

Cálculo de Concreto Armado

Volume 1

Editora
Universitária



UFPE

Geraldo Vieira



Cálculo de Concreto Armado

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Reitor: Prof. Mozart Neves Ramos

Vice-Reitor: Prof. Geraldo José Marques Pereira

Diretor da Editora: Profa Ana Maria de França Bezerra

COMISSÃO EDITORIAL

Presidente: Prof^ª Célia Maria de Médicis Maranhão

Titulares – Professores: Ana Maria de França Bezerra, Benício de Barros Neto, Carlos Teixeira Brandt, Dilosa Carvalho de Alencar Barbosa, Flávio Henrique Albert Brayner, Nelly Medeiros de Carvalho, Roberto Gomes Ferreira, Gabriela Martin, Sylvio Loreto, Valderez Pinto Ferreira.

Suplentes – Professores: Ângela Maria Barbosa Neves, Célia Maria da Silva Salsa, Gilda Maria Lins de Araújo, José Thadeu Pinheiro, Josélia Pacheco de Santana, Maud Fragoso Perruci, Pedro Lincoln C. L. Matos

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS. Proibida a reprodução total ou parcial, por qualquer meio ou processo, especialmente por sistemas gráficos, microfilmicos, fotográficos, reprográficos, fonográficos e videográficos. Vedada a memorização e/ou a recuperação total ou parcial em qualquer sistema de processamento de dados e a inclusão de qualquer parte da obra em qualquer programa juseibernetico. Essas proibições aplicam-se também às características gráficas da obra e à sua editoração.

EDITORA FILIADA A ABEU – Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Capa: Sérgio Siqueira

Digitalização de Figuras: Fábio Marins

Diagramação: Maria do Carmo Guerra

Revisão: O autor

Vieira, Geraldo

Cálculo de concreto armado / Geraldo Vieira ; Apresentação do autor. –

Recife : Ed. Universitária da UFPE, 2003.

v. : il., tab.

P. 252

Inclui bibliografia e anexos.

1. Construção civil – Estruturas. 2. Concreto armado – características – Cálculo. 3. Engenharia civil – Deformações – Estabilidade. I. Título.

624.012.3

624.18341

CDU (2.ed.)

CDD (21.ed.)

UFPE

BC2002-258

AGRADECIMENTO

Aos meus ex-alunos que desde 1958, em um processo de interação, me ensinaram a ensinar e proporcionaram a grande satisfação de viver com eles laços de amizade.

Agradeço, especialmente, a minha esposa Ângela pela presença constante e dedicada, assim como a meus filhos Paulo e Ana. A eles, minha eterna gratidão.

Ao professor Eleumar Martorelli, já falecido, o meu reconhecimento pelo apoio no início da minha caminhada profissional. Meus agradecimentos póstumos também ao professor Arlindo Pontual, pelo estímulo profissional recebido, quando ainda estudante de engenharia. Agradeço também a Josemir M. Pinheiro pelos desenhos e gráficos que ilustram este livro.

APRESENTAÇÃO

Este livro é o primeiro de três volumes que dedicarei ao cálculo de estruturas em concreto armado. Ele é dirigido especialmente aos profissionais do ramo e aos alunos universitários do curso de engenharia civil. Será útil também para aqueles que desejem iniciar sua atividade profissional nesta especialidade.

Nele serão abordados os conceitos básicos de cálculo estrutural, com uma rápida passagem pela história do concreto armado. Alguns nomes que marcaram esta história foram ressaltados, apesar de ser impossível citar todos aqueles que colaboraram: professores, pesquisadores, engenheiros e arquitetos.

Neste primeiro volume apresentaremos o cálculo de lajes, vigas, pilares à compressão axial e peças sujeitas à tração axial, com algumas aplicações numéricas. Estes assuntos integram o programa da disciplina de Concreto Armado 1. No volume seguinte abordaremos o cálculo de lajes com grande sobrecarga, detalhamento de vigas, pilares à flexão composta, escadas, caixas d'água elevadas e subterrâneas e fundações rasas. Estes itens integram o estudo da disciplina de Concreto Armado 2. O terceiro volume apresentará aplicações numéricas de cálculo estrutural, relativas aos assuntos abordados nos volumes 1 e 2.

Na minha longa experiência como professor universitário, convivendo com os alunos e sentindo as suas dúvidas em relação à matéria, e como engenheiro chefe de escritório de cálculo de estruturas realizando projetos para vários estados do Brasil, acumulei conhecimentos teóricos e práticos, que julgo importante passar adiante. Esses contatos, com estudantes e profissionais da área de engenharia e arquitetura é que me impulsionaram a escrever este livro. Lembraria aqui um pensamento do crítico inglês John Collins: "a pessoa prudente aproveita a sua própria experiência. A sábia, aproveita a experiência dos outros."

1. INTRODUÇÃO

O Concreto Armado foi inicialmente chamado de Cimento Armado, denominação que prevaleceu até, aproximadamente, 1920.

Os homens ao longo da história, sempre desejaram conhecer e dominar o meio ambiente, visando a fins diversos. Assim, eles direcionaram a capacidade criativa para a geração de novas descobertas promovendo, pouco a pouco, o desenvolvimento industrial e tecnológico do meio em que viveram.

Inventos e descobertas acontecem, por vezes, simultaneamente, em várias partes do mundo, com particularidades e semelhanças. E, devido a necessidade vital que o homem tem de comunicar-se com outros homens torna-se fácil compreender, como e porque surgiram as conhecidas “Feiras Internacionais de Exposição”. Nelas, eram apresentados os inventos, que geralmente induziam a que se processassem novas descobertas. Hoje, vivendo na era da comunicação, mais ainda o homem sente a necessidade de organizar feiras e exposições, com a finalidade de apresentar produtos diversos a potenciais clientes ou, simplesmente, a pessoas interessadas.

Visando ao uso associado do cimento e do aço foram realizadas várias experiências empíricas. Merece um registro especial a construção, em 1849, do barco de J. Lambot, construção considerada um marco na descoberta do Concreto Armado. E, em consequência desse fato foi comemorado na França, em 1949, ou seja, 100 anos depois, o centenário do Concreto Armado.

1.1 A EXPERIÊNCIA DE J. LAMBOT

O engenheiro francês, Joseph Louis Lambot, tinha como lazer o uso de barcos de madeira, em lago de sua propriedade. Mas, eles se deterioravam com o tempo. Então, surgiu-lhe a idéia de construir um barco de paredes delgadas, com uma malha de ferros finos envolvidos por concreto. Conseguiu, assim, a durabilidade desejada, sem prejuízo

da sua função principal, ou seja, o barco deveria flutuar tão bem quanto o de madeira.

O seu barco foi apresentado, em 1855, na Exposição Universal de Paris.

Visitando a Exposição, Joseph Monier, paisagista e comerciante de plantas ornamentais, responsável pelos jardins do Palácio de Versailles teve a idéia, a partir da experiência de Lambot, de substituir por caixas de "concreto armado" suas grandes caixas de madeira, usadas com terra úmida para cultivo de plantas de jardim.

1.2 REGISTRO DE PATENTES

Em 1867 Joseph Monier registrou as primeiras patentes para o uso do concreto armado nas construções de grandes vasos de flores, caixas d'água de 25 m³, de 180 m³ e de até 200 m³.

1.3 ENSAIOS E ESTUDOS

Em 1877, um advogado americano THADDE HYATT, dotado de espírito de pesquisa, publicou vários resultados de ensaios sobre o comportamento do Concreto Armado. Iniciava-se com ele uma fase mais científica dos estudos sobre o concreto, começando-se a levar em conta a importância da aderência entre os dois materiais, concreto e aço.

Os ensaios e estudos tiveram continuidade com HENNEBIQUE na França, KOENEN na Alemanha, ADOLPH WAISS, engenheiro alemão e fundador da construtora WAISS & FREYTAG, além do próprio FREYTAG.

Em fins do século passado, formas empíricas de trabalho cedem lugar a processos cada vez mais científicos e nessa fase pontificam entre outros, COIGNET e MORSCH. Posteriormente, merecem referência, FREYSSINET, L'HERMITE, LÖSER e ADOLF KLEINLOGEL.

1.4 O CONCRETO ARMADO NO BRASIL

Data de 1904 a mais antiga publicação que se tem referência, sobre o uso do concreto armado no Brasil. A notícia foi documentada na revista “Construções de Cimento Armado”, pelo Professor ANTÔNIO DE PAULA FREITAS, da Escola Politécnica do Rio de Janeiro. A matéria em foco se referia ao uso do concreto em construções de residências, em Copacabana.

Na história do Concreto Armado no Brasil merecem destaque as realizações do engenheiro SATURNINO de BRITO relativas ao saneamento de Santos, em S. Paulo, em torno de 1907. Merecem referência também, os trabalhos do Professor TELEMACO VAN LANGENDONCK e de EMÍLIO HENRIQUE BAUMGART e ANTÔNIO ALVES DE NORONHA. Deve-se ainda assinalar as contribuições de engenheiros como FERNANDO LUIS LOBO CARNEIRO, que juntamente com TELEMACO VAN LANGENDONCK representaram o Brasil no “Comité Européen de Béton”, além de J. C. FIGUEIREDO FERRAZ, ADERSON MOREIRA DA ROCHA, PAULO RODRIGUES FRAGOSO, SÉRGIO MARQUES DE SOUZA, JORGE DEGOW e do engenheiro poeta JOAQUIM CARDOZO, entre outros.

EMÍLIO HENRIQUE BAUMGART nasceu em Sta. Catarina em 1889, de descendência alemã e faleceu em 1943. Foi autor de projetos estruturais ousados como as plataformas flutuantes de concreto armado realizado para a Panair do Brasil e que serviam não só para acesso de partida e chegada de passageiros, mas, como ancoradouro para os aviões. Realizou, também, o cálculo estrutural da ponte de Erval sobre o rio do Peixe, em Santa Catarina, com 68 metros de vão livre, na época, o maior vão do mundo em viga reta de alma cheia, construída em concreto armado usando com audácia e originalidade a tecnologia de balanços sucessivos. Esta obra foi exaltada no noticiário técnico internacional. É importante citar ainda, entre vários outros projetos, os cálculos para obras como o edifício “A NOITE” no Rio de Janeiro com 24 andares e a ponte Maurício de Nassau, no Recife, esta calculada ainda enquanto estudante.

E. BAUMGART exerceu um papel de destaque no campo da engenharia de estruturas, sendo respeitado não só no Brasil, mas também na Europa, fato que motivou a vinda ao Brasil do professor alemão ADOLF KLEINLOGEL, outro grande vulto na história da engenharia de estruturas. OTTO BAUMGART, irmão de E. Baumgart implantou reconhecida empresa especializada em produtos para construção, que ainda hoje tem presença relevante no campo da tecnologia do concreto.

1.5 MARCOS DO DESENVOLVIMENTO

A invenção do Concreto Armado não pode ser atribuída especificamente a uma única pessoa. Muitos contribuíram para o seu desenvolvimento e foram pioneiros na utilização dessa nova forma de construção.

Abaixo estão relacionados alguns marcos na história do Concreto Armado:

- 1849 LAMBOT constrói um barco de Concreto Armado.
- 1855 LAMBOT apresenta o seu barco na Exposição Universal de Paris.
- 1867 MONIER registra várias patentes para a construção de grandes vasos, tubos, depósitos, etc.
- 1877 HYATT publica os resultados de suas experiências no campo do Concreto Armado.
- 1880 HENNEBIQUE, engenheiro francês, constrói a primeira laje armada com barras de aço de seção circular.
- 1884 FREYTAG adquire as patentes de MONIER para utilização na Alemanha.
- 1885 WAYSS também adquire patentes para emprego na Áustria e na Alemanha.
- 1886 KOENEN elabora métodos científicos, para o cálculo do Concreto Armado.

CONCRETO ARMADO

- 1897 Tem início o primeiro curso sobre Concreto Armado na ÉCOLE DES PONTS et CHAUSSEES, de Paris.
- 1902 MÖRSCH, engenheiro da firma WAYSS e FREYTAG, publica a primeira edição do seu livro sobre Concreto Armado.
- 1904 COIGNET e TEDESCO publicam princípios científicos para o cálculo de obras em Concreto Armado.
- 1904 Publicação na revista "Construções de Cimento Armado" de artigo, de autoria do Professor ANTÔNIO DE PAULA FREITAS, sobre o uso do Concreto Armado em construções de residências em Copacabana, no Rio de Janeiro.
- 1907 Utilização do Concreto Armado em obras relativas ao saneamento de Santos, em S. Paulo, realização do engenheiro SATURNINO DE BRITO.

Vale citar ainda:

Cálculo e construção da cúpula do Hotel Quitandinha, em casca elíptica, com 46 metros de diâmetro (recorde Sul Americano), e do Estádio do Maracanã, ambos sob a responsabilidade do engenheiro ANTÔNIO ALVES DE NORONHA.

Construção da ponte Duarte Coelho no Recife, e ponte sobre o rio das Antas, recorde mundial de ponte em arco, com 186 metros de vão, obras calculadas por ANTÔNIO ALVES DE NORONHA¹.

Projetos de cálculos estruturais de EMÍLIO BAUMGART, como as plataformas flutuantes para a Panair do Brasil, e a ponte de ERVAL, sobre o Rio do Peixe, construída com tecnologia de blocos sucessivos, além de projetos em concreto armado para construção do

¹ ANTÔNIO ALVES DE NORONHA, nascido no Piauí em 1904, iniciou as suas atividades profissionais, ainda enquanto estudante de engenharia, no escritório de E. BAUMGART. Pode ser considerado um seguidor da escola de BAUMGART, assim como PAULO FRAGOSO, JORGE DEGOW e outros.

edifício "A NOITE", no Rio de Janeiro e ponte "Maurício de Nassau", no Recife.

Projetos estruturais para a cidade de Brasília, como o Palácio da Alvorada, a Praça dos Três Poderes e outros, de autoria do engenheiro JOAQUIM CARDOZO. Merecem destaque especial os cálculos estruturais das cúpulas do Senado e da Câmara Federal, grande obra de engenharia, de reconhecimento mundial, de autoria do engenheiro Joaquim Cardozo².

² JOAQUIM MARIA MOREIRA CARDOZO nasceu em 1897, no Recife e foi professor da Escola de Engenharia (Universidade Federal de Pernambuco) e fundador da Escola de Belas Artes, da mesma Universidade. Indo para o Rio em 1940, trabalhou com diversos arquitetos como Fernando Brito e OSCAR NIEMEYER. Este último, juntamente com Lúcio Costa, urbanista renomado, foram os grandes planejadores de Brasília. JOAQUIM CARDOZO foi um dos principais calculistas dos projetos de OSCAR NIEMEYER, entre os quais tem destaque os cálculos estruturais para a cidade de Brasília, capital do Brasil.

2. DEFINIÇÃO

O concreto é definido como um material constituído pela mistura em proporções convenientes de cimento, areia, brita e água. Areia e brita são chamados de agregados, sendo a areia o agregado fino e a brita, o agregado graúdo. A brita pode ser em pedra granítica e até seixos rolados, dependendo da região. O cimento desempenha o papel de aglutinante e os agregados constituem os materiais inertes.

O cimento misturado com a água resulta na chamada pasta e, esta mais a areia, forma a argamassa. Anexando-se a essa mistura a brita, obtém-se o concreto. O concreto é, assim, uma pedra artificial que apresenta grande durabilidade.

2.1 CARACTERÍSTICAS DO CONCRETO ARMADO

O concreto oferece elevada resistência aos esforços de compressão, porém a sua resistência aos esforços de tração é muito fraca, atingindo a ruptura com tensões da ordem de 1/10 da tensão de ruptura à compressão. Observando-se essa característica surgiu a idéia de associar ao concreto um outro material, o aço, com capacidade de resistir melhor aos esforços de tração. Assim surgiu o concreto armado, que resiste aos esforços tanto de tração, quanto de compressão, em peças onde atuam esforços das duas naturezas.

O aço, no concreto armado é o material empregado basicamente, para resistência aos esforços de tração devido ao seu ótimo desempenho na resistência a este tipo de esforço. Entretanto, há casos em que é também utilizado para resistir aos esforços de compressão. As barras usadas são, de um modo geral, de seção circular e recebem o nome de armadura.

No concreto armado o concreto e o aço são dimensionados visando a obter, da melhor forma possível, proveito econômico e racional das resistências de cada um. A armadura deve absorver os esforços de tração e, o concreto, os de compressão. Daí a importância do posicionamento da armadura, que deve estar em posição adequada

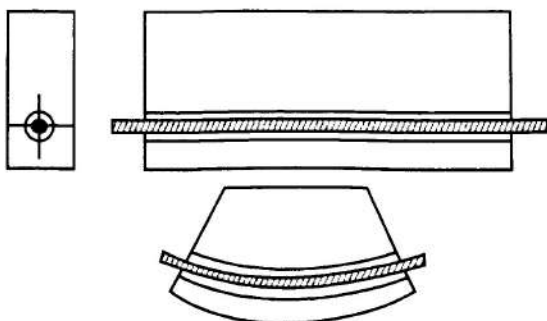
para combater os esforços de tração. Em alguns casos coloca-se a armadura, também, para auxiliar o concreto no combate aos esforços de compressão. Como a armadura deve estar envolvida pela massa de concreto, ela tem a sua durabilidade garantida.

2.2 CONCEITO FUNDAMENTAL

Para que se obtenha concreto armado é necessário que exista perfeita solidariedade entre os dois materiais: concreto e aço. Isto supõe ser única a deformação resultante.

É necessário, que durante a deformação que o concreto sofre devido às solicitações externas, as barras de aço não deslizem no interior da massa de concreto, isto é, elas devem acompanhar o concreto na sua deformação. São as forças de aderência entre o aço e o concreto que tornam isso possível. Essas forças se originam nas superfícies de contato entre os dois materiais.

Uma viga de concreto na qual se deixa um orifício longitudinal e que após o endurecimento se coloca uma barra de aço, não funciona como concreto armado, pois, quando solicitada por um carregamento qualquer, a viga se deforma, e a barra de aço se encurva simplesmente, sem absorver quaisquer esforços. Ver figura 1:



É portanto, a aderência entre as barras e o concreto que resulta no comportamento do concreto armado. Mesmo se ancorássemos a barra nas extremidades da viga, não teríamos a condição que caracteriza o concreto armado, pois não haveria solidariedade da barra

ao longo da massa de concreto. Assim, a barra de aço, de comprimento " l ", sofreria um alongamento Δl , com uma deformação unitária constante ao longo de seu comprimento. A viga de concreto sofreria, também, o mesmo alongamento, porém, a sua deformação seria variável em cada ponto, uma vez que é função do momento fletor solicitante, variável ao longo da viga.

2.3 PRINCIPAIS VANTAGENS DO CONCRETO ARMADO

No campo da engenharia civil as aplicações do Concreto Armado, são inúmeras, como por exemplo:

- estruturas de edifícios
- estruturas industriais
- silos
- obras rodoviárias
- obras ferroviárias
- obras hidráulicas
- chaminés
- reservatórios (enterrados e elevados)
- fundações de máquinas, etc.

O concreto armado apresenta, de um modo geral, algumas vantagens sobre outros materiais comumente empregados na construção civil, particularmente quando comparado às estruturas de aço.

Podemos destacar as seguintes vantagens:

FLEXIBILIDADE: o concreto armado pode ser moldado em diversas formas, permitindo assim adaptabilidade a qualquer tipo de estrutura.

FACILIDADE DE CONSTRUÇÃO: o concreto armado não necessita de mão de obra muito especializada, como acontece com as estruturas metálicas, salvo casos especiais.

ECONOMIA DE CONSERVAÇÃO: uma estrutura em concreto armado por sua própria natureza, não sofre tão agudamente

as ações agressivas do meio ambiente, como acontece com as estruturas metálicas, que exigem pinturas periódicas, quando não são revestidas.

MAIOR SEGURANÇA CONTRA O FOGO: as obras em estrutura metálica, quando sob ação de um incêndio sofrem deformações que, muitas vezes, as tornam praticamente inutilizáveis. o que pode não acontecer com uma estrutura em concreto armado, cuja resistência ao fogo é incomparavelmente maior.

MAIOR RESISTÊNCIA AOS CHOQUES E VIBRAÇÕES: os esforços rítmicos devido a cargas móveis são melhores absorvidos em pontes de concreto armado, do que em pontes metálicas.

ECONOMIA DE CONSTRUÇÃO: o estágio de desenvolvimento da indústria siderúrgica no Brasil possibilita que os materiais empregados no concreto armado concorram em melhores condições econômicas em relação aos perfis metálicos, particularmente na construção de edifícios. Mas, por força do próprio desenvolvimento siderúrgico as condições de aplicação de estruturas metálicas, sobretudo para construção de tipos específicos de coberta e grandes galpões, vem se tornando a cada dia mais viável, do ponto de vista econômico.

MONOLITISMO: o concreto armado na sua ossatura forma um só conjunto, com seus diversos elementos estruturais solidários entre si, através de uniões relativamente rígidas, resultantes da própria concretagem entre as diversas peças da estrutura, o que vem favorecer o projeto de estruturas hiperestáticas.

Essa característica – o monolitismo – permite que a estrutura possa suportar, sem risco, certos esforços que podem não ter sido, eventualmente, considerados no processo de cálculo. Trata-se, assim, de uma reserva de segurança.

2.4 PRINCIPAIS DESVANTAGENS DO CONCRETO ARMADO

A estrutura em concreto armado apresenta uma grande desvantagem no que se refere ao peso próprio, quando comparada à estrutura metálica. Devido a alta capacidade do aço de absorver esforços, as suas seções são relativamente pequenas, resultando, por isso, em menor peso próprio, apesar de seu peso específico ser muito grande.

Para um mesmo esforço a estrutura de concreto armado exige seções bem maiores. Assim, apesar da diferença de peso específico entre os dois materiais, as estruturas metálicas levam visível vantagem em relação ao peso da estrutura, o que resulta em menor carga nos pilares, e especialmente na fundação.

3. CONDICIONAMENTOS PARA EXECUÇÃO DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO

Para executar uma estrutura em concreto armado deve-se observar os seguintes pontos:

- As armaduras dimensionadas têm que ser posicionadas corretamente dentro da forma;
- As formas exigem um bom trabalho de carpintaria e devem permanecer imobilizadas até que o concreto endureça, com resistência compatível com as necessidades do projeto estrutural;
- Deve-se observar o tempo de cura do concreto. Nesse período o concreto recém moldado exige cuidados, visando a protegê-lo de uma secagem muito rápida.

3.1 NORMAS OU PRESCRIÇÕES REGULAMENTARES

O concreto armado é um material heterogêneo, portanto as leis que regem a Resistência dos Materiais não podem ser aplicadas diretamente a ele, pois são válidas apenas, para materiais homogêneos como o aço, a madeira, etc. Aplica-se ao concreto armado os princípios gerais da Resistência dos Materiais, porém utilizando métodos de cálculo adequados, diferentes daqueles usados para o aço e a madeira.

Os princípios de cálculo de estruturas em concreto armado são codificados em regulamentos oficiais e, são chamados de NORMAS. As Normas são definidas após estudos teóricos, e ensaios de laboratórios realizados no mundo todo.

Cada país tem as suas Normas específicas, adequadas às suas próprias características de meio ambiente e de interpretação teórica e prática do comportamento desse pseudo sólido que é o concreto armado. Percebe-se, porém que as Normas dos diversos países

obedecem a uma mesma linha mestra e as variações constituem detalhes de aspectos inerentes a cada localidade.

3.2 NORMAS DO CONCRETO ARMADO NO BRASIL

No Brasil, as Normas utilizadas são aprovadas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). No cálculo de estruturas de edifícios utiliza-se as seguintes Normas:

- NBR-6118, antiga NB-1, para projeto e execução de obras em Concreto Armado;
- NBR-6120, antiga NB-5, para cargas em cálculos de estruturas de edificações;
- NB-6119, antiga NB-4, para cálculo e execução de lajes mistas;
- NB-7480, antiga EB-3, para barras e fios de aço destinadas a armaduras para concreto armado.

Para orientação do calculista existem outras Normas :

Norma para cálculo e execução de pontes em Concreto Armado, Rodoviárias e Ferroviárias, Carga Móvel em pontes Rodoviárias, Carga Móvel em pontes Ferroviárias, Normas para o cálculo de forças devido a ação do vento nas edificações, etc.

3.3 CONSIDERAÇÕES GERAIS

O concreto, considerado um sólido a partir do endurecimento, é uma matéria em contínua evolução. Ele é sensível às condições exteriores, físicas e mecânicas, porém as suas reações são lentas, e toda intervenção deixa um traço permanente, que influencia reações posteriores.

A água goza de um papel preponderante nessas reações, pois o seu volume empregado no preparo do concreto com a finalidade de torná-lo amoldável, é sempre maior do que a quantidade

quimicamente necessária para que se obtenha a reação de pega. Assim durante o endurecimento, este excesso de água permanece no interior do concreto formando uma rede ou malha de poros capilares. Quando os poros estão totalmente secos ou saturados, o concreto se comporta como um sólido qualquer. Ao contrário, estando os poros parcialmente saturados aparecem tensões capilares, que fazem o concreto ter propriedades diferentes daquelas dos corpos sólidos. Por essa razão, muitos autores enquadram o concreto na categoria especial de pseudo-sólido.

Os pseudo-sólidos têm propriedades elastoplásticas influenciadas pelo estado higrométrico do meio ambiente em que se encontram, o que dá origem a que ocorram dilatações e contrações volumétricas do corpo. Quando a massa de ar perde umidade, o concreto cede ao exterior parte de sua água e, conseqüentemente se contrai, até conseguir um novo estado de equilíbrio higrométrico, compatível com o ambiente. Ao contrário, quando aumenta o teor de umidade atmosférica, o concreto absorve a umidade do exterior e se dilata, até atingir um novo estado de equilíbrio com o meio ambiente. As mudanças volumétricas do concreto, que se originam devido às variações do grau higrométrico do ambiente foram exaustivamente estudadas pelo engenheiro francês E. FREYSSINET.

4. DEFORMAÇÕES DO CONCRETO ARMADO

O concreto apresenta-se como um esqueleto sólido, contendo no seu interior uma rede de poros capilares saturados ou não de água, portanto com características de um pseudo-sólido.

Durante a sua cura e endurecimento, parte do excesso de água se evapora, ocasionando uma mudança de peso e volume. Consequentemente, o concreto sofre determinadas deformações, independente das cargas externas.

As deformações apresentadas pelo concreto são de dois tipos:

1 - Deformações próprias, que podem ser:

- de retração
- de variação da umidade do meio ambiente
- de variação de temperatura.

2 - Deformações por causas externas, que são:

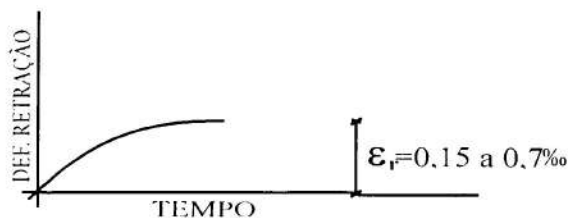
- imediata
- lenta

4.1 DEFORMAÇÕES PRÓPRIAS

As deformações próprias ocorrem sem atuação de carga externa.

4.1.1 DEFORMAÇÃO DEVIDO À RETRAÇÃO

Consiste na diminuição de volume do concreto desde o fim da cura até atingir um estado de equilíbrio, compatível com as condições ambientais. Tende assintoticamente para um limite, quando o estado de equilíbrio é atingido. O limite é muito variável, com o material ficando em geral compreendido entre deformações de 0,15 a 0,7 ‰.



A Norma Brasileira recomenda considerar a deformação específica da retração para as peças de concreto armado, nos casos correntes, igual 15×10^{-5} , salvo nos arcos e abóbadas com menos de 0.5% e 0.1 % de armadura, onde esse valor será aumentado, respectivamente para 20×10^{-5} e 25×10^{-5} .

Na realidade, as influências desfavoráveis produzidas pela retração são atenuadas, uma vez que o concreto é um material com propriedades altamente plásticas. Além disso, a presença da armadura opondo-se a retração tem como consequência, que os valores dessas deformações são bem menores, do que aqueles obtidos nos ensaios.

4.1.2 DEFORMAÇÃO DEVIDO A VARIAÇÃO DA UMIDADE DO MEIO AMBIENTE

São aquelas que ocorrem quando aumenta ou diminui a umidade, causando um inchamento ou um encolhimento, respectivamente. Essas deformações são da mesma natureza que aquelas da retração. Por esta razão, as Normas Oficiais sugerem desprezá-las considerando-se apenas a influência do grau higrométrico na retração, pois para as variações usuais de umidade que ocorrem após a retração, as deformações correspondentes são, em geral, desprezíveis.

4.1.3 DEFORMAÇÃO POR VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

A variação de temperatura produz uma deformação que se pode considerar como a soma de duas outras: a variação de volume do esqueleto sólido e a deformação proveniente de uma variação da pressão de retração provocada por fenômeno de capilaridade.

O coeficiente de dilatação térmica do concreto é considerado igual a 10^{-5} por grau centígrado, salvo quando determinado especificamente para o concreto a ser usado.

A Norma Brasileira estabelece que a variação de temperatura do concreto, causada pela variação de temperatura ambiente, seja tomada entre $\pm 10^{\circ} \text{C}$ e $\pm 15^{\circ} \text{C}$, em torno da média, dependendo do

local da obra. A Norma ainda permite reduzir esses limites para $\pm 5^{\circ}\text{C}$ e $\pm 10^{\circ}\text{C}$, no caso de peças cuja menor dimensão não tenha menos de 70cm, incluindo os espaços vazios internos fechados.

Em peças permanentemente envolvidas por terra ou água, e em edifícios que não tenham em planta dimensão não interrompida por junta de dilatação maior que 30 metros, dispensa-se o cálculo da influência da variação de temperatura.

Costuma-se então, em projetos de estruturas de edifícios dividi-los em blocos com dimensões de até 30 metros, separados por juntas de dilatação. Casos especiais, em que se tenha de considerar dimensões longitudinais de peças de concreto armado maiores do que 30 metros, torna-se imprescindível considerar no cálculo estrutural a influência da variação térmica. O coeficiente de dilatação térmica do concreto, de acordo com a NBR-6118, é considerado como 10^{-5} , por grau centígrado.

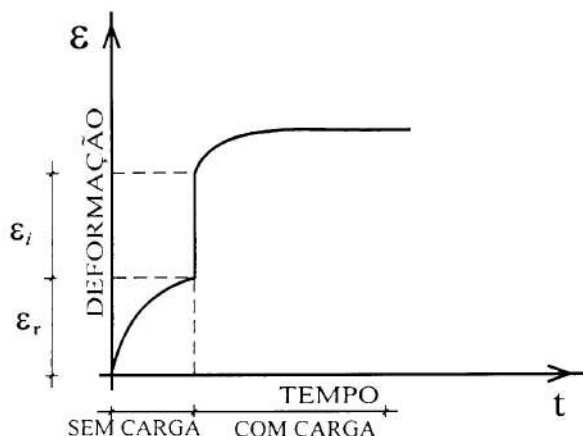
4.2 DEFORMAÇÕES POR CAUSAS EXTERNAS

4.2.1 DEFORMAÇÃO IMEDIATA

Deformação Imediata é a deformação que se observa quando se aplica a carga. Ao se aplicar, por exemplo, uma força de compressão, o esqueleto sólido sofre uma contração, havendo nesse momento uma diminuição do tamanho de seus poros.

Decorrido um período de tempo " t_0 " sem carga e em atmosfera do meio ambiente, a única deformação do corpo de prova será a de retração " ε_r ". Se, nesse instante, submete-se a peça à ação instantânea de uma carga P , obtém-se uma deformação imediata " ε_i " que vai se somar à deformação " ε_r ".

O processo de deformação continua ao longo do tempo sem aumento de carga, e a velocidade de deformação vai decrescendo até se tornar assintótica a uma paralela ao eixo do tempo (t), tendendo para um valor limite, como está representado na figura que segue:



4.2.2 DEFORMAÇÃO LENTA

Se a carga aplicada permanece por longo tempo, o excesso de água nos poros de maior diâmetro evapora com o tempo e as tensões capilares tornam a aumentar, originando esforços semelhantes a uma pressão aplicada de fora para dentro sobre o esqueleto sólido do concreto, como na retração, resultando na deformação lenta. Como acontece na retração esta deformação é mais rápida no início, diminuindo com o tempo, tendendo assintoticamente a um valor limite.

Tendo a deformação lenta a mesma causa que a retração e ocorrendo ao mesmo tempo que ela, somente pode ser medida indiretamente. Assim, subtrai-se da deformação total a deformação imediata (observada na ocasião do carregamento) e a retração, medida em outro corpo de prova não carregado, mas igual ao primeiro. O valor final da deformação lenta pode atingir o dobro ou o triplo do valor da deformação inicial.

CONCRETO ARMADO

A deformação lenta depende da idade do concreto no momento em que a carga externa começa a agir. Se, a peça for carregada após alguns anos de idade, a sua deformação lenta é praticamente desprezível. Quando o concreto tem poucos dias de idade a sua deformação plástica é exagerada e, por esse motivo, não se deve retirar as formas e escoramentos da estrutura senão depois de um certo número de dias, quando então, já endurecido, a sua resistência permite evitar deformações inaceitáveis.

A Norma Brasileira em seu capítulo 14, artigo 14.2.1, estabelece prazos mínimos para retirada das formas e escoramentos:

- Faces laterais: 3 (três) dias;
- Faces inferiores, deixando-se pontaletes bem encunhados e convenientemente espaçados: 14 (quatorze) dias;
- Faces inferiores, sem pontaletes: 21 (vinte e um) dias.

5. RESISTÊNCIA DO CONCRETO

5.1 DIAGRAMA TENSÃO / DEFORMAÇÃO

As curvas representativas do diagrama tensão/deformação são geralmente obtidas em ensaios de compressão axial, efetuadas em corpos de prova padronizados. No Brasil, esses corpos de prova são constituídos por cilindros de 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro. Quando sob ação de carga axial da máquina de ensaio, a ruptura do corpo de prova, de um modo geral, acontece bruscamente ao ser atingida a máxima tensão, que passa a ser chamada de tensão de ruptura do corpo ensaiado.

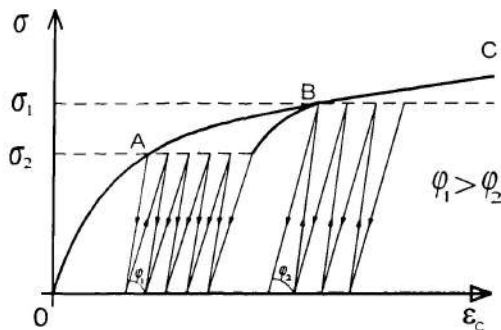
A deformação de ruptura do concreto à compressão $\varepsilon_{c,r}$ está quase sempre entre 3‰ e 6‰. O seu valor é tanto menor, quanto mais resistente é o concreto.

Na tração, a capacidade de deformação do concreto é bem menor. Ele rompe por tração simples, com deformação da ordem de 0,1‰.

A Norma Brasileira considera o valor de 3,5‰, ou seja, 3,5mm/m, como sendo o encurtamento de ruptura do concreto nas seções não inteiramente comprimidas, como por exemplo, na compressão de uma peça sujeita à flexão.

5.2 DIAGRAMA COM REPETIÇÃO DE CARGA

Carregando e descarregando, sucessivamente, um corpo de prova, o diagrama tensão-deformação terá o seguinte aspecto:



A curva OABC corresponde ao caso do concreto carregado de uma só vez, submetido, portanto, a uma tensão crescente.

Se, ao atingir o ponto A descarrega-se o corpo de prova, a deformação relativa à retirada da carga varia de forma mais próxima da linear, do que aquela correspondente a sua aplicação. Atingido σ_1 descarrega-se e em seguida torna-se a carregar e assim sucessivamente, sem ultrapassar o limite σ_1 percebendo-se, então, que o aumento da deformação residual ou permanente será cada vez menor. O concreto comporta-se de modo mais elástico.

Se, o valor de σ_1 é ultrapassado atingindo o valor σ_2 , a curva tenderá para OABC, ou seja, a curva que teria caso o corpo fosse ensaiado de uma só vez.

Verifica-se também que para maiores valores de σ , serão menores os valores de φ .

5.3 MÓDULO DE ELASTICIDADE DO CONCRETO, OU MÓDULO DE DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL

O diagrama tensão/deformação do concreto é representado por uma curva. Se houvesse proporcionalidade entre tensão e deformação obter-se-ia como representação um diagrama linear, o que caracterizaria a obediência do concreto à lei de Hooke, própria dos corpos elásticos (até o seu limite de elasticidade). Porém, o concreto não obedece a esta lei.

O módulo de elasticidade é dado pela relação tensão/deformação. Como no concreto esse diagrama é representado por uma curva, não há zona de proporcionalidade. Sendo assim, o módulo tem um valor bastante variável, pois, depende da dosagem do concreto, da sua densidade, da sua idade e, conseqüentemente, do valor da sua tensão.

A NBR-6118, no seu artigo 8. 2. 5, considera que na falta de determinação experimental, o módulo longitudinal à compressão E_c será supostamente igual a:

- $E_c = 6600 \sqrt{f_{cj}} \text{ (MPa) ou,}$
- $E_c = 21000 \sqrt{f_{cj}} \text{ (kg/cm}^2 \text{)},$ sendo f_{cj} a resistência média do concreto à compressão, prevista para a idade de j dias.

No projeto considera-se para o cálculo de f_{cj} , o valor:

- $f_{cj} = f_{ck} + 3.5 \text{ (MPa) ou,}$
- $f_{cj} = f_{ck} + 35 \text{ (kg/ cm}^2 \text{)},$ sendo f_{ck} a resistência característica do concreto à compressão. O índice k refere-se a idade do concreto em dias, no momento do ensaio. A idade normalmente adotada é a de 28 dias, porém, às vezes, o concreto é ensaiado em 7 dias e, excepcionalmente, em 3 dias.

5.4 MÓDULO DE DEFORMAÇÃO TRANSVERSAL

A deformação transversal à direção da solicitação é dada através do coeficiente de POISSON ν . Em geral, é usado o valor inverso $m = 1/\nu$ que para o concreto varia entre 5 e 8. A NBR-6118 considera igual a 0,2, o coeficiente de Poisson relativo às deformações elásticas. ($\nu = 0.2$ ou $m=5$).

Quando se aplica uma carga em uma peça de concreto, há uma deformação imediata ϵ_0 na direção da carga e uma deformação lenta ϵ_l . Na direção transversal alguns ensaios constataram uma deformação lenta transversal, em torno de 5% da deformação longitudinal.

Pode-se admitir, sem grande erro,

$$\epsilon_{longu} \cong 3 \cdot \epsilon_0 ,$$

$$\text{o que nos dá: } \epsilon_{transv} \cong 0,05 \cdot \epsilon_{longu} \cong 0,05 \cdot 3 \cdot \epsilon_0 \cong 0,15 \cdot \epsilon_0$$

isto é, a deformação lenta transversal fica em torno de 15% do valor da deformação imediata, que ocorre no sentido da carga.

5.5 RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO

A resistência à compressão do concreto é o principal parâmetro definidor de sua qualidade. Essa resistência varia com a qualidade dos materiais empregados e depende de vários fatores como retração, idade do concreto, formato do corpo de prova e fator água/cimento.

A retração faz aparecer no concreto um estado triplo de tensões, aumentando a sua resistência, que por sua vez também é aumentada com a idade do concreto, a princípio rapidamente e, depois, mais lentamente. A resistência à compressão deve ser determinada pela idade dos corpos de prova (j dias). No Brasil, a Norma NBR-6118, manda considerar a idade de 28 dias como aquela que servirá de referencial para a resistência a ser tomada no cálculo estrutural. Excepcionalmente pode-se querer saber, também, as resistências relativas a 3 e a 7 dias.

Nos ensaios influem não só o formato dos corpos de prova, como também as suas dimensões.

Para um concreto usual (por exemplo, de cimento Portland normal), pode-se, a partir de dados estatísticos, admitir valores da relação entre a resistência à compressão a "j" dias de idade e aos 28 dias, conforme quadro que segue:

IDADE DO CONCRETO (dias)	3	7	28	90	360
RELAÇÃO DE RESISTÊNCIA	0,4	0,65	1,0	1,20	1,35

Esses valores foram extraídos das recomendações do Comité Européen du Béton (CEB), válidos para temperaturas em torno de 20°C.

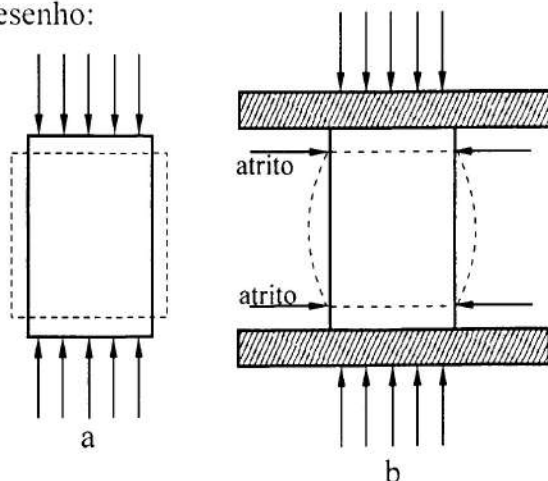
Por prudência, toma-se como referencial para o cálculo, a resistência do concreto aos 28 dias de idade. No Brasil, a resistência à compressão é determinada com ensaios em corpos de prova com 30cm de altura e 15 cm de diâmetro. Na Alemanha, utiliza-se um cubo de 20

CONCRETO ARMADO

cm de aresta, sendo a resistência destes 25% maior do que aquela resultante do ensaio para o mesmo concreto em corpos de prova adotados no Brasil.

Os corpos de prova nos ensaios são comprimidos entre os pratos da máquina, até a ruptura. Se não houvesse esforços de atrito entre as superfícies dos pratos e do corpo de prova, este se encurtaria e se dilataria transversalmente, de modo uniforme (fig. "a"). Porém, na realidade, os esforços de atrito entre os pratos e a superfície do corpo de ensaio impedem, em parte, a deformação transversal nas vizinhanças dos pratos, fig. "b", criando um estado triplo de tensão, o que resulta em valor da resistência aumentado, isto é, o corpo de prova se rompe com tensão mais elevada.

