363-385.

Gurgel, T. (2008). Formação inicial: Ao mesmo tempo, tão perto e tão longe. *Revista Nova Escola*, São Paulo, 216, 50-53.

Harvey, David. (1999). *Condição pós-moderna: uma pesquisa sobre as origens da mudança cultural.* São Paulo: Edições Loyola.

Jodelet, D. (2001). *As representações sociais*. Rio de Janeiro: EdUERJ.

Knjnick, G. (1996). *Exclusão e resistência: educação matemática e legitimidade cultural.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función. Em J. P. Ponte et al. (Org.). *Desenvolvimento profissional de professores de matemática: que formação?* Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, 1996. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/96Llinares.pdf>. Acesso em: 20 out. 2009.

Moliner, P. (1994). Les méthodes de répérage et d'identification du noyau des représentations sociales. Em C. Guimelli (Org.), *Structures et transformations dês représentations sociales* (pp. 199-232). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Montalvão, E. C. & Mizukami, M. G. N. (2002). Conhecimentos de futuras professoras das séries iniciais do ensino fundamental: analisando situações concretas de ensino e aprendizagem. Em M. G. N. Mizukami & A. M. M. R. Reali (Orgs.). *Formação de professores, práticas pedagógicas e escola*. São Carlos, SP: EdUFCar.

Moscovici, S. (1961). *La psychanalyse, son image et son public*. Paris: PUF.

Moscovici, S. (1981). On social representations. Em J. P. Forgas P., *Social cognitions perspectives on everyday understanding* (pp. 181-209). New York: Academic Press.

Moscovici, S. (1976*). Social influence and social change*. Londres: Academic Press.

Nunes, C. M. F. (2001). Saberes docentes e formação de professores: um breve panorama da pesquisa brasileira. *Educação & Sociedade*, Campinas: Cedes, 22, 74, 27-42.

OCDE (2001). Organization for Economic Co-operation and Development. *Knowledge and skills for life: First Results from PISA 2000*. Paris: OECD Publications.

OCDE (2004). Organization for Economic Co-operation and Development. *Knowledge and skills for life: First Results from PISA 2003.* Paris: OECD Publications.

OCDE (2007). Organization for Economic Co-operation and Development. *Knowledge and skills for life: First Results from PISA 2006.* Paris: OECD Publications.

Perrenoud, P. (1999*). Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Pimenta, S. G. (1999). Formação de professores: Identidade e saberes da docência. Em S. G. Pimenta, *Saberes pedagógicos e atividades docente*. São Paulo: Ed. Cortez.

Santos, M. F. S. (2005). A teoria das representações sociais. Em M. F. S. Santos & L. M. Almeira (Orgs.). *Diálogos com a teoria das representações sociais*. Recife: Editora Universitária UFPE/EdDUFAL.

Schubauer-Leoni, M. L. (1986). Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les eleves en mathématique. *Europian*

Journal of Psychological Education, Almeria: Universidad de Almería, 1, 2, 139-153.

Schubauer-Leoni, M. L. (1988). Le contrat didactique dans une approche psychosociale dês situations d'ensigneiment. *Interactions Didactiques*, 8, 63-75.

Schubauer-Leoni, M. L. & Perret-Clermont, A. M. (1985). Interactions sociales dans l'apprentissage deconnaissances mathématiques chez l'enfant. Em G. Mugny (Ed.). *Psychologie sociale du déve-loppement cognitif* (pp.225-250). Berne, Peter Lang.

Shulman, L. (1986). Those Who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 2, 4-14.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y ensenãnza: fundamentos de La nueva reforma. *Profesorado: Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9, 2, 2005. Disponível em: <http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92.html>. Acesso em: 13 out. 2009.

Silvério da Silva, C. P. (2007). *A aprendizagem da Matemática numa perspectiva de gênero*. Monografia de especialização não-publicada. Programa de Pós-graduação em Psicopedagogia, Universidade de Pernambuco. Nazaré da Mata, PE.

Silvério da Silva, C. P. (2008). Diferenças de desempenho em matemática: um olhar a partir da perspectiva de gênero. *Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária da UFRPE.

Silvério da Silva, C. P. (2010). Diferenças de desempenho escolar em matemática: estudo tomando o gênero como categoria de análise. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática.* Salvador: Universidade Católica de Salvador.

Silvério da Silva, C. P. (2011). *Um estudo sobre as representações sociais da relação com o saber matemático em função do gênero.* Dissertação de mestrado não-publicada. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife, PE.

Silvério da Silva, C. P. & Araújo Gomes, C. R. (2008). Perspectiva de gênero em Matemática: uma análise a partir dos Contratos Didáticos Diferenciais. *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.* Recife: Editora Universitária da UFRPE.

Silvério da Silva, C. P. & Araújo Gomes, C. R. (2010). Desempenho em função de gênero na matemática: análise das influências das representações docentes sobre a negociação e a renegociação do contrato didático em sala de aula. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador*: Universidade Católica de Salvador.

Soares, J. F. & Alves, M. T. G. (2003). Desigualdades raciais no sistema brasileiro de educação básica. *Educação e Pesquisa,* 29, 1, 147-165.

Tardiff, M. (2002). *Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis: Vozes.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10, 23, 133-170.

Walkerdine, V. (1995). O raciocínio em tempos pós-modernos. *Educação & Realidade,* 20, 2, 207- 226.

Walkerdine, V. (1998). *The mastery of reason: cognitive development and production of rationality.* London: Reutledge

A PESQUISA EM PSICOLOGIA E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

TIPOLOGIA Book Antiqua, Minion Pro, Trajan Pro

Editora Universitária UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 - Várzea
Recife | PE CEP: 50.740-530 Fax: (0xx81) 2126.8395
Fones: (0xx81) 2126.8397 | 2126.8930
www.ufpe.br/editora - livraria@edufpe.com.br - editora@ufpe.br

ISBN 978-85-415-0090-6
9 788541 500906

NUPPEM
Núcleo de Pesquisa
em Psicologia da Educação Matemática