A deformação transversal do corpo de prova assume a forma indicada no desenho:



A resistência do concreto à compressão deverá sempre ser referida ao tipo de corpo de prova utilizado, conforme foi exposto.

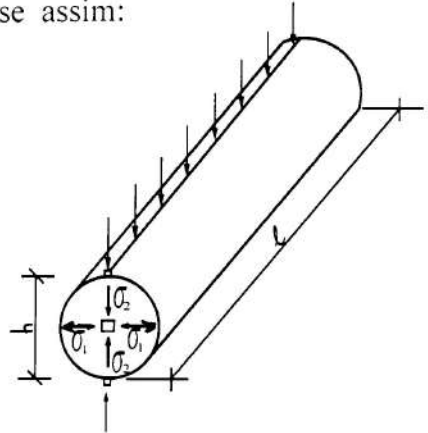
5.6 RESISTÊNCIA À TRAÇÃO

A NBR-6118 em seu artigo 5.2.1.2 indica que a resistência do concreto à tração será determinada através de ensaios de corpos de prova cilíndricos normais, de acordo com o MB-212, fazendo-se a devida transformação para a resistência à tração axial. Esse ensaio

determina a resistência à tração, por fendilhamento. Faz-se atuar sobre o corpo de prova uma carga uniformemente distribuída, segundo uma aresta. Aparecem tensões de tração σ_1 de valores praticamente constantes e em direção normal à aplicação da carga F que produz a fissuração do corpo de prova. Calcula-se assim:

$$f_{t28} = \frac{2 \cdot F}{\pi \cdot h \cdot l}$$

$l = 2 \cdot h$ (corpos de prova cilíndricos)



Esta resistência à tração por fendilhamento, por se tratar de um estado bi-axial de tensões é, cerca de 15% maior do que aquela no estado de tração axial. Atualmente, com o aparecimento de resinas de alta resistência, pode-se criar um estado de tensões de tração direta mediante processos especiais de colagem de placas de aço nas cabeças do corpo de prova, fazendo-se atuar o esforço de tração nos centros de gravidade das placas.

Levando-se em conta o resultado acima, deve-se adotar como valor mais próximo do real:

$$f_{t28} = 0,85 \times \frac{2 \times F}{\pi \times h \times l}$$

5.7 VALORES CARACTERÍSTICOS

5.7.1 COMPRESSÃO

De acordo com a NBR-6118 deve-se considerar valores característicos para três parâmetros que influem no dimensionamento

CONCRETO ARMADO

de uma estrutura de concreto armado: os materiais, as ações e as solicitações de cálculo.

Para os materiais leva-se em conta a dispersão nos resultados dos ensaios dos materiais a serem empregados. Para as ações e solicitações são consideradas as incertezas na previsão ou no cálculo do seu valor. Considerando as incertezas que envolvem esses parâmetros, deve-se tomar as devidas precauções para se obter garantia de segurança no cálculo estrutural. Trabalha-se, assim, com valores característicos dos materiais, das ações e das solicitações que apresentem uma probabilidade prefixada de não serem ultrapassados, no sentido desfavorável.

Para o concreto, através dos ensaios de laboratório, pode-se conhecer o desvio padrão de resistência s_n . Conhecido este desvio determina-se o desvio padrão de dosagem s_d através da fórmula:

$$s_d = k_n \cdot s_n$$

Onde k_n varia com o numero "n" de ensaios. Prescreve a NBR – 6118 que não se tomará para s_d valor inferior a 20 kg/cm².

n	20	25	30	50	200
K_n	1,35	1,30	1,25	1,20	1,10

De acordo ainda com a Norma Brasileira (NBR – 6118), se não for conhecido o valor do desvio padrão " s_n ", o construtor fixará o desvio " s_d " em função dos critérios relacionados a seguir:

- quando houver assistência de profissional legalmente habilitado, especializado em tecnologia do concreto, e todos os materiais forem medidos em peso, havendo medidor de água, e corrigindo-se as quantidades de agregado miúdo e de água em função de determinações freqüentes e precisas do teor de umidade dos agregados, e ainda houver garantia de manutenção da homogeneidade

de manutenção da homogeneidade dos materiais empregados no decorrer da obra: $s_d = 40 \text{ kg/cm}^2$ (4MPa).

- quando houver assistência de profissional legalmente habilitado, especializado em tecnologia do concreto, o cimento for medido em peso e os agregados em volume, e houver medidor de água, com correção do volume do agregado miúdo e da quantidade de água em função de determinações freqüentes e precisas do teor de umidade dos agregados: $s_d = 55 \text{ kg/cm}^2$ (5,5 MPa).
- quando o cimento for medido em peso e os agregados em volume e houver medidor de água, corrigindo-se a quantidade de água em função da umidade dos agregados simplesmente estimada:

$$s_d = 70 \text{ kg/cm}^2 \text{ (7 MPa)}.$$

Adotado o valor de s_d , de acordo com a NBR-6118, o valor da resistência do concreto será dado por:

$$f_{c,j} = f_{c,k} + 1,65 s_d$$

onde “1,65” é o coeficiente obtido através da teoria das probabilidades, de modo a garantir que no máximo 5% dos corpos de prova se rompam com resistência inferior a $f_{c,k}$.

Na prática determina-se $f_{c,k}$ em função da resistência do concreto aos 28 dias de idade, sendo $f_{c,k}$ chamado de tensão característica do concreto à compressão.

$$f_{c,k} = f_{c,28} - 1,65 s_d$$

Esses são os critérios prescritos pela Norma Brasileira (NBR – 6118) e que definem a chamada “dosagem racional” ou “dosagem experimental” do concreto. A NBR-6118, em seu capítulo 8, artigo 8.3.2, também fixa critérios para a “dosagem não experimental”, realizada no canteiro de obra através de processo rudimentar e somente permitida para obras de pequeno vulto.

5.7.2 TRAÇÃO

A resistência do concreto à tração deve ser determinada, através de ensaios de corpos de prova cilíndricos normais, de acordo com o MB – 212.

Na falta de determinação experimental a NBR-6118 recomenda que se adote as seguintes relações:

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \quad \text{para } f_{ck} \leq 180 \text{ kg/cm}^2 \text{ (18 MPa) e}$$

$$f_{tk} = 0,06 \cdot f_{ck} + 7 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{para } f_{ck} > 180 \text{ kg/cm}^2$$

o valor f_{tk} é chamado de tensão característica do concreto à tração.

5.8 VALORES DE CÁLCULO

CONCRETO

Os valores de cálculo da resistência do concreto à compressão, ou à tração são os respectivos valores característicos, divididos por um coeficiente de minoração, que chamaremos de γ_c assim:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad \text{e} \quad f_{td} = \frac{f_{tk}}{\gamma_c}$$

onde o coeficiente " γ_c " adotado pela NBR é igual a 1,4 ($\gamma_c = 1,4$). Este coeficiente representa uma margem de segurança que se deve ter devido a falhas possíveis de ocorrer na execução de uma estrutura de concreto armado, tais como: redução eventual da resistência do concreto, alteração de suas propriedades devido às variáveis que entram na sua composição, inexactidões geométricas, etc.

AÇO

Nas construções de concreto armado utiliza-se, geralmente, armaduras de barras cilíndricas de seção circular, com comprimento médio em torno de 12 metros.

Os aços empregados se dividem em duas categorias: aço comum e aço especial.

A Norma Brasileira denomina os aços com o prefixo CA, isto é, aço para Concreto Armado.

Atualmente o aço comum é designado como CA-25, onde o número significa que este tipo de aço tem um limite de escoamento de 25 kg/mm^2 , ou seja, 2500 kg/cm^2 . Existe ainda na categoria de aço comum, o CA-32, que é muito pouco usado nas construções. O CA-25 e o CA-32 são designados como aços comuns, apresentam um baixo teor de carbono e são laminados a quente.

Os aços denominados como aços especiais são aqueles de alta resistência, tendo, portanto, limites de escoamento elevados.

Os aços especiais dividem-se em duas categorias:

aço especial tipo A e aço especial tipo B.

Os aços especiais ou de alta resistência podem ser obtidos mediante composição química adequada ou por meio de tratamentos físicos, posteriores à laminação.

Os aços especiais de categoria A (tipo A) são aqueles de composição química adequada e laminados a quente, e que no diagrama tensão/ deformação apresentam um patamar de escoamento bem definido e, por conseguinte, um limite de escoamento real.

Os aços especiais de categoria B (tipo B) são aqueles que têm suas características de resistência elevada, mediante processos a frio, ou seja, encruamento por deformação a frio, tais como: torção, estiramento e compressão transversal. Estes aços são caracterizados por não apresentarem patamar de escoamento, sendo o seu limite de

CONCRETO ARMADO

escoamento definido convencionalmente. São chamados aços encruados.

No Brasil são usados o aço comum CA-25 e os aços especiais CA-50A, CA-60A, CA-50B e CA-60B. Nas regiões Norte e Nordeste do Brasil são usados nas estruturas de concreto armado, comumente, o CA-50A e o CA-60B.

Os aços do tipo B, de bitola até 8.0mm, são também caracterizados como fios, de acordo com a EB-3. Geralmente são obtidos por processo a frio de estiramento, ou seja, trefilação. São chamados de aços encruados.

Os diâmetros padronizados pela Norma Brasileira EB-3 são definidos em milímetros, e usualmente são os seguintes: (em mm)

Barras	6.3	8	10	12,5	16	20	22,5	25	32
Fios:	3.4	4.2	4.6	5.0	6.0	6.4	7.0	8.0	

A NBR exige que as barras de aços especiais, com diâmetro nominal acima de 10 mm, tenham moissas ou saliências em sua superfície, a fim de aumentar a aderência entre a barra e o concreto.

A Norma Brasileira considera como tensão característica do aço à tração, o valor f_{yk} , e como valor de cálculo f_{yd} , sendo:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

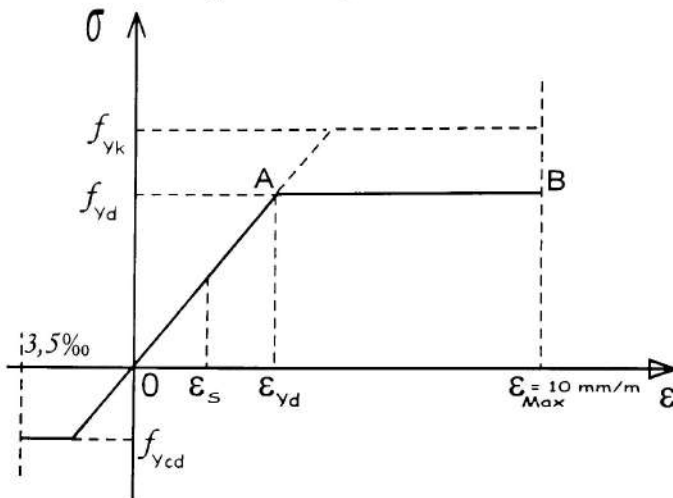
onde " γ_s " é igual a 1.15, denominado de coeficiente de minoração adotado pela NBR, desde que sejam obedecidas as prescrições da EB-3, quanto ao controle de qualidade. Este coeficiente visa levar em conta possíveis desvios desfavoráveis na resistência do material e possíveis inexatidões geométricas.

O valor f_{yk} representa a tensão mínima de escoamento à tração, real ou convencional, dependendo de se tratar de aço com patamar de escoamento (comum ou tipo A) ou sem patamar de escoamento (tipo B).

A resistência característica à compressão para o aço é representada por f_{yk} , que é a tensão mínima de escoamento à compressão, real ou convencional. O seu valor de cálculo é:

$$f_{ycd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad \text{com } \gamma_s = 1.15$$

A Norma Brasileira considera os diagramas de tensão/deformação simplificados. Assim, para os aços com patamar de escoamento teremos o seguinte diagrama:



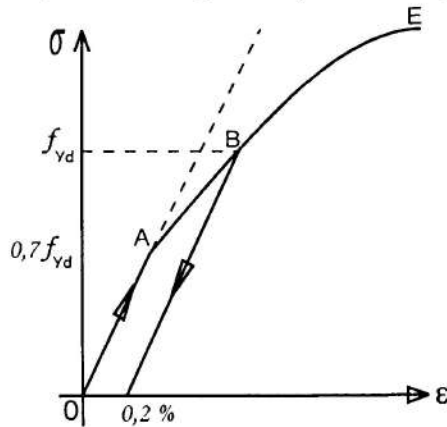
No diagrama, o trecho OA passando pela origem é que define em A os valores f_{yd} e $\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$, sendo o módulo de elasticidade do aço $E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$.

A NBR limita como alongamento máximo permitido ao longo da armadura de tração, o valor de 10 mm/m, com o objetivo de evitar deformação plástica excessiva.

Para os aços sem patamar de escoamento, aqueles de categoria B, define-se como tensão de escoamento convencional o ponto do diagrama tensão/deformação para o qual após o descarregamento resta uma deformação residual de 2 mm/m, ou seja, 0,2%.

CONCRETO ARMADO

A configuração do diagrama para os aços do tipo B é a seguinte:



Observe-se, que até o valor $0,7 f_{yd}$, o aço tipo B tem a mesma característica tensão/deformação do aço tipo A.

Para o aço tipo B tem-se:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad \text{e} \quad \epsilon_{yd} = 0,002 + \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$\text{com } \gamma_s = 1,15 \quad \text{e} \quad E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2.$$

Para esses aços também define-se a resistência característica à compressão f_{yck} como sendo a tensão convencional correspondente à deformação específica permanente de 0,2%. O valor de cálculo é f_{yck} dividido pelo coeficiente de minoração $\gamma_s = 1,15$.

Tanto para o concreto como para o aço os coeficientes de minoração respectivos deverão ser multiplicados por 1,2 quando a peça estiver sujeita à ação prejudicial de agentes externos agressivos, tais como ácidos, álcalis, águas agressivas, óleos e gases nocivos, temperaturas muito altas ou muito baixas. Nesses casos, os coeficientes de minoração passam a ser:

- Concreto : $\gamma_c' = \gamma_c \times 1,2$
- Aço (tipos A ou B) : $\gamma_s' = \gamma_s \times 1,2$

Na tabela abaixo estão apresentados os valores característicos e de cálculo para os principais tipos de aço usados atualmente em estruturas de concreto armado no Brasil. São indicados também, os respectivos alongamentos de cálculo:

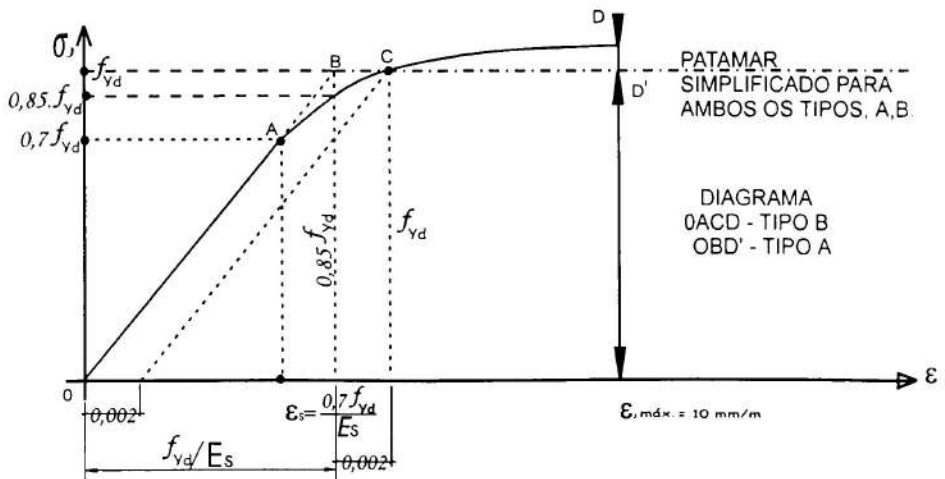
CLASSE	f_{yk} (Kg/cm ²)	f_{yd} (Kg/cm ²)	ϵ_{yd} (mm/m)	ADERÊNCIA n
CA - 25	2500	2174	1,035	1,0
CA - 50A	5000	4348	2,070	1,5
CA - 60A	6000	5217	2,484	1,8
CA - 60B	6000	5217	4,484	1,8

6. DIAGRAMAS DE TENSÃO / DEFORMAÇÃO DOS AÇOS TIPOS A E B

6.1 ANÁLISE COMPARATIVA

O aço tipo A apresenta patamar de escoamento, diferentemente do aço tipo B que não tem patamar de escoamento e sim, uma tensão de escoamento convencional.

Observe-se o seguinte diagrama:



OACD - diagrama relativo ao aço tipo B

OBD' - diagrama relativo ao aço tipo A

Até uma tensão de $0,7 f_{yd}$, o diagrama é linear. No trecho AC ele é encurvado, sendo C o ponto que define o escoamento convencional do aço sem patamar de escoamento, portanto, com deformação residual de 2 mm/m.

Observe-se que:

Para $\epsilon_s \leq 0,7 \times \frac{f_{yd}}{E_s}$	o comportamento é o mesmo para os aços tipos A e B
Para $\epsilon_s \geq 0,002 + \frac{f_{yd}}{E_s}$	o comportamento é o mesmo para os aços tipos A e B
Para $\epsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$	o comportamento é: $f_{yd}^B = 0,85 \cdot f_{yd}^A$
Para $0,7 \times \frac{f_{yd}}{E_s} \leq \epsilon_s \leq \frac{f_{yd}}{E_s}$	o comportamento é diferente, entre o aço tipo A e o tipo B.
Para $\frac{f_{yd}}{E_s} \leq \epsilon_s \leq 2 + \frac{f_{yd}}{E_s}$	o comportamento é diferente, entre o aço tipo A e o tipo B.

Conclui-se, que ao se adotar para o aço de categoria B um patamar de escoamento a partir do ponto C, verifica-se que ambos os aços, tipo A e tipo B apresentam o mesmo diagrama no trecho AO e CD, diferindo somente no trecho curvo AC do aço de categoria B, que corresponde às duas retas AB e BC, do aço tipo A. Por esta razão, neste trecho as tensões respectivas são diferentes.

A Norma Brasileira permite executar o cálculo com o aço tipo B como se fosse do tipo A, desde que para deformações no intervalo do trecho curvo faça-se a devida correção de tensão de trabalho do aço. Isto significa dividir a seção da armadura obtida, como se fosse aço tipo A, por um coeficiente de correção K_f . O professor Aderson

CONCRETO ARMADO

Moreira da Rocha, em seu livro “Concreto Armado”, da Editora Científica (1981) apresenta os seguintes valores, sendo $\epsilon_0 = \frac{f_{yd}}{E_s}$:

	Tensão (tipo A)	Tensão (tipo B)
$\epsilon_s \leq 0.7 \times \epsilon_0$	$\epsilon_s \times E_s$	$K_f = 1$
$0.7 \times \epsilon_0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_0$	$\epsilon_s \times E_s$	$K_f = 1.35 - \epsilon_s / 2\epsilon_0$
$\epsilon_0 \leq \epsilon_s \leq 2 + \epsilon_0$	f_{yd}	$K_f = 0.85 + 0.075 (\epsilon_s - \epsilon_0)$
$\epsilon_s \geq 2 + \epsilon_0$	f_{yd}	$K_f = 1$

Usando valores de “ ϵ ” em mm/m, deve-se trabalhar com E_s dividido por 1000, ou seja, 2100.

7. ADERÊNCIA

Para que se obtenha concreto armado é imprescindível que haja garantia de aderência entre os seus dois componentes, o concreto e o aço. A aderência é criada por forças de contato ao longo das superfícies laterais das barras, de modo a assegurar a transmissão de esforços do concreto para o aço e vice-versa.

A falta de aderência levaria a um colapso brusco da peça, uma vez que as barras deslizariam no interior da massa de concreto sem acompanhar, portanto o concreto em suas deformações.

A aderência garante a ancoragem das barras de aço e permite transmitir as tensões provocadas pelos esforços que solicitam as peças.

A resistência ao deslizamento de uma barra no interior de uma peça de concreto depende de diversos fatores:

- 1-da superfície da barra que pode ser lisa, corrugada, com moedas ou saliências, etc;
- 2-das propriedades do concreto;
- 3-da posição das barras no interior da peça;
- 4-do diâmetro da barra;
- 5-do comprimento da barra no interior da peça;
- 6-da porcentagem de armadura transversal.

Para garantir uma boa resistência do concreto, cujo valor influencia as tensões de aderência, alguns autores sugerem:

$$f_{ck} \geq 50 + 0,02 f_{yk} \text{ (kg/cm}^2\text{)}, \text{ com } f_{yk} \text{ dado por:}$$

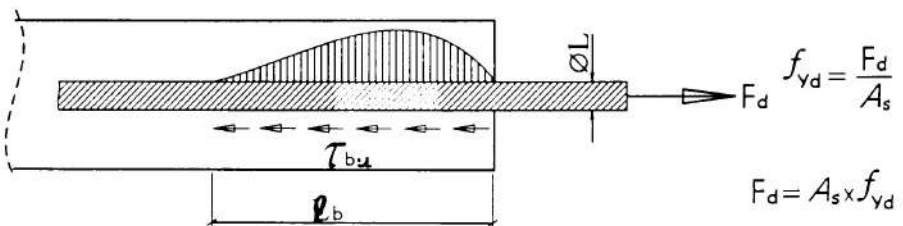
$$f_{yk} \leq 50 f_{ck} - 2500 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$

7.1 TENSÃO DE ADERÊNCIA - COMPRIMENTO DE ANCORAGEM

Considere-se uma peça de concreto armado com uma barra de aço de diâmetro ϕ e seção A_s , posicionada no seu eixo. Quando se aplica uma força de tração F no eixo da barra e com valor crescente até o limite F_d , haverá uma tendência ao escorregamento da barra no interior da massa de concreto, que só não ocorrerá devido às forças de aderência entre os dois materiais. No trecho inicial da ligação da barra com o concreto a aderência obriga o concreto a se deformar e a participar na resistência ao esforço de tração, provocado pela solicitação da barra.

Ao longo da barra, a solicitação do esforço de tração vai se transferindo para o concreto por aderência e as tensões de tração na barra de aço vão diminuindo, até anularem-se em um determinado ponto.

A Norma Brasileira chama de τ_{bu} essa tensão de atrito entre a barra de aço e o concreto, ou seja, a tensão de aderência que pode ser observada na seguinte configuração:



A condição de equilíbrio ao longo de l_b é:

$$\pi \times \phi_l \times l_b \times \tau_{bu} = F_d = A_s \times f_{yd}$$

$$\pi \times \phi_l \times l_b \times \tau_{bu} = \frac{\pi \times \phi_l^2}{4} \times f_{yd}$$

$$l_b = \frac{\phi_l}{4} \times \frac{f_{yd}}{\tau_{bu}}$$

Esse é o comprimento necessário de ancoragem retilínea para garantir o trabalho conjunto dos materiais, concreto e aço, nas barras tracionadas.

De acordo com a Norma Brasileira, esse comprimento pode ser um pouco reduzido, desde que se multiplique o valor acima por:

$$\frac{A_{scal}}{A_{sexist}} \quad l_b = \frac{\phi_l}{4} \times \frac{f_{yd}}{\tau_{bh}} \times \frac{A_{scal}}{A_{sexist}}$$

onde, A_{scal} é a área necessária definida no cálculo estrutural, e A_{sexist} é a área que efetivamente se adotou na peça, que geralmente é um pouco superior àquela exigida pelo cálculo. Só em raros casos são coincidentes. Neste caso se teria:

$$\frac{A_{scal}}{A_{sexist}} = 1 \quad A_{sexist} = \text{área existente}$$

7.2 ANCORAGEM DAS BARRAS COMPRIMIDAS

A Norma Brasileira prescreve que nos casos em que as barras forem somente comprimidas, “elas deverão ser ancoradas, apenas com ancoragem retilínea, sem gancho, e o comprimento de ancoragem será calculado como no caso de tração, não podendo porém ser inferior a $0,6 l_b$, nem a $10 \phi_l$, e nem a 15 cm ”.

Depreende-se que nos casos em que a solicitação seja só de compressão axial, o comprimento de ancoragem das barras pode ser sem gancho e de valor igual a $0,6 l_b$, ou seja, 60% do comprimento calculado como se o esforço fosse de tração, devendo serem salvaguardadas as demais exigências da Norma Brasileira.

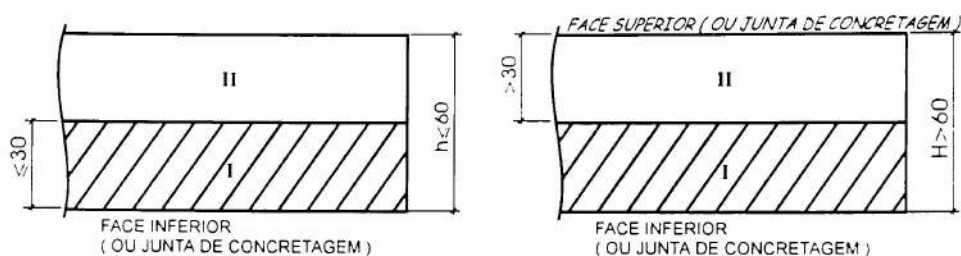
Em se tratando de aderência e ancoragem, deve-se sempre levar em conta as chamadas “regiões de boa ou má aderência”. De acordo com a NBR-6118, considera-se em boa situação de aderência os trechos das barras que estejam com inclinação não inferior a 45° sobre a horizontal. Também estão em boa situação de aderência as

barras horizontais, ou com inclinação menor que 45° sobre a horizontal, desde que localizadas, no máximo 30 cm acima da face inferior da peça ou da junta de concretagem mais próxima, nos casos em que a peça tenha $h \leq 60$ cm.

Também estarão em situação de boa aderência as barras localizadas a mais de 30 cm abaixo da face superior ou da junta de concretagem mais próxima, nos casos em que a peça tiver altura $h > 60$ cm.

Os trechos das barras em outras posições serão considerados em má situação de aderência.

Na figura que segue denomina-se de zona I a região de boa aderência e zona II, aquela de má aderência.



Os valores de cálculo da tensão de aderência " τ_{bn} " nas zonas I (boa aderência) são tomados iguais a:

- para barras lisas: $\tau_{bn} = 0.9 \times \sqrt{f_{cd}}$ kg/cm²
- para barras de alta resistência: $\tau_{bn} = 0.9 \times \sqrt[3]{f_{cd}^2}$ kg/cm²

De acordo com a NBR-6118 não se deve tomar em nenhum caso "coeficiente de conformação superficial" das barras " η_b " maior do que 1.5, interpolando-se linearmente para valores:

$$1 < \eta_b < 1.5$$

CONCRETO ARMADO

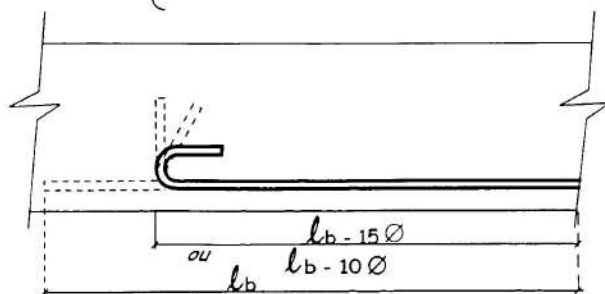
Em situação de má aderência os valores de " τ_{hm} " devem ser divididos por 1,5.

Usando-se feixes de duas barras, o comprimento necessário de ancoragem deve ser aumentado de 20% e para feixes com mais de duas barras, 33%. Nestes casos toma-se para valor de " ϕ_i " o diâmetro do círculo de área equivalente. Não é permitido utilizar feixes de barras de bitola superior a 25 mm.

Quando a barra terminar em gancho fora do apoio, o comprimento necessário de ancoragem terá, conforme figura que segue, os seguintes valores:

$$l_b - 15 \phi \geq \begin{cases} \frac{l_{b1}}{3} \\ 10cm \end{cases} \quad \text{para } \eta_b < 1.5 \quad (\text{CA-25})$$

$$l_b - 10 \phi \geq \begin{cases} \frac{l_{b1}}{3} \\ 10cm \end{cases} \quad \text{para } \eta_b \geq 1.5 \quad (\text{CA-50, CA-60})$$

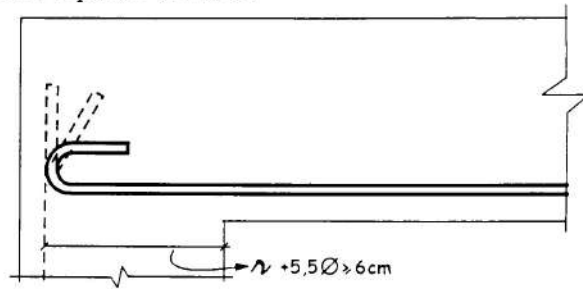


Nessas expressões, l_{b1} é o valor de l_b calculado com $A_{cal} = A_{exist}$.

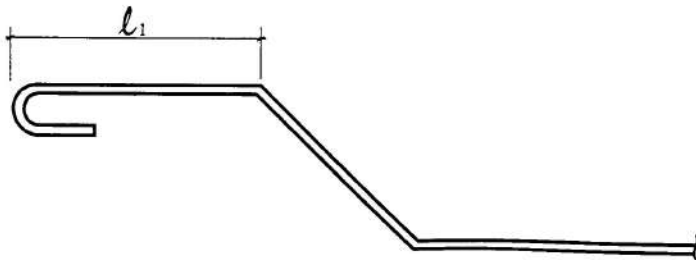
Observe-se que o gancho pode ser a 90° , ou a 45° , ou simplesmente curvo.

No caso em que a barra termine em gancho no apoio, o comprimento de ancoragem necessário será o mesmo do caso indicado anteriormente, mas a barra deverá se prolongar além da face do apoio, de um comprimento no mínimo, igual a: $r + 5.5\phi \geq 6 \text{ cm}$, onde r é o raio interno efetivo do gancho.

Prescreve ainda a NBR-6118, que se houver cobrimento da barra no trecho do gancho medido normalmente ao plano do gancho, de pelo menos 7cm, e as ações acidentais não ocorrerem com grande frequência com seu valor máximo, para a ancoragem da barra será suficiente que ela penetre no apoio num valor de comprimento igual a: $r + 5.5\phi > 6 \text{ cm}$, a partir da face:



Se existirem barras dobradas que façam parte da armadura transversal, a ancoragem dessas barras será assegurada por um prolongamento de comprimento l_1 conforme abaixo indicado, igual a $0.6l_b$ no caso de ancoragem em zona comprimida e $1.3l_b$ em zona tracionada. Não se tomará $l_1 < 0.5 l_b$ e não se considerará redução devida ao gancho:



8. GANCHOS

De acordo com a NBR-6118, os ganchos das extremidades das barras da armadura de tração poderão ser:

a - semicirculares, com ponta reta de comprimento não inferior a 2ϕ ;

b - em ângulo interno de 45° , com ponta reta de comprimento não inferior a 4ϕ ;

c - em ângulo reto, com ponta reta de comprimento não inferior a 8ϕ .

Nos ganchos dos estribos os comprimentos acima serão de 5ϕ para os casos "a" e "b" e 10ϕ para o caso "c". Para as barras lisas os ganchos deverão ser semicirculares.

O diâmetro interno da curvatura dos ganchos e estribos será, pelo menos, igual a:

	CA-25	CA-50	CA-60
bitola < 20	4ϕ	5ϕ	6ϕ
bitola ≥ 20	5ϕ	8ϕ	

Prescreve ainda a NBR-6118 que no caso de estribos de bitola não superior a 10, o diâmetro mínimo para o gancho será de 3ϕ e que barras lisas tracionadas de bitola maior do que 6,3 mm. deverão necessariamente ter ganchos.

8.1 EMENDA DAS BARRAS

Quando necessário as barras podem ser emendadas, desde que se obedeça rigorosamente as prescrições normativas.

As emendas mais usadas são:

- emendas por traspasse;
- emendas com solda.

Os capítulos 6.3.5.2 e 6.3.5.4 da NBR-6118 estabelecem claramente as condições impostas e que devem ser obedecidas para esses tipos de emendas.

Essas emendas são muitas vezes necessárias, face aos comprimentos comerciais das barras existentes no mercado da construção civil.

O posicionamento das barras das armaduras nas peças de concreto armado é de importância fundamental, devendo-se levar em conta diversos fatores como ancoragem, comprimentos, tensões, procurando-se sempre minimizar os custos, dentro do binômio segurança/economia.

O cálculo e o dimensionamento corretos, porém com detalhamento errado ou precário, leva a um comprometimento da estabilidade da peça estrutural, podendo em casos extremos levar ao colapso da própria estrutura.

9. CONCEITO DE ESTRUTURA

Chama-se de estrutura ao conjunto de elementos interligados que compõem o arcabouço resistente de uma construção.

Os esforços externos ativos ou cargas, chamados esforços solicitantes, quando atuam despertam, na estrutura os chamados esforços resistentes, externos e internos. Constituem, assim, as reações dos elementos estruturais às solicitações.

Na mecânica das construções o principal problema é estabelecer o equilíbrio com a devida segurança, entre as solicitações e as capacidades resistentes das seções dos elementos estruturais. Nisto consiste o dimensionamento.

Em concreto armado esta é a tarefa do engenheiro calculista quando determina as seções de concreto e aço, que trabalhando solidariamente cumprem as condições necessárias à segurança da obra, impedindo o sinistro de uma ruína e criando condições para a perfeita utilização da construção.

Além da segurança da obra, o engenheiro calculista deve se preocupar com o fator custo. É seu objetivo obter total segurança com um preço mínimo possível. Portanto, cabe ao engenheiro estrutural apresentar soluções que viabilizem a obra quanto à segurança e que sejam viáveis do ponto de vista econômico.

Os processos modernos de cálculo e dimensionamento consideram o caráter probabilístico de todos os fatores que podem influenciar na segurança dos elementos estruturais. A segurança de uma estrutura é definida por uma garantia de segurança global, holística, de todos os seus elementos estruturais.

O estado perfeito de segurança estrutural tem por base os seguintes critérios:

- a estrutura deve apresentar equilíbrio estático entre as solicitações externas devidas ao carregamento e às tensões internas;
- a estrutura não deve apresentar deformações, flechas elásticas excessivas ou deformações por flambagem;
- a estrutura não deve apresentar fissuras que comprometam a proteção da armadura contra a oxidação;
- a estrutura deve apresentar um mínimo necessário de impermeabilidade, principalmente em casos de reservatórios ou depósitos para líquidos.

Todos esses fatores concorrem para a estabilidade da estrutura. Mas, o conceito de segurança de uma estrutura estará sempre sujeito aos chamados “fatores de incerteza”, seja por falhas puramente humanas, seja por uma série de circunstâncias desfavoráveis, ou ainda pela ação de forças agressivas devidas a fenômenos imprevistos da natureza.

Como ensina a teoria das probabilidades, não se pode atingir a segurança absoluta. Atinge-se a segurança satisfatória, que é aquela que se situa dentro de um valor suficientemente necessário de eficiência, de não erro, ou seja, de acerto.

10. FATORES DE INSEGURANÇA

Em vários países, inclusive o Brasil, e de acordo com uma visão mais moderna das Normas para Concreto Armado, estabeleceu-se que os estados de solicitação de uma estrutura devem ser afetados por uma margem de segurança contra os diversos tipos de falhas estruturais. São os coeficientes de segurança, que visam corrigir as incertezas que envolvem os processos de dimensionamento, tais como:

- 1- a não homogeneidade dos materiais empregados, por mais rigoroso que seja o controle;
- 2- a ação de agentes agressivos, a ação do desgaste ao longo do tempo de utilização e a ação de fadiga;
- 3- imprecisões inevitáveis na determinação das solicitações de serviço;
- 4- erros advindos de hipóteses de cálculo, que nem sempre traduzem na teoria, o comportamento real da estrutura. Só em graus de engastamento existem uma gama de variáveis possíveis;
- 5- imprecisões e erros na execução da obra, tais como níveis, prumadas, excentricidades, etc;
- 6- posicionamento defeituoso da armadura, quer no projeto, quer na execução.

De acordo com os critérios probabilísticos cada uma dessas incertezas deve ser considerada e afetada por um coeficiente de segurança. Considera-se bastante improvável que todas essas inseguranças ocorram simultaneamente.

Os coeficientes de segurança adotados pelas Normas de vários países, têm valores altos. Na Alemanha, a DIN-1045 adota um

coeficiente de segurança global; o Comité Européen du Béton (CEB) e as Normas Brasileiras adotam coeficientes de segurança parciais, que incidem nas cargas e nos materiais e cuja adoção depende do grau de risco tolerável.

10.1 ESTADOS LIMITES

De acordo com a NBR-6118 uma estrutura ou parte dela atinge um estado limite quando, de modo efetivo ou convencional, torna-se inutilizável, ou quando deixa de satisfazer às condições previstas para a sua utilização, seja por falta de segurança quanto às solicitações, ou seja por deformações excessivas.

De acordo ainda com a NBR-6118 são considerados basicamente os seguintes estados limites:

10.1.1 Estado limite último (de ruína)

Estado que corresponde à ruína por ruptura, por deformação plástica excessiva ou por instabilidade. A segurança das peças no estado limite último, qualquer que seja a espécie de solicitação, não deverá depender da resistência à tração do concreto.

10.1.2 Estado limite de utilização (de serviço)

Estado que é função dos critérios de utilização normal, ou de durabilidade da estrutura. Em seu artigo 2.1.2, a Norma Brasileira considera ainda:

- *Estado de formação de fissuras:* é aquele em que há uma grande probabilidade de iniciar-se a formação de fissuras de flexão.
- *Estado de fissura inaceitável:* é aquele em que as fissuras se apresentam com abertura prejudicial ao uso, ou a durabilidade da peça.

CONCRETO ARMADO

- *Estado de deformação excessiva:* é aquele em que as deformações ultrapassam os limites aceitáveis para a utilização da estrutura.

Existem ainda outros estados limites de utilização, tais como vibrações excessivas, danos por corrosão da armadura, etc. Porém, os adotados pela NBR-6118 dão origem às comprovações e cálculos em todos os casos.

11. AÇÕES E SOLICITAÇÕES

Quando se trata de estruturas em concreto armado chama-se de ação toda a influência, isolada ou não, de um conjunto de forças capazes de produzir estados de tensão na estrutura. Essas forças podem ser do tipo cargas permanentes ou cargas acidentais, ação do vento, variação de temperatura, etc.

Designa-se pelo termo solicitação, todo esforço ou conjunto de esforços tais como: esforço normal, momento fletor, esforço cortante, momento torsor, etc, que devido às ações aparecem sobre uma ou sobre várias seções de um elemento da estrutura.

11.1 PROCESSOS DE CÁLCULO

Na engenharia civil, o campo da Mecânica das Construções em Concreto Armado desafia o engenheiro a determinar seções de concreto e aço para resistirem, com segurança, às tensões de compressão e tração originadas por solicitações impostas aos elementos de uma estrutura. Chama-se de engenheiro calculista ou engenheiro de cálculo estrutural, o profissional desse ramo da engenharia.

Compete ao engenheiro calculista, em alguns casos, a verificação da estabilidade da estrutura ou de partes da mesma. Quando se trata de verificação de estabilidade torna-se necessário calcular os valores das tensões do concreto e do aço e verificar se os mesmos estão dentro dos limites básicos de segurança preconizados pelas Normas Brasileiras. Enfim, as solicitações geram tensões e essas têm que estar dentro da margem de segurança normativa, necessária ao uso da estrutura. Na verificação da estabilidade as seções de concreto e aço são conhecidas, restando portanto saber se as tensões a que estão submetidos os dois materiais satisfazem ou não às condições de segurança.

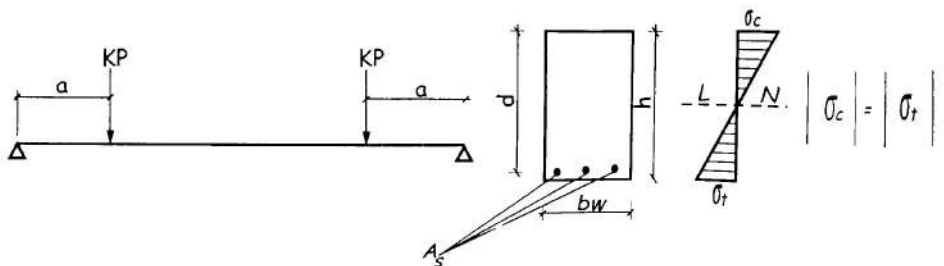
11.2 ESTÁDIOS : ESTÁDIO I , ESTÁDIO II, ESTÁDIO III

Uma peça de concreto armado quando submetida a um esforço de flexão, com carregamento crescente até provocar a ruptura de sua seção, atinge seguidamente três fases diferentes chamadas estádios, a saber: estágio I, estágio II, estágio III. No início sempre se tem uma pequena resistência do concreto à tração, mas, continuando o processo de carregamento verifica-se que nem sempre as tensões são proporcionais às deformações.

O ensaio pode ser feito imaginando uma viga de concreto armado simplesmente apoiada, submetida à cargas crescentes até a sua ruptura por flexão. Considerem-se as cargas como duas cargas P , igualmente distantes e suficientemente afastadas dos apoios. Seja " k " o coeficiente de incremento progressivo de P . Tem-se então, sobre a viga duas cargas kP , com k crescente. A ruptura se produzirá por flexão pura na zona central para um dado valor de k , sem intervenção de esforço cortante. Ao longo do processo de incremento do carregamento, a viga passa pelas três fases distintas, os chamados estádios já citados.

11.2.1 ESTÁDIO I

Corresponde ao início do ensaio, com valores baixos de cargas, o que corresponde a valores pequenos para as tensões. Assim, em qualquer seção o concreto resiste bem aos esforços de tração que começam a aparecer. Não há portanto, nenhuma fissura na zona tracionada. O diagrama tensão-deformação pode ser representado por uma reta, onde o valor da tensão de compressão é igual ao de tração.



CONCRETO ARMADO

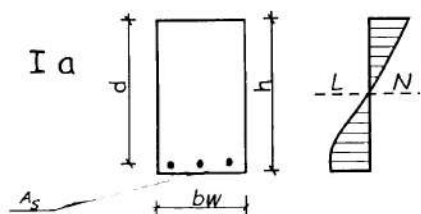
Neste estágio, para efeito de cálculo, consideram-se as leis gerais da Resistência dos Materiais. As tensões são calculadas pela fórmula geral da Resistência (NAVIER): “as tensões são proporcionais à distância à linha neutra”:

$$\sigma = \frac{M \times y}{J}$$

No estágio I calcula-se no regime elástico com proporcionalidade entre tensões e deformações, satisfazendo assim a lei de Hooke. O cálculo no estágio I não é econômico, uma vez que não se devendo ultrapassar as tensões de tração no concreto que são muito baixas, se é levado a projetar seções de grandes dimensões.

Mesmo pensando em projetar estruturas cujas condições de utilização não permitam a formação de fissuras, como é o caso de reservatórios onde a estanquidade é fundamental, ainda assim a tecnologia de impermeabilização que hoje existe faz com que essa hipótese de cálculo no estágio I seja completamente rejeitada, desde, que se pode com seções menores garantir a estanquidade necessária.

Ao se aumentar a carga de ensaio verifica-se que o acréscimo de tensões provoca na zona tracionada uma condição de regime plástico, ou seja, é ultrapassada a fase elástica na zona tracionada sem ruptura propriamente dita do concreto. O diagrama tensão-deformação apresenta ainda um trecho reto na zona de compressão e um trecho de curvatura já acentuada na zona de tração, onde aparecem fissuras superficiais muito pequenas. O concreto já não oferece resistência às solicitações de tração e as fissuras tendem a subir para a zona comprimida. Na zona de tração, o concreto entra na fase plástica, com trecho retangular no diagrama de tensões. Essa fase é chamada Estádio Ia:



A linha neutra tende a se deslocar para a zona comprimida.

Aumentando-se a carga kP , as fissuras na zona de tração também aumentam e conseqüentemente, a posição da linha neutra eleva-se novamente. A resistência à tração do concreto é ultrapassada, porém o concreto na zona comprimida ainda se encontra na fase elástica, obedecendo ainda a lei de Hooke. Esse estágio é o chamado Estádio II, muito usado nos cálculos, até a década de 1960.

11.2.2 Estádio II

É também conhecido como o “método clássico” de cálculo. Nesse método o concreto já não responde aos esforços de tração, pois o seu valor de resistência encontra-se ultrapassado e portanto, as tensões de tração são resistidas unicamente pela armadura. Na zona comprimida, o concreto obedece ainda a lei de Hooke sendo responsável pelos esforços de compressão. Por isso o diagrama de tensões é linear na zona comprimida e inexistente na zona de tração, onde as tensões são desprezadas, concentrando os esforços de tração unicamente na armadura.

Nesta fase o cálculo das tensões na seção de concreto armado pode ser feito como se fosse de concreto simples, desde que se substitua a área da armadura por área de concreto igual a “ n ” vezes a área da armadura. É o que se chama de seção homogeneizada, onde:

$$A'_c = n \times A_s \quad \text{com} \quad n = \frac{E_s}{E_c}$$

A grande falha do método clássico é que, na realidade, o concreto não obedece a lei de Hooke. Surge com a aproximação da ruptura fenômenos de plasticidade, que alteram o pressuposto diagrama de tensões. Essa nova análise impôs a necessidade de se calcular o concreto armado sob uma nova fase conhecida como Estádio III, que corresponde a fase de ruptura da seção.

11.2.3 *Estádio III*

A medida que a carga aumenta aproximando-se de um valor capaz de provocar a ruptura da peça, as tensões aumentam na zona de compressão até o concreto comprimido entrar em fase plástica, não havendo mais obediência à lei de Hooke. A tensão na armadura ultrapassa o limite de proporcionalidade, atingindo o seu limite de escoamento. Apresentam-se grandes deformações no aço e ao mesmo tempo compressões de tal ordem no concreto, que se verifica a ruptura da peça. Esta fase de cálculo é denominada de Estádio III. Nela, a verificação das seções deve sempre ser feita para os estados limites últimos e para os estados limites de utilização.

Este método de cálculo conhecido como Método de Ruptura considera a dependência não linear entre a deformação e a tensão nas zonas próximas à ruptura. O Método implica em que sejam consideradas as cargas que levam a estrutura, ou parte dela, à ruína. As cargas admissíveis são obtidas através de um coeficiente de segurança maior que um (1), que é um fator de majoração das cargas admissíveis.

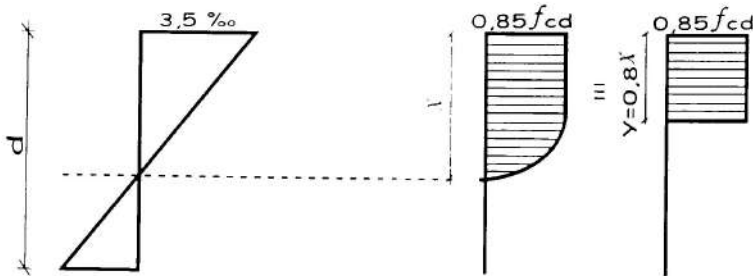
Em resumo, a estrutura é calculada para uma solicitação de ruptura que corresponde à carga de utilização, multiplicada pelo coeficiente de segurança.

A Norma Brasileira (NBR 6118) no artigo 4.1.1.1 estabelece que o cálculo no Estádio III de peças na flexão simples ou composta, salvo o caso de vigas-paredes, seja feito de acordo com as seguintes hipóteses:

- até o limite antes do início de ruptura, as seções no concreto suposto não fissurado permanecem planas (Lei de Navier);
- a resistência à tração do concreto deve ser desprezada;
- o encurtamento relativo máximo do concreto é igual a $3,5\text{‰}$ (3,5mm/m) na flexão e igual a 2‰ (2mm/m) na compressão centrada;

- o alongamento relativo do aço é limitado ao valor máximo de 10‰ , ou seja, 10mm/m, a fim de prevenir deformação plástica excessiva;
- a tensão de compressão no concreto apresenta-se como um diagrama parábola-retângulo, sendo permitido substituir esse diagrama por um diagrama retangular. Nesse caso, sendo x a altura da zona comprimida, a linha neutra, de posição x no diagrama parábola-retângulo, passará a ter posição $0,8.x$. Em qualquer hipótese, ao valor da tensão de compressão será aplicado um coeficiente de redução igual a 0,85 (efeito Rusch). Esse coeficiente poderá ter o valor de 0,8, no caso em que a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, diminua a partir desta para a borda comprimida. (Para maior esclarecimento consultar a NBR-6118, parágrafo 4, item 4.111).

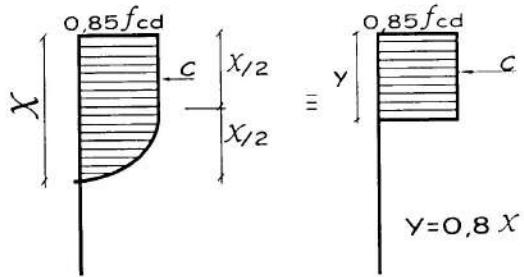
Os respectivos diagramas são representados conforme figura que segue:



Com $y = 0,8.x$, a área do diagrama retangular corresponde a mesma área do diagrama retangular-parabólico. Fácil dedução matemática, onde o valor de " x ", é considerado dividido ao meio, separando o trecho retangular do trecho parabólico. A igualdade entre as duas áreas, retangular e retangular-parabólico, significa se ter, para uma mesma seção, o mesmo valor da resultante das tensões de compressão. O diagrama retangular permite a elaboração de tabelas de cálculo mais simplificadas, sem prejuízo da segurança.

CONCRETO ARMADO

(b_w é o mesmo para ambos os diagramas)



Para os aços, a tensão na armadura é a correspondente à deformação determinada de acordo com os diagramas simplificados, conforme estabelece a Norma Brasileira. Para os aços de classe B, a NBR-6118 permite calcular a seção da armadura com o diagrama de um aço de classe A com o mesmo f_{yd} ($f_{y,cd}$), desde que a seção seja dividida por um coeficiente K_s , nas seguintes condições:

$$1- K_s = 1, \text{ quando } \varepsilon_s \leq \frac{0,7 \times f_{yd}}{E_s} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_s \geq 0,002 + \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$2- K_s = 0,85 \quad \text{se} \quad \varepsilon_s = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

interpolando-se linearmente nos casos intermediários. Então se tem:

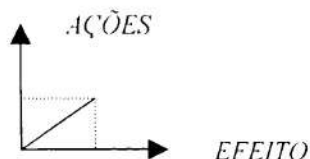
$$\text{para } \frac{f_{yd}}{E_s} \leq \varepsilon_s \leq 2 + \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{tem-se: } 0,85 \leq K_s \leq 1$$

e

$$\text{para } \frac{0,7 \times f_{yd}}{E_s} \leq \varepsilon_s \leq \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{tem-se: } 1 \geq K_s \geq 0,85$$

12. COMPORTAMENTO ESTRUTURAL

O comportamento de uma estrutura é definido pelas relações existentes entre as ações e os efeitos correspondentes. De um modo geral o comportamento linear é designado por comportamento elástico:



No Estádio I o concreto tracionado está ainda na fase de não fissuramento. No Estádio II considera-se o concreto tracionado como totalmente fissurado. A passagem do Estádio I para o Estádio II é gradativa. No Estádio II é válida a linearidade do comportamento do concreto comprimido (Lei de Hooke).

O Estádio III corresponde ao estado de ruptura do concreto comprimido, não existindo a partir daí um novo comportamento. Por isso, ele é chamado de estado limite último.

Existem duas formas básicas de ruptura, como salienta o professor Péricles B. Fusco (1976) em seu livro intitulado "Fundamentos do Projeto Estrutural": a ruptura frágil e a ruptura dúctil. Na ruptura frágil, o comportamento do material atinge a condição de ruptura, praticamente sem aviso prévio, bastando que seja atingido um certo valor específico de deformação. Na ruptura dúctil, o comportamento do material permite o aparecimento de uma fase plástica sem se romper. A ruptura se dá quando o material atinge uma deformação suficientemente grande, que corresponde ao esgotamento da capacidade de resistência do elemento.

No concreto armado, quando a ruptura do elemento é consequência da deformação excessiva por escoamento da armadura

tem-se a ruptura dúctil. Assim a peça, antes do colapso, apresenta sinais de advertência do perigo iminente. As fibras tracionadas estarão apresentando fissuras, que desenvolvem aumentos progressivos. É o caso de seções sub-armadas que serão vistas nos capítulos 14 e 15.

Quando o colapso se dá unicamente pela ruptura da zona comprimida da seção, tem-se a ruptura frágil. A influência da armadura não colabora para o aumento da resistência da seção, uma vez que a deformação do elemento não afeta a condição de escoamento da armadura, que ainda está em fase elástica (Lei de Hooke). São as chamadas seções super armadas.

Conclui-se, que o concreto armado por ser constituído pelos dois materiais, concreto e aço, pode apresentar tipos de ruptura, quer pelo concreto, quer pelo aço, ou, até mesmo simultaneamente com o concreto e aço atingindo seus respectivos estados limites últimos. Assim, no dimensionamento de uma estrutura, e principalmente quando se tratar de verificação de estabilidade, o concreto, ou o aço, ou ambos, podem definir o estado de ruptura, vale então o lembrete: “nenhuma corrente é mais forte, do que o seu elo mais fraco”.

12.1 ESTRUTURA DE UM EDIFÍCIO

Basicamente integram a estrutura de um edifício os seguintes elementos estruturais:

- lajes
- vigas
- pilares
- fundações

As lajes são estruturas laminadas planas solicitadas por cargas, predominantemente normais ao seu plano médio. De um modo geral são elementos horizontais, onde prevalecem duas dimensões sobre uma terceira (espessura). Basicamente, em uma edificação, as lajes

são os primeiros elementos estruturais que recebem as cargas, que são transmitidas para as vigas.

As vigas são peças estruturais que servem de apoio para as lajes, transmitindo para os pilares as solicitações devido ao seu carregamento.

Os pilares, de um modo geral, servem de apoio para as vigas. Através deles, as cargas recebidas, inclusive o seu peso próprio, são transmitidas para as fundações.

As fundações são dimensionadas para receber, com segurança, as cargas dos pilares e transmiti-las para o solo. Este, por sua vez, têm que ter capacidade para resistir aos esforços solicitados pela estrutura, através da fundação.

É de fundamental importância para a definição do tipo de fundação a ser projetada, que sejam realizados estudos sobre as características do terreno e a sua resistência. Não se pode escolher e dimensionar qualquer tipo de fundação sem conhecer as características de resistência do solo. Estas características é que vão definitivamente influir na decisão a ser tomada pelo calculista sobre o tipo de fundação mais adequada a cada projeto, se fundação rasa, se fundação profunda, etc. Deve-se sempre exigir um estudo de Sondagem Geotécnica do solo, com o objetivo de definir tecnicamente a fundação a ser projetada, o que torna importante o parecer de um técnico em Mecânica dos Solos.

12.2 LAJES: LAJES ARMADAS EM DUAS DIREÇÕES E LAJES ARMADAS EM UMA SÓ DIREÇÃO

As lajes recebem basicamente as seguintes cargas:

- Peso próprio
- Revestimento
- Sobrecarga

As duas primeiras (peso próprio e revestimento) são chamadas cargas permanentes (g), e a terceira (sobrecarga) é denominada de carga acidental (p), cujo valor é definido pela NBR-6120 para os diversos casos de utilidade. A carga total (q) é a soma das duas:

$$q = g + p$$

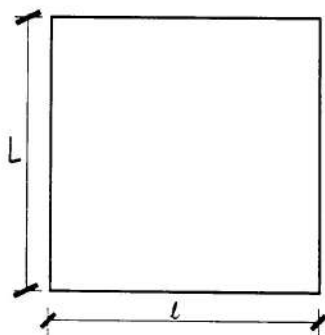
Há casos especiais em que cargas de paredes incidem sobre a laje.

Desviando o rumo da linha de dimensionamento em concreto armado será visto a seguir, o cálculo dos esforços solicitantes das lajes, decorrentes de seu carregamento, e suas reações de apoios.

As lajes apoiadas nos quatro lados podem ser divididas classicamente em duas categorias:

- Lajes armadas em duas direções (armadas em cruz):
- Lajes armadas em uma só direção.

As lajes serão consideradas armadas em cruz ou em duas direções, quando a relação entre o vão maior e o vão menor for menor ou igual a 2:



$$\lambda = \frac{L}{l} \leq 2 \quad (\text{ARMADA EM CRUZ OU EM DUAS DIREÇÕES})$$

Quando $\lambda = \frac{L}{l} > 2$, ou seja, a relação entre o vão maior e o vão menor for maior que 2, a laje será considerada armada em uma só direção.

12.2.1 LAJES ARMADAS EM CRUZ

Quanto aos apoios nos quatro lados das lajes pode-se ter apoio simples e apoio de engaste. Na prática, encontram-se seis casos de apoios, conforme podem ser vistos nas figuras que seguem:



Existem ainda casos especiais como lajes com bordos livres (sem apoios), lajes solicitadas com grandes balanços, etc. Todos esses casos foram exaustivamente estudados, de modo que atualmente já existem tabelas específicas para o cálculo dos esforços solicitantes, ou programas específicos em computadores.

Nas lajes armadas em duas direções a carga total (q) divide-se em dois quinhões de carga. Chamando l_x e l_y os vãos da laje, tem-se:

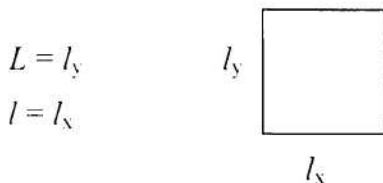
$$q = q_x + q_y \quad \text{onde} \quad q_x = k_x \cdot q$$

$$q_y = q - q_x$$

Esses quinhões são cargas por metro quadrado que atuam em faixas de 1 metro de largura.

12.3 DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS EM LAJES ARMADAS EM CRUZ

Para efeito de simplicidade considere-se uma laje armada em cruz, apoiada nos quatro lados:



como se trata de laje armada em cruz tem-se:

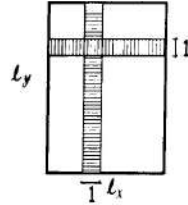
$$\frac{L}{l} \leq 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{l_y}{l_x} \leq 2$$

Seja q a carga total ($q = g + p$) tem-se a seguinte distribuição por faixa de 1 m:

na direção l_x tem-se q_x ;

na direção l_y tem-se q_y ;

onde $q_x + q_y = q$.



Para calcular q_x e q_y tome-se o valor das flechas no meio do vão:

$$f_x = \frac{5 \times q_x \times l_x^4}{384 \times E \times J} \quad \text{e} \quad f_y = \frac{5 \times q_y \times l_y^4}{384 \times E \times J}$$

E , é o mesmo (módulo de elasticidade)

J , é o mesmo (momento de inércia relativo à seção unitária da faixa).

evidentemente: $f_x = f_y$

logo: $q_x l_x^4 = q_y l_y^4$

$$\frac{q_x}{l_y^4} = \frac{q_y}{l_x^4} = \frac{q_x + q_y}{l_y^4 + l_x^4} = \frac{q}{l_x^4 + l_y^4} \quad q_x = \frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \times q$$

dividindo por l_x^4 , e como: $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$

tem-se: $q_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \times q$

e $q_y = q - q_x$

Portanto, o quinhão de carga pode ser determinado em função de uma relação entre os lados. Assim, a fração $\frac{\lambda^4}{1+\lambda^4}$ pode ser tabelada para diversos valores de l_y e de l_x , sempre na condição de $\frac{l_y}{l_x} \leq 2$. O valor de $\frac{\lambda^4}{1+\lambda^4}$, tabelado, será chamado de k_x , que será obtido da tabela em função de $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$. Em anexo encontra-se, as tabelas de lajes tiradas do livro Concreto Armado, vol. 1, do Prof. Aderson M. da Rocha.

Assim: $q_x = k_x \cdot q$

$$q_y = q - q_x$$

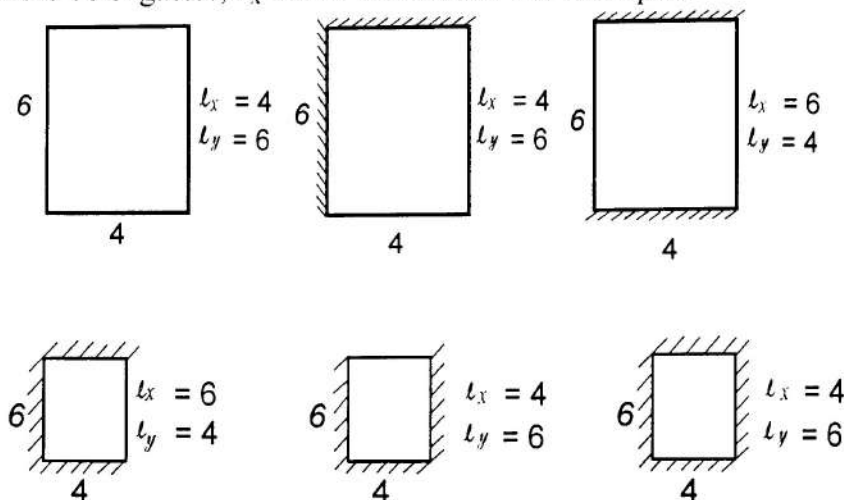
Como “q” é a carga por unidade de área, q_x e q_y , cuja soma é “q”, também são cargas por unidade de área. Na faixa de 1 metro de largura serão evidentemente tomadas como cargas por metro linear.

A determinação de k_x para uma laje com apoio nos quatro lados pode também ser feita para cada um dos cinco casos restantes de apoio de bordo. É só usar corretamente os valores das flechas, obedecendo às condições de apoio das bordas. Então, há para cada caso uma tabela específica em anexo que fornecerá o valor de k_x , em função de:

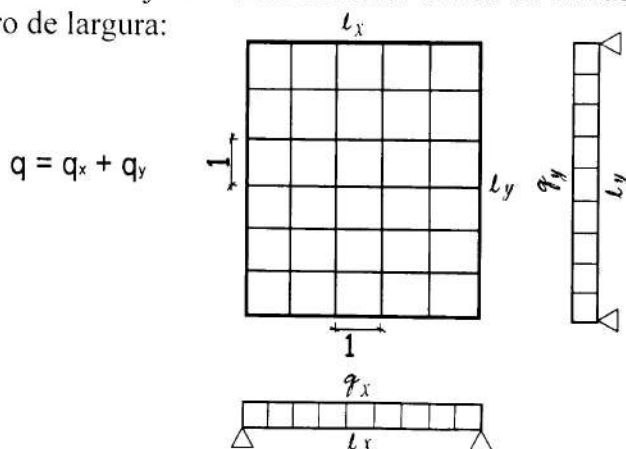
$$\lambda = \frac{l_y}{l_x}$$

Para execução dessas tabelas é necessário fixar o lado que será chamado de l_x e o lado que se chamará de l_y . Neste livro optamos por utilizar as tabelas apresentadas pelo professor Aderson Moreira da Rocha, (1981, Concreto Armado, volume 1, Editora Científica) onde a fixação de l_x e l_y obedecem ao seguinte critério:

l_x deve ser o vão situado na direção que possui o maior número de engastes. Se em ambas as direções houver o mesmo número de engastes, l_x será o vão menor. Por exemplo:



Para o cálculo dos momentos fletores nas lajes armadas em cruz considere-se a laje dividida em duas séries de faixas ortogonais, de um metro de largura:



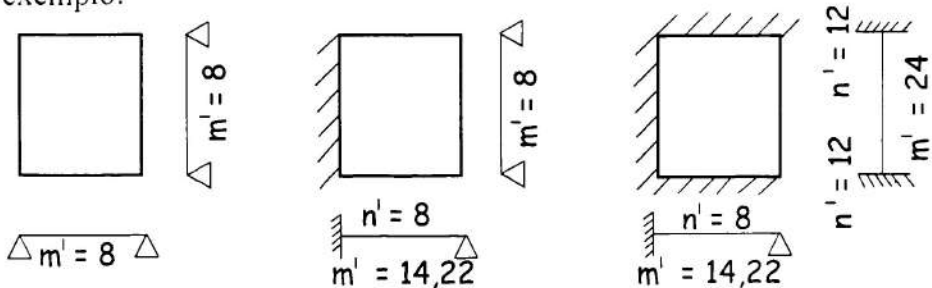
12.4 TEORIA DAS GRELHAS

Pela teoria das grelhas, os momentos fletores para cada direção são calculados como se cada faixa trabalhasse independentemente uma da outra. Os valores desses momentos dependem dos tipos de apoios de bordo, se são apoios simples ou se são apoios de engastes.

De uma forma geral se tem:

$$M_x = \frac{q_x \times l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q_y \times l_y^2}{m_y} \quad X_x = \frac{q_x \times l_x^2}{n_x} \quad X_y = \frac{q_y \times l_y^2}{n_y}$$

Os valores de m' e de n' dependem da natureza dos apoios, por exemplo:



12.5 PROCESSO DE MARCUS

Marcus tomou por base o comportamento das lajes armadas em cruz, a partir de resultados obtidos pela integração de derivadas parciais fornecidas pela Teoria da Elasticidade.

Partiu da teoria das grelhas mas considerou a interdependência das faixas entre si, ao contrário do suposto pela teoria das grelhas. Com essa hipótese levou em conta o efeito redutor devido a essa interdependência e devido também aos momentos volventes, que aparecem nos cantos das lajes.

Determinou então coeficientes de redução ν_x e ν_y , que devem ser multiplicados pelos valores dos momentos dados pela teoria das grelhas. Os coeficientes redutores ν_x e ν_y , evidentemente, são valores menores do que 1:

$$\nu_x = 1 - \frac{20 \times k_x}{3 \times m_x \times \lambda^2}$$

$$\nu_y = 1 - \frac{20 \times k_y \times \lambda^2}{3 \times m_y}$$

Esses coeficientes corrigem os valores obtidos pela teoria das grelhas, uma vez que a laje funciona como uma placa única de faixas interligadas entre si, resultando em flechas menores do que as indicadas pela teoria das grelhas e, conseqüentemente, com momentos menores.

Desenvolvendo a teoria de Marcus no cálculo dos momentos fletores das lajes armadas em cruz, obtém-se para o momento de vão na direção l_x e l_y :

$$M_x = \frac{q_x \times l_x^2}{m_x} \times \nu_x = \frac{k_y \times q \times l_x^2}{m_x} \times \nu_x = \frac{q \times l_x^2}{\frac{m_x}{k_x \times \nu_x}} \quad \text{fazendo: } \frac{m_x}{k_x \times \nu_x} = m_x$$

$$\text{tem-se: } M_x = \frac{q \times l_x^2}{m_x}$$

analogamente:

$$M_y = \frac{q_y \times l_y^2}{m_y} \times \nu_y = \frac{k_x \times q \times l_y^2}{m_y} \times \nu_y = \frac{k_y \times q \times \lambda^2 \times l_x^2}{m_y} \times \nu_y = \frac{q \times l_x^2}{\frac{m_y}{k_y \times \lambda^2 \times \nu_y}}$$

$$\text{chamando: } \frac{m_y}{k_y \times \lambda^2 \times \nu_y} = m_y$$

$$\text{vem: } M_y = \frac{q \times l_x^2}{m_y}$$

Com raciocínio análogo se tem:

$$X_x = \frac{q \times l_x^2}{n_x} \quad \text{e} \quad X_y = \frac{q \times l_x^2}{n_y}$$

Os coeficientes m_x , m_y , n_x e n_y encontram-se nas tabelas em anexo, em função de $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$ e do tipo de condições de bordo da laje.

Então, com o valor de λ obtém-se k_x , m_x , m_y , n_x e n_y para cada caso específico. Calculam-se então, os quinhões de carga e os momentos fletores respectivos. Deve-se observar que as expressões acima, que fornecem os momentos fletores foram trabalhadas de modo que o numerador fosse sempre o mesmo.

Além dos momentos fletores, aparecem momentos de torção nos cantos das lajes, também chamados momentos volventes. Esses devem ser combatidos, conforme prescreve a NBR-6118. Os momentos volventes são nulos no centro da laje e máximos nos cantos da mesma.

A variação dos momentos volventes e fletores são de sentido contrário, não havendo portanto coincidência dos valores críticos. Entretanto, não se deve desprezar o efeito desfavorável do momento volvente que ocorre nos cantos de bordos de apoio simples das lajes, cujo combate pode ser feito com armaduras de canto, preconizadas pela NBR-6118.

12.6 LAJES CONTÍNUAS

Conceitua-se como lajes contínuas, aquelas que são adjacentes a outras lajes, em seu mesmo plano. É o que geralmente ocorre nos cálculos de estruturas de edifícios, onde há sempre um painel de lajes que pertencem a cada pavimento.

Na prática, o cálculo dessas lajes recai no caso de lajes isoladas, adotando-se o seguinte artifício: destaca-se a laje do painel, admite-se que o apoio intermediário que liga uma laje a outra seja assimilado como se fosse um engaste perfeito, e que os apoios extremos, aqueles sem continuidade com outras lajes, sejam considerados apoios simples.

O artifício acima descrito representa uma aproximação do verdadeiro funcionamento estrutural das lajes. Os valores ficam mais próximos da realidade quando as lajes contíguas estão totalmente carregadas e suas dimensões têm valores não muito diferenciados entre si. Quanto ao artifício utilizado de assimilar os apoios extremos como se fossem apoios simples, constitui uma ótima opção, uma vez que se evita assim a consideração de momentos torsores que solicitariam as vigas dos apoios extremos. Esses momentos torsores seriam ocasionados pelos momentos fletores negativos de engaste, na ligação da laje com a viga. Nada disso acontece, se a ligação é de apoio simples.

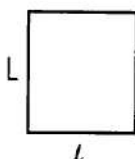
12.7 LAJES ARMADAS EM UMA SÓ DIREÇÃO

Nas lajes armadas em uma só direção não há divisão em quinhões de carga. Toda a carga (q) é transmitida segundo a direção menor, carregando as vigas de apoio do vão maior. Figurativamente, pode-se imaginar o efeito “cama de lona” ou tábuas ao lado uma da outra, apoiadas sobre dois longos trilhos.

As lajes armadas em uma só direção também podem ser isoladas ou contínuas. Elas são calculadas sob ação da carga permanente, mais a carga acidental. Eventualmente, pode haver paredes sobre a laje. Calcula-se para uma faixa de largura unitária como nas lajes armadas em cruz, só que a carga total “ q ” não se distribui em quinhões de carga. Ela atua totalmente segundo a menor direção.

12.7.1 LAJES ISOLADAS

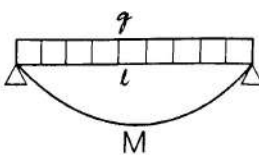
Apresentam-se os seguintes casos:



L

l

$\frac{L}{l} > 2$

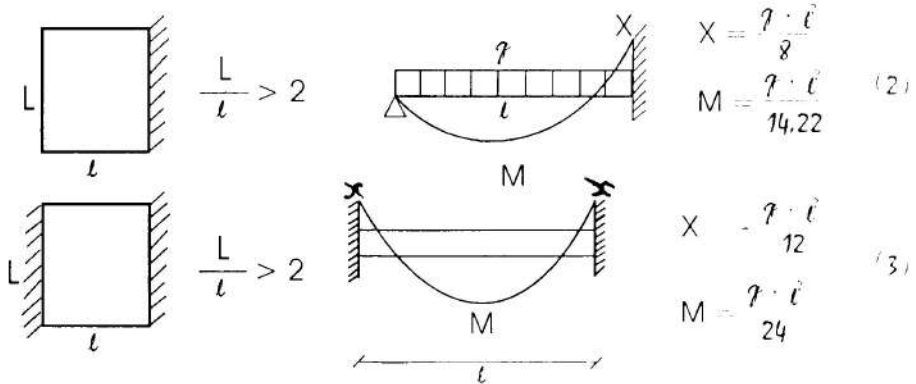


q

l

M

$M = \frac{q \cdot l^2}{8} \quad (1)$



Na prática, raramente ocorrem engastamentos perfeitos. Assim, no caso de laje isolada é prudente se considerar para o cálculo do momento no vão a hipótese de apoios simples (caso 1) e estabelecer uma armadura negativa para o apoio de engaste, cujo grau de engastamento nem sempre é de engastamento perfeito, podendo ser considerado como um engaste parcial. Essa armadura é também chamada de armação de costura quando não é calculada para combater momento de engaste, e sim, colocada para evitar o aparecimento de fissuras que podem ocorrer ao longo da ligação de apoio da laje com a viga. Enfim, na ligação laje/viga, haverá, sem dúvida, um certo grau de engastamento, mas dificilmente será um momento negativo de engaste perfeito, representado acima nos casos 2 e 3. Até mesmo, falhas no processo de execução como a possível posição incorreta da armadura negativa, induz a que se proceda com prudência. A experiência do calculista será nesses casos de grande importância.

12.7.2 LAJES CONTÍNUAS: ARMADAS EM UMA SÓ DIREÇÃO

A NBR-6118 permite que se use um processo aproximado para o cálculo dos momentos fletores positivos e negativos das lajes contínuas armadas em uma só direção, desde que o menor vão da laje contínua não seja inferior a 80% do maior vão. Neste caso, chamando

genericamente os momentos de vão e apoio respectivamente de M e X , tem-se;

$$M = \frac{q \times l^2}{k_1} \quad \text{e} \quad X = \frac{q \times l^2}{k_2}$$

onde, k_1 e k_2 teriam os seguintes valores:

- 1º Caso: não havendo mísulas nas condições do item 3.1.3 da NBR 6118:

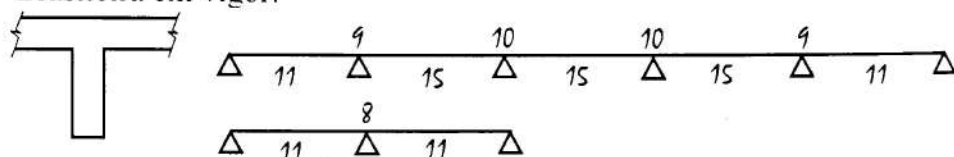
MOMENTOS NEGATIVOS

Apoio interno dos vãos extremos	$k_2 = 9$
Demais apoios intermediários	$k_2 = 10$
Apoio interno quando só houver dois vãos	$k_2 = 8$

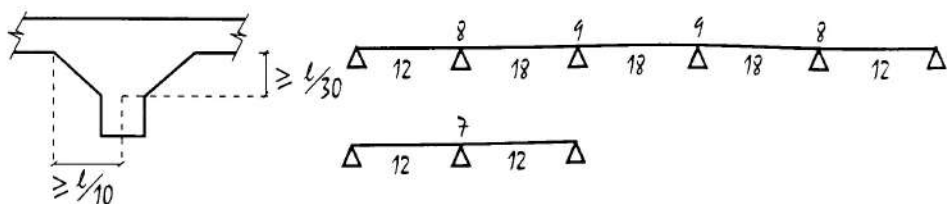
MOMENTOS POSITIVOS

Vãos extremos	$k_1 = 11$
Vãos intermediários	$k_1 = 15$

Segue abaixo um esquema onde poderá se visualizar os valores de “ k ” para vãos e apoios, de acordo com o artigo 3.3.2.6 da Norma Brasileira em vigor:



2º Caso: havendo mísulas:

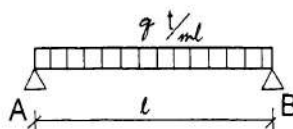


Para os apoios, “ l ” deve ser tomado como a média aritmética dos dois vãos adjacentes ao apoio considerado.

No caso mais geral, quando a diferença entre os vãos ultrapassar 20% do maior vão, essas lajes serão calculadas como no caso de vigas contínuas, não se considerando nos vãos momentos positivos menores que aqueles que se obtém admitindo-se engastamento perfeito da laje nas extremidades de apoio, quer seja vão extremo ou vão intermediário. Esse cálculo será feito para uma faixa contínua de largura unitária.

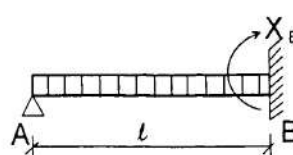
12.7.3 REAÇÕES DE APOIO

Quando uma peça é simplesmente apoiada as reações são:



$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2} = 0,5 \cdot q \cdot l$$

No caso de apoio e engaste (teoricamente perfeito):



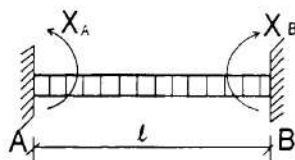
$$R_B = - \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$R_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

$$R_B = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

ou, aproximadamente: $R_A = 0,4 \cdot q \cdot l$ e $R_B = 0,6 \cdot q \cdot l$

No caso de uma peça bi-engastada:

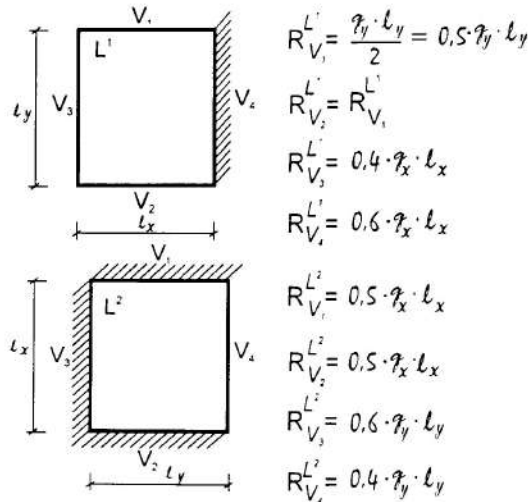


$$X_A = X_B = - \frac{q \cdot l^2}{12}$$

$$R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2} = 0,5 \cdot q \cdot l$$

O raciocínio acima exposto permite que se adote considerações análogas no cálculo das reações das lajes sobre as vigas de apoio, utilizando-se os valores 0,5, 3/8, ou 5/8, conforme suas condições de bordo. É comum se usar 0,4 em vez de 3/8, e 0,6 em vez de 5/8 como valores aproximados para fins práticos.

Abaixo, dois exemplos ilustrativos em lajes armadas em cruz:



As reações de apoio nas lajes armadas em uma só direção, no caso simplificado ($I_{\text{menor}} \geq 0,80 I_{\text{maior}}$) obedecem aos mesmos critérios. Quando a diferença entre os vãos exige o cálculo de faixas como viga contínua, as reações obedecerão também aos casos de reações de apoios em vigas contínuas, ou seja, são reações hiperestáticas.

De acordo com a NBR-6118 (artigo 3.3.2.9) as reações de apoio nas lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas podem ser calculadas considerando-se para cada apoio a carga correspondente a área de influência sobre o apoio, devida aos triângulos ou trapézios obtidos, traçando-se a partir dos vértices retas inclinadas de:

- 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
- 60° a partir do apoio engastado, quando o outro for apoio simples.

12.8 PAREDE SOBRE LAJE

Ocorre, algumas vezes, constar no projeto parede como carga sobre a laje. Considere-se os dois casos mais comuns:

- parede sobre laje armada em cruz;
- parede sobre laje armada em uma só direção.

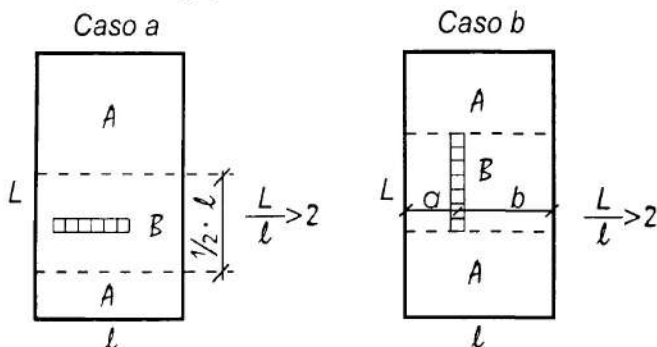
No primeiro caso, a carga da parede pode ser considerada como carga uniformemente distribuída sobre a laje. A carga da parede é computada dividindo-se o peso total da parede pela área da laje, obtendo-se uma nova parcela por metro quadrado. Por medida de segurança não se descontam no cálculo da área da parede as áreas vazias, ocupadas por esquadrias (portas, janelas, etc).

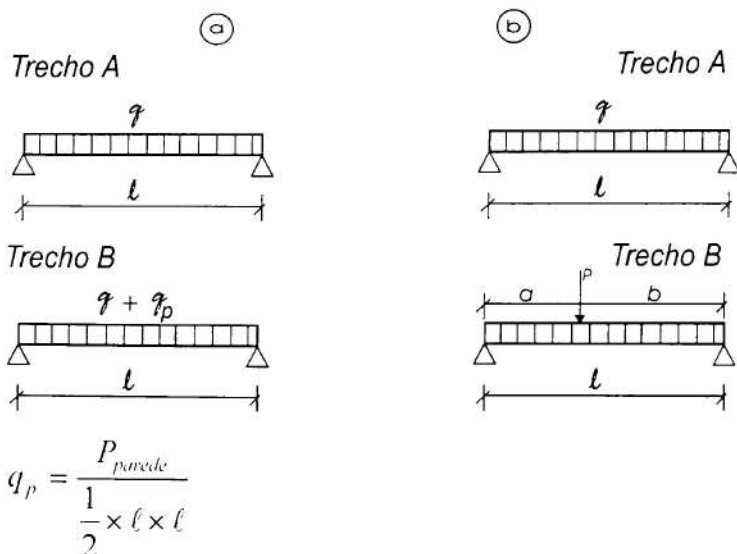
No segundo caso, paredes sobre laje armada em uma só direção, deve-se considerar duas hipóteses:

- paredes paralelas à direção menor;
- paredes normais à direção menor.

No caso de paredes paralelas à direção menor considera-se a parede como distribuída em uma faixa de largura igual a $\frac{1}{2}$ do vão menor. No caso de paredes normais à direção menor, a parede deve ser considerada como carga concentrada ao longo do seu comprimento de ação. O cálculo é feito para faixas de um metro de largura.

Exemplo: seja “q” a carga normal da laje (peso próprio + revestimento + sobrecarga):





P - carga p/metro de parede

Deve-se sempre lembrar que o cálculo das lajes é feito para faixas de largura unitária (1 metro). O cálculo e dimensionamento das lajes devem satisfazer à condição de estabilidade, isto é, devem responder com segurança às ações das cargas que as solicitam, assim como garantir a segurança quanto às deformações. Nesse sentido, a NBR-6118, no item 4.2.3.1, fixa os limites máximos aceitáveis para as flechas nas lajes.

Sob ação da carga total as flechas não devem ultrapassar 1/300 do vão teórico, e no caso de balanço este limite é 1/150 do seu comprimento teórico. Torna-se, portanto, muito importante a fixação da altura de cálculo da laje, de modo a garantir a inércia necessária contra deformação excessiva.

A NBR-6118 apresenta uma tabela que fixa as condições de determinação das alturas necessárias para as lajes, que garanta as condições mínimas de segurança contra deformação excessiva, para casos normais de cargas nas lajes de um edifício. Chamando de “d” a

CONCRETO ARMADO

altura útil da laje, isto é, a distância do centro de gravidade da armadura de tração ao bordo comprimido, calcula-se:

$$d = \frac{l}{\varphi_2 \times \varphi_3} \quad \text{e} \quad h = d + 1$$

onde l é o menor vão, e φ_2 e φ_3 são valores indicados pela Norma Brasileira (item 4.2.3.1, parágrafo C), dependentes das dimensões da laje, condição de bordo e tipo de aço utilizado.

Usando-se a tabela 2 da NBR 6118, pode-se achar a altura útil das lajes armadas em cruz, de modo a garantir flechas menores que as máximas admissíveis pela Norma Brasileira.

No caso das lajes armadas em uma só direção os valores de φ_2 são os seguintes:

Lajes simplesmente apoiadas	1.0
Lajes contínuas	1.2
Lajes duplamente engastadas	1.7
Lajes em balanço	0.5

Os valores de φ_3 dependem do aço (NBR - 6118):

f_y (kg/cm ²)	Lajes maciças
CA-25	35
CA-32	33
CA-40	30
CA-50	25
CA-60	20

Os valores de altura útil das lajes, calculados utilizando esses coeficientes, tem conduzido a resultados muito conservadores. Na prática é usual admitir uma redução da ordem de 10 a 20%, para os casos correntes de edifícios.

Deve-se ainda estar atento às condições mínimas para espessura de lajes, que são fixadas pela NBR-6118 no seu item 6.1.1, conforme segue:

“as espessuras das lajes não devem ser menor que:

- 5 cm em lajes de cobertura não em balanço
- 7 cm em lajes de piso e lajes em balanço
- 12 cm em lajes destinadas a passagem de veículos”.

Para calcular o peso das paredes sobre as lajes em um projeto de estrutura de edificações, os valores das cargas a serem consideradas são objeto da NBR-6118. As Normas dizem:

Tijolos furados	1300 Kg/ m ³ ou (13 KN/m ³)
Tijolos maciços	1800 Kg/m ³ ou (18 KN/m ³)
Argamassa de cimento e areia	2100 Kg/m ³ ou (21 KN/m ³)
Concreto Armado	2500 Kg/m ³ ou (25 KN/m ³)

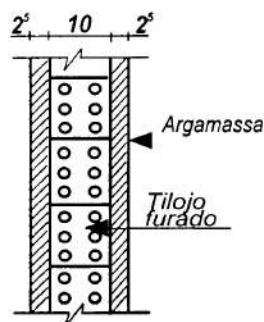
Assim, pode-se calcular o peso de um (1) metro quadrado de parede singela, levando-se em conta os tijolos e a massa de acabamento. Exemplo:

Em 1m x 1m se tem:

$$\text{Tijolo: } 1 \times 1 \times 0,10 \times 1,3 = 0,13 \text{ t/m}^2$$

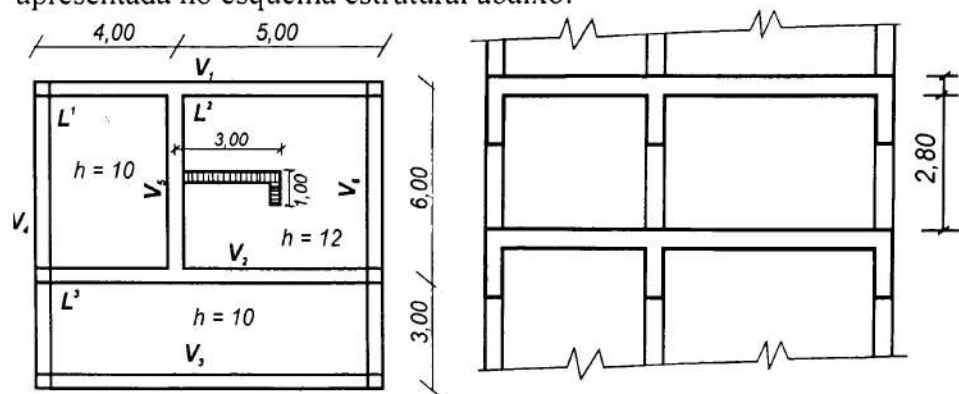
$$\text{Argamassa: } 1 \times 1 \times 0,05 \times 2,1 = 0,11 \text{ t/m}^2$$

$$\text{Total} = 0,24 \text{ t/m}^2$$



Verifica-se pelo exemplo dado, que o peso de 1 m² de alvenaria singela é igual a 240 kg. Para achar o peso total de parede sobre a laje, multiplica-se esse valor pelo pé direito e pelo comprimento da parede sobre a laje, ou seja, multiplica-se pela área total de parede sobre a laje.

Exemplo: determinar a carga que solicita a laje L2 (quarto), apresentada no esquema estrutural abaixo:



A NBR-6120 diz que a carga acidental (sobrecarga) para uma laje destinada a ser dormitório é de 150 kg/m^2 ($1,5 \text{ KN/m}^2$)

Então: (carga unitária da laje)

peso próprio : $1 \times 1 \times 0,12 \times 2,5$	$0,30 \text{ t/m}^2$
revestimento	$0,08 \text{ t/m}^2$
sobrecarga	$0,15 \text{ t/m}^2$

$$q = 0,53 \text{ t/m}^2$$

Peso da parede (desprezando-se na medida do comprimento total o fato do canto ser contado duas vezes):

$$P = 0,24 \times (3 + 1) \times 2,8 = 2,7 \text{ t.}$$

Como a laje L2 é armada em cruz:

$$\frac{L}{l} = \frac{6}{5} = 1,2 < 2$$

a carga da parede distribui-se uniformemente sobre a laje:

$$q_p = \frac{2.7}{5 \times 6} = 0.09 \text{ t/m}^2$$

Assim a carga de cálculo da laje L2, é:

$$q = 0,53 + 0,09 = 0,62 \text{ t / m}^2.$$

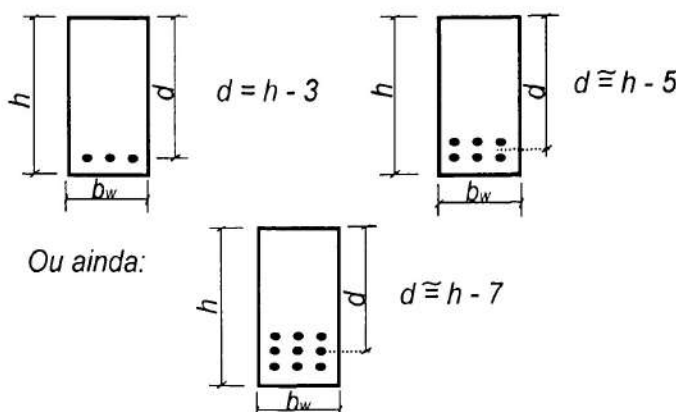
13. SEÇÕES RETANGULARES

13.1 ALTURA ÚTIL, DEFORMAÇÕES, VALORES LIMITES

Chama-se de altura útil em uma seção de concreto armado, a distância que vai do centro de gravidade da armadura de tração ao bordo comprimido. Chamando de “h” a altura da seção e “d” a altura útil, pode-se dizer de um modo geral:

- para as lajes: $d = h - 1 \text{ cm}$
- para as vigas: $d = h - 3 \text{ cm}$

Sempre há casos de exceções, que ocorrem quando se tem que usar bitolas de aço mais grossas nas lajes, ou camadas de barras nas vigas. Nas vigas isso acontece quando a largura da seção não comporta todas as barras em um mesmo plano horizontal. Abaixo, são apresentados exemplos figurativos:



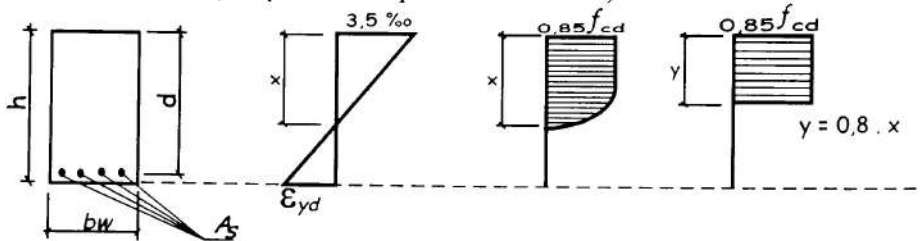
Para saber como e quando usar camadas de barras, recorre-se a NBR-6118, que prescreve:

“a armadura longitudinal das vigas pode ser constituída de barras isoladas ou de feixes formados por 2, 3 ou 4 barras, não sendo permitidos feixes de bitola superior a 25 cm”. “O espaço livre entre

duas barras, ou dois feixes da armadura longitudinal, não deve ser menor que 2 centímetros, nem menor que o diâmetro das próprias barras (do círculo de mesma área, no caso de feixes), nem menor que 1,2 vezes a dimensão máxima do agregado”. Isto no plano horizontal, pois no plano vertical o espaçamento deve ser maior ou igual a 0,5 vezes a mesma dimensão adotada para o plano horizontal. Diz ainda a NBR-6118 que “se as barras ou feixes forem de diâmetros diferentes, será considerado o maior deles”.

13.2 POSIÇÃO DA LINHA NEUTRA

Considere-se então uma seção retangular com área de armadura de tração A_s . No estado limite último tem-se o concreto com valor de tensão f_{cd} , e deformação de encurtamento da borda mais comprimida na ocasião da ruptura, ϵ_{cd} de 3,5 mm/m. Para o aço, tem-se o valor de tensão f_{yd} , e de deformação ϵ_y cujo limite máximo é de 10 mm/m (condição prefixada pela NBR-6118).



Do diagrama das deformações acima pode-se deduzir:

$$\frac{3.5}{x} = \frac{\epsilon_y}{d - x} \quad x = \frac{3.5}{3.5 + \epsilon_y} \times d$$

$$e \quad y = \frac{0.8 \times 3.5}{3.5 + \epsilon_y} \times d \quad y = \frac{2.8}{3.5 + \epsilon_y} \times d$$

O valor de y define a posição do eixo neutro da seção independente dos valores de cálculo das tensões no concreto, porém

CONCRETO ARMADO

dependendo da categoria do aço empregado. É importante lembrar que para os aços não encruados:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{e} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1.15}$$

e, para os encruados:

$$\varepsilon_{yd} = 0.002 + \frac{f_{yd}}{E_s} \quad \text{e} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1.15}$$

Assim, pode-se indicar na tabela que segue os valores limites de tensão e deformação, para cada tipo de categoria de aço:

AÇO	f_{yd} kg/cm ²	ε_{yd} mm/m
CA-25	2174	1.035
CA-50A	4348	2.070
CA-60A	5217	2.484
CA-50B	4348	4.070
CA-60B	5217	4.484

ε_{yd} , representa o valor da deformação do aço correspondente à tensão de escoamento f_{yd} . Assim f_{yd} e ε_{yd} representam respectivamente, os valores de tensão e de deformação, no caso limite de aproveitamento, ao máximo, da resistência do aço no concreto armado. Nessas condições limites, o concreto estará com a deformação de esmagamento de $\varepsilon_{cd} = 3,5$ mm/m.

Chama-se então de y_{lim} o valor de y nessas condições limites:

$$y_{lim} = \frac{2.8}{3.5 + \varepsilon_{yd}} \times d$$

fazendo:

$$s_{lim} = \frac{2.8}{3.5 + \varepsilon_{yd}}$$

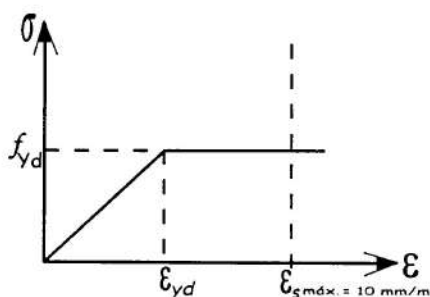
vem: $y_{lim} = s_{lim} \times d$

e, no caso de x_{lim} : $x_{lim} = \frac{3.5}{3.5 + \varepsilon_{yd}} \times d$

fazendo: $\xi_{lim} = \frac{3.5}{3.5 + \varepsilon_{yd}}$

resulta: $x_{lim} = \xi_{lim} \times d$

Analizando o diagrama simplificado de tensão/deformação do aço:



Pode-se dizer que os valores de y_{lim} definem a posição da Linha Neutra para as seções normalmente armadas, ou seja, aquelas em que o esmagamento do concreto se dá, simultaneamente, com o escoamento do aço, ou seja, tem-se ao mesmo tempo ε_{cd} e ε_{yd} .

Para os diversos tipos de aço pode-se determinar os valores de s_{lim} , completando assim a tabela anterior:

AÇO	f_{yd} kg/cm ²	ε_{yd} mm/m	s_{lim}
CA-25	2174	1,035	0,617
CA-50A	4348	2,070	0.503
CA-60A	5217	2,484	0,468
CA-50B	4348	4,070	0,370
CA-60B	5217	4,484	0,350

CONCRETO ARMADO

Sendo de 10mm/m o valor máximo de alongamento para o aço permitido pela Norma Brasileira NBR-6118, pode-se, desde já, determinar o valor mínimo de "s", o que norteará a confecção de tabelas, que facilitam o dimensionamento de seções em concreto armado. Nas tabelas de dimensionamento não deverão constar valores de "s", menores do que o mínimo.

Para os diversos valores de ϵ_s , alongamento do aço, tem-se:

$$y = \frac{2.8}{3.5 + \epsilon_s} \times d$$

com: $s = \frac{2.8}{3.5 + \epsilon_s}$

quando $\epsilon_s = \epsilon_{lim}$ se tem: $s = s_{lim}$

para $\epsilon_{max} = 10\text{‰} = 10 \text{ mm/m}$:

$$s_{min} = \frac{2.8}{3.5 + 10} = 0,207$$

Conclui-se daí, que nas seções de concreto armado o valor mínimo admitido pela NBR-6118 para posição da Linha Neutra é:

$$y_{min} = 0,207 \cdot d$$

pois, para valores de "s", menores do que 0,207, se teria valores de ϵ_s maiores de que 10 mm/m, o que não é permitido pela NBR.

Do que foi exposto, pode-se concluir:

1. a seção é considerada Normalmente Armada quando a ruptura se dá com o esmagamento do concreto, ao mesmo tempo em que ocorre o limite de escoamento da armadura. Atinge-se assim, simultaneamente,

$$f_{cd}, \epsilon_{cd}, f_{yd} \text{ e } \epsilon_{yd}.$$

2. a seção é considerada Sub-Armada quando o esmagamento do concreto se dá após o escoamento da armadura. Isto é, no momento

em que o aço começa a se escoar, o alongamento da armadura é ε_{yd} e o encurtamento do concreto é: $\varepsilon_c < \varepsilon_{cd}$ portanto, inferior ao valor de ruptura. Entretanto, durante o escoamento da armadura o momento se mantém constante, a tensão na armadura fica constante e igual a f_{yd} ; a linha neutra vai subindo até que se dará a ruptura por esmagamento do concreto, com : $\varepsilon_c = \varepsilon_{cd}$, estando o aço com $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$.

Nos cálculos, para as seções sub-armadas adota-se essa configuração final, isto é: a armadura se escoar com deformações crescentes, mas o valor da tensão é constante f_{yd} ; o momento também se mantém constante e o concreto atinge ao longo do processo, o valor:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ mm/m.}$$

Conclui-se, que essas duas primeiras hipóteses podem ser analisadas como um único caso: aço escoado e concreto esmagado.

3. a seção é considerada Super-Armada quando o esmagamento do concreto se dá sem que a armadura tenha atingido o seu limite de escoamento.

$$\text{Tem-se então: } \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \text{ e } \varepsilon_c = \varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ mm/m} = 3,5 \text{ ‰}$$

e,

evidentemente, $s > s_{lim}$

Esse tipo de seção deve ser evitado, uma vez que além de não ser econômico devido ao excesso de armadura, apresenta o agravante de atingir ruptura brusca, sem o aviso que é dado nas peças onde as seções são normalmente armadas ou sub-armadas, onde esse aviso permite uma visão do processo gradual de fissuração.

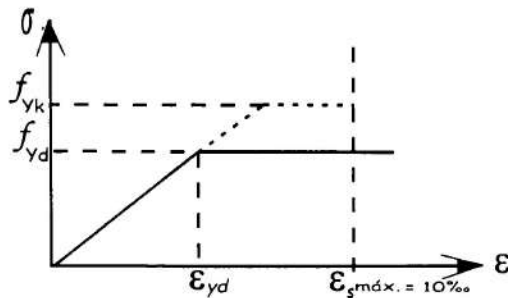
Quando, por imposição do projeto, tenha sido limitada a altura da seção de modo a conduzir o cálculo para uma seção super armada, é preferível, se for possível, aumentar a largura da seção na zona comprimida, ou então, se a seção está fixada, recorrer a uma seção

CONCRETO ARMADO

normalmente armada, com armadura de compressão auxiliando o concreto na zona comprimida. É o caso de dimensionamento com armadura dupla, que será analisado adiante.

As figuras que seguem mostram o comportamento gráfico do aço e do concreto, no dimensionamento de seções na flexão simples:

13.2.1 AÇO COM PATAMAR DE ESCOAMENTO

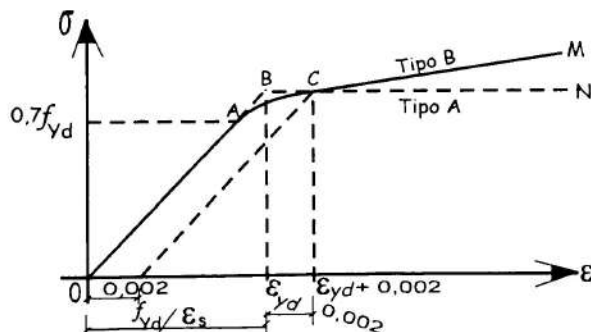


13.2.2 AÇO SEM PATAMAR DE ESCOAMENTO

No diagrama abaixo temos:

OBN- corresponde ao aço tipo A

OACM- corresponde ao aço tipo B



No trecho AC o diagrama é curvo. C representa o ponto de escoamento convencional do aço tipo B, que corresponde à deformação residual de 2 mm/m (0,2%).

Nos trechos OA e CN, os dois aços têm o mesmo aspecto do diagrama simplificado da NBR-6118. A variação se dá no trecho AC, que é curvo no aço tipo B.

13.3 SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA SIMPLES

O diagrama das deformações na seção é representado na figura que segue :

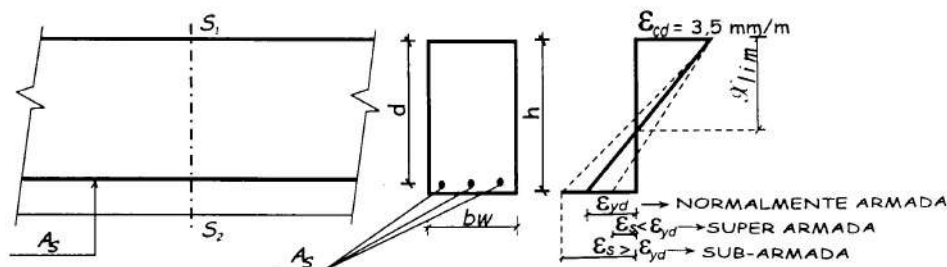
ϵ_{yd} - alongamento do aço em seção normalmente armada

ϵ_s - alongamento genérico do aço

$\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ - seção super-armada

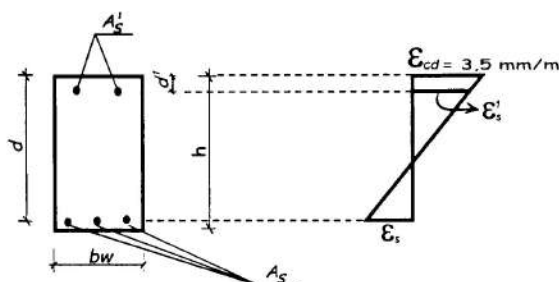
$\epsilon_s > \epsilon_{yd}$ - seção sub-armada.

Na figura abaixo, pode-se visualizar os possíveis comportamentos das deformações em uma seção retangular qualquer:



13.4 SEÇÃO RETANGULAR COM ARMADURA DUPLA

No caso de armadura dupla, o diagrama apresenta o seguinte aspecto:



ϵ'_s - deformação do aço comprimido: $\epsilon'_s < \epsilon_{cd}$

d' - distância do centro de gravidade da armadura comprimida ao bordo comprimido. Na maioria das vezes, $d' = 3\text{cm}$.

O calculista deve estar sempre atento ao que prescreve a NBR-6118: “os esforços na armadura de tração A_s e na de compressão A'_s só podem ser considerados concentrados no centro de gravidade de A_s e de A'_s , se a distância deste centro ao ponto da seção da armadura mais afastado da linha neutra, medida normalmente a ela, for menor que 5% de h ”. Prescreve ainda a Norma Brasileira, que “a armadura longitudinal de tração não deve ser inferior àquela, com a qual o momento de ruptura calculado sem se considerar a resistência à tração do concreto é igual ao momento de ruptura da seção sem armadura”.

Com o objetivo de simplificar, a Norma Brasileira ressalva, que “nos casos de seção retangular e seção T, pode-se considerar como valor de área mínima 0,25% de $b_w h$ quando a armadura for em aço CA-25 ou CA-32, e 0,15% de $b_w h$ se a armadura for de aço CA-40, ou CA-50, ou CA-60”.

13.5 DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES: FLEXÃO SIMPLES

No caso de seções retangulares, as tensões normais na seção são devidas à presença de um momento fletor M_d , cujo eixo está contido no plano da seção e coincide com um eixo central de inércia.

Dois casos devem ser considerados:

- armadura simples
- armadura dupla

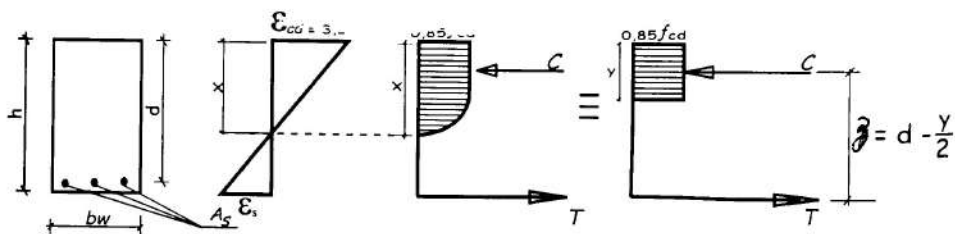
Seja M o momento fletor atuante, também chamado momento característico. O momento de estado limite último, chamado momento de ruptura, obtém-se multiplicando o momento atuante M pelo coeficiente de segurança $\gamma_f = 1,4$ (NBR-6118). Este fator de segurança é também chamado fator de majoração das cargas.

O problema do dimensionamento consiste em garantir que as dimensões da seção sejam tais, que o colapso se realize quando a solicitação atingir o valor do momento M_d .

$$M_d = \gamma_f \times M \quad (\gamma_f = 1,4)$$

O Comité Européen du Béton (CEB) considera $\gamma_f = 1,5$.

Segue abaixo o gráfico das deformações e das tensões em uma seção retangular de concreto armado no estágio III:



C , é a resultante dos esforços de compressão na seção:

T , é a resultante dos esforços de tração na armadura:

CONCRETO ARMADO

0,85, é a redução que se faz sobre f_{cd} , devido ao chamado efeito Rusch, que demonstrou a tendência do concreto em ter a sua resistência diminuída em cerca de 15%, quando sujeito a carga de longa duração. Os valores de f_{ck} , e portanto de f_{cd} usados nos cálculos são provenientes de ensaios de corpos de prova, realizados de maneira rápida. Daí a Norma Brasileira indicar o fator de redução 0.85 para levar em conta a observação feita por Rusch.

O momento M_d de ruptura da seção é equilibrado pelo momento resistente interno, em condições de estado limite último. O binário é formado na seção pelo sistema de tensões, com resultante C de compressão no concreto e resultante T de tração na armadura.

Pela condição de equilíbrio se tem:

$$C = T$$

$$\text{onde, } C = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \quad \text{e} \quad T = A_s \times f_{yd}$$

$$\text{da figura:} \quad z = d - y / 2$$

$$\text{como } y = s \times d, \quad z = d - \frac{s \times d}{2} = d \left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

De $M_d = C \cdot z$, tem-se:

$$M_d = 0,85 f_{cd} \cdot b_w \cdot y \cdot (d - sd / 2)$$

$$M_d = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot s \cdot d^2 (1 - s / 2)$$

Desenvolvendo, acha-se o valor de "d":

$$d^2 = M_d / 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot s \cdot (1 - s / 2)$$

$$= 1,4M / 0,85 f_{cd} \cdot b_w \cdot s \left(1 - \frac{s}{2}\right)$$

$$d^2 = \frac{1,4}{0,85 \times f_{cd} \times s \times \left(1 - \frac{s}{2}\right)} \times \frac{M}{b_w}$$

$$d = \sqrt{\frac{1.4}{0,85 \times f_{cd} \times s \times (1 - \frac{s}{2})}} \times \sqrt{\frac{M}{b_w}}$$

chamando de $r = \sqrt{\frac{1.4}{0,85 \times f_{cd} \times s \times (1 - \frac{s}{2})}}$

tem-se: $d = r \times \sqrt{\frac{M}{b_w}}$

Esta fórmula permite calcular a altura útil necessária de uma seção, para combater com segurança (1,4) um determinado momento atuante M, quando for prefixado o valor da largura b_w .

O valor de r, como se pode observar, pode ser tabelado para cada tipo de concreto, assim como, os diversos valores de s. Lembrando que $s = \frac{2,8}{3,5 + \epsilon_s}$, assim r é também função do tipo de aço que se está usando no cálculo, pois s depende dos valores da deformação do aço empregado.

Pode-se assim criar uma tabela para diversos valores de r, conforme as variações que terão o concreto e o tipo de aço. (Tabela 8).

De: $M_d = T \cdot z$

Vem: $M_d = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - y/2) = A_s f_{yd} \cdot d (1 - s/2)$

$A_s = M_d / f_{yd} \cdot d (1 - s/2) = 1,4 / f_{yd} (1 - s/2) \cdot M / d$

chamando: $\alpha = 1,4 / f_{yd} (1 - s/2)$

vem: $A_s = \frac{\alpha \times M}{d}$

Esta expressão permite calcular a armadura necessária para combater o momento atuante M, nela já se achando incluído o fator de

segurança 1,4. Os valores de α , como os valores de r , podem também ser tabelados. Assim, pode-se calcular a altura útil e a seção de barras necessárias, a fim de em conjunto na seção formarem o binário resistente à ação de um momento fletor solicitante.

Na elaboração da tabela, que fornece os valores de r e de α , é preciso estar atento à fixação das unidades de trabalho com que essas tabelas foram elaboradas. As unidades escolhidas interferirão nos valores numéricos desses parâmetros.

Na tabela 8, em anexo, as unidades foram trabalhadas empregando-se tonelada e centímetro. Dessa forma, o momento será usado em tcm, as dimensões em cm, e a área em cm^2 .

Entrando-se com o valor de " r ", obtem-se o valor de " x " respectivo, assim como, o de " s " e de coeficientes que permitem calcular os valores de " u ", " y " e " z ". Esses valores estão sempre correlacionados ao tipo de concreto e de Aço utilizado, ou seja, Aço Comum ou Aço Especial sendo este ainda do tipo A ou do tipo B. Na tabela, os coeficientes para aço tipo B, compreendidos até o valor sublinhado, representam condições de armadura simples, sub-armadas, sendo os valores sublinhados os correspondentes a condições limites de armadura simples, ou seja, seções normalmente armadas.

Os coeficientes abaixo dos sublinhados, correspondem a condição de seção super-armadas, que, como veremos adiante, devem ser evitadas, fazendo-se opção pelo cálculo da seção com armadura dupla.

Como caso particular, pode-se achar a altura útil necessária e respectiva armadura, para o caso em que se queira uma seção normalmente armada. (simultaneidade entre o esmagamento do concreto na zona de compressão e o escoamento do aço na zona de tração). Neste caso, trabalha-se nas condições limites. (x_{lim} , y_{lim} , s_{lim})

$$d_o = \sqrt{\frac{1.4}{0.85 \times f_{cd} \times s_{lim} \times (1 - \frac{s_{lim}}{2})}} \times \sqrt{\frac{M}{b_w}}$$

$$d_o = r_{lim} \times \sqrt{\frac{M}{b_w}} \quad d_o - \text{altura útil necessária para a seção}$$

Normalmente Armada

$$e, \quad A_s = 1.4 / f_{yd} (1 - s_{lim} / 2) \times M / d_o$$

$$A_s = \frac{\alpha_{lim} \times M}{d_o}$$

Dimensiona-se assim a altura e a armadura para uma seção normalmente armada.

Pode-se também calcular o valor do momento fletor que uma determinada seção $b_w \times h$, é capaz de absorver como seção normalmente armada:

$$d = h - 3$$

$$\text{de} \quad d = r \times \sqrt{\frac{M}{b_w}} \quad \text{trabalhando com } r_{lim} (N. A.).$$

$$\text{tem-se:} \quad M_o = \frac{b_w \times d^2}{r_{lim}^2}$$

Esse é o valor máximo do momento fletor, que fará a seção $b_w \times h$ trabalhar como seção normalmente armada. Qualquer valor superior a esse levará à condição de seção super armada, e deve ser evitado. Nesse caso, recorre-se ao cálculo com armadura dupla.

Para todo o valor de $M < M_o$, a seção trabalha como seção sub-armada, com armadura simples. Para valores de $M = M_o$, a seção trabalha como normalmente armada, também com armadura simples, devendo-se sempre se estar atento ao valor da seção mínima de

armadura exigida pela NBR-6118 (0,15% de $b_w \cdot h$ para os aços especiais).

Relembrando:

• seção normalmente armada:

$$\begin{array}{llll} x = x_{lim} & y = y_{lim} & s = s_{lim} & \varphi = \varphi_{lim} \\ r = r_{lim} & \alpha = \alpha_{lim} & & \end{array}$$

• seção sub-armada:

$$\begin{array}{llll} x < x_{lim} & y < y_{lim} & s < s_{lim} & \varphi > \varphi_{lim} \\ r > r_{lim} & \alpha < \alpha_{lim} & & \end{array}$$

• seção super-armada:

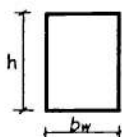
$$\begin{array}{llll} x > x_{lim} & y > y_{lim} & s > s_{lim} & \varphi < \varphi_{lim} \\ r < r_{lim} & \alpha > \alpha_{lim} & & \end{array}$$

onde, $\varphi = 1 - \frac{s}{2}$ é um parâmetro que pode também ser tabelado,

facilitando o cálculo do braço de alavanca interno da seção:

$$z = d - y/2 = d - s \cdot d/2 = d (1 - s/2) = \varphi \times d$$

Fixando o valor de resistência do concreto e o tipo de aço pode-se, com o uso da tabela 8 em anexo, calcular qual o valor máximo do momento fletor e respectiva armação, que uma seção retangular absorve, no limite de armadura simples (seção normalmente armada). Este será chamado de momento admissível da seção, onde os valores de b_w e h são prefixados. Por exemplo:



$$M_o = \frac{b_w \times d^2}{r_{lim}^2} \quad \text{e} \quad A_s = \frac{\alpha_{lim} \times M_o}{d}$$

d – altura útil da seção, M em tcm , b_w em cm , A_s em cm^2

Para $M > M_0$ tem-se o caso de seção super armada, que deve ser dimensionada como seção duplamente armada, isto é, com armadura dupla. Quando $M \leq M_0$, a seção é dimensionada com armadura simples. É o caso de seção sub-armada, ou normalmente armada.

SEÇÕES RETANGULARES COM ARMADURA DUPLA

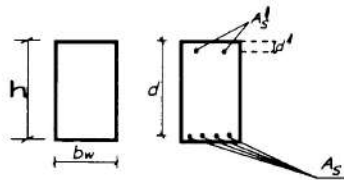
É o caso citado acima de $M > M_0$:

$$\Delta M = M - M_0 \quad \text{ou} \quad \Delta M_d = M_d - M_{od}$$

$$\text{onde } M_d = M \times \gamma_f \quad (\gamma_f = 1,4)$$

$$\text{e } M_{od} = M_0 \times \gamma_f$$

A seção tem o aspecto da figura abaixo:

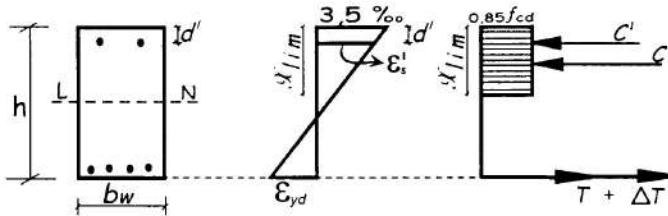


Para equilibrar o momento de cálculo no estado limite último deve-se criar esforços internos que equilibrem a diferença:

$$\Delta M_d = M_d - M_{od} = 1,4 \times (M - M_0)$$

Partindo da seção normalmente armada, cria-se um novo binário interno mediante a colocação de uma armadura de compressão e um acréscimo na armadura de tração ΔA_s . Este binário é que irá equilibrar o momento não absorvido pela seção, que é a diferença entre o momento solicitante M , e o momento admissível da seção M_0 .

A armadura de compressão deve ter seu centro de gravidade a uma distância d' mais próxima possível do bordo comprimido.



A deformação do aço à tração está com o seu valor limite ε_{yd} , e a deformação relativa do aço à compressão tem um valor ε_c' que pode ser superior, igual ou inferior à sua deformação relativa de cálculo.

As equações de equilíbrio para M_d são:

$$1 - \Delta M_d = C' \times (d - d') \quad \text{onde: } C' = A_s' \times f_{ycd} \quad (1)$$

$$2 - \Delta M_d = \Delta A_s \times f_{yd} \times (d - d') \quad (2)$$

Da equação 1 tira-se: $\Delta M_d = A_s' \times f_{ycd} \times (d - d')$

$$A_s' = \frac{\Delta M_d}{f_{ycd} \times (d - d')}$$

da equação 2 :

$$\Delta A_s = \frac{\Delta M_d}{f_{yd} \times (d - d')}$$

Para combater o momento admissível M_o , a seção de armadura correspondente é:

$$A_{so} = \frac{\alpha_{lim} \times M_o}{d}$$

Logo, a armadura total de tração é:

$$A_s = \frac{\alpha_{lim} \times M_o}{d} + \frac{\Delta M_d}{f_{yd} \times (d - d')}$$

E, a armadura de compressão é:

$$A_s' = \frac{\Delta M_d}{f_{ycd} \times (d - d')}$$

Tem-se assim, o cálculo das armações para uma seção com armadura dupla.

Para o cálculo da armadura de compressão deve-se determinar o valor da tensão f_{ycd} no aço comprimido, quando se cumpre as condições da seção normalmente armada. ($x = x_{lim}$, $y' = y_{lim}$, $s = s_{lim}$).

Do diagrama das deformações tira-se:

$$\frac{\varepsilon_s'}{3,5} = \frac{x_{lim} - d'}{x_{lim}} \quad \text{Sabe-se que:} \quad x_{lim} = \frac{y_{lim}}{0,8}$$

$$\varepsilon_s' = 3,5 \times \left(1 - \frac{d'}{\frac{y_{lim}}{0,8}}\right) = 3,5 \left(1 - \frac{0,8 \times d'}{y_{lim}}\right)$$

$$\text{mas, } y_{lim} = s_{lim} \times d$$

$$\varepsilon_s' = 3,5 \times \left(1 - \frac{0,8 \times d'}{s_{lim} \times d}\right)$$

Nos casos comuns de vigas de edifício, o recobrimento da armadura de tração pode ser considerado, sem erro sensível, como sendo de valor praticamente igual ao valor de d' , podendo-se admitir:

$$d = h - d'$$

$$\varepsilon_s' = 3,5 \times \left(1 - \frac{0,8 \times d'}{s_{lim} \times (h - d')}\right) = 3,5 \times \left[1 - \frac{0,8 \times \frac{d'}{h}}{s_{lim} \times \left(1 - \frac{d'}{h}\right)}\right]$$

$$\text{fazendo:} \quad m = d' / h$$

$$\text{vem:} \quad \varepsilon_s' = 3,5 \times \left[1 - \frac{0,8 \times m}{s_{lim} \times (1 - m)}\right]$$

CONCRETO ARMADO

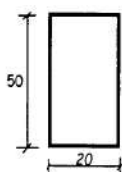
Conhecido o valor de ε'_s , calcula-se facilmente o valor de f_{ycd} pela expressão:

$$f_{ycd} = \varepsilon'_s \times E_s$$

Torna-se fácil assim, construir uma tabela para os diversos valores de "m", e que fornecerá os respectivos valores de f_{ycd} . Para maior comodidade a tabela foi elaborada usando-se "m" em percentual:

$$m = \frac{d'}{h} \times 100$$

Por exemplo:



$$h=50 \quad d=50-3=47 \quad d'=3$$

$$m = \frac{3}{50} \times 100 = 6$$

Na prática, para as vigas comuns de edifício sendo os valores de m pequenos, a fim de aproveitar um maior braço de alavanca, os valores de ε'_s aproximam-se de 3,5 mm/m, conforme se observa no diagrama de deformações. Os valores de cálculo das deformações para esses aços, ε'_s ou ε_{ycd} são também pequenos:

$$\varepsilon_{ycd} = \frac{f_{ycd}}{E_s}$$

para $\varepsilon'_s < \varepsilon_{ycd}$, $\sigma'_s = \varepsilon'_s \times E_s$

CLASSE	f_{yk} (Kg/cm ²)	f_{yd} (Kg/cm ²)	ε_{yd} (mm/m)
CA-25	2500	2174	1.035
CA-50A	5000	4348	2.070
CA-60A	6000	5217	2.484
CA-50B	5000	4348	4.070
CA-60B	6000	5217	4.484

A tabela acima mostra que para o maior valor, aço CA-60A,

$\varepsilon_{ycd} = \varepsilon_{yd} = 2,484 \text{ mm/m} \cong 2,5 \text{ mm/m}$, e, para os valores de m , aproximadamente até 15%, cumpre-se esta condição: $\varepsilon_{ycd} = \varepsilon_{yd}$.

Para exemplificar considere-se uma viga de altura igual a 50 cm, exposta em meio fortemente agressivo, onde portanto se fixa um cobrimento de 4cm na armadura de compressão, resultando por consequência um valor de $d' \cong 7$ cm, supondo-se duas camadas de barras de compressão, logo:

$$m = 7 / 50 \times 100 = 14\% \text{ e.}$$

$$\varepsilon_s' = 2,526 \cong 2,5 = \varepsilon_{ycd} = \varepsilon_{yd}$$

Assim, com os valores de m , determina-se ε_s' e calcula-se o valor de f_{ycd} :

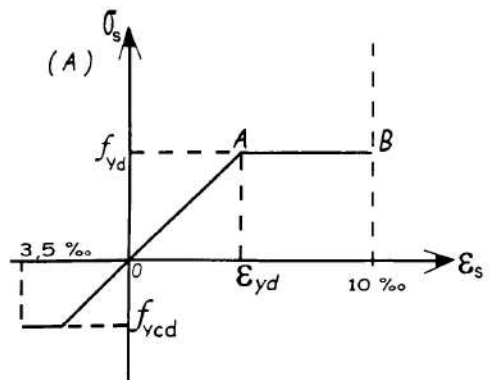
$$f_{ycd} = \varepsilon_s' \times E_s$$

Para os aços de categoria B, uma vez determinado o valor de ε_s' como aço tipo A e usando-se o diagrama simplificado da NBR-6118, faz-se a necessária correção no valor de A'_s , multiplicando-se o valor de f_{yc} encontrado por um fator de correção K_s :

$$\text{Para } \varepsilon_s' \leq 0,7 \times \frac{f_{ycd}}{E_s} \quad K_s = 1$$

$$\text{Para } \varepsilon_s' \geq 0,002 + \frac{f_{ycd}}{E_s} \quad K_s = 1$$

$$\text{Para } \varepsilon_s' = \frac{f_{ycd}}{E_s} \quad K_s = 0,85$$



CONCRETO ARMADO

Interpolando-se linearmente nos casos intermediários conforme expressões que seguem:

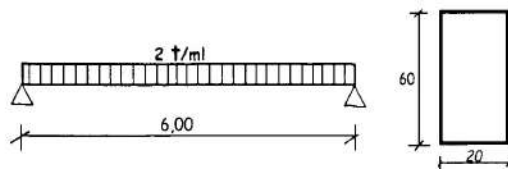
$$\text{Para} \quad \frac{f_{yd}}{E_s} \leq \varepsilon'_s \leq 2 + \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$$\text{tem-se:} \quad 0,85 \leq K_s \leq 1$$

Para maior comodidade a tabela 9 em anexo fornece diretamente as tensões nas armaduras comprimidas para os aços usuais do mercado da construção. É suficiente entrar com o valor de m , em percentual.

13.6 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

1- Apresentar detalhe esquemático da armação necessária para a seção principal da viga abaixo, trabalhando-se com concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$, e aço CA-50 B.



Resposta:

Momento fletor na seção principal (seção mais solicitada):

$$M = \frac{2 \times 6}{8} = 9,00 \text{ tm} = 900 \text{ tcm}$$

Como a seção já está prefixada: $h=60$, e $d=57$

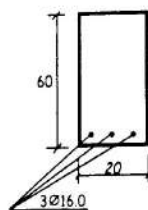
$$r = \frac{57}{\sqrt{\frac{900}{20}}} = 8,49$$

da tabela 8 tira-se: $\alpha \cong 0.366$

$$A_s = \frac{0,366 \times 900}{57} = 5.8 \cong 3\phi 16$$

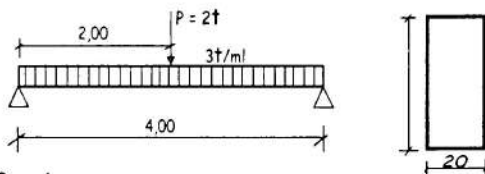
Ver seção das barras na tabela 11 em anexo.

detalhe esquemático da seção:



2- Apresentar detalhe esquemático de armação para a seção principal da viga abaixo indicada, sabendo-se que esta seção é normalmente armada. Trabalha-se com aço CA-50 A e concreto de $f_{ck} = 170 \text{ Kg / cm}^2$.

Resposta :



$$M = \frac{3 \times 4^2}{8} + \frac{2 \times 4}{4} = 8.0 \text{ tm} = 800 \text{ tcm}$$

Como se trata de seção normalmente armada trabalha-se com r_{lim} e α_{lim} correspondentes aos materiais usados, tirados da tabela 8:

$$r_{lim} = 6,00 \quad \text{e} \quad \alpha_{lim} = 0.430$$

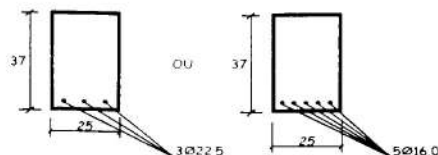
$$d = 6,00 \times \sqrt{\frac{800}{25}} \cong 34 \quad h = 34 + 3 = 37$$

$$A_s = \frac{0,43 \times 800}{34} = 10,1 \cong 3\phi 22,5$$

O uso de $3\phi 22,5$, é uma opção válida, mas cobre em muito a área necessária de cálculo. Na prática $A_s = 10,1 \text{ cm}^2$ pode

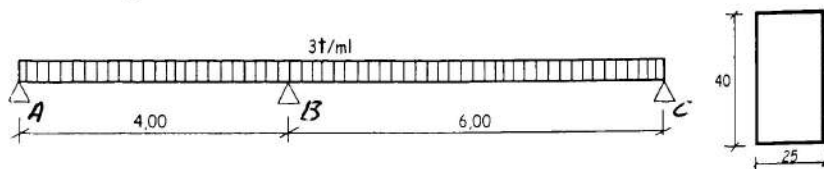
CONCRETO ARMADO

corresponder a $5\phi 16 = 10,0 \text{ cm}^2$, com erro para menos, perfeitamente desprezível. Abaixo, o detalhe esquemático da seção:



Note-se também, que tanto $3\phi 22,5$ como $5\phi 16$, cabem satisfatoriamente em uma só camada horizontal, portanto, fica válido o valor de $d = h - 3$.

3-Apresentar detalhe esquemático de armação para a seção de apoio B da viga abaixo indicada, trabalhando-se com aço CA-50 A e concreto de $f_{ck}=150 \text{ kg/cm}^2$.



Resposta :

Calculado o momento fletor no apoio B, encontra-se:

$$X_B = - 10,50 \text{ tm} = - 1050 \text{ tem}$$

Como a seção já foi fixada, verifica-se qual o momento admissível desta seção (caso de normalmente armada):

$$\begin{aligned} h &= 40 & d &= h-3 \\ d &= 37 & b_w &= 25 \end{aligned}$$

na tabela 8 tira-se: $r_{lim} = 6,39$ $M_u = \frac{25 \times 37^2}{6,39^2} = 838 \text{ tem}$

como: $M = X_B = 1050 \text{ tem} > 838 \text{ tem}$

tem-se: $\Delta M = 1050 - 838 = 212 \text{ tem}$, que é o valor do momento não absorvido pela seção como N. A. Como já foi visto, ele vai ser combatido criando-se um novo binário interno na seção, através de uma armadura de compressão e um acréscimo na armadura de tração.

armadura de compressão:

$$d' = 3 \quad d - d' = 37 - 3 = 34$$

$$m = \frac{3}{40} \times 100 = 7,5 \quad \text{da tabela tira-se } f_{ycd} = 4348 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s' = \frac{\Delta M_d}{f_{ycd} \times (d - d')} = \frac{1,4 \times 212000}{4348 \times (37 - 3)} \cong 2,0 \text{ cm}^2 \cong 3\phi 10$$

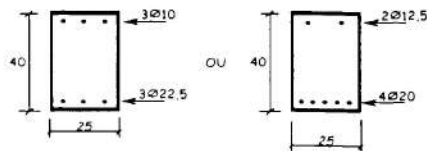
armadura de tração:

$$A_s = \frac{\alpha_{lim} \times M_o}{d} + \frac{\Delta M_d}{f_{ycd} \times (d - d')} = \frac{0,430 \times 838}{37} + \frac{1,4 \times 212000}{4348 \times 34}$$

$$= 9,74 + 2,0 = 11,74 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 11,74 \cong 3\phi 22,5$$

O detalhe esquemático é o seguinte:



Evidentemente, a opção será tanto mais econômica, quanto mais a área das barras escolhidas se aproximem da área necessária exigida pelo cálculo. Deve-se observar que se a largura da viga não comportasse a quantidade de barras em uma só camada o cálculo teria que ser refeito, uma vez que a altura útil já não seria mais a mesma, pois, com duas camadas seu valor diminuiria.

Com o uso da tabela 8 foi calculado o valor do momento admissível M_o e, a partir daí verificou-se que se tratava do caso de armadura dupla, pois $M > M_o$. Entretanto, pode-se chegar a mesma conclusão, seguindo o caminho utilizado no primeiro exercício, ou seja, calcular o "r" para as condições estabelecidas:

$$r = \frac{37}{\sqrt{\frac{1050}{25}}} = 5,70$$

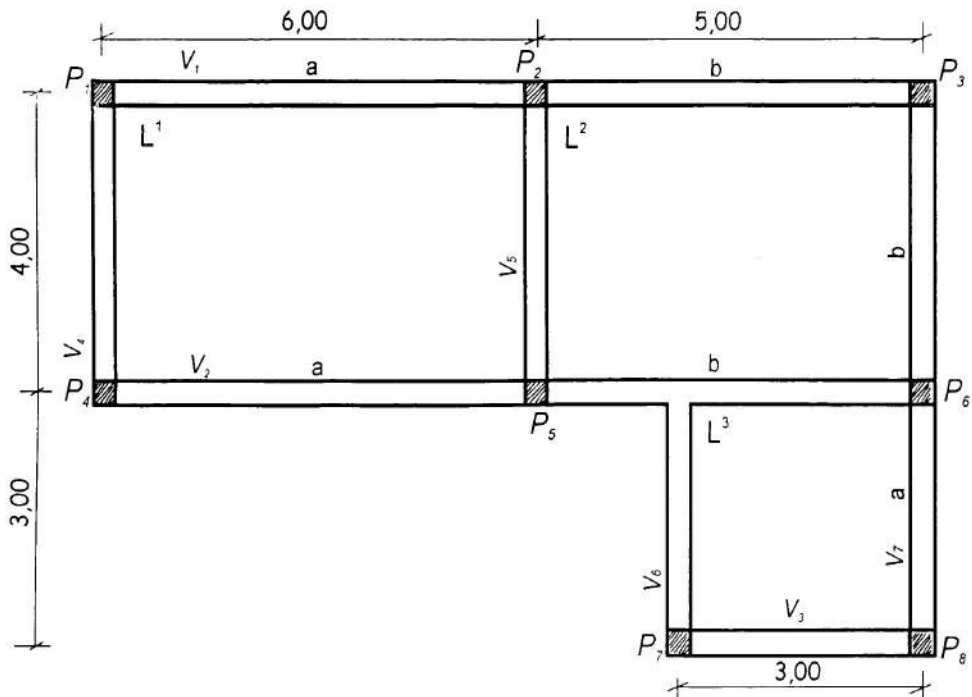
CONCRETO ARMADO

Consultando a tabela 8 verifica-se que este valor encontra-se abaixo daquele que define o $r_{lim} = 6,39$, logo trata-se do caso de armadura dupla, pois para $r=5,70$ a seção seria super-armada. Vale ressaltar que a cada valor de " r " se tem um " α " correspondente, e vice-versa.

O dimensionamento de vigas de seção retangular aplica-se também ao dimensionamento de lajes maciças, pois o cálculo e dimensionamento de lajes é feito para uma largura unitária (100 cm), com altura " h ". Para exemplificar considere-se o caso abaixo:

APLICAÇÃO NUMÉRICA: Cálculo e Detalhamento de Lajes. (método de Marcus)

Apresentar detalhe de armação para as lajes do painel abaixo indicado, trabalhando-se com aço CA-60 B e concreto de $f_{ck}=150 \text{ kg/cm}^2$. A espessura das lajes é de 10 cm. A título de ilustração admite-se que as lajes L^1 e L^2 correspondem a sala e quarto de dormir, respectivamente. A laje L^3 corresponde à dispensa e área de serviço.



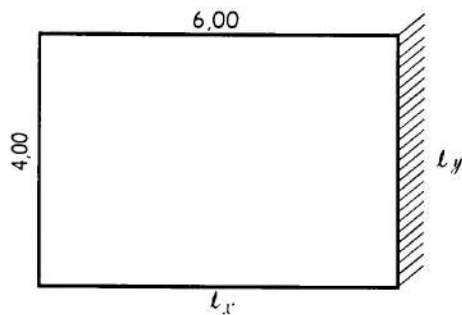
Resposta :

Como se trata de lajes contínuas, calcula-se cada laje respeitando as condições de vínculo de continuidade com a laje vizinha. Havendo continuidade o bordo será considerado de engaste. Os bordos onde as lajes não são contínuas serão definidos como apoios simples. Para os bordos em que a continuidade com a laje vizinha apresenta-se com comprimento parcial, adota-se o seguinte:

- quando o comprimento de engaste é maior, ou no mínimo igual a $2/3$ do vão correspondente, será considerado o bordo como de engaste. Caso contrário será considerado bordo de apoio simples.

Tem-se:

Laje 1



$$\text{peso próprio: } 0,10 \times 2,5 = 0,25 \text{ t/m}^2$$

$$\text{revestimento:} = 0,08 \text{ "}$$

$$\text{sobrecarga(NBR-6120)} = 0,15 \text{ "}$$

$$q = 0,48 \text{ t/m}^2$$

como $L/l > 2$ trata-se de laje armada em cruz.

Usando-se a tabela correspondente tem-se:

$$\lambda = \frac{4}{6} = 0,67$$

$$k_x = 0,335$$

$$q_x = 0,335 \times 0,48 = 0,16$$

$$t/m^2 q_x = 0,335 \times 0,48 = 0,16$$

$$m_x = 65,28$$

$$q_y = 0,48 - 0,16 = 0,32$$

$$t/m^2$$

$$m_y = 35,67$$

$$n_x = 23,88$$

$$q \times l_x^2 = 0,48 \times 36 = 17,28$$

$$M_x = \frac{17,28}{65,28} = 0,26 \text{ tm}$$

$$M_y = \frac{17,28}{35,67} = 0,48 \text{ tm}$$

$$X_x = \frac{17,28}{23,88} = 0,72 \text{ tm}$$

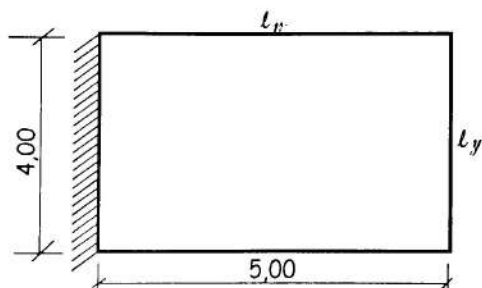
Laje L2

A sobrecarga é a mesma da laje L1 (NBR - 6120), logo, $q = 0,48 \text{ t/m}^2$.

A laje L2 com a laje L3 tem um comprimento parcial de continuidade. Para definir a hipótese de bordo a considerar, isto é, se apoio simples ou engaste, calcula-se:

$$\frac{2}{3} \times 5,0 = 3,33 \text{ como } l_{eng} = 3,0 \text{ tem-se: } l_{eng} < \frac{2}{3} \times l = 3,33$$

logo, o bordo será considerado de apoio simples.



$$\lambda = \frac{4}{5} = 0,80$$

$$q \times l_x^2 = 0,48 \times 25 = 12$$

$$k_x = 0,506$$

$$q_v = 0,506 \times 0,48 = 0,24 t/m^2$$

$$m_x = 44,65$$

$$q_v = 0,48 - 0,24 = 0,24 t/m^2$$

$$m_y = 34,35$$

$$n_x = 15,81$$

$$M_x = \frac{12}{44,65} = 0,27 tm$$

$$M_y = \frac{12}{34,35} = 0,35 tm$$

$$X_x = \frac{12}{15,81} = 0,76 tm$$

Deve-se observar que se tem dois valores de momento negativo para o apoio de continuidade, entre L1 e L2.

Para L1: $X_x = 0,72 tm$

Para L2: $X_x = 0,76 tm$

Como o momento deve ser único (condição de equilíbrio no nó), a prática tem demonstrado que nesses casos pode-se adotar o seguinte critério:

- o momento negativo de apoio entre duas lajes contíguas será tomado igual a média entre os dois valores, porém nunca inferior a 80% do maior.

Então:

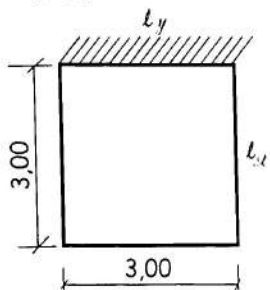
$$X_{l_1-l_2} = \frac{0,72 + 0,76}{2} = 0,74tm$$

$$X_{l_1-l_2} = 0,8 \times 0,76 = 0,61tm$$

logo,

$$X_{l_1-l_2} = 0,74tm$$

Laje L3 :



De acordo com a NBR-6120 a sobrecarga a adotar é de $0,20 \text{ tm}^2$.

peso próprio $0,25 \text{ t/m}^2$

revestimento $0,08 \text{ t/m}^2$

sobrecarga $0,20 \text{ t/m}^2$

$$q = 0,53 \text{ t/m}^2$$

Da tabela, com $\lambda = \frac{3}{3} = 1$ tira-se:

$$k_x = 0,714 \qquad q_x = 0,38 \text{ t/m}^2 \qquad q_y = 0,15 \text{ t/m}^2$$

$$q \times l_x^2 = 0,53 \times 3^2 = 4,77$$

$$m_x = 29,93$$

$$M_x = \frac{4,77}{29,93} = 0,16tm$$

$$m_y = 36.74 \quad M_y = \frac{4.77}{36.74} = 0.13tm$$

$$n_x = 11.20 \quad X_y = \frac{4.77}{11.20} = 0.43tm$$

A armação negativa entre L3 e L2 será:

$$X_{L3-L2} = \frac{0.43 + 0}{2} \cong 0.22tm \quad e \quad 0.80 \times 0.43 = 0.34tm$$

$$X_{L3-L2} = 0.34tm$$

Evidentemente, neste caso, se ficaria em posição de bastante segurança, adotando-se o próprio valor único de $X_{L3} = 0.43tm$.

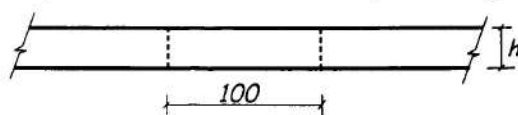
Como os valores das áreas do aço a calcular devem se distribuir em largura de 100cm (1 metro), usa-se uma quantidade grande de barras de pequenos diâmetros, o que atende às prescrições normativas:

“o diâmetro das barras não deve ultrapassar 1/10 da espessura da laje. Na região dos maiores momentos nos vãos das lajes, o espaçamento das barras da armadura principal não deve ser maior que 20cm. Nas lajes armadas numa única direção, de altura “h”, esse espaçamento não deve também ser maior que 2 h. A armadura de distribuição por metro de largura da laje armada em uma só direção deve ter seção transversal, de área igual ou superior a 1/5 da armadura principal, com um mínimo de 0.9 cm^2 , e ser composta de, pelo menos, três barras”.

A seguir será visto o cálculo das armaduras das lajes L1, L2 e L3, cujos momentos já foram determinados. Será usado aço CA-60B e $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$.

CONCRETO ARMADO

As lajes serão calculadas segundo faixas de 1 metro de largura. Assim se recai no processo de cálculo de seção retangular:



$d = h - 1$ (altura útil da laje, salvo casos especiais)

$$d = 10 - 1 = 9$$

Laje L1: (usando a tabela de dimensionamento), tabela 8:

$$M_x = 0,26 \quad r = \frac{9}{\sqrt{\frac{26}{100}}} = 17,65 \quad A_s = \frac{0,299 \times 26}{9} = 0,86 \text{ cm}^2$$

$$M_y = 0,48 \quad r = \frac{9}{\sqrt{\frac{48}{100}}} = 12,99 \quad A_s = \frac{0,299 \times 48}{9} = 1,59 \text{ cm}^2$$

$$X_{L1-L2} = 0,74 \quad r = 10,46 \quad A_s = \frac{0,299 \times 74}{9} = 2,46 \text{ cm}^2$$

Para o momento de 0,74 tm, “r” adotado será o valor máximo da tabela que corresponde a $s_{\min} = 0,207$, $r_{\max} = 9,10$, e $\alpha_{\min} = 0,299$, que são valores limites de uso, uma vez que esses valores correspondem na tabela ao valor mínimo de “s” permitido pela Norma Brasileira, o qual é fixado em função do valor do máximo alongamento do aço, que é de 10mm/m.

Como para 0,74 tm trabalhou-se com as condições limites de uso de “r” e de α , logo, para qualquer momento inferior a esse valor e usando-se a mesma altura de laje e os mesmos materiais, sempre se terá: $\alpha = \alpha_{\min}$.

Laje L2

$$M_x = 0,27 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 27}{9} = 0,90 \text{ cm}^2$$

$$M_y = 0,35 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 35}{9} = 1,16 \text{ cm}^2$$

$$X_{L2-L1} = 0,74 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 74}{9} = 2,46 \text{ cm}^2$$

Laje L3

$$M_x = 0,16 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 16}{9} = 0,53 \text{ cm}^2$$

$$M_y = 0,13 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 13}{9} = 0,43 \text{ cm}^2$$

$$X_{L3-L2} = 0,43 \text{ tm} \quad A_s = \frac{0,299 \times 43}{9} = 1,43 \text{ cm}^2$$

Escolha das barras:

Usaremos barras a partir da bitola de 4,2mm, lembrando que para armadura principal o espaçamento máximo é de 20 cm (NBR).

L1:

$$M_x = 0,26 \text{ tm} \quad A_s = 0,86 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.16}$$

$$M_y = 0,48 \text{ tm} \quad A_s = 1,59 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.9 ou 4.6 c.10}$$

$$X_{L1-L2} = 0,74 \text{ tm} \quad A_s = 2,46 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 5.0 c.8}$$

L2:

$$M_x = 0,27 \text{ tm} \quad A_s = 0,90 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.15}$$

$$M_y = 0,27 \text{ tm} = M_x \quad A_s = 0,90 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.15}$$

L3:

$M_x = 0,16 \text{ tm}$ $A_s = 0,53 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.26}$ para este momento, como se trata de armadura principal será usado 4.2 c.20cms.

$$M_y = 0,13 \text{ tm} \quad A_s = 0,43 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 4.2 c.32}$$

$$X_{1,3-1,2} = 0,43 \text{ tm} \quad A_s = 1,43 \text{ cm}^2 = \phi \text{ 5.0 c.14}$$

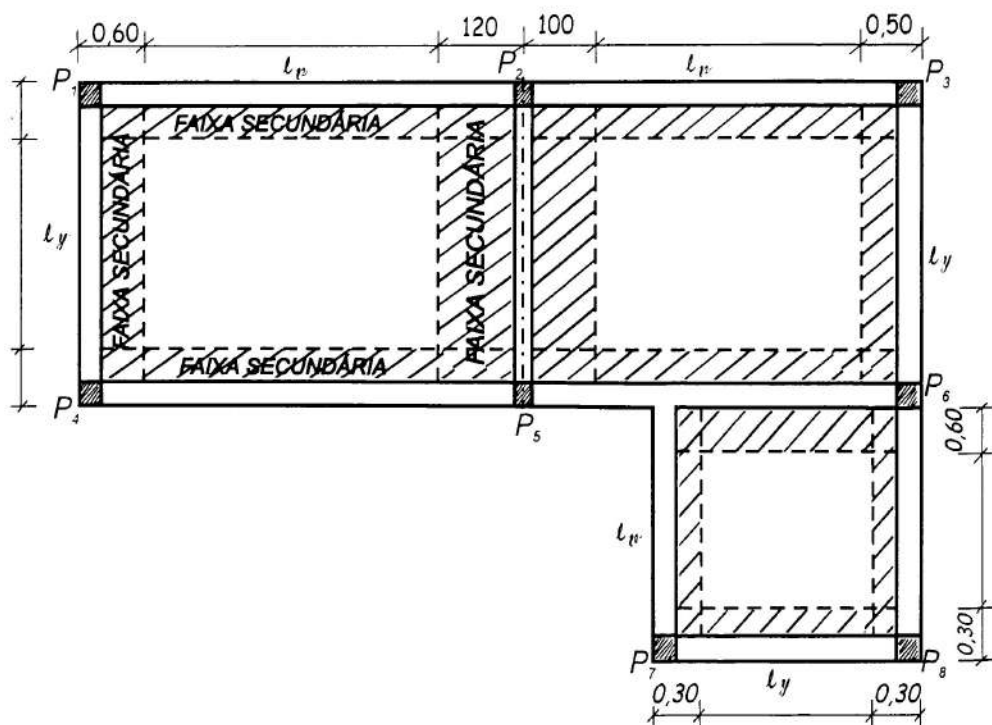
É prático se usar para armadura negativa espaçamentos maiores do que aqueles usados na armação positiva, tendo em vista que a armação negativa ficando na face superior, se o espaçamento entre as barras for muito estreito, pode dificultar a concretagem na região dos apoios. Daí, se ter usado no exemplo acima uma bitola maior (5,0) visando a se obter um espaçamento maior, sem prejuízo da área de barras exigidas pelo cálculo.

13.7 DETALHAMENTO DE ARMADURA DAS LAJES

Observe-se, que no diagrama de momento fletor para uma peça simplesmente apoiada solicitada por carga uniformemente distribuída, a uma distância de 0,10 do vão a contar dos apoios, o valor do momento fletor é praticamente metade do seu valor máximo no meio do vão. Se o valor é metade, pode-se concluir sem grande erro, que a armadura necessária, para um mesmo valor de "h", será também metade daquela que se necessita para o valor máximo no meio do vão. Isto porque a variação de α é muito pequena, e às vezes é o próprio $\alpha_{\text{mín}}$ já tabelado.

Assim, no detalhamento de armaduras das lajes é comum dividi-la em faixas principais e secundárias, onde nestas atuarão metade da área de barras existentes na faixa principal, o que, evidentemente, resulta em economia.

Quando se trata de um vão extremo de laje contínua, essa redução verifica-se em uma faixa secundária a uma distância cerca de 0,20 do vão no lado do engaste, e 0,10 do vão no lado do apoio simples. Para um vão central pode-se considerar a mesma ocorrência a 0,20 do vão para ambos os lados, o que facilita o detalhamento. Em verdade, o valor seria um pouco maior do que 0,20. Abaixo uma apresentação das faixas relativas ao exercício anterior:

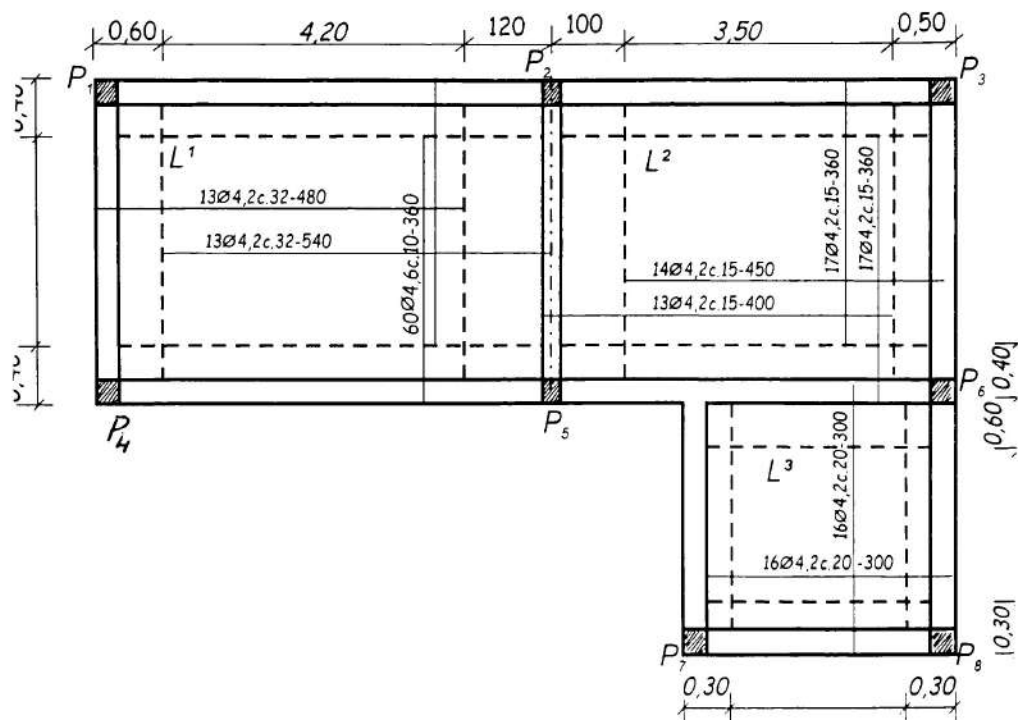


As faixas hachuradas são as faixas secundárias, onde a armação pode ser reduzida à metade da principal.

Como é possível reduzir para metade a área de barras nas faixas secundárias, (metade de A_s principal) adota-se o defasamento das barras, desde que se obedeça às condições de armadura mínima prescrita pela Norma NBR-6118, e aqui já ressaltadas. É aconselhável, que se execute duas plantas de armação, uma para armação positiva e outra para armação negativa.

Exemplo: Armação Positiva

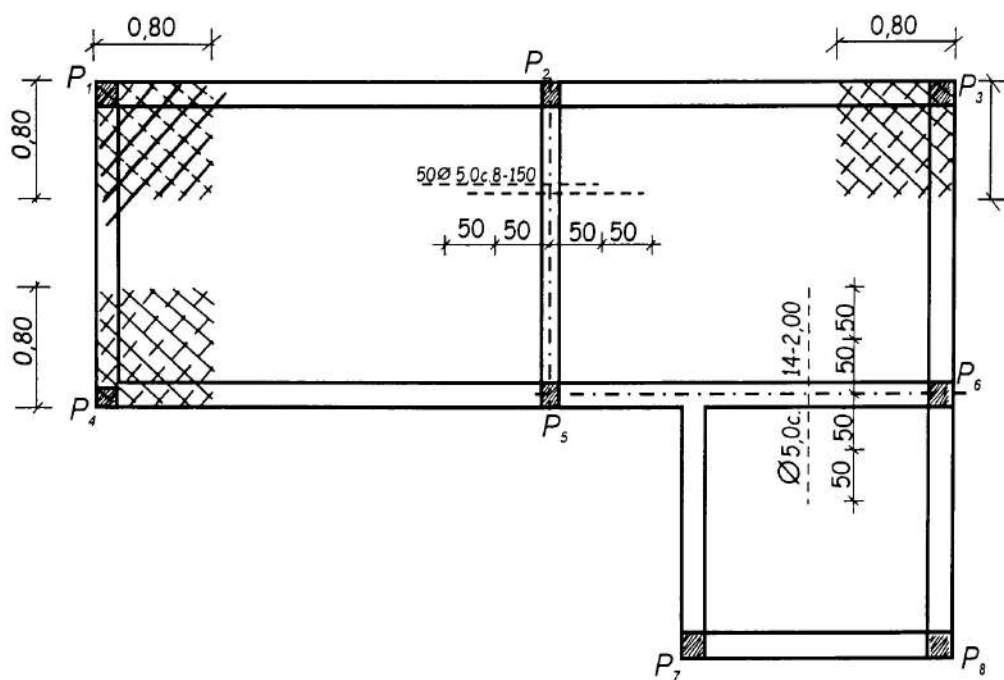
CONCRETO ARMADO



De um modo geral, as barras devem se apoiar, pelo menos, em metade da largura dos apoios. Quando os apoios são muito largos as faixas secundárias devem ser fixadas a partir do vão teórico preconizado pela NBR-6118.

Nos cantos referentes a P_1 , P_3 e P_4 , devem ser colocadas barras para combater os momentos volventes, conforme recomenda a Norma Brasileira. Para a laje L_3 , as barras não foram defasadas pois se teria menos do que 3 barras por metro, na região secundária. Assim, no detalhamento, as barras vão de apoio a apoio, e como os vãos da laje L_3 não ultrapassam 3,00 metros pode-se, nesse caso, prescindir de armadura de canto para esta laje.

Armação Negativa:



Canto de P1 e P4:

Armadura de canto - positiva e negativa: 4,6 c. 20

Canto de P3

Armadura de canto - positiva e negativa: 4,2 c . 30, porém é aconselhável não adotar espaçamento superior a 20 cms. Será usado 4,2 c. 20.

Para defasar a armação negativa adotam-se os mesmos critérios usados para a armação positiva. O espaçamento máximo é de 20 cm na região principal, e temos que garantir um mínimo de 3 barras por metro na região secundária. Na prática e a favor da segurança, poderá ser fixado um espaçamento máximo de 30 cm na região secundária, tanto para a armação negativa, como para a armação positiva, o que significa adotar espaçamentos máximos de

15cm na região principal. Pela NBR-6118 nas regiões secundárias tem que se ter pelo menos 3 barras por metro.

As faixas nos apoios são fixadas da seguinte maneira:

Quando se tem duas ou mais lajes contíguas, deve-se estender as armaduras sobre os apoios, até uma distância de $\frac{1}{4}$ do maior dos menores vãos das lajes contíguas ao apoio comum às duas lajes. Assim, para L1 com L2 tem-se, para cada lado:

$$L_{As} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,00\text{m}$$

Se o espaçamento permitir defasa-se, colocando esse comprimento para um lado e metade dele para o outro, e vice versa, como mostra o detalhe de armação negativa. O comprimento total da barra passa a ser $\frac{3}{8}$ de L_{As} . Não havendo defasagem, esse comprimento passa a ser $2 \cdot L_{As}$.

Para L3 com L2, tem-se: L2 $l=4\text{m}$ e L3 $l=3\text{m}$

$\ell_{As} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,00 \text{ m}$. Logo, a barra fica com o mesmo comprimento de L1 com L2.

Essa maneira de detalhar defasando as barras, aplica-se às lajes calculadas no regime elástico, base do processo de Marcus. Na prática são detalhes que satisfazem plenamente a margem de segurança necessária.

13.8 LAJES NO REGIME DE RUPTURA

O processo de cálculo de lajes no regime de ruptura consta da tese de doutoramento do professor K. W. JOHANSEN, intitulada "BRUDLINIETEORIER", publicada em 1943. O seu primeiro artigo publicado sobre o assunto data de 1932, para a Associação Internacional de Pontes e Estruturas.

Este processo leva em consideração as linhas de ruptura, dividindo as lajes em painéis limitados por essas linhas. Segundo JOHANSEN, o comportamento das lajes de concreto armado quando solicitadas por ensaios de carregamentos crescentes até a ruptura, passa por três fases distintas:

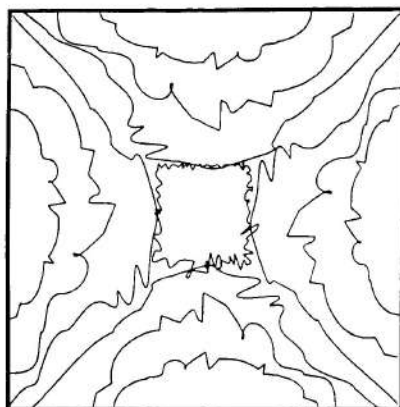
- 1ª fase: sob a ação de valor pequeno da carga, a laje se comporta como uma placa elástica;
- 2ª fase: crescendo o valor da carga de solicitação atinge-se um estágio em que o concreto entra em fissura na zona tracionada, uma vez que atinge o seu limite de resistência à tração.

As fissuras se iniciam segundo as diagonais, crescendo no sentido do centro para os cantos, e começam a aparecer na parte central da laje. A partir de certo instante essas fissuras aumentam, não só paralelamente às diagonais, como também no centro da laje;

- 3ª fase: dando continuidade ao processo de carregamento crescente da carga, a laje atinge a sua terceira fase: a parte central da laje entra em estado de plasticidade, onde as linhas de fissuras propagam-se do centro em direção aos cantos. As deformações vão crescendo até que o concreto se esmaga na parte superior da laje, onde o esforço de compressão atinge valores muito elevados. As linhas de fissuras são chamadas de linhas de ruptura. Dessa forma a laje fica dividida em painéis, separados uns dos outros por essas linhas.

Para um estudo mais profundo sobre o assunto, consulte-se o livro de TELEMACO V. LANGENDONC, intitulado “Charneiras Plásticas” (1965), e “Linhas de Ruptura, Teoria e Prática”, de K. W. JOHANSEN (1962).

A seguir, uma ilustração das linhas de ruptura em uma laje de ensaio:



Segundo ainda JOHANSEN, para o cálculo das lajes no regime de ruptura devem ser admitidas três hipóteses, que foram bem explicitadas pelo professor ADERSON MOREIRA DA ROCHA, em seu livro “Cálculo de Lajes Contínuas no Regime de Ruptura”(1959):

1-as linhas de ruptura são retilíneas;

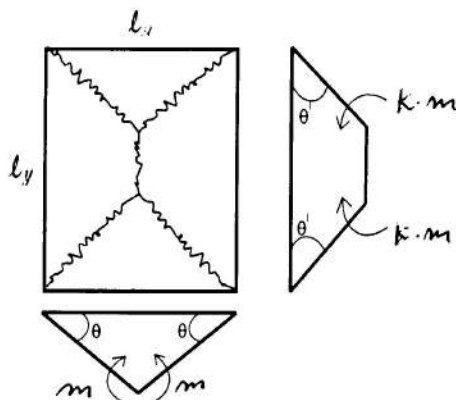
2-os painéis da laje separados por linhas de ruptura sofrem uma rotação em torno dessas linhas, conservando-se planas por ocasião da ruptura;

3-o momento fletor por unidade de comprimento ao longo das linhas de ruptura é constante e igual ao máximo que a laje pode suportar nessa direção.

Não se tratará no presente capítulo dos conceitos da teoria matemática a respeito das linhas de ruptura, nem mesmo das equações que estabelecem as condições de equilíbrio entre cada um dos painéis separados por linhas de ruptura; serão apenas fixados roteiros para o cálculo no regime de ruptura, de lajes usuais em edificações.

13.8.1 LAJES RETANGULARES COM ARMADURA CONSTANTE

Uma laje retangular apoiada nos quatro lados e sob ação de carga uniformemente distribuída apresenta basicamente a seguinte configuração de ruptura:



As linhas de ruptura dividem a laje em quatro painéis que rotacionam em torno dessas linhas. A laje deve resistir à momentos de ruptura nas duas direções, x e y .

Para o cálculo de lajes no regime de ruptura torna-se necessário definir os dois tipos de lajes retangulares, conforme seja a distribuição da armação no combate aos momentos fletores positivos. O professor SAMUEL CHAMECKI em seu trabalho "Cálculo no Regime de Ruptura das Lajes de Concreto Armado em Cruz"(1948) apresenta a seguinte definição:

- Lajes Isótropas
- Lajes Ortótropas

Lajes Isótropas são as lajes armadas em cruz, dimensionadas de modo a resistir a igual momento fletor de ruptura em ambas as direções. Então, no cálculo das armaduras leva-se em conta as diferentes alturas úteis, decorrente de uma armação estar sobre a outra.

Lajes Ortótropas são as lajes armadas em cruz que possuem distribuição de armação em uma direção, diferente da outra na direção ortogonal. Assim, na direção da armação mais forte, ela resiste a um momento fletor de ruptura maior do que na direção ortogonal.

Chamando, M_1 o momento na direção principal, e M_2 o momento na outra direção, este momento M_2 , terá para valor kM_1 . O coeficiente k é chamado de coeficiente de ortotropia ($0 \leq k \leq 1$), sendo k a relação entre o momento de ruptura na direção secundária e o momento de ruptura na direção principal.

$$M_2 / M_1 = k \quad M_2 = k \cdot M_1$$

Para $k=0$, tem-se o caso de laje armada em uma só direção. Para $k=1$, a laje é isótropa.

Na maioria dos casos de lajes armadas em cruz será usada lajes ortótropas. É importante fixar que no desenvolvimento das fórmulas de cálculo aqui apresentadas, l_y será sempre considerado o lado maior e l_x o lado menor ou direção principal, assim, tem-se:

$$M_y = k.M_x$$

Aplicando-se o teorema dos trabalhos virtuais ao longo das linhas de ruptura e levando em consideração as rotações dos painéis, chega-se à expressões que nos dão os valores dos momentos de ruptura. Dividindo esses momentos pelo coeficiente de segurança, tem-se os momentos de serviço.

No caso da laje isolada com $\lambda = \frac{l_y}{l_x}$:

$$M_x = \frac{q \times l_x^2}{m_x} \quad \text{e} \quad M_y = k.M_x \quad \text{onde} \quad m_x = \frac{24.(\lambda + k)}{3\lambda - 1}$$

Alguns autores recomendam: $k = \frac{1}{\lambda^2}$

Nas fórmulas anteriores, "q" é a carga u. d. de serviço e, M_x e M_y os momentos de serviço, por unidade de largura. Conhecido os momentos, calcula-se a armação e se faz o detalhamento de forma

constante, isto é, ao longo dos vãos e de toda a área da laje. Nessa hipótese de cálculo não se adotará defasamento. Em anexo, a tabela 10, do vol. 1 – Concreto Armado do Prof. Aderson M. da Rocha, para o cálculo de lajes pelo método de ruptura.

13.8.2 LAJES CONTÍNUAS COM ARMADURA CONSTANTE

Nas lajes contínuas se tem evidentemente linhas de ruptura também ao longo dos apoios entre lajes.

Sejam X_x e X_y os momentos de serviço referentes aos apoios; seja M_{ox} , o momento relativo aos bordos simplesmente apoiados. O momento M_x na direção l_x será:

$$M_x = M_{ox} - X_m$$

$$\text{Onde: } X_m = \frac{X_T}{2 \cdot (\ell_y + k \cdot \ell_x)} \quad X_T - \text{momento negativo}$$

total, tomado em valor absoluto:

$$X_T = (X_{x1} + X_{x2}) \cdot \ell_y + (X_{y1} + X_{y2}) \cdot \ell_x$$

Resta determinar ainda X_x e X_y . Pelo método de ruptura os valores de X_x e X_y podem ser arbitrados, desde que não sejam inferiores a 0,7 do momento positivo final, pois como chamou atenção o professor Aderson Moreira, no livro já citado, “esta condição é aconselhada, a fim de que não haja esmagamento da capacidade de rotação plástica no apoio”. Adota-se então para os momentos negativos valores que representam uma fração do momento M_0 . Assim, para um apoio qualquer entre duas lajes L_1 e L_2 adota-se:

$$X_1 \geq \alpha \cdot M_0^{L_1} \quad \text{e} \quad X_2 \geq \alpha \cdot M_0^{L_2}$$

onde M_0 é o momento na direção normal ao apoio considerado.

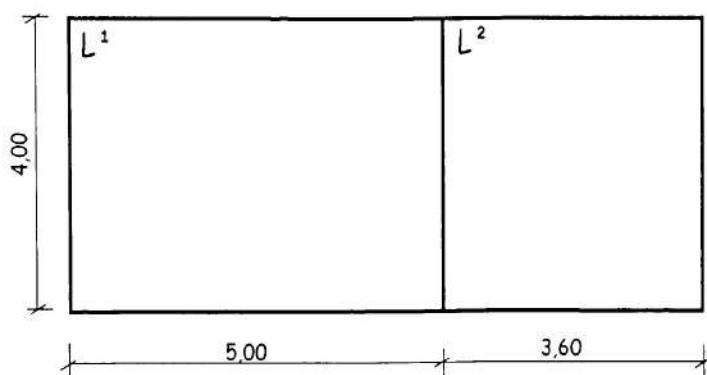
O professor Aderson Moreira indica os seguintes valores para α :

- Lajes com 1 engaste: $\alpha = 0,60$

- Lajes com 2 engastes: $\alpha = 0,52$
- Lajes com 3 engastes: $\alpha = 0,46$
- Lajes com 4 engastes: $\alpha = 0,42$

13.9 APLICAÇÃO NUMÉRICA

Calcular e dimensionar pelo método de ruptura, a laje abaixo indicada. Trabalha-se com aço CA-60B e concreto de $f_{cd} = 150 \text{ kg/cm}^2$. A laje tem espessura de 10cm, está sujeita a uma sobrecarga de 200 kg/cm^2 e revestimento de 100 kg/cm^2 .



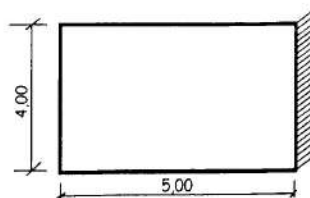
RESPOSTA:

Carga: peso próprio: $0,10 \times 2,5 = 0,25 \text{ t/m}^2$
 revestimento: $= 0,10 \text{ t/m}^2$
 sobrecarga: $= 0,20 \text{ t/m}^2$
 $0,55 \text{ t/m}^2$

Laje L₁ :

$$\lambda = \frac{5}{4} = 1,25 \quad k = \frac{1}{1,25^2} = 0,64$$

$$m_s = \frac{24 \cdot (1,25 + 0,64)}{3 \times 1,25 - 1} = 16,49$$



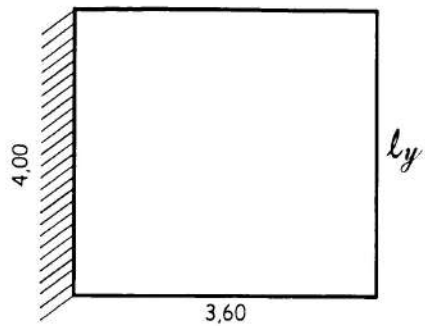
$$M_{ox} = \frac{0,55 \times 4^2}{16,49} = 0,53 \text{ tm} \quad M_{oy} = 0,64 \times 0,53 = 0,34 \text{ tm}$$

Laje L₂:

$$\lambda = \frac{4}{3,6} = 1,11 \quad k = \frac{1}{1,11^2} = 0,81$$

$$m_x = \frac{24 \cdot (1,11 + 0,81)}{3 \times 1,11 - 1} = 19,77$$

$$M_{ox} = \frac{0,55 \times 3,6^2}{19,77} = 0,36 \text{ tm} \quad M_{oy} = 0,81 \times 0,36 = 0,29 \text{ tm}$$



Para o momento negativo haverá dois valores, um em relação a laje L₁, e outro relativo a laje L₂. Como se faz no método clássico, pode-se usar a média dos valores, não inferior a 80 % do maior valor.

Observe-se, que o momento negativo X_{L1-L2} será determinado levando em consideração o momento positivo na direção l_y de L₁, e o momento positivo na direção l_x de L₂.

A laje L₁ só tem um engaste, logo $\alpha = 0,60$

$$X_{L1} = 0,6 \times M_{oy} = 0,6 \times 0,34 = 0,20 \text{ tm.}$$

A laje L₂ tem também um só engaste:

$$X_{L2} = 0,6 \times M_{ox} = 0,6 \times 0,36 = 0,22 \text{ tm}$$

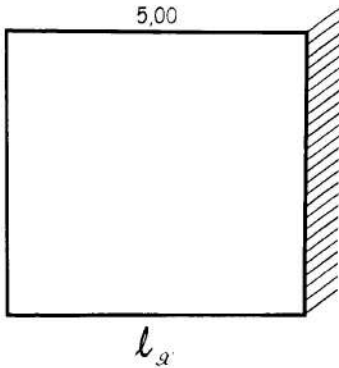
Para a laje L₁: $X_t = 0,20 \times 4 = 0,80 \text{ tm}$ ($0,20 \times l_x$)

Para a laje L₂: $X_t = 0,22 \times 4 = 0,88 \text{ tm}$ ($0,22 \times l_y$)

O apoio comum às duas lajes é l_x para L₁, e l_y para L₂.

$$X_m = \frac{X_t}{2 \cdot (\ell_y + k \cdot \ell_x)}$$

tem-se para L_1 :

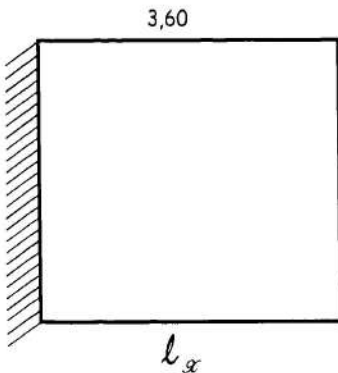


$$X_m = \frac{0,80}{2, (5,0 + 0,64 \times 4)} = 0,05 \text{ tm}$$

$$M_x = M_{ox} - X_m = 0,53 - 0,05 = 0,48 \text{ tm}$$

$$M_y = k \cdot M_x = 0,64 \times 0,48 = 0,31 \text{ tm}$$

e para L_2 :



$$X_m = \frac{0,88}{2, (4 + 0,81 \times 3,6)} = 0,06 \text{ tm}$$

$$M_x = 0,32 - 0,06 = 0,26 \text{ tm}$$

$$M_y = 0,81 \times 0,26 = 0,21 \text{ tm}$$

Para o momento negativo entre as duas lajes é prudente se tomar o maior dos dois valores encontrados:

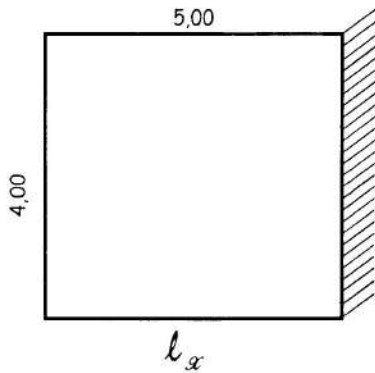
$$X_{L_1 - L_2} = 0,22 \text{ tm}$$

Com o uso da tabela 10, em anexo pode-se tirar o valor de m_x , entrando-se com os valores de λ e k . Calcula-se então:

$$M_{ox} = \frac{q \times \ell_x^2}{m_x} \text{ e } M_{oy} = k \times M_{ox}$$

Para efeito de comparação seguem abaixo os valores dos momentos fletores dessas lajes, calculadas pelo método elástico (processo de Marcus):

L₁:



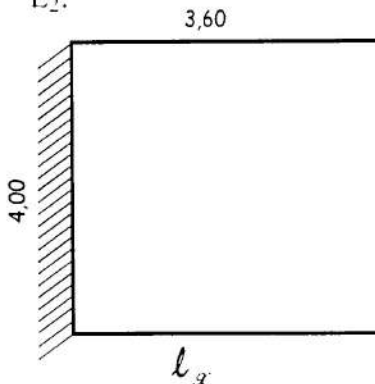
$$\lambda = \frac{4}{5} = 0.8 \quad q \times l_x^2 = 0,55 \times 25 = 13,75$$

$$M_x = 13,75/44,65 = 0,31 \text{ tm}$$

$$M_y = 13,75/34,35 = 0,40 \text{ tm}$$

$$X_x = 13,75/15,81 = 0,87 \text{ ym}$$

L₂:



$$\lambda = \frac{4}{3,6} = 1,11 \quad 0,55 \times 3,6^2 = 7,13$$

$$M_x = 7,13/25,71 = 0,28 \text{ tm}$$

$$M_y = 7,13/39,61 = 0,18 \text{ tm}$$

$$X_x = 7,13/10,10 = 0,71 \text{ tm}$$

A média entre os momentos negativos é de 0,79 tm e 80% do maior momento é igual a 0,70 tm. Logo:

$$X_{11-12} = 0,79 \text{ tm}$$

Comparando esses valores com aqueles encontrados pelo método de ruptura, verifica-se uma grande diferença relativa ao momento negativo, o que resulta em economia na armação quando o cálculo for feito pelo método de ruptura.

O detalhamento da armação positiva é bem mais simples, pois as condições de cálculo foram fixadas como lajes ortótropas com armadura constante, portanto sem defasagem:

$$(h = 10, \text{ aço CA - 60 A})$$

CONCRETO ARMADO

L_1

$$M_x = 0,48 \text{ tm} \equiv \phi \text{ 4.2 c.9}$$

$$M_y = 0,31 \text{ tm} \equiv \phi \text{ 4.2 c.14}$$

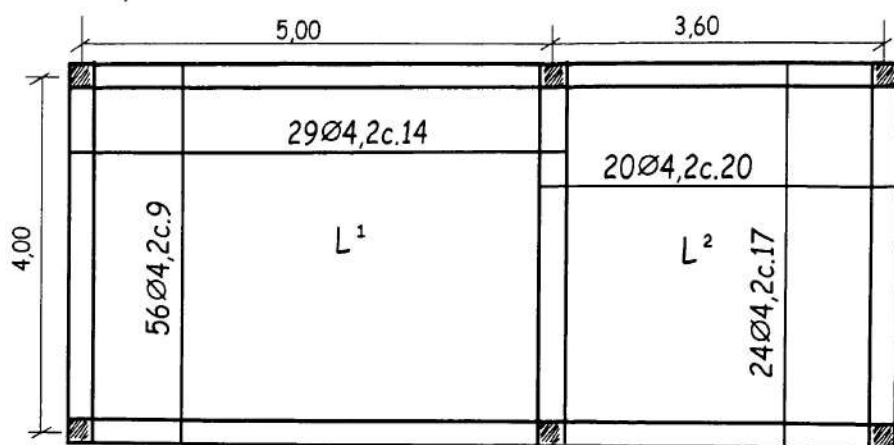
L_2

$$M_x = 0,26 \text{ tm} \equiv \phi \text{ 4.2 c.17}$$

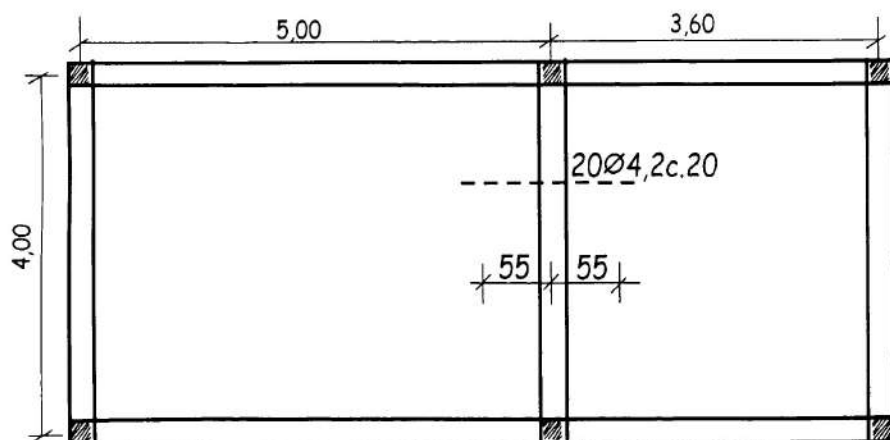
$$M_y = 0,21 \text{ tm} \equiv \phi \text{ 4.2 c.20}$$

$$X_{L_1-L_2} = 0,22 \text{ tm} \equiv \phi \text{ 4.2 c.20}$$

ARMAÇÃO POSITIVA :



ARMAÇÃO NEGATIVA :



REAÇÕES DE APOIO:

As reações de apoio devem ser calculadas conforme prescreve a NBR- 6118, em seu artigo 3. 3. 2. 9:

“permite-se calcular as reações de apoio de lajes retangulares com cargas uniformemente distribuídas, considerando-se para cada apoio carga correspondente aos triângulos ou trapézios obtidos, traçando-se, a partir dos vértices, na planta da laje, retas inclinadas de:

- 45° – entre dois apoios do mesmo tipo,
- 60° – a partir do apoio engastado, quando o outro for livremente apoiado,
- 90° – a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre”.

14. VIGAS DE SEÇÃO RETANGULAR

14.1 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE

A verificação de estabilidade de uma seção consiste em determinar se essa seção resiste ou não ao momento fletor solicitante. Conhecida a seção de concreto e de aço e as características de resistência desses materiais, determina-se o momento fletor M_d referente a esta seção.

Calcula-se: $\gamma_f = M_d / M$ M é o momento solicitante

Sabe-se que o valor de γ_f prescrito pela NBR-6118 é de 1,4.

Logo, a seção só será considerada estável se:

$$\gamma_f \geq 1,4$$

Se, $\gamma_f < 1,4$ a seção será considerada instável, ou seja, ela tem a sua estabilidade comprometida e por conseqüência, também estará comprometida a peça estrutural a qual ela pertence.

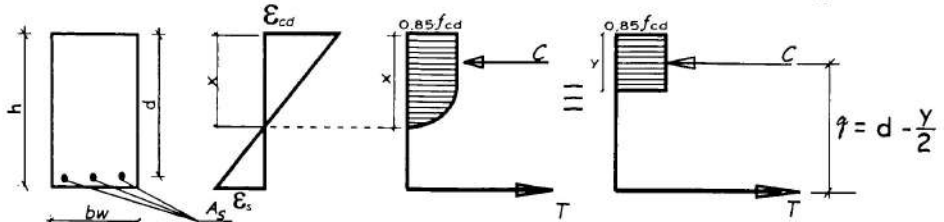
Em qualquer estrutura deve-se sempre ter seções estáveis, quer sejam pilares, quer sejam vigas, lajes, etc, pois, "nenhuma corrente é mais forte do que o seu elo mais fraco".

Observe-se a diferença entre o dimensionamento e a verificação de estabilidade: no dimensionamento as seções são devidamente calculadas para receber as solicitações que lhe são impostas e na verificação de estabilidade parte-se de uma seção já conhecida em geometria, e também conhecida quanto aos materiais, aço e concreto, para saber se a seção suportará ou não uma determinada solicitação de esforços.

14.2 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE : ARMADURA SIMPLES

Seja f_{ck} e f_{yd} as características do concreto e do aço. A questão é verificar se esta seção suporta ou não um determinado momento fletor solicitante M .

A configuração da seção, deformações e tensões é a seguinte:



Calcula-se o momento de estado limite último desta seção:

$$M_d = C \cdot z = T \cdot z \quad C = T \quad z = d - y/2$$

$$C = 0.85 \times f_{cd} \times b_w \times x \quad T = A_s \times f_{yd}$$

$$M_d = 0.85 \times f_{cd} \times b_w \times x \cdot (d - \frac{y}{2}) \quad \text{e} \quad M_d = A_s \times f_{yd} \cdot (d - \frac{y}{2})$$

Tem-se aí duas expressões que determinam o valor de M_d , uma em função do concreto e a outra em função do aço. As duas expressões poderão ser utilizadas para determinação de M_d . Entretanto, aparece em ambas uma incógnita, que é o valor da posição da linha neutra " y ". O problema só pode ser resolvido determinandose, primeiramente, a posição da linha neutra.

De $C = T$
tira-se $0.85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x = A_s \cdot f_{yd}$

$$y = \frac{A_s \times f_{yd}}{0.85 \times f_{cd} \times b_w}$$

e como $y = 0.8 \times x \quad x = \frac{A_s \times f_{yd}}{0.68 \times f_{cd} \times b_w}$

CONCRETO ARMADO

Obtido o valor de y , calcula-se M_d , e o respectivo coeficiente de segurança:

$$\gamma_f = \frac{M_d}{M}$$

Se $\gamma_f \geq 1,4$ a seção é estável. Deve-se observar que o valor de y na fórmula acima, pressupõe o aço com tensão de escoamento f_{yd} , o que só ocorre quando a seção é sub-armada, ou normalmente armada. Nestes dois casos, o valor de y calculado está correto. Com ele calcula-se M_d , quer pela expressão em função do concreto, quer em função do aço.

Resumindo:

$$\text{Calcula-se: } y = \frac{A_s \times f_{yd}}{0,85 \times f_{cd} \times b_w} \quad \text{e} \quad s = \frac{y}{d}$$

1º Caso: se $s < s_{lim}$, a seção é sub-armada, com $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$

2º Caso: se $s = s_{lim}$, a seção é normalmente armada, com $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$

Em ambos os casos o valor de y é válido e calcula-se M_d

Com M_d tem-se: $\gamma_f = \frac{M_d}{M}$ Se, $\gamma_f \geq 1,4$ a seção é estável.

3º Caso: se $s > s_{lim}$, a seção é super-armada, com $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$

O aço não se encontra em regime de escoamento, e sim, dentro ainda do regime elástico (lei de Hooke). Logo, é necessário se refazer o cálculo de y , pois, $f_y < f_{yd}$, isto é, a tensão do aço é menor do que

a tensão de escoamento. Corrigir o valor de y , significa também corrigir o valor de x , posição real da linha neutra.

Calcula-se então o verdadeiro valor de " x ", considerando-se f_y no lugar de f_{yd} .

Do diagrama das deformações, tira-se:

$$\frac{\varepsilon_{cd}}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} \quad \varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

$$x = \frac{A_s \times f_y}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \quad f_y = \varepsilon_s \times E_s$$

$$x \times 0,68 \times f_{cd} \times b_w = A_s \times f_y = A_s \times \varepsilon_s \times E_s$$

$$x \times 0,68 \times f_{cd} \times b_w = A_s \times E_s \times \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 = A_s \times E_s \times d \times \varepsilon_{cd} - A_s \times E_s \times \varepsilon_{cd} \times x$$

$$x^2 + \frac{A_s \times E_s \times \varepsilon_{cd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \times x - \frac{A_s \times E_s \times \varepsilon_{cd} \times d}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} = 0$$

$$\text{fazendo: } m = \frac{A_s \times E_s \times \varepsilon_{cd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w}$$

$$\text{tem-se: } x^2 + m \cdot x - m \cdot d = 0$$

finalmente:

$$x = \frac{1}{2} \times \left[\sqrt{m^2 + 4 \times m \times d} \right] - m$$

Com este novo valor de " x ", define-se também o verdadeiro valor de y :

$$y = 0,8 \times x$$

CONCRETO ARMADO

Calcula-se então M_d :

$$M_d = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot y \cdot (d - y/2)$$

nesta expressão, M_d é função da taxa de trabalho do concreto.

$$\text{Obtém-se: } \gamma_f = \frac{M_d}{M}$$

Se $\gamma_f \geq 1,4$ a seção é estável.

Pode-se também calcular M_d em função da taxa de trabalho do aço:

$$M_d = A_s \cdot f_y \cdot (d - y/2)$$

na expressão acima foi usado f_y e não f_{yd} ($f_y < f_{yd}$).

sendo:

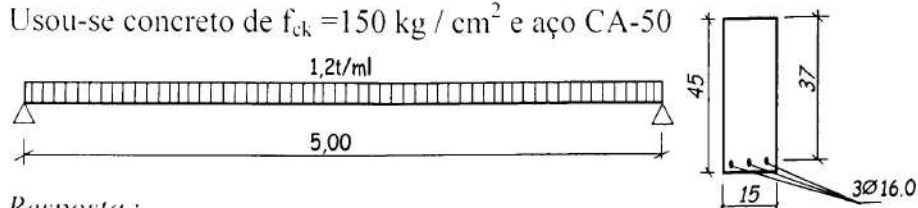
$$f_y = \varepsilon_s \times E_s = \frac{d - x}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s = \frac{d - x}{x} \times \frac{3,5}{1000} \times 2100000$$

$$\text{tem-se: } f_y = 7350 \times \frac{d - x}{x}$$

lembrando que: $\varepsilon_{cd} = 3,5 \text{ mm/m} = 3,5 / 1000$

14.2.1 APLICAÇÃO NUMÉRICA

1. Verificar a estabilidade da seção principal da viga abaixo indicada, sabendo-se que a sua seção é de 15 x 45 e está armada com 3 ϕ 16. Usou-se concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$ e aço CA-50



Resposta :

$$\text{Para a seção principal tem-se: } M = \frac{1,2 \times 25}{8} = 3,75tm$$

determina-se a posição da Linha Neutra:

$$A_s = 3 \phi 16 = 6,0 \text{ cm}^2 \quad f_{cd} = 150/1,4 = 107 \text{ kg/cm}^2 \quad f_{yd} = 4350 \text{ kg/cm}^2$$

$$y' = \frac{6 \times 4350}{0,85 \times 107 \times 15} = 19,13 \text{ cm}$$

$$s = \frac{19,13}{42} = 0,455 < s_{lim} = 0,503$$

logo, a seção é sub-armada:

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 15 \times 19,13 \cdot \left(42 - \frac{19,13}{2}\right) = 846492 \text{ kgcm}$$

$$M_d = 8,46 \text{ tm} \quad \gamma_f = \frac{8,46}{1,4} = 2,25$$

então, a seção é estável.

Do exercício anterior, pode-se ainda calcular qual o valor máximo de carga uniformemente distribuída que a viga suportará, dentro das condições normativas de segurança.

Ora, o valor máximo dessa carga é aquele que leva à condição limite de estabilidade prevista na Norma, isto é, $\gamma_f = 1,4$, +assim se tem:

$$M = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{q \times 25}{8} \quad \text{e} \quad \gamma_f = \frac{M_d}{M} = 1,4$$

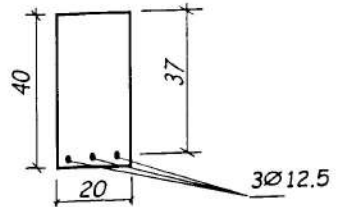
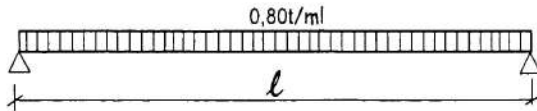
$$\text{como } M_d = 8,46 \text{ tm} \quad M = \frac{8,46}{1,4} = \frac{25 \times q}{8} \quad q = 1,93 \text{ t/m}$$

$$\text{e, para simples verificação: } M = \frac{1,93 \times 25}{8} = 6,03 \text{ tm} \quad \gamma_f = \frac{8,46}{6,03} = 1,4$$

o que significa que a carga de 1,2 t/m pode ser acrescida de 0,73 t/m, sem comprometer a estabilidade da seção.

CONCRETO ARMADO

2. A viga da seção 20 x 40 indicada a seguir, tem a sua seção principal armada com 3 ϕ 12,5, conforme mostra a figura. Sabe-se que o aço é CA-50B e o concreto é de $f_{ck}=150 \text{ kg/cm}^2$. Pergunta-se: qual o maior valor do vão ℓ , que pode ser adotado sem comprometer a estabilidade?



Resposta :

$$y = \frac{3,75 \times 4350}{0,85 \times 107 \times 20} = 8,97 \quad s = \frac{8,97}{37} = 0,242 \quad s < s_{lim} = 0,370$$

logo, a seção é sub-armada.

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 20 \times 8,97 \cdot \left(37 - \frac{8,97}{2}\right) = 530528 \text{ kgcm}$$

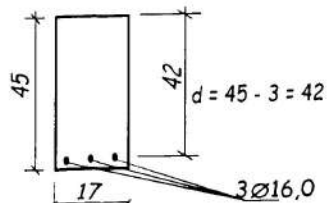
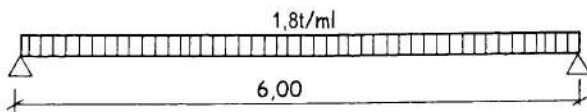
$$M_d = 5,30 \text{ tm}$$

O momento admissível para esta seção, momento máximo que ela absorve é:

$$M_o = \frac{M_d}{1,4} = \frac{5,30}{1,4} = 3,78 \text{ tm}$$

$$\frac{0,8 \times \ell^2}{8} = 3,78 \quad \ell = 6,14 \text{ m}$$

3. A viga de seção 17 x 45 abaixo indicada, é simplesmente armada, tendo na sua seção principal 3 ϕ 16. Trabalha-se com aço CA-50B e concreto de $f_{ck}=150 \text{ kg/cm}^2$. Verificar a estabilidade da mesma.



Resposta:

$$M = \frac{1,8 \times 36}{8} = 8,10 \text{ tm}$$

$$\gamma = \frac{A_s \times f_{yd}}{0,85 \times f_{cd} \times b_u} = \frac{6,0 \times 4350}{0,85 \times 107 \times 17} = 16,88$$

$$s = \frac{16,88}{42} = 0,402 > s_{\lim} = 0,370$$

$s > s_{\lim}$, a seção é, portanto, super-armada.

Resolve-se primeiro como se fosse aço do tipo A e calcula-se o verdadeiro valor de x :

$$m = \frac{A_s \times E_s \times \varepsilon_{yd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_u} = \frac{7530 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_u} = \frac{7350 \times 6}{0,68 \times 107 \times 17} = 35,65$$

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{m^2 + 4 \cdot m \cdot d} - m)$$

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{1270,92 + 5989,2} - 35,65) = \frac{1}{2} (85,21 - 35,65) = 24,78 \text{ cm}$$

com este valor se tem:

$$\varepsilon_s = \frac{d - x}{x} \times \varepsilon_{yd} = \frac{42 - 24,78}{24,78} \times 3,5 = 2,43 \text{ mm/m}$$

e sabe-se que: $\varepsilon_{yd} = \frac{4348}{2100} = 2,070$

tem-se: $0,7 \times \varepsilon_{yd} = 1,449$

assim: $\varepsilon_s > 0,7 \times \varepsilon_{yd}$

CONCRETO ARMADO

e: $2 + \varepsilon_{yd} = 4,070$ como $\varepsilon_s = 2,43$

verifica-se que: $2,07 < \varepsilon_s < 4,070$

logo: $K_f = 0,85 + 0,075 (\varepsilon_s - \varepsilon_{yd})$

Corrige-se o valor de m , multiplicando o valor encontrado por K_f :

$$K_f = 0,85 + 0,075(2,43 - 2,07)$$

$$K_f = 0,877$$

$$m = 35,65 \times 0,877 = 31,265$$

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{977,50 + 5252,52} - 31,265)$$

$$x = 23,83 \text{ cm} \quad \therefore y = 19,06$$

e

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 17 \times 19,06 \cdot \left(42 - \frac{19,06}{2}\right)$$

$$M_d = 956878 \text{ kgcm} = 9,57 \text{ tm}$$

e o coeficiente de segurança será: $\gamma_f = \frac{9,57}{8,10} = 1,18$

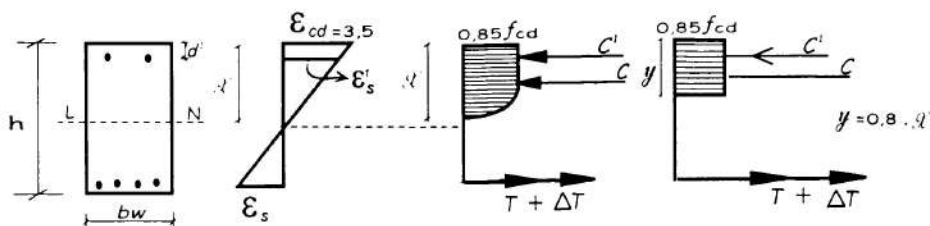
Conclui-se que a seção é instável. A viga não suportaria o carregamento de 1,8 t/m como foi pretendido. Caso se queira, pode-se calcular com facilidade o valor máximo do carregamento uniformemente distribuído que ela suportaria, dentro das condições normativas de segurança:

$$\frac{M_d}{1,4} = \frac{9,57}{1,4} = 6,83 \text{ tm} \quad \therefore \frac{q \cdot \ell^2}{8} = 6,83 \quad \therefore q = \frac{8 \times 6,83}{36} = 1,52 \text{ t/m}$$

Na prática, para saber se a seção de uma viga suporta um determinado momento fletor, comumente se utiliza um processo comparativo entre a seção como está armada e o que ela necessita de fato para suportar o carregamento. Assim, apenas seria definido o seu comprometimento ou não, com a estabilidade exigida, mas não se saberia o grau de afastamento do coeficiente de segurança.

14.3 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE : ARMADURA DUPLA

Na seção, o diagrama de deformações e tensões, têm a seguinte configuração:



A verificação de estabilidade obedece ao mesmo raciocínio anteriormente desenvolvido. Calcula-se M_d da seção conhecida e verifica-se se o coeficiente de segurança satisfaz as condições da NBR-6118, isto é:

$$\gamma_f \geq 1,4$$

onde:

$$\gamma_f = \frac{M_d}{M}$$

sendo M o momento solicitante.

Do diagrama de tensões, tira-se as seguintes condições de equilíbrio:

$$M_d = C \times \left(d - \frac{y}{2}\right) + C' \times (d - d')$$

$$C + C' = T + \Delta T$$

Vale lembrar que o uso de armadura dupla no dimensionamento de uma seção, ocorre quando a mesma se apresenta super-armada. Neste caso, quando se vai dimensionar a seção, por razões já especificadas, é melhor condiciona-la a uma seção normalmente armada, e criar-se um novo binário interno para combater o excedente de momento, que supera o admissível para a seção normalmente armada. Evita-se assim, o dimensionamento como seção super-armada.

Na verificação de estabilidade a seção já está definida, por isso, apresenta-se na seção, uma posição genérica da linha neutra. Isto é, não se conhece "x" nem "y".

O objetivo é portanto, calcular o valor do momento de ruptura da seção M_d , dividi-lo pelo momento solicitante M , e se ter assim o valor do coeficiente de segurança da seção.

No caso de verificação de estabilidade a posição da linha neutra é uma incógnita a se determinar, como no caso de armadura simples.

A partir do diagrama tem-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$M_d = C \times (d - \frac{y}{2}) + C' \times (d - d')$$

$$C + C' = T + \Delta T$$

com:

$$C = 0.85 \times f_{cd} \times b_w \times y$$

$$C' = A_s' \times f_{yld}$$

$$T + \Delta T = A_s \times f_{yd}$$

$$0.85 \times f_{cd} \times b_w \times y + A_s' \times f_{yld} = A_s \times f_{yd}$$

$$y = \frac{A_s \times f_{yd} - A_s' \times f_{yld}}{0.85 \times f_{cd} \times b_w}$$

conhecendo-se “y”, calcula-se o valor de “x”: $y = 0.8.x \therefore x = \frac{y}{0.8}$

As tensões das armaduras podem ser determinadas a partir de ε_s e ε'_s através do diagrama das deformações.

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} \therefore \varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

$$\frac{\varepsilon'_s}{x-d'} = \frac{\varepsilon_{cd}}{x} \therefore \varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

Como se observa, as tensões que podem ser calculadas a partir das respectivas deformações, dependem da posição da linha neutra.

O valor de ε_{cd} é conhecido ($\varepsilon_{cd} = 3.5\text{mm/m}$). Pode acontecer que:

$$\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd} \quad \text{e} \quad \varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$$

Isto é, se ε_s e ε'_s atingem, ou são superiores à deformação de alongamento de escoamento do aço (ε_{yd}), a tensão na armadura será f_{yd} , como bem traduz o diagrama simplificado de tensão/deformação.

Se isto não ocorre, então é preciso corrigir o valor de “x”, e as tensões de tração e de compressão do aço serão determinadas em função dos seus respectivos alongamentos. Para os aços do tipo A se tem:

$$f_s = \varepsilon_s \times E_s \quad \text{e} \quad f'_s = \varepsilon'_s \times E_s$$

Para os aços do tipo B, tem-se que aplicar um coeficiente de correção no resultado obtido como tipo A.

Isso mostra que o processo de verificação de estabilidade no caso de armadura dupla envolve esquemas bem mais complexos, do que aquele de armadura simples. Daí, na prática, ser mais cômodo simplesmente recalcular a seção, e comparar o novo detalhe da seção

redimensionada com o detalhe da seção em estudo. Assim, pode-se concluir se a mesma é compatível ou não, com a solicitação a que está submetida, ou seja, se é ou não estável.

Entretanto, verificar a estabilidade no sentido mais rigoroso, é calcular o grau de segurança da seção calculando-se o valor de γ_f , ou o valor das tensões.

Observe-se os vários casos que podem ocorrer:

- 1 - $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$ e $\varepsilon_s' \geq \varepsilon_{yd}$

calcula-se o valor de "y":
$$y = \frac{(A_s - A_s') \cdot f_{yd}}{0,85 \times f_{cd} \times b_w}$$

o momento de ruptura M_d , será:

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \cdot \left(d - \frac{y}{2}\right) + A_s' \times f_{yd} \cdot (d - d')$$

com M_d , calcula-se:

$$\gamma_f$$

$$\text{se } \gamma_f \geq 1,4$$

a seção é estável.

- 2 - $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$ (a armadura de tração se escoou e está com tensão f_{yd})

$$\varepsilon_s' < \varepsilon_{yd} \text{ (a armadura de compressão não se escoou)}$$

Da equação:

$$C + C' = T + \Delta T$$

$$\text{vem: } 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y + A_s' \times f_{yc} = A_s \times f_{yd} \quad y' = 0,8 \cdot x$$

como se tem f_{yc} e não f_{yd} , o valor de x será conforme segue:

$$f_{yc} = \varepsilon_s' \times E_s = \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s$$

$$\therefore 0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x + \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s \times A_s' = A_s \times f_{cd}$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 + \varepsilon_{cd} \times E_s \times A_s' \times x - \varepsilon_{cd} \times E_s \times A_s \times d' = A_s \times f_{cd} \times x$$

$$\text{como } \varepsilon_{cd} \times E_s = 7350 \quad \text{em}$$

$$x^2 + \left[\frac{7350 \times A_s'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} - \frac{A_s \times f_{cd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \right] x - \frac{7350 \times A_s \times d'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} = 0$$

fazendo

$$m = \frac{7350 \times A_s'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \quad \text{e} \quad n = \frac{A_s \times f_{cd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w}$$

tem-se:

$$x^2 + (m-n)x - m.d' = 0$$

$$x = \frac{1}{2} - \left[\sqrt{(m-n)^2 + 4.m.d'} - (m-n) \right]$$

sendo $\gamma = 0,8.x$ tem-se finalmente

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times \gamma \left(d - \frac{\gamma}{2} \right) + A_s' \cdot \frac{x-d'}{x} \cdot \varepsilon_{cd} \times E_s \cdot (d-d')$$

$$\gamma_r = \frac{M_d}{M}$$

$$\bullet \quad 3 - \varepsilon_s' < \varepsilon_{cd} \quad \text{e} \quad \varepsilon_s' \geq \varepsilon_{cd}$$

Nesse caso, a armadura de tração não se escoou, enquanto que a armadura de compressão está em escoamento. A equação de equilíbrio é:

$$0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y + A_s' \times f_{yd} = A_s \times f_y$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \cdot \left(d - \frac{y}{2}\right) + A_s' \times f_{yd} \cdot (d - d')$$

com

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cd} \quad \text{e} \quad f_y = \varepsilon_s \times E_s$$

$$0,85 \times f_{cd} \times b_w \times 0,8 \cdot x + A_s' \times f_{yd} = A_s \cdot \frac{d-x}{x} \cdot \varepsilon_{cd} \times E_s$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 + A_s' \times f_{yd} \times x = A_s \times d \times 7350 - A_s \times 7350 \times x$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 + (A_s' \times f_{yd} + 7350 \times A_s) \cdot x - 7350 \times A_s \times d = 0$$

$$x^2 + \left[\frac{A_s' \times f_{yd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} + \frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \right] \cdot x - \frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \times d = 0 \text{ fazem}$$

$$\text{do: } m = \frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \quad \text{e} \quad n = \frac{A_s' \times f_{yd}}{0,68 \times f_{cd} \times b_w}$$

se tem:

$$x = \frac{1}{2} \times \left[\sqrt{(m+n)^2 + 4 \cdot m \cdot d} - (m+n) \right]$$

$$y = 0,8 \cdot x$$

$$\gamma_f = \frac{M_d}{M}$$

se $\gamma_f \geq 1,4$ a seção é considerada estável.

$$\bullet \quad 4 - \varepsilon_s < \varepsilon_{yd} \quad \text{e} \quad \varepsilon_s' < \varepsilon_{yd}$$

Significa que nenhuma das armaduras está em escoamento. A equação de equilíbrio passa a ser:

$$0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y + A_s' \times f_{yc} = A_s \times f_y \quad \text{ou seja, } C + C' = T$$

$$\text{sabe-se que: } \varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd} \quad \varepsilon_s' = \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

$$M_d = C \times z + C' \times (d - d')$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \cdot \left(d - \frac{y}{2}\right) + A_s' \times \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s \cdot (d - d')$$

Desenvolvendo a equação de equilíbrio, tem-se:

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x + A_s' \times \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s = A_s \times \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x + 7350 \times A_s' \times \frac{x-d'}{x} = 7350 \times A_s \times \frac{d-x}{x}$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 + 7350 \times A_s' \times x - 7350 \times A_s' \times d' = 7350 \times A_s \times d - 7350 \times A_s \times x$$

$$0,68 \times f_{cd} \times b_w \times x^2 + (7350 \times A_s' + 7350 \times A_s) \cdot x - (7350 \times A_s \times d + 7350 \times A_s' \times d') = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} + \frac{7350 \times A_s'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \right) \cdot x - \left(\frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \times d + \frac{7350 \times A_s'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \times d' \right) = 0$$

fazendo

$$m = \frac{7350 \times A_s}{0,68 \times f_{cd} \times b_w} \quad \text{e} \quad m' = \frac{7350 \times A_s'}{0,68 \times f_{cd} \times b_w}$$

tem-se

$$x^2 + (m + m') \cdot x - (m \times d + m' \times d') = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \times \left[\sqrt{(m + m')^2 + 4(m \times d + m' \times d')} - (m + m') \right]$$

Conhecido o valor de x , tem-se $y = 0,8 \times x$, que permite calcular M_d , e portanto, o coeficiente de segurança:

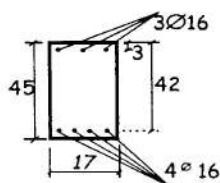
$$\gamma_f = \frac{M_d}{M}$$

Assim, foram vistos todos os quatro casos possíveis de verificação de estabilidade. Quando se tratar de aço do tipo B calcula-se como se fosse do tipo A, e corrige-se o valor de x , multiplicando-se pelo coeficiente K_f de correção.

O fundamental é que em todos os casos de verificação de estabilidade, sempre se comece calculando a posição da linha neutra.

14.3.1 APLICAÇÃO NUMÉRICA

1- Verificar a estabilidade de uma seção de 17x45, duplamente armada conforme figura abaixo, e solicitada por um momento de 9,50 tm. Trabalha-se com aço CA-50 A e concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$.



$$h = 45 \text{ cm}$$

$$d = 42 \text{ cm}$$

$$d' = 3 \text{ cm}$$

Resposta:

$$x = \frac{(A_s - A_s') \times f_{yd}}{0,68 \times b_w \times f_{cd}} = \frac{(8 - 6) \times 4348}{0,68 \times 17 \times 107} = 7,03$$

$$y = 0,8 \times 7,03 = 5,62$$

$$s = \frac{5,62}{42} = 0,134 \quad s < s_{\text{lim}} = 0,207$$

Com esse valor de "s" deduz-se que o alongamento da armadura de tração é superior ao máximo permitido pela NBR-6118, o

que também pode ser constatado calculando-se o valor do alongamento ε_s :

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd} = \frac{42-7,03}{7,03} \times 3,5 = 17,4 \text{ mm/m} > 10 \text{ mm/m}$$

Nesse caso, evidentemente o momento de estado limite último da seção deve ficar limitado ao alongamento máximo permitido, ou seja, $a = 10 \text{ mm/m}$, ou, o que dá no mesmo, $s_{\min} = 0,207$.

$$y = 0,207 \times 42 = 8,69$$

$$x = \frac{8,69}{0,8} = 10,86$$

$$\varepsilon_s = \frac{10,86-3}{10,86} \times 3,5 = 2,53 \quad \therefore \varepsilon_s > \varepsilon_{sd} \quad \text{logo,} \quad f_{scl} = f_{sd}$$

O momento M_d será:

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \cdot \left(d - \frac{y}{2}\right) + A_s \times f_{scl} \times (d - d')$$

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 17 \times 8,69 \cdot \left(42 - \frac{8,69}{2}\right) + 6 \times 4348 \times (42 - 3)$$

$$M_d = 505934 + 1017432 = 1523366 \text{ kgcm}$$

$$M_d = 15,23 \text{ tm}$$

$$\gamma_f = \frac{15,23}{9,5} = 1,60 \quad \gamma_f > 1,4$$

Conclui-se que a seção é capaz de suportar o momento solicitante de 9,50 tm.

2- Qual a solução do problema no caso particular em que $A'_s = A_s$, e essas armaduras se escoam.

RESPOSTA:

$$\varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times \varepsilon_{cd} \quad \text{e} \quad \varepsilon'_s = \frac{x-d'}{x} \times \varepsilon_{cd}$$

por hipótese: $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{yd}$ e $\varepsilon'_s \geq \varepsilon_{yd}$

Basta, como foi descrito anteriormente, que uma só dessas condições não seja satisfeita, para ter que se corrigir o valor de x . O valor de x é dado por:

$$x = \frac{(A_s - A'_s) \times f_{yd}}{0,68 \times b_w \times f_{cd}}$$

Ora, como por hipótese, a seção em estudo tem $A_s = A'_s$:

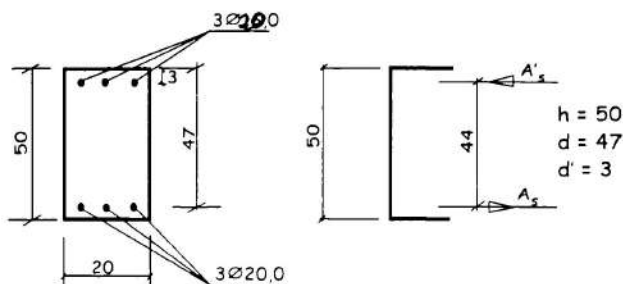
$$x = 0$$

Então, o calculista terá que recorrer ao bom senso, levando em consideração duas hipóteses:

- 1 - A resistência da seção será dada unicamente pelo binário formado pelas duas armaduras;
- 2 - A resistência da seção será aquela que se obtém desprezando a influência de A'_s , tratando-se a seção como simplesmente armada.

Para efeito de segurança, é conveniente se adotar o menor dos dois valores como solução do problema.

3 - Verificar qual o momento máximo em que a seção abaixo indicada é capaz de resistir. Trabalha-se com aço CA-50A e concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$



Resposta:

1- adotando-se a primeira hipótese se usa o binário resistente de braço $d - d'$:

$$M_d = A_s \times f_{yd} \times (d - d')$$

$$M_d = 9,45 \times 4348 \times (47 - 3)$$

$$M_d = 1807898 \text{ kgcm}$$

$$M_d = 18,08 \text{ tm}$$

$$M_u = \frac{18,08}{1,4} = 12,91 \text{ tm}$$

2- Adotando-se a segunda hipótese, isto é, a seção sendo considerada como simplesmente armada. Neste caso, despreza-se a presença de A'_s :

$$x = \frac{9,45 \times 4348}{0,85 \times 107 \times 20} = 22,59 \quad \therefore s = \frac{22,59}{47} = 0,480 < s_{lim}$$

logo a seção é subarmada

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 20 \times 22,59 \times \left(47 - \frac{22,59}{2}\right) = 1467161 \text{ kgcm}$$

$$M_d = 14,67 \text{ tm} \quad \therefore M_u = \frac{14,67}{1,4} = 10,48 \text{ tm}$$

CONCRETO ARMADO

Este é o momento admissível da seção : $M_o=10,48 \text{ tm}$.

A hipótese de cálculo como armadura simples, neste caso, é a solução do problema. Nesta hipótese, a área de concreto sujeita a esforço de compressão tem de fato a presença de uma armadura de compressão, não considerada no cálculo, mas que é, sem dúvida, um componente colaborador.

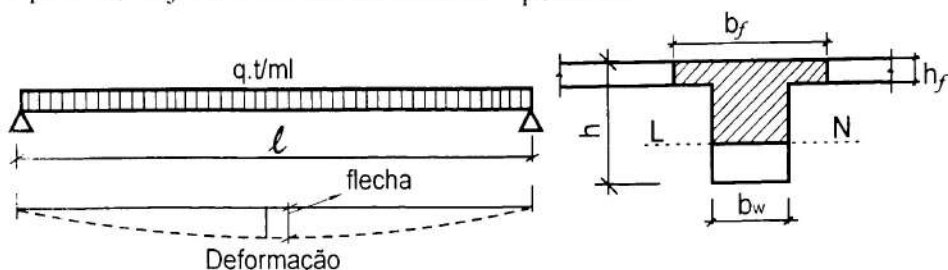
15. VIGAS DE SEÇÃO T

Nas estruturas comuns de edifícios as lajes são intimamente ligadas às vigas. Assim, quando sob solicitações de cargas, as vigas se deformam, isto é, flexionam-se, arrastam com elas as lajes que lhe são solidárias.

Deve-se distinguir dois casos:

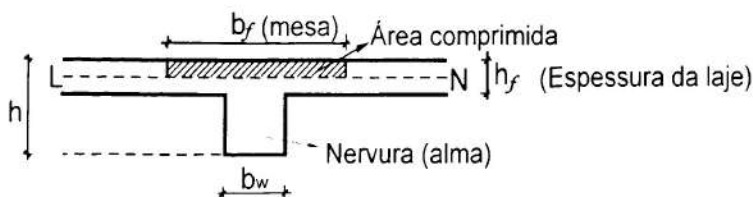
- 1 - a laje colabora com as tensões de compressão;
- 2 - a laje não colabora com as tensões de compressão.

Para o primeiro caso, considere-se uma viga simplesmente apoiada, sujeita a um momento fletor positivo:



É óbvio, que na deformação da viga haverá uma largura b_f da laje, que estará solidária à deformação, e portanto vai também colaborar nas tensões internas de compressão. Essa largura b_f é chamada de "mesa", e tem seu valor máximo definido pela NBR-6118.

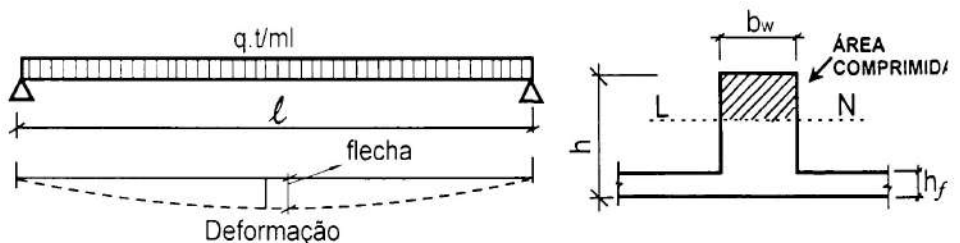
Na figura acima considerou-se o caso mais geral da linha neutra cortando a nervura, no entanto, nem sempre isto acontece. Ela pode estar em alguns casos dentro da mesa.



Assim, a resultante das tensões de compressão na seção terá um valor bem mais elevado do que aquele que teria para seção retangular $b_w \times h$. Assim, sob ação de um mesmo momento fletor pode-se ter seção de altura bem menor, no cálculo como seção T, do que se teria se fosse calculada como seção retangular. É claro que levando-se em conta a largura b_f , o binário resistente de equilíbrio formado pela resultante de compressão no concreto e a resultante de tração no aço, tem seu valor bastante aumentado, o que significa, tem-se um maior valor do momento resistente da seção. Isto leva muitas vezes a se ter seção simplesmente armada, quando calculada como seção T, e que seria armadura dupla, se calculada como seção retangular.

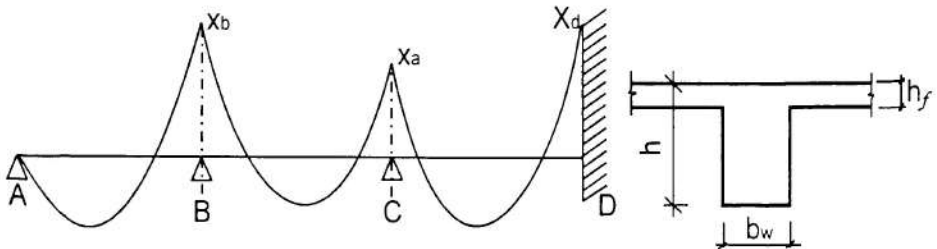
A condição imprescindível para que uma seção trabalhe como seção T, é que haja colaboração da laje nos esforços de compressão, o que significa dizer, que na deformação da viga a laje que lhe é solidária seja comprimida.

Caso a viga seja invertida, isto é, a laje trabalhando na face inferior, e sendo o momento fletor positivo, as fibras inferiores estarão tracionadas e as superiores comprimidas, logo nesse caso a laje não colabora em nada, uma vez que a resistência do concreto à tração é desprezada. Neste caso o cálculo é feito como seção retangular.



CONCRETO ARMADO

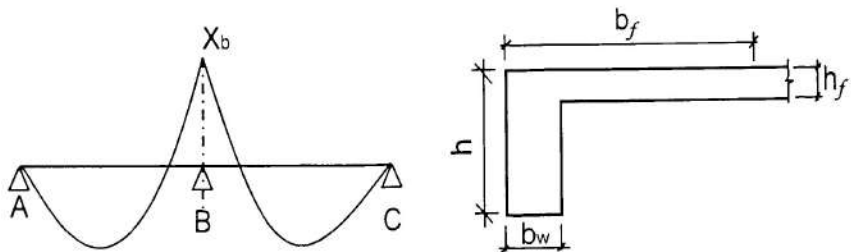
Com o objetivo de ilustrar o conceito de seção T analise-se o comportamento da viga contínua indicada a seguir, onde o diagrama de momentos fletores já está definido:



Com base no que foi dito pode-se deduzir que para as seções principais dos vãos AB, BC e CD, a viga pode trabalhar como seção T. Para os apoios B, C e D, ela trabalha como seção retangular de largura b_w e altura h .

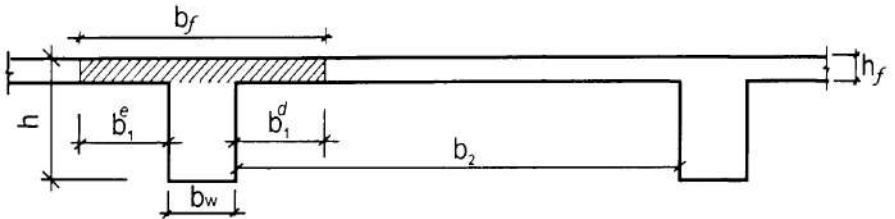
Se essa mesma viga fosse invertida, então trabalharia como seção T para os apoios B, C, e D, e como seção retangular para as seções principais dos vãos AB, BC e CD.

No caso particular de se ter uma viga de extremidade, a seção T passa a ser geometricamente uma seção L invertido. O processo de cálculo será idêntico ao da seção T, só que a largura b_f será menor.



A largura b_f tem o seu valor máximo limitado pela NBR-6118: "para o cálculo de resistência ou deformação, a parte da laje a

considerar como elemento da viga (b_1), medida a partir da face da nervura, é conforme o caso”:



$$b_1 \leq \begin{cases} 0,10a \\ 8 \cdot h_f \\ 0,5 \cdot b_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} h_f - \text{espessura da laje} \\ h_f = h_w + b_1^e + b_1^d \end{array}$$

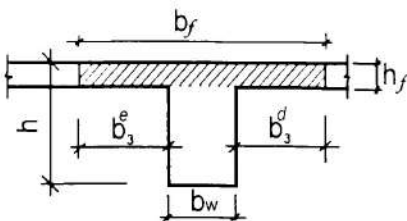
vigas simplesmente apoiadas:..... $a = l$

vigas com momento em uma só extremidade: $a = 3 / 4 \cdot l$

vigas com momentos nas duas extremidades: $a = 3 / 5 \cdot l$

viga em balanço:..... $a = 2 l$

No caso de vigas isoladas:



$$b_3 \leq \begin{cases} 0,10 a \\ 6 \cdot h_f \end{cases}$$

$$h_f = h_w + b_3^e + b_3^d$$

Quando há mísulas nas lajes ligadas às vigas deve-se considerar uma largura b_a fictícia da nervura, conforme recomenda o item 3.2.2.2 da NBR-6118. Procede-se então do mesmo modo, substituindo b_w pela largura fictícia b_a . Nos casos usuais é suficiente calcular a largura de mesa efetivamente necessária para combater os momentos máximos, como será visto mais adiante.

b_u – largura da nervura fictícia obtida aumentando-se a largura real para cada lado de valor igual ao do menor cateto do triângulo da mísula correspondente. Quando a extremidade for laje em balanço, adota-se b_3 em lugar de b_1 .

O cálculo com seção T é muitas vezes conveniente, pois resulta em seções de menor altura, além de tornar possível o combate de momentos fletores com armadura simples, em lugar de se trabalhar com armadura dupla como seção retangular. Deve-se lembrar que só se trabalha como seção T as seções em que a laje colabora na compressão.

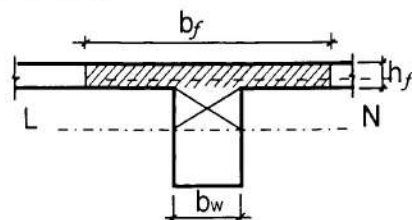
15.1 DIMENSIONAMENTO

Com o objetivo de facilitar o raciocínio será considerado sempre ação de momento fletor positivo. Dois casos são possíveis:

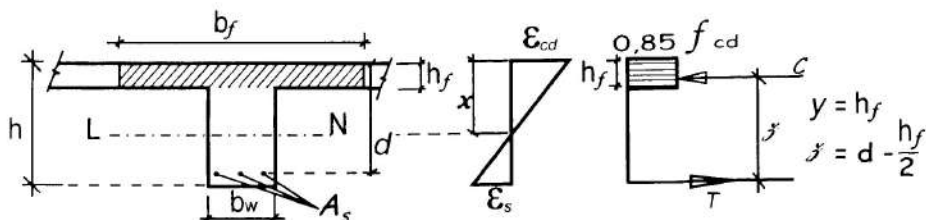
- 1 - D. C. N. (despreza-se a colaboração da nervura)
- 2 - C. C. N. (considera-se a colaboração da nervura)

1º caso: D.C.N. (despreza-se a colaboração da nervura)

Neste caso, a área comprimida a considerar no cálculo é aquela hachurada na figura abaixo:



O cálculo é feito desprezando-se a colaboração da nervura:



Trabalha-se então usando só a largura b_f da laje (mesa) colaborando nos esforços de compressão.

No estado limite último os diagramas de seção tomam o seguinte aspecto:

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times b_f \times h_f \cdot \left(d - \frac{h_f}{2}\right) \quad \therefore d = \frac{h_f}{2} + \frac{1,647 \times M}{f_{cd} \times b_f \times h_f}$$

onde: $M_d = M \times \gamma_f$ com $\gamma_f = 1,4$

Pode-se calcular a altura útil mínima necessária para um momento "M" qualquer. Chamando de d_0 este valor, se tem:

$$d_0 = \frac{h_f}{2} + \frac{2,30 \times M}{f_{ck} \times b_f \times h_f}$$

que é a altura útil mínima necessária para que se tenha só a mesa toda comprimida, isto é, $y = h_f$. Para todo $d > d_0$, a linha neutra corta a mesa, e para todo $d < d_0$, a linha neutra corta a nervura, para $d = d_0$, a linha neutra tangencia a mesa pela face inferior, logo, a mesa é totalmente comprimida.

Essas expressões devem ser usadas obedecendo a homogeneidade das unidades.

Da expressão de M_d pode-se calcular o valor efetivo de largura b_f necessária para resistir a um dado momento M . Observe-se, que a expressão de M_d corresponde ao valor de $y = h_f$, com largura b_f máxima permitida pela Norma Brasileira. Para todo e qualquer momento $M < M_d/1,4$ é evidente que se precisa de uma largura de colaboração menor do que b_f .

Assim, se M é o momento solicitante e M_d é o momento de estado limite último dado pela expressão acima, toda vez que:

$$M < M_d / 1,4$$

ou, o que dá no mesmo:

$$M \times 1,4 < M_d \quad (M_{dsolic} < M_d)$$

logo:

$$b_{mec} = \frac{M \times 1,4}{0,85 \times f_{cd} \times h_f \times (d - \frac{h_f}{2})}$$

Este é o b_{mec} para o momento de solicitação “M”. que é menor do que b_f máximo prescrito pela NBR – 6118.

A outra equação de equilíbrio permite calcular a armação:

$$M_d = A_s \times f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2}) \quad \therefore A_s = \frac{M_d}{f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2})} \quad \text{onde, } M_d = M_{solic} \times 1,4$$

Se o cálculo for feito para a altura útil d_0 , é só substituir nas fórmulas acima “d” por “ d_0 ”, e “M” por “ M_0 ” correspondente a “ d_0 ”.

Conclusão, para M_d com b_f máximo da Norma, tem-se o valor de A_s , correspondente. Para $M_{solic} < M_d / 1,4$ ou seja, $M_{dsolic} < M_d$, o valor de A_s será obtido conforme acima apresentado, usando-se nas fórmulas o valor de M_{dsolic} .

Em todas essas expressões deve-se obedecer a homogeneidade das unidades.

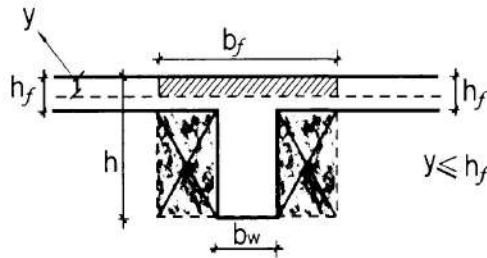
Toda vez que se usar um valor de d maior do que d_0 tem-se:

$$y < h_f$$

isto é, a linha neutra cortará a mesa, e o processo de cálculo é ainda como seção T, uma vez que a laje estará colaborando nos esforços de compressão.

O dimensionamento de uma seção T com $y \leq h_f$ recai em uma seção retangular de largura b_f . A figura que segue mostra o que ocorre,

utilizando-se a seção $b_f \cdot h$. Sendo o momento M positivo, a seção trabalha como se fosse retangular de dimensões $b_f \times h$.



O volume de concreto representado na figura acima pode ser eliminado, o que representa economia, concentrando-se a armadura em b_w , uma vez que abaixo da linha neutra o concreto está tracionado e portanto, a sua colaboração pode ser desprezada. Assim, a seção T, com $y \leq h_f$, pode ser dimensionada como seção retangular, de largura b_f e altura h . Isso ocorre sempre que $y \leq h_f$.

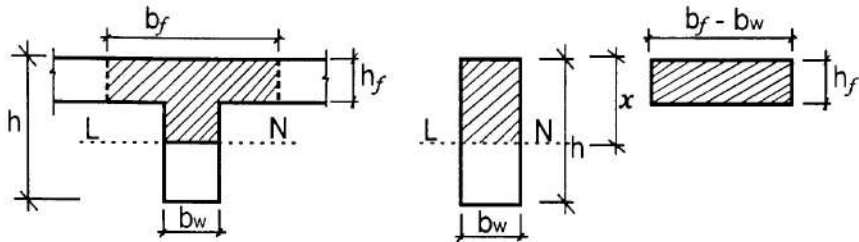
É importante lembrar que a parte da laje que se incorpora à viga chama-se mesa, e a parte da viga abaixo da mesa é chamada de nervura, ou alma.

2º caso: C.C.N (considera-se a colaboração da nervura)

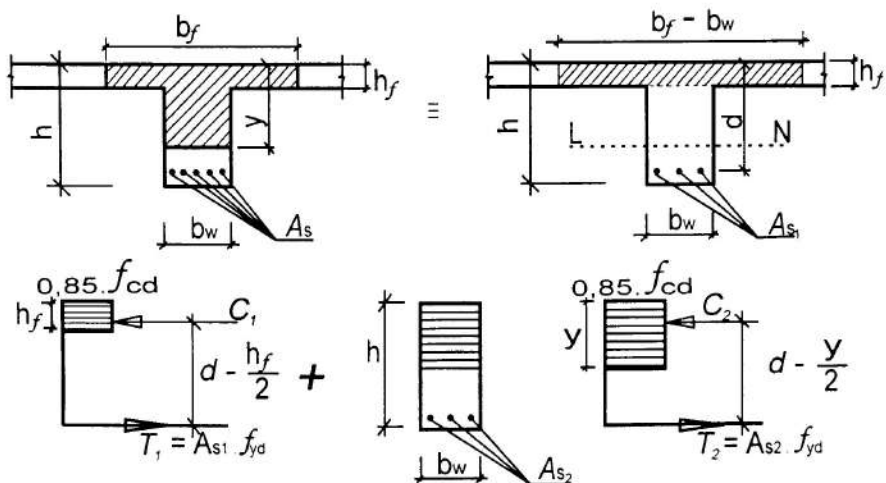
Quando a seção comprimida da nervura, compreendida entre a linha neutra e o bordo inferior da laje tem um valor significativo, é vantajoso que se considere a colaboração da nervura. Isso ocorre geralmente em vigas de grande altura, como por exemplo, em vigas de pontes, viadutos, grandes galpões, etc., onde desprezar a colaboração da nervura pode até significar, ter que se usar armadura dupla, enquanto que se considerando a colaboração da nervura o cálculo poderia ainda ser feito com armadura simples.

De um modo geral em vigas usuais de edifícios, o cálculo das seções T comportam-se muito bem dentro dos limites de $y \leq h_f$. Nesses casos, o cálculo é feito desprezando-se a colaboração da nervura.

Para o cálculo com colaboração da nervura, imagine-se a seção decomposta em duas seções: a retangular de largura b_w e a seção em "T" de mesa $b_f - b_w$, conforme indicação abaixo:



Aplicando o princípio da superposição dos efeitos, o momento M_d de estado limite último será dado pela soma dos respectivos momentos: da seção retangular de largura b_w , mais o da seção em T de mesa $b_f - b_w$. Assim, o diagrama de esforços na seção apresenta-se conforme figura:



Chamando M_{1d} o momento de estado limite último da seção em T de mesa $b_f - b_w$, e M_{2d} o momento de estado limite último da seção retangular, o momento resistente total da seção M_d será:

$$M_d = M_{1d} + M_{2d}$$

$$C_1 = 0,85 \cdot f_{cd} (b_f - b_w) \cdot h_f$$

$$C_2 = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot y$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} (b_f - b_w) h_f \times (d - \frac{h_f}{2}) + 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \times (d - \frac{y}{2})$$

Quando $y = y_{lim}$, se tem uma seção normalmente armada:

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f \times (d - \frac{h_f}{2}) + 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y_{lim} \times (d - \frac{y_{lim}}{2})$$

$$\text{e, } M_u = \frac{M_d}{\gamma_f} \quad \text{com } \gamma_f = 1,4$$

Logo, para todo momento $M > M_0$, a seção será dimensionada com armadura dupla; M_0 é portanto, o máximo momento que a seção T absorve como simplesmente armada.

Em função dos esforços de tração se tem:

$$M_d = M_{1d} + M_{2d}$$

$$M_d = A_{s1} \times f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2}) + A_{s2} \times f_{yd} \times (d - \frac{y}{2})$$

ou, a parcela M_{1d} , é:

$$M_{1d} = A_{s1} \times f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2})$$

$$A_{s1} = \frac{M_{1d}}{f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2})} \quad \text{e para a parcela } M_{2d}, \text{ tem-se:}$$

$$M_{2d} = A_{s2} \times f_{yd} \times (d - \frac{y}{2})$$

$$A_{s2} = \frac{M_{2d}}{f_{yd} \times (d - \frac{y}{2})}$$

a armadura total da seção T, quando se considera a colaboração da nervura, será então:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2}$$

O cálculo da armadura A_{s2} referente à seção retangular é feito usando-se as tabelas de dimensionamento de seções retangulares.

Pode-se analisar dois casos:

1° caso: quando o dimensionamento é feito como seção normalmente armada, isto é, $y = y_{lim}$, o momento da seção retangular será o M_{o2} , correspondente às condições limites: s_{lim} , r_{lim} , α_{lim} , φ_{lim} . Assim, o A_s será:

$$A_s = \frac{M_{ld}}{f_{cd} \times (d - \frac{h_f}{2})} + \frac{\alpha_{lim} \times M_{o2}}{d} \quad \text{sendo} \quad \begin{aligned} M_1 &= M - M_{o2} \\ M_{ld} &= M_1 \times \gamma_f \end{aligned}$$

Com o valor M_1 que a seção T, de largura $b_f - b_w$ absorve, pode-se calcular a largura b_{frec} , que se necessita de fato, para combater este momento M_1 . Isso pode ser feito a partir de:

$$M_{ld} = 0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f \times (d - \frac{h_f}{2})$$

Calcula-se então o valor de b_f , que é o necessário para combater M_1 .

A vantagem de se usar b_{frec} , é ter-se um detalhamento mais econômico, face a exigência da NBR-6118.

A NBR-6118 prescreve que “nas mesas de vigas de seção T, deve haver armadura perpendicular à nervura, que se estenda por toda a sua largura útil, com seção transversal de no mínimo $1,5 \text{ cm}^2$ por metro.” Isso significa um mínimo de $\phi 5,0$ c.13cm. Daí, a vantagem econômica que se pode ter quando se usa largura de mesa b_{frec} , pois assim, se terá comprimento menor dessa armadura e portanto, mais econômico será o cálculo.

É importante lembrar, que no cálculo da área de armadura da seção T (M_{ld}), deve-se sempre usar o princípio da homogeneidade

referente ao sistema de unidades, desde que a expressão de A_{s1} não tem coeficiente dependente de tabelas como para as seções retangulares, onde as tabelas em anexo foram confeccionadas usando-se as unidades de tonelada e centímetro, obtendo-se a área em centímetro quadrado.

2º caso: nos casos mais comuns da prática, as seções são sub-armadas. Procede-se da seguinte forma: calcula-se o momento M_o da seção T, considerando-se a colaboração da nervura (C. C. N), e verifica-se se ele absorve o momento M solicitante. Caso $M_o > M$ calcula-se o momento M_{o1} da seção T, de mesa $b_f - b_w$, e a diferença entre o momento solicitante e o absorvido pela seção T será combatido pela seção retangular de largura b_w .

Seja M o momento solicitante e M_{o1} o absorvido pela seção T de largura $b_f - b_w$. A seção retangular absorverá o momento M_2 .

$$M_2 = M - M_{o1} \quad \text{onde} \quad M_{o1} = \frac{M_{ld}}{\gamma_f} \quad (\gamma_f = 1,4)$$

Calcula-se o valor de r para a seção retangular de largura b_w e altura útil d , solicitada pelo momento M_2 :

$$r = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_2}{b_w}}}$$

Nas seções sub-armadas, evidentemente, esse valor de r é superior ao valor de r_{lim} . Com o valor de r , tira-se da tabela 8 o valor de α :

$$A_{s2} = \frac{\alpha \times M_2}{d}$$

a armadura total da seção T (C. C. N) será:

$$A_s = \frac{M_{ld}}{f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2})} + \frac{\alpha \times M_2}{d}$$

15.2 SEÇÕES EM T COM ARMADURA DUPLA

Seções em T com armadura dupla, ocorre sempre quando se tem seção de altura muito pequena para a solicitação existente. Vale lembrar que com altura muito reduzida pode-se ter grande flecha. É preciso estar sempre muito atento à deformação.

Como o cálculo de vigas de seção T já resulta em alturas relativamente pequenas, se para um dado momento solicitante for imposta altura da viga que exija o cálculo com armadura dupla, corre-se o risco de se ter deformações grandes. Por isso, B. LOESER (1949) aconselhava: “armaduras duplas em seções T de vigas, somente deviam ser usadas em casos excepcionais”.

O processo de cálculo de seções em T com armadura dupla segue o raciocínio especificado no caso de seção retangular. Calcula-se o momento máximo que a seção T é capaz de absorver, aproveitando-se integralmente as tensões de compressão da sua seção, que é o caso de C. C. N.

O momento não absorvido será combatido por um novo binário criado com o implemento de uma armadura A'_s na zona de compressão, o mais próximo possível do bordo comprimido e um acréscimo ΔA_s da armadura de tração.

Seja M o momento solicitante:

$$\Delta M = M - M_o \quad \text{ou} \quad \Delta M_d = M_d - M_{od}$$

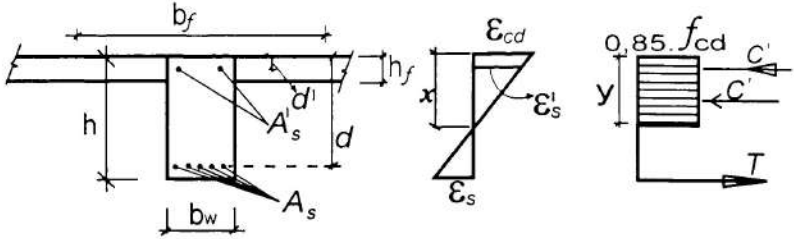
$$\Delta M_d = A'_s \times f_{ycd} \times (d - d')$$

$$A'_s = \frac{\Delta M_d}{f_{ycd} \times (d - d')}$$

$$A_s = \frac{M_{1d}}{f_{yd} \times (d - \frac{h_f}{2})} + \frac{\alpha \times M_{o2}}{d} + \frac{\Delta M_d}{f_{yd} \times (d - d')}$$

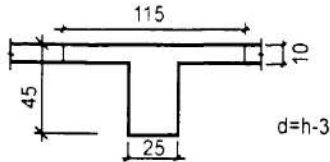
onde f_{ycd} é obtido diretamente da tabela em função de $m = \frac{d'}{h}$, como no caso de seção retangular.

A seção tem a seguinte configuração:



15.3 APLICAÇÃO NUMÉRICA

1. Qual o valor máximo do momento fletor positivo que a seção abaixo indicada é capaz de resistir como simplesmente armada. Trabalha-se com aço CA-50 A, e concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$ e $b_f = 115 \text{ cm}$.



Resposta: Como se quer o valor máximo tem-se que explorar toda a capacidade da seção. O momento fletor sendo considerado positivo, a laje colaborará nos esforços de compressão e portanto, o cálculo será feito como seção T, considerando-se a colaboração da nervura, com a largura da mesa já prefixada. A seção T, tem mais capacidade de resistência do que a seção retangular de seção 25×45 .

Como seção T, o cálculo será feito considerando a colaboração da nervura (C.C.N.). Para os materiais indicados tem-se:

$$M_d^T = 0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f \times \left(d - \frac{h_f}{2}\right)$$

$$M_d^R = 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y_{lim} \times \left(d - \frac{y_{lim}}{2}\right) \quad \text{ou,} \quad M_{oR} = \frac{b_w \times d^2}{r_{lim}^2}$$

$$\therefore M_d^t = 0,85 \times 107 \times 90 \times 10 \times (42 - 5) = 3028635 \text{ kgcm}$$

$$\therefore M_d^t = 30,28 \text{ tm} \quad \text{e portanto,} \quad M_o^t = \frac{30,28}{1,4} = 21,63 \text{ tm}$$

para a nervura o momento admissível é:

$$M_o^R = \frac{25 \times 42^2}{6^2} = 12,25 \text{ tm}$$

o momento máximo que ela absorve é:

$$M_o = M_o^t + M_o^R = 21,63 + 12,25 = 33,88 \text{ tm}$$

2. No exercício anterior, calcular a área de aço necessária

Resposta:: Para a seção T:

$$A_{s1} = \frac{1,4 \times 2163000}{4350 \times (42 - 5)} = 18,81 \text{ cm}^2$$

para a seção retangular:

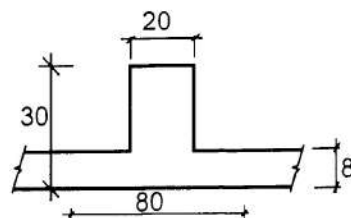
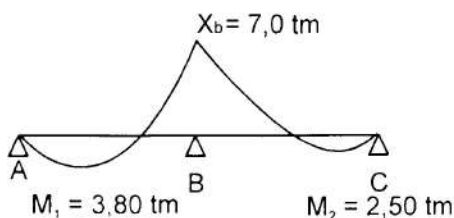
$$A_{s2} = \frac{\alpha_{lim} \times M_o^R}{d} = \frac{0,43 \times 1225}{42} = 12,54 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 18,81 + 12,54 = 31,35 \text{ cm}^2$$

Na prática, essa área calculada corresponderia a 10 ϕ 20, ou 8 ϕ 22,5, o que levaria a um detalhe em duas camadas. Assim, o cálculo teria que ser refeito para uma nova altura útil, da ordem de :

$$d = h - 6 = 45 - 6 = 39 \text{ cm}$$

3. Apresentar detalhe esquemático de armação para a seção de apoio da viga invertida, abaixo indicada. Trabalha-se com aço CA-50A e $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$.



Resposta: Como a viga é invertida, ela pode trabalhar como seção T para o momento fletor negativo. Em primeiro lugar o cálculo será feito desprezando-se a colaboração da nervura: ($b_f = 80$)

$$M_d = 0,85 \times 107 \times 80 \times 8 \times \left(27 - \frac{8}{2}\right) = 1338784 \text{ kgcm}$$

$$M_o = \frac{1338784 \text{ kgcm}}{1,4} = \frac{13,38 \text{ tm}}{1,4} = 9,56 \text{ tm}$$

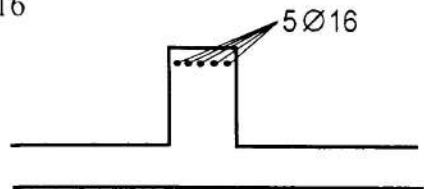
Como nessa hipótese a seção T já absorve o momento $X_B = 7,0$ tm, não será preciso usar a hipótese de C. C. N. (considerando a colaboração da nervura).

A armação para $X_B = 7,0$ tm, será:

$$A_s = \frac{1,4 \times 700000}{4350 \times \left(27 - \frac{8}{2}\right)}$$

$$A_s = 9,80 \text{ cm}^2 \equiv 5\phi 16$$

Detalhe esquemático:



Como a seção absorve 9,56tm e o momento é de 7,00tm, desejando-se reduzir o b_f , calcula-se o $b_{f \text{ nec}}$:

$$b_{f \text{ nec}} = \frac{1,4 \times 700000}{0,85 \times f_{cd} \times h_f \times \left(d - \frac{h_f}{2}\right)}$$

encontra-se $b_{f \text{ nec}} = 58,5$. Para efeito prático, adota-se $b_{f \text{ nec}} = 60 \text{ cm}$, valor este menor do que o prefixado, portanto, mais econômico.

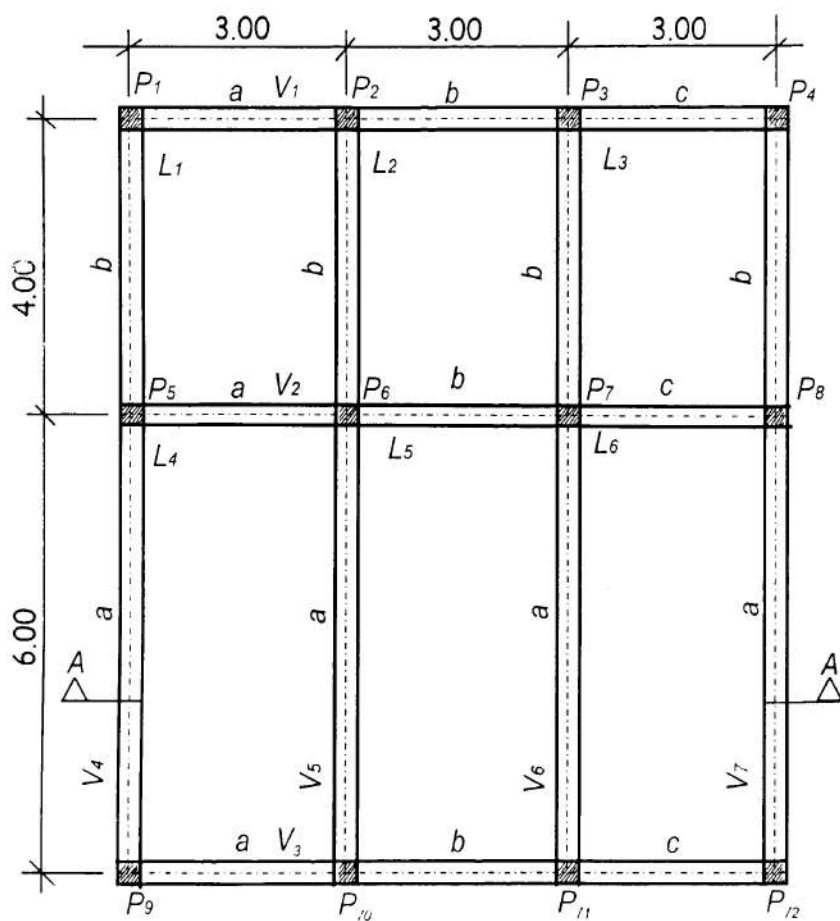
Observe-se que para o cálculo como seção retangular de 20×30 , o momento M_o dessa seção é:

$$M_o = \frac{20 \times 27^2}{36} = 405 \text{ tcm} \equiv 4,05 \text{ tm}$$

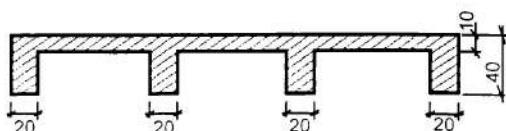
o que levaria a um dimensionamento com armadura dupla para a seção do apoio B.

Deve-se ainda ressaltar que nada impede que o cálculo seja sempre feito como seção retangular, mesmo para as seções que se comportam estruturalmente como seção T. Trata-se de uma opção. Todavia, muitas vezes, o cálculo como seção T otimiza a solução estrutural.

4. No painel de lajes abaixo indicadas, determinar qual a largura máxima de mesa permitida pela NBR-6118, para a viga V_4 e V_6 .



Corte A-A



Resposta: De acordo com a NBR-6118:

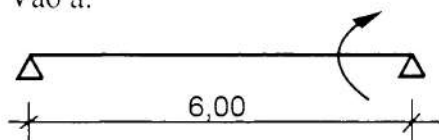
$$b_f = b_w + b_l^c + b_l^d$$

Como não se trata de viga isolada:

$$b_l \leq \begin{cases} 0,10 \cdot a \\ 8h_f \\ 0,5 \cdot b_2 \end{cases}$$

Para a viga V_4 , que é extrema:

Vão a:

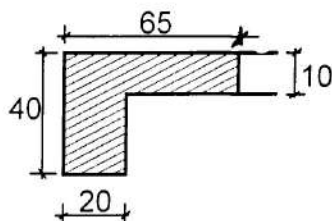


$$b_l^d \leq \begin{cases} 0,10 \times 450 = 45 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 0,5 \times 280 = 140 \end{cases}$$

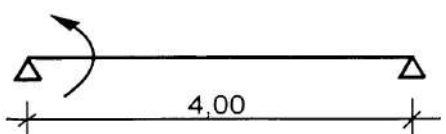
$$a = \frac{3}{4} \times 600 = 450$$

$$\text{Logo, } b_l^d = 45 \quad b_f = 20 + 45 = 65 \text{ cm}$$

Esta viga no vão "a", de momento fletor positivo, poderá ser calculada como seção T (em verdade, L invertido), com a seguinte geometria:



No vão b:

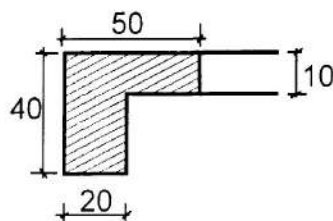


$$a = \frac{3}{4} \times 400 = 300$$

$$b_1^d \leq \begin{cases} 0,10 \times 300 = 30 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 0,5 \times 280 = 140 \end{cases}$$

neste caso, $b_f = 20 + 30 = 50\text{cm}$

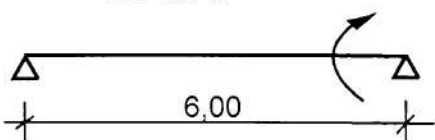
E, a sua configuração geométrica será:



Com a finalidade de simplificar, e a favor também da segurança, será tomado um valor único de b_f , que é: $b_f = 50$, ou seja, o menor dos dois valores.

Para a viga V_6 tem-se:

No vão a:



$$b_1^c \leq \begin{cases} 0,10 \times 450 = 45 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 0,5 \times 280 = 140 \end{cases}$$

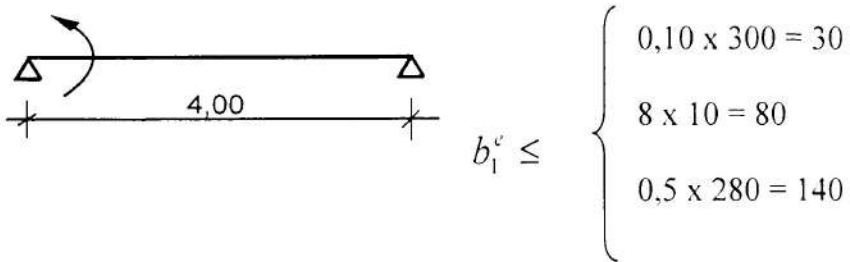
tem-se $b_1^c = 45\text{ cm}$

$$b_1^d \leq \begin{cases} 0,10 \times 450 = 45 \\ 8 \times 10 = 80 \\ 0,5 \times 280 = 140 \end{cases}$$

tem-se $b_1^d = 45 \text{ cm}$

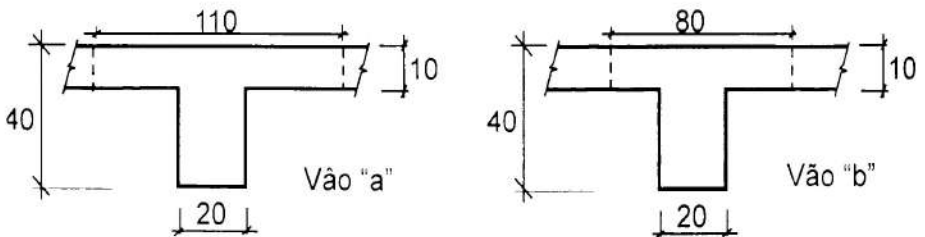
então, $b_f = 20 + 45 + 45 = 110 \text{ cm}$

No vão b:



e como se constata que $b_1^d = b_1^e$, vem: $b_f = 20 + 30 + 30 = 80 \text{ cm}$

Sua configuração geométrica para o cálculo como seção T será:



Com o objetivo de simplificar pode-se calcular com $b_f=80$, guardando assim uma mesma largura de mesa ao longo da viga, salvo se o vão "a" exigir $b_f > 80$.

15.4 VERIFICAÇÃO DE ESTABILIDADE

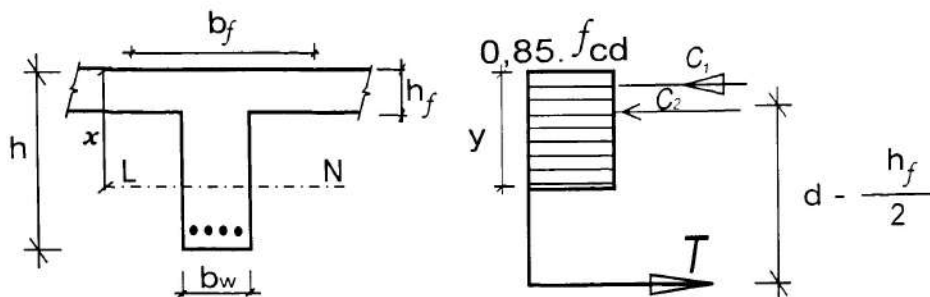
15.4.1 SEÇÕES COM ARMADURA SIMPLES

Como foi visto no caso de seção retangular, nos problemas de verificação de estabilidade de seções T solicitadas à flexão simples são também conhecidos todos os elementos geométricos da seção, a armadura A_s e a resistência dos materiais empregados.

Calcula-se o momento M_d da seção e verifica-se se a relação entre o momento M_d e o momento solicitante M , satisfaz a condição de estabilidade

$$\gamma_f = \frac{M_d}{M} \geq 1,4$$

Para início do cálculo de verificação de estabilidade, deve-se verificar se a linha neutra corta ou não a mesa:



condição de equilíbrio:

$$C_1 + C_2 = T$$

$$0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f + 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y = A_s \times f_{yd}$$

$$0,85 \times f_{cd} \times (b_f \times h_f - b_w \times h_f + b_w \times y) = A_s \times f_{yd}$$

$$y = h_f + \frac{1}{b_w} \times \left(\frac{A_s \times f_{yd}}{0,85 \times f_{cd}} - b_f \times h_f \right)$$

se,

$$\frac{A_s \times f_{yd}}{0,85 \times f_{cd}} \leq b_f \times h_f, \quad y \leq h_f$$

a linha neutra corta a mesa, então a verificação deve ser feita como seção retangular de largura b_f . Se $\frac{A_s \times f_{yd}}{0,85 \times f_{cd}} > b_f \times h_f$, a linha neutra

corta a nervura, pois $y > h_f$. Calculado y , verifica-se se $y \leq y_{lim}$, o que define a seção sub-armada ou normalmente armada respectivamente.

Ocorrendo $y \leq y_{lim}$, calcula-se o valor de M_d :

$$M_d = C_1 \times \left(d - \frac{h_f}{2}\right) + C_2 \times \left(d - \frac{y}{2}\right)$$

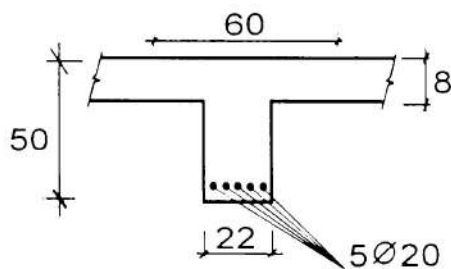
$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f \times \left(d - \frac{h_f}{2}\right) + b_w \times y \times \left(d - \frac{y}{2}\right)$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times \left[(b_f - b_w) \times \left(d - \frac{h_f}{2}\right) \times h_f + b_w \times y \times \left(d - \frac{y}{2}\right) \right]$$

Usando as unidades em kg e cm, tem-se M_d em kgcm. Essa expressão de M_d , só pode ser utilizada quando a seção se enquadra em sub-armada, ou normalmente armada.

Aplicação Numérica:

Verificar se a seção indicada a seguir, suporta a solicitação de um momento positivo de 12,00tm.



Aço CA-50A

Concreto : $f_{ck} = 150 \text{ kg cm}^2$

$d = h - 3 = 47 \text{ cm}$

Resposta : Calcula-se y :

$$y = 8 + \frac{1}{22} \left[\frac{15,75 \times 4350}{0,85 \times 107} - 60 \times 8 \right]$$

$$y = 20,42 \text{ cm}$$

Para o aço CA-50A, da tabela tira-se:

$$y_{lim} = 0,503 \times 47 = 23,64 \quad y < y_{lim} \quad (\text{seção sub-armada})$$

$$\therefore M_d = 0,85 \times 107 \times \left[(60 - 22) \cdot \left(47 - \frac{8}{2} \right) \times 8 + 22 \times 20,42 \times \left(47 - \frac{20,42}{2} \right) \right]$$

$$\therefore M_d = 2692078 \text{ kgcm} = 26,92 \text{ tm}$$

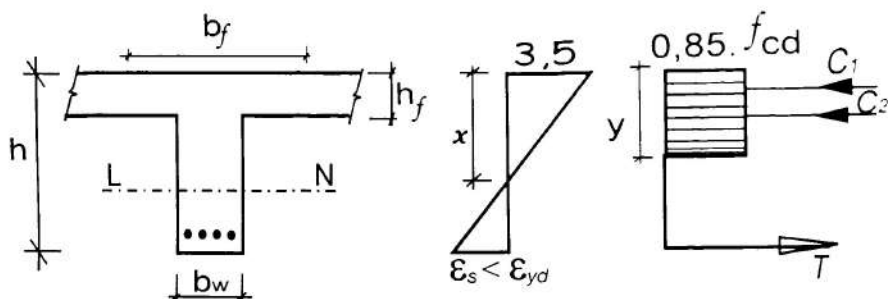
$$\therefore M_o = 19,22 \text{ tm}$$

Como $M_o > M$ ($M = 12,00 \text{ tm}$), a resposta é que a seção suporta bem essa solicitação. Também, pode-se tirar essa conclusão calculando-se o valor do coeficiente de segurança, em relação ao momento $M = 12,00 \text{ tm}$:

$$\gamma_s = \frac{19,22}{12,00} = 1,6 \quad \text{ou seja } \gamma_s > \gamma_r$$

15.4.2 SEÇÕES SUPER-ARMADAS

Quando $y > y_{lim}$ ($y_{lim} = s_{lim} \cdot d$), a seção é super-armada e o valor de y , previamente calculado não é correto, vez que, por ocasião da ruptura do concreto a armadura não se encontra em fase de escoamento, tendo portanto sua tensão $f_y < f_{yd}$.



A expressão de y passa a ser :

$$y = h_f + \frac{1}{b_w} \left(\frac{A_s \times f_y}{0,85 \times f_{cd}} - b_f \times h_f \right)$$

Sendo $f_y = \epsilon_s \times E_s$

Do diagrama de deformação obtém-se:

$$\frac{\varepsilon_s}{d-x} = \frac{3,5}{x} \quad \therefore \quad \varepsilon_s = \frac{d-x}{x} \times 3,5$$

$$f_s = \frac{d-x}{x} \times 3,5 \times E_s$$

$$f_s = \frac{7350 \times (d-x)}{x}$$

$$x = \frac{y}{0,8}$$

$$f_s = \frac{7350 \times (d - \frac{y}{0,8})}{\frac{y}{0,8}} = \frac{7350 \times (\frac{0,8 \times d - y}{0,8}) \times 0,8}{y}$$

$$f_s = \frac{7350 \times (0,8 \times d - y)}{y}$$

$$y = h_f + \frac{1}{b_w} \left[\frac{A_s (0,8 \times d - y) \times 7350}{0,85 \times f_{cd} \times y} - b_f \times h_f \right]$$

Essa expressão leva a uma equação do 2º grau em "y". Com esse valor de "y" corrigido calcula-se:

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \left[(b_f - b_w) \cdot (d - \frac{h_f}{2}) \times h_f + b_w \times y \times (d - \frac{y}{2}) \right]$$

e, daí: $M_o = \frac{M_d}{\gamma_f}$ onde $\gamma_f = 1,4$

Os casos de seção T super-armadas são pouco frequentes.

15.4.3 SEÇÕES COM ARMADURA DUPLA

Menos freqüente ainda que o caso anterior é aquele de verificação de estabilidade em seções duplamente armadas, uma vez que já é excepcional o caso do próprio dimensionamento de seção T com armadura dupla. Mas, visando completar o estudo relativo a seção T, será visto a seguir o caso de verificação de estabilidade em seções T com armadura dupla.

Equação de equilíbrio entre os esforços de compressão e de tração:

$$C_1 + C_2 + C' = T$$

$$0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f + 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y' + A_s' \times f_{ycd} = A_s \times f_{yd}$$

$$\therefore y' = \frac{A_s \times f_{yd} - A_s' \times f_{ycd}}{0,85 \times f_{cd} \times b_w} - \frac{(b_f - b_w) \times h_f}{b_w}$$

Como no caso de seção retangular deve-se pesquisar as diversas hipóteses que podem ocorrer:

- a armadura de tração não se escoar
- a armadura de compressão não se escoar
- ambas as armaduras se escoam

Tem-se então que calcular as respectivas deformações a partir do diagrama de deformação e em função da posição da linha neutra "x" (ou "y"). Do diagrama das deformações tem-se as tensões respectivas:

$$f_y = \frac{d - x}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s \quad \text{e} \quad f_{yc} = \frac{x - d'}{x} \times \varepsilon_{cd} \times E_s$$

Na expressão de "y", pode acontecer de se ter f_y como incógnita, ou, pode-se ter f_{yc} como incógnita. Nesses casos, é sempre necessário se calcular o verdadeiro valor da posição da linha neutra "x", ou "y". Tem-se assim, uma equação do segundo grau de fácil solução.

A partir do verdadeiro valor r de x , ou de y , pode-se calcular o valor de M_d :

$$M_d = C_1 \times (d - \frac{h_f}{2}) + C_2 \times (d - \frac{y}{2}) + A'_s \times f_{yc} \times (d - d')$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times (b_f - b_w) \times h_f \times (d - \frac{h_f}{2}) + 0,85 \times f_{cd} \times b_w \times y \times (d - \frac{y}{2}) + A'_s \times f_{yc} \times (d - d')$$

$$M_d = 0,85 \times f_{cd} \times \left[(b_f - b_w) \times h_f \times (d - \frac{h_f}{2}) + b_w \times y \times (d - \frac{y}{2}) \right] + A'_s \times f_{yc} \times (d - d')$$

Calculado o valor de M_d , calcula-se o valor do momento que ela suporta M_o :

$$M_o = \frac{M_d}{\gamma_f} \quad \text{onde} \quad \gamma_f = 1,4$$

Comparando M_o com o momento solicitante M , todas as vezes que $M \leq M_o$, a seção é estável. Em caso contrário, ela é instável, quer dizer, a sua estabilidade está comprometida.

Na prática, havendo dúvida se uma seção já definida resiste a um determinado momento, é mais simples e prático recalcular essa seção, obedecendo aos mesmos parâmetros de geometria e de resistência dos materiais, e assim comparar os resultados encontrados para as armaduras.

Se ambas as armaduras se escoam, o cálculo de " y " é imediato, e consequentemente M_d e M_o .

16. PILARES

16.1 PILARES SIMPLES

Os pilares simples de concreto armado são, de um modo geral, peças verticais que possuem barras longitudinais e transversais, que solidárias ao concreto devem resistir a esforço normal solicitante. Atuam sobre os pilares não só o seu peso próprio, mas também as ações das vigas que sobre eles repousam, cujos valores são as reações de cálculo das vigas. Há casos em que a laje repousa diretamente sobre os pilares, são as chamadas lajes cogumelos.

A compressão simples corresponde ao caso em que a solicitação exterior é um esforço normal axial, atuando teoricamente no baricentro da seção de concreto armado. Este esforço normal é equilibrado pela resistência à compressão do concreto, mais a resistência da armadura comprimida. Representam assim, as duas parcelas da equação de equilíbrio entre ação e reação. No estágio III trabalha-se com a carga de estado limite último N_d , que é a carga de serviço multiplicada pelo coeficiente de segurança γ_f .

$$N_d = N \times \gamma_f$$

γ_f tem o valor de 1,4 ou de 1,8, dependendo de características específicas da geometria da seção, conforme prescreve a NBR-6118, e que será visto mais adiante.

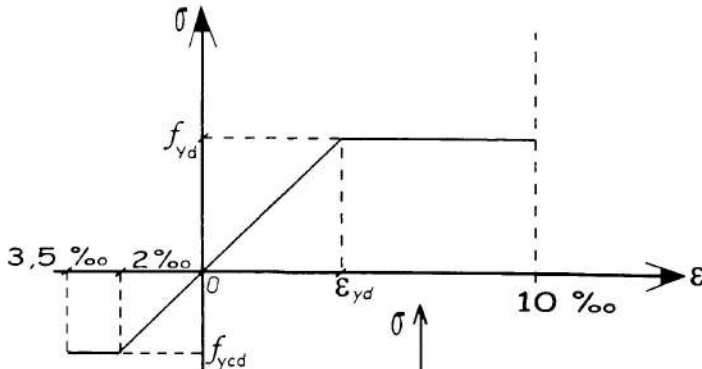
No esforço de compressão axial o concreto atinge o seu limite de resistência, quando o encurtamento relativo da peça é de 2‰ (0,2% ou 2mm/m). Com esse encurtamento, também se esgota a capacidade de resistência da armadura para certos tipos de aço, onde o encurtamento relativo de 0,2 % coincide com o escoamento do aço. Nem todos os tipos de aço atingem o escoamento à compressão quando o encurtamento é de 0,2 %, mas, com este encurtamento a seção já entra em ruptura por esmagamento do concreto, ou seja, em estado limite último. Assim, por compatibilidade de deformações as tensões de compressão de trabalho do aço f_{ycd} , ficarão limitadas ao valor correspondente a essa deformação.

Para alguns tipos de aço usados em concreto armado, os valores de $f_{y\text{cd}}$ estão indicados no quadro que segue:

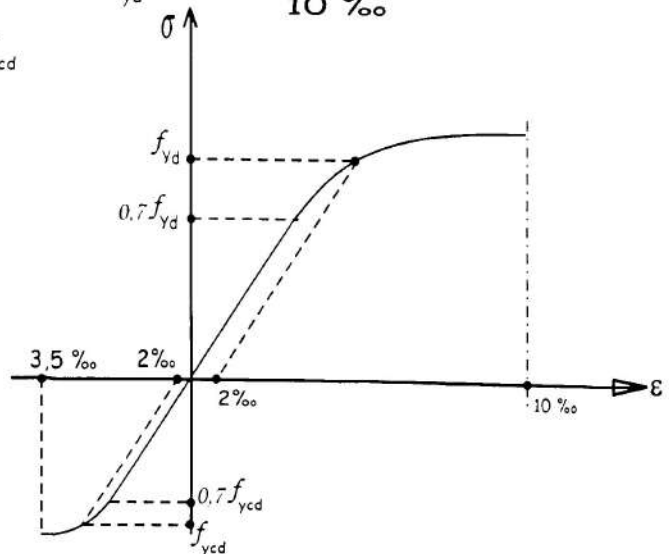
Aço	$f_{y\text{ck}}$ kg/cm ²	$f_{y\text{cd}}$ kg/cm ²	deformação
Ca-25	2500	2174	0,2 % (ϵ_s')
CA-50A	5000	4200	0,2 % ..
CA-50B	5000	3550	0,2 % ..
CA-60A	6000	4200	0,2 % ..
CA-60B	6000	4000	0,2 % ..

O diagrama simplificado de tensão/deformação tem o seguinte aspecto:

1- Aço com patamar de escoamento (tipo A, ou comum)



2- Aço tipo B:



CONCRETO ARMADO

Para as barras tracionadas a Norma Brasileira fixa em 10mm/m(10‰) o alongamento máximo permitido, a fim de evitar grandes deformações plásticas. Para as barras comprimidas o limite de encurtamento máximo é de 3,5 mm/m (3.5 ‰).

16.2 DIMENSIONAMENTO DE PILARES CURTOS

A NBR-6118 classifica como pilares curtos aqueles cujo índice de esbeltez não ultrapassa 40.

Para o cálculo de pilares utiliza-se conhecimentos já adquiridos na Resistência dos Materiais:

l_f ou l_e – comprimento de flambagem (comprimento elástico)

$$i = \sqrt{\frac{J}{A_c}} \quad \text{- raio de giração}$$

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad \text{- índice de esbeltez}$$

Seção retangular: $i = \sqrt{\frac{J}{A_c}}$ $A_c = a \times b$ sendo "a" a menor dimensão da seção:

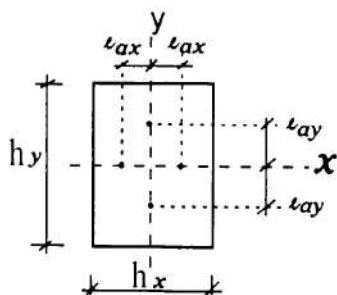
$$\therefore \lambda = 3.46 \frac{l_e}{a}$$

Seção circular: $\lambda = 4 \frac{l_e}{D}$ sendo D o diâmetro da seção. Na

prática, devido às incertezas geométricas construtivas, assim como incertezas quanto ao real ponto de aplicação das forças externas, é norma comum em diversos países que se calcule essas seções com uma excentricidade mínima acidental.



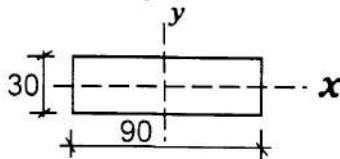
A NBR-6118 recomenda para essa excentricidade acidental e_{ai} , o valor $h/30$, não inferior a 2cm. onde h é a dimensão da seção na direção em que se considera a excentricidade:



$$e_{ax} \geq \begin{cases} h_x/30 \\ 2\text{cm} \end{cases}$$

$$e_{ay} \geq \begin{cases} h_y/30 \\ 2\text{cm} \end{cases}$$

Para a seção:



$$e_{ax} = \begin{cases} 90/30=3 \\ 2 \end{cases}$$

$$e_{ay} = \begin{cases} 30/30 \\ 2 \end{cases}$$

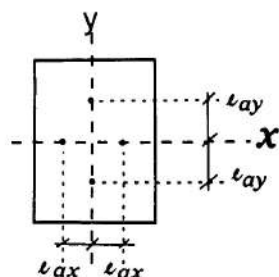
Essas excentricidades são tomadas em ambos os sentidos.

Utiliza-se então $e_{ai} = \pm 3$ cm para o cálculo na direção $X - X$, e $e_{ai} = \pm 2$ cm para o cálculo na direção $Y - Y$.

O cálculo do pilar, quando a carga N_d for considerada centrada, de acordo com a Norma Brasileira deverá "ser feito separadamente nas duas direções principais da seção geométrica, sob a mesma força total, com as excentricidades e_{ax} e e_{ay} não se somando às armaduras". Tem-se assim:

$$N_d \text{ e } M_{ld} = \pm N_d \times e_{ax}$$

$$N_d \text{ e } M_{ld} = \pm N_d \times e_{ay}$$



A seção ficará então submetida a duas flexões compostas normais, segundo as direções principais x e y . Este seria o processo

exato de cálculo. Entretanto, a NBR-6118 adota uma alternativa simplificada para o cálculo de pilar a compressão simples, quando $\lambda \leq 40$. Essa alternativa consiste em calcular o pilar aplicando um coeficiente de majoração sobre a força normal N_d , no valor de $1 + 6/h$, não inferior a 1,1 onde h , medido em centímetros é o menor lado do retângulo mais estreito circunscrito à seção.

Se N é a carga axial solicitante:

$N_d = N \times \gamma_f$ e a carga de cálculo N'_d é:

$N'_d = N_d (1 + 6/h)$, com $1 + 6/h \geq 1,1$

Assim, para o cálculo simplificado a Norma Brasileira prescreve um aumento mínimo de 10% no valor da carga.

16.3 ESBELTEZ

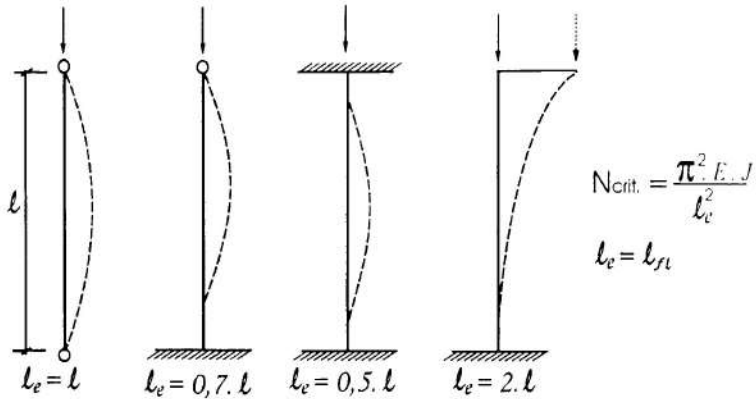
Todo cálculo de pilar simples exige a determinação do índice de esbeltez. Para isso é necessário saber o comprimento de flambagem do pilar, ou seja, o seu comprimento elástico.

A Resistência dos Materiais ensina, que o termo flambagem de uma barra significa a curvatura ou desvio de eixo da barra por flexão lateral, o que ocasiona um equilíbrio instável. Essa flexão lateral ocorrerá ou não, dependendo da esbeltez da barra.

O valor da carga de compressão necessária para que se inicie a flambagem é chamada de carga crítica, ou carga de flambagem, ou ainda carga de EULER, matemático suíço que estabeleceu uma fórmula representativa da carga crítica de flambagem:

$$N_{crit.} = \frac{\pi^2 \times E \times J}{l_e^2}$$

Onde, l_e é o comprimento elástico que depende das condições de extremidade do pilar:



Para os pilares com extremidades livres, (postes, por exemplo) o comprimento de flambagem é o mesmo que teria um pilar bi-articulado, com o dobro da altura (apresentam igualdade dos desvios máximos).

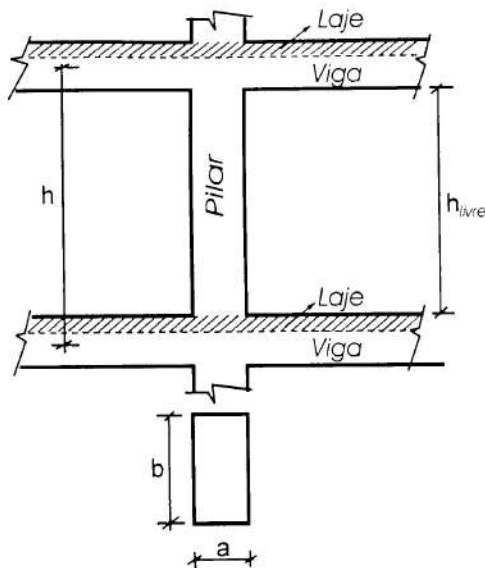
De acordo com a NBR-6118, “nas estruturas de edifícios com nós considerados indeslocáveis, o comprimento l_e de um pilar é a distância entre eixos das vigas entre as quais ele se situa”. Essa hipótese é obviamente bastante conservadora.

16.4 DIMENSÕES MÍNIMAS

Quanto às dimensões da seção do pilar, prescreve a Norma Brasileira:

CONCRETO ARMADO

“a menor dimensão dos pilares não cintados, não deve ser inferior a 20 cm, nem a 1/25 da sua altura livre.” Assim:



$$a \geq \begin{cases} 20\text{cm} \\ \frac{1}{25} \times h_{\text{livre}} \end{cases}$$

$$\text{caso } a < 20, \text{ ou } a < \frac{1}{25} \times h_{\text{livre}}$$

$$\gamma_f = 1.8 \quad \therefore N_d = N \times 1.8$$

Diz ainda a Norma Brasileira que o valor do coeficiente de segurança deve ser igual a 1,8, nos seguintes casos:

- “pilares de seção transversal, com raio de giração não menor que 6 cm, composta de retângulos (cantoneiras, tês, duplos tês), cada um dos quais com largura não inferior a 10cm, nem a 1/15 do respectivo comprimento”.
- “pilares de seção transversal retangular, com largura não inferior a 12 cm e comprimento não superior a 60cm, apoiado no elemento estrutural subjacente em toda a extensão de sua base, consideradas obrigatoriamente no seu cálculo a flexão oriunda das ligações com lajes e vigas e a flambagem conjunta dos pilares superpostos.”.

É importante lembrar que quando a peça estrutural (lajes, vigas, pilares, blocos de fundação, etc.) estiver exposta à ação prejudicial de agentes externos, tais como ácidos, álcalis, águas agressivas, óleos e gases nocivos, temperatura muito alta ou muito baixa, os valores das tensões de cálculo serão divididos por 1,2 “. Assim, nesses casos:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_f} \quad \gamma_f = 1,4 \times 1,2$$

$$f_{sd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad \gamma_s = 1,15 \times 1,2$$

O coeficiente 1,2 incide somente sobre os materiais.

16.5 CÁLCULO SIMPLIFICADO PARA PILARES SIMPLES

A seguir, o processo para o cálculo simplificado, permitido pela NBR-6118:

1º Caso: $\lambda \leq 40$

Seção do pilar : A_c

Seção de aço: A_s

h – menor dimensão da seção

$$N_d = N \times \gamma_f$$

$$N'_d = N_d \times \left(1 + \frac{6}{h}\right) \quad \text{com} \quad 1 + \frac{6}{h} \geq 1,1$$

CONCRETO ARMADO

Na equação de equilíbrio, no estado limite último, a carga é equilibrada por duas parcelas: concreto e aço.

$$N_d' = 0,85 \times f_{cd} \times A_c + A_s \times f_{ycd}$$

A partir daí pode-se calcular a seção de concreto, ou a seção de aço:

$$A_c = \frac{N_d' - A_s \times f_{ycd}}{0,85 \times f_{cd}}$$
$$A_s = \frac{N_d' - 0,85 \times f_{cd} \times A_c}{f_{ycd}}$$

Chamando de $\varphi = \frac{A_s}{A_c}$ a taxa de armadura, pode-se escrever:

$$N_d' = (0,85 \times f_{cd} + \frac{A_s}{A_c} \times f_{ycd}) \times A_c$$
$$A_c = \frac{N_d'}{0,85 \times f_{cd} + \varphi \times f_{ycd}}$$

De acordo com a Norma, a armadura longitudinal de um pilar simples que tenha todas as suas barras comprimidas, deve ter seção transversal compreendida entre 0,8 % e 6 % da seção de concreto.

$$0,8\% \leq \varphi \leq 6\%$$

Quando $\lambda \leq 30$, a menor porcentagem pode ser 0,5 %:

$$0,5\% \leq \varphi \leq 6\%$$

Em nenhum caso a porcentagem será inferior a 0,5% da área da seção real do pilar. Diz ainda a NBR-6118, que a bitola das barras longitudinais dos pilares não poderá ser inferior a 10 mm, e a dos estribos não poderá ser inferior a 5,0 mm.

Como se pode constatar, a equação de equilíbrio:

$$N_d' = 0.85 f_{cd} \cdot A_c + A_s \cdot f_{yd}$$

contem duas incógnitas, A_c e A_s , pois, quanto aos materiais, suas características são pré-definidas pelo calculista. Assim, o cálculo exige duas hipóteses de dimensionamento:

ou se fixa a seção do pilar e se calcula a armação;

ou se fixa a seção de armação e se calcula a seção do pilar.

Toda vez que se calcula a área da armadura de um pilar deve-se sempre verificar o valor de φ .

É comum se procurar saber qual a seção necessária de um pilar para suportar determinada carga de solicitação trabalhando-se com um percentual mínimo de armação (0.8 %), pois este percentual aproxima-se bastante da solução mais econômica:

$$A_{c\text{ nec}} = \frac{N_d'}{0.85 \times f_{cd} + 0.008 \times f_{yd}}$$

Quanto menor a taxa de armadura, maior a seção do pilar. Quanto maior a taxa de armação, menor a seção do pilar. Neste caso, a solução será mais esbelta, porém, menos econômica.

Será sempre mais econômico se trabalhar com taxas pequenas de armadura. O cálculo do dimensionamento econômico é objeto de um estudo específico, onde se leva em conta o preço dos materiais, concreto e aço, além do preço da forma e da mão de obra. Assim, pode-se determinar o valor do percentual de armadura, que corresponde à seção mais econômica.

2° Caso: $40 < \lambda \leq 80$

Nesse caso, como alternativa simplificada para o cálculo de pilares, o processo é o seguinte:

Calcula-se:

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \times f_{cd}} \quad \text{onde,} \quad N_d = N \times \gamma_f$$

O processo simplificado é recomendado pela NBR-6118, sempre que

$\nu \geq 0,7$. Então, se calcula a armadura como compressão simples, desde que se aumente a carga na proporção de $1 + \frac{k.e}{h} \geq 1,1$, onde:

$e = e_1 + e_2$, sendo e_2 a excentricidade de 2ª ordem, ou excentricidade complementar, cuja expressão é:

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \times \frac{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{yd}}{(\nu + 0,5) \times h}$$

$$e_2 = \frac{\ell_e^2}{10} \times \frac{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{(\nu + 0,5) \times h}$$

onde, $\frac{\varepsilon_{cd} + \varepsilon_{yd}}{(\nu + 0,5) \times h}$, representa a curvatura do eixo da peça.

É exigência da NBR-6118, que $\nu + 0,5 \geq 1$

Deve-se sempre utilizar h e e_a segundo a direção correspondente a maior esbeltez. O cálculo será feito a partir da carga aumentada :

$$N'_d = N_d \times \left(1 + \frac{k.e}{h}\right) \quad \text{com,} \quad 1 + \frac{k.e}{h} \geq 1,1$$

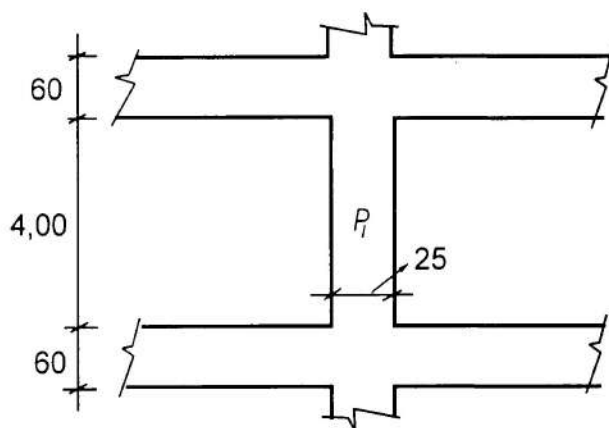
Valor de k :

- $k = 3$, para seções retangulares, onde, pelo menos $2/3$ da armadura é disposta ao longo das bordas perpendiculares ao lado de altura "h".
- $k = 4$, para as seções retangulares com qualquer disposição de armadura, e para as seções circulares.

16.6 APLICAÇÃO NUMÉRICA

1º Caso :

1-Apresentar detalhe esquemático de armação para o pilar P_1 , de seção 25×50 , que deve suportar uma carga, suposta axial, de 110 toneladas . trabalhando-se com aço CA- 50 B e concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$ O pilar é rigidamente apoiado nas suas extremidades, e tem altura conforme figura abaixo:



RESPOSTA:

CÁLCULO DE ESBELTEZ: Como as extremidades estão rigidamente apoiadas pode-se assimilar à condição de engaste:

$$\lambda = 3,46 \times \frac{\ell_e}{a} \quad \text{sendo "a" a menor dimensão da seção}$$

$$\ell = 4,00 + 0,30 + 0,30 = 4,60$$

$$\ell_e = 0,5 \times 460 = 230 \text{ cm}$$

$$\lambda = 3,46 \times \frac{230}{25} = 31,83 < 40$$

Verificação do valor de γ_f (1,4 ou 1,8 ?)

$$a = 25 > 20$$

$$1/25 \times l_{\text{livre}} = 1/25 \cdot 400 = 16 \quad 25 > 16$$

$$\text{logo: } \gamma_f = 1,4$$

CÁLCULO DA ARMAÇÃO:

$$A_s = \frac{N_d' - 0,85 \times f_{cd} \times A_c}{f_{cd}}$$

$$A_c = 25 \times 50 = 1250$$

$$N_d' = 110000 \times 1,4$$

$$f_{cd} = \frac{150}{1,4} = 107 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{yd} = 3550 \text{ kg/cm}^2$$

$$N_d' = 110000 \times 1,4 \times \left(1 + \frac{6}{25}\right) = 190960 \text{ kg}$$

onde a condição $1 + \frac{6}{h} \geq 1,1$, está satisfeita.

$$A_s = \frac{190960 - 0,85 \times 107 \times 1250}{3550} = 21,80 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 21,8 \text{ cm}^2$$

VERIFICAÇÃO DE φ :

$$\varphi = \frac{21.8}{1250} = 0.017 \equiv 1.7\% < 6\%$$

logo, satisfaz a exigência normativa:

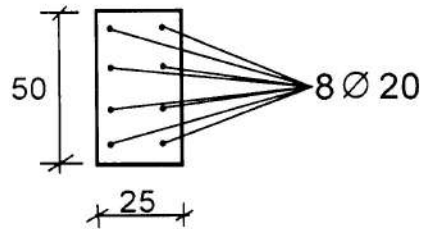
$$0.8\% \leq \varphi \leq 6\%$$

DEFINIÇÃO DA ARMAÇÃO:

a quantidade de barras a se escolher, deve ser em número par com o objetivo de se ter uma distribuição uniforme da carga da seção. Escolhe-se assim, as barras e suas respectivas bitolas.

$$A_s = 21.8 = \begin{cases} 8\phi 20 \equiv 25.2 \text{ cm}^2 & \text{ou.} \\ 6\phi 22.5 \equiv 24 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Será adotado : 8 ϕ 20.

DETALHE ESQUEMÁTICO:

Note-se, que 7 ϕ 20 cobriria a área necessária de cálculo, mas será adotado 8 ϕ 20, para efeito de distribuição uniforme da carga na seção. Assim, se terá um pequeno excesso de área, de valor ligeiramente maior do que a área necessária indicada pelo cálculo, o que, portanto, fica a favor da segurança.

Na distribuição das barras longitudinais é condição normativa, que em qualquer seção transversal o espaçamento máximo entre elas não ultrapasse 40cm.

As barras longitudinais devem ser amarradas com barras transversais, chamadas de estribos, ao longo de toda a sua extensão. O espaçamento dessas barras não deve ser maior do que qualquer dos seguintes valores:

- 30 cm
- menor dimensão externa da seção do pilar

$$12 \times \phi_i \text{ e } \frac{190 \times \phi_i^2}{\phi_t} \text{ para os aços tipo CA-40, CA-50, CA-60}$$

$$21 \times \phi_i \text{ e } \frac{340 \times \phi_i^2}{\phi_t} \text{ para os aços tipo CA-25 e CA-32}$$

onde ϕ_i é o diâmetro da seção circular da barra longitudinal e ϕ_t é o diâmetro da seção circular do estribo. O diâmetro mínimo para estribo é 5,0 mm. Na prática, é aconselhável que o diâmetro dos estribos não seja inferior a $\phi_i / 4$, o que significa usar bitolas de estribos maiores do que 5,0, para barras com $\phi_i \geq 22,5$.

De acordo com a Norma Brasileira, em pilares no interior de edifícios o recobrimento dos estribos deve ser no mínimo de 1,5 cm, para pilares de concreto revestido com argamassa de espessura mínima de 1 cm, e 2,0 cm, para pilares ao ar livre. Em se tratando de concreto aparente esse recobrimento deve ser de 2,5 cm.

A prática tem demonstrado, que em regiões litorâneas é aconselhável um recobrimento de pelo menos 2,0 cm, mesmo em pilares situados nos interiores de edifícios.

2-Apresentar detalhe de armação para o pilar P₁, do exercício anterior, cuja seção é de 25 x 50.

RESPOSTA:

No cálculo foi adotado: $A_s = 8 \phi 20$

Comprimento de ancoragem:

$$\ell_{bh} = \frac{\phi_i}{4} \times \frac{f_{yd}}{\zeta_{bu}} \quad \text{onde, } \tau_{bu} = 0,9 \times \sqrt[3]{f_{cd}^2} = 0,9 \times \sqrt[3]{107^2} \cong 20 \text{ kg/cm}^2$$

De acordo com a NBR-6118, em seu artigo 4.1 6.2, item D, se as barras estão submetidas unicamente a esforços de compressão, a ancoragem será apenas retilínea (sem gancho) e o comprimento de ancoragem é calculado como no caso de tração, porém nunca inferior a $0,6 \cdot l_b$, nem a $10 \times \phi_l$, e nem a 15 cm.

$$l_{hc} = \frac{2}{4} \times \frac{4348}{20} = 65\text{cm} \quad (\phi_l = 2 \text{ cm})$$

Quanto ao espaçamento dos estribos, em barra de 5.0: ($\phi_l = 5\text{mm}$)

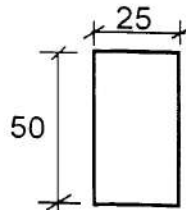
$$t \leq \begin{cases} 30\text{cm} \\ \text{menor dimensão da seção: } 25\text{cm} \\ 12 \times 2 = 24\text{cm} \\ \frac{190 \times 0,5^2}{2} = 23 \end{cases}$$

Pode-se então usar estribos de 5.0 cada 23, porém, para maior praticidade adota-se espaçamento de 20cm, o que fica a favor da segurança, pois, quem pode mais, pode menos.

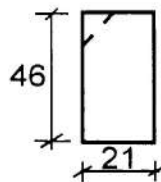
Usaremos então: estribos de $\phi 5,0 \text{ c. } 20 \equiv \phi 5,0 \text{ c. } 20$

Cálculo do comprimento dos estribos, usando-se recobrimento de 2 cm.

Seção do pilar:



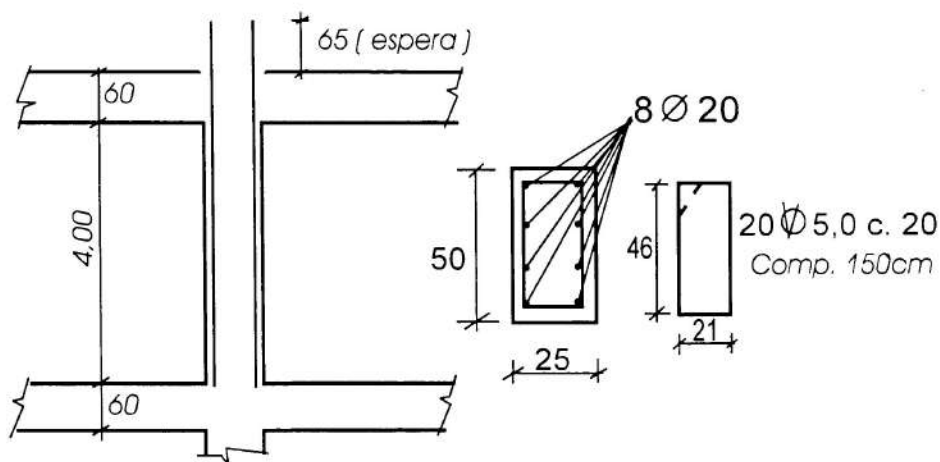
Seção dos estribos:



CONCRETO ARMADO

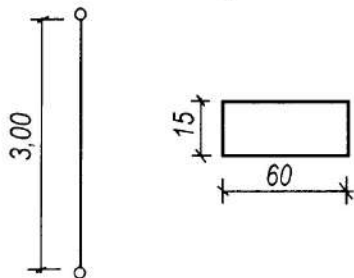
Para se ter um comprimento que garanta o traspasse necessário para fechamento dos estribos, basta que se tome como comprimento o próprio perímetro da seção real. Assim, se tem: $25+25+50+50=150\text{cm}$. Com este valor haverá um excesso de comprimento que servirá para se executar o traspasse.

O detalhe final passa a ser:



É norma ainda que o máximo espaçamento entre barras longitudinais não pode ser maior do que 40 cm. No exemplo acima, o espaçamento máximo é de 15,3 cm, logo satisfaz as prescrições regulamentares.

Apresentar detalhe esquemático de armação, para um pilar de seção 15 x 60, com altura esquematizada na figura abaixo, e que deve suportar uma carga centrada de 40 t. Aço CA-50 A e concreto de $f_{ck} = 150 \text{ kg/cm}^2$.



RESPOSTA:

Como a menor dimensão é inferior a 20 cm, $\gamma_f = 1,8$

Cálculo da esbeltez:

$$\lambda = 3,46 \times \frac{300}{15} = 69,2 \quad \text{tem-se} \quad 40 < \lambda < 80$$

$$A_c = 15 \times 60 = 900 \text{ cm}^2$$

$$N_d = 40 \times 1,8 = 72 \text{ t.} = 72000 \text{ kg}$$

$$\nu = \frac{72000}{900 \times 107} = 0,747 > 0,7$$

$$e = e_a + e_2 \quad e_a \geq \begin{cases} \frac{15}{30} = 0,5 \\ 2 \text{ cm} \end{cases} \quad \therefore e_a = 2 \text{ cm}$$

$$e_2 = \frac{\ell_e}{10} \times \frac{0,0035 \times \frac{f_{yd}}{E_s}}{(\nu + 0,5) \times h} = \frac{300}{10} \times \frac{0,0035 + \frac{4348}{2100000}}{(0,747 + 0,5) \times 15} = 2,68$$

$$e = 2 + 2,68 = 4,68 \text{ cm}$$

Prefixando-se adotar uma distribuição da armadura de modo que se tenha pelo menos 2/3 da mesma colocada segundo os lados maiores, pode-se usar: $k=3$.

$$N_d' = 40000 \times 1,8 \times \left(1 + \frac{3 \times 4,68}{15}\right)$$

$$N_d' = 139392 \text{ kg}$$

$$A_s = \frac{139932 - 0,85 \times 107 \times 900}{4200} = 13,7 \text{ cm}^2$$

$$1 + \frac{3 \times 4,68}{15} = 1,936 > 1,1 \text{ (de acordo com a NBR - 6118)}$$

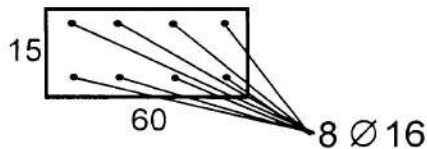
CONCRETO ARMADO

taxa de armação $\varphi = \frac{13,7}{900} = 0,015 = 1,5\%$

este valor satisfaz a exigência normativa. Resta agora escolher a quantidade de barras e respectiva bitola, correspondente a área calculada.

Da tabela de barras, tira-se $8\phi 16$, ou, $12\phi 12,5$. Usaremos $8\phi 16$.

O detalhe esquemático tem a configuração abaixo indicada:



Observe-se que nos lados maiores, a disposição das barras obedece a hipótese de cálculo com $k=3$.

Comprimento de ancoragem:

$$\ell_h = 0,6 \times \frac{1,6}{4} \times \frac{4348}{20}$$

$$\ell_h = 52 \text{ cm}$$

$$\tau_{bu} = 0,9 \times \sqrt[3]{107} = 20 \text{ kg/cm}^2$$

adotaremos $\ell_h = 55 \text{ cm}$.

Detalhamento dos estribos: ($\phi 5,0$)

$$l \leq \begin{cases} 30 \text{ cm} \\ \text{menor dimensão da seção} = 15 \text{ cm} \\ 12 \times 1,6 = 19,2 \text{ cm} \\ 190 \times 0,5^2 / 1,6 = 29 \text{ cm} \end{cases}$$

de acordo com a Norma, adota-se $t = 15\text{cm}$, com o seguinte detalhe:



O processo simplificado deixa de ser aplicado para os casos em que

$\lambda > 80$, onde se é obrigado a levar em conta a deformação lenta. E, se

$\lambda > 140$ o cálculo deve ser feito pelo processo exato, considerando-se a deformação lenta e a relação momento-curvatura, baseada nos diagramas tensão/deformação do concreto e do aço. A Norma admite que se use um processo aproximado, quando devidamente justificado.

16.7 CONSIDERAÇÕES GERAIS

No detalhamento dos estribos a Norma Brasileira prescreve certos cuidados que se deve ter, para que as barras longitudinais não apresentem deformações por flambagem, uma vez que estão sujeitas à esforços de compressão.

Consideram-se protegidas contra a flambagem as barras longitudinais quando:

- estão localizadas nas quinas (cantos) de estribos poligonais
- a distância de uma barra longitudinal à sua barra mais próxima, for no máximo igual a $20 \phi_i$ (ϕ_i - diâmetro dos estribos). Caso ocorra espaçamento entre barras longitudinais maior do que $20 \phi_i$ deve-se colocar estribos suplementares ou ganchos de armação (passadores).

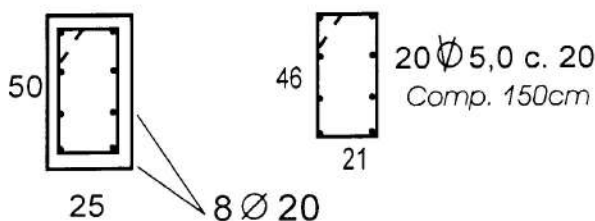
A NBR- 6118 regulamenta o seguinte:

“os estribos poligonais garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em suas quinas, e as por elas abrangidas e situadas no máximo à distância de $20 \phi_l$ da quina, se nesse trecho de comprimento de $20 \phi_l$ não houver mais de duas barras, não contando a da quina. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deverá haver estribos suplementares, com diâmetro e espaçamento também de acordo com o exigido para os estribos”.

Diz ainda: “se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta terminada com ganchos nas extremidades, deverá ele atravessar a seção da peça e o seu gancho envolverá a barra longitudinal (que apresenta risco de flambagem). Se houver mais de uma barra longitudinal a ser protegida junto à mesma extremidade do estribo, o gancho deste envolverá um estribo principal em ponto junto a uma das barras, o que deverá ser indicado no projeto de modo bem destacado. Ele garantirá contra a flambagem essa barra e mais duas para cada lado, não distantes dela mais de $20 \phi_l$ (ϕ_l - diâmetro do estribo principal).

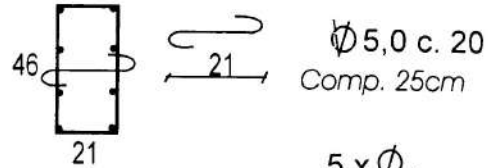
Para exemplificar, observe-se o detalhe de armação dos dois exercícios anteriores.

No primeiro exercício tem-se:

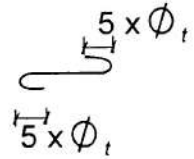


Nesse caso, o espaçamento entre barras longitudinais é de 15,3 cm. Ora, $20 \phi_l = 20 \times 0,5 = 10$ cm. Então, uma solução é usar gancho, que é também chamado de passador:

- gancho (ou passador):



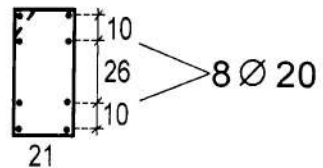
O gancho pode ter comprimento de $5 \phi_t$:



Outra solução, também válida e evita os passadores é a que mostra o detalhe seguinte:

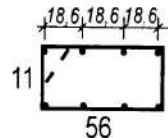
$$20\phi_t = 10 \text{ cm}$$

$$e_{\max} = 40 \text{ cm} \quad (\text{tem-se } 26)$$

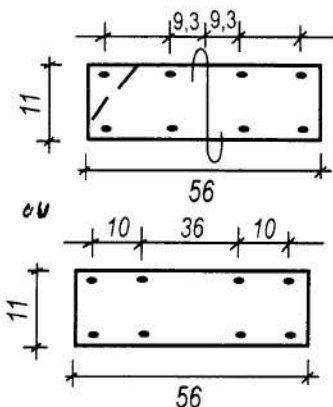


Essa solução traz a vantagem de não se ter barras transversais (passadores), o que facilita a concretagem.

No 2º exercício tem-se :



Pode-se também usar soluções idênticas as do exercício anterior.



Ganchos $\phi 5,0$ c. 15
Comprimento 16cm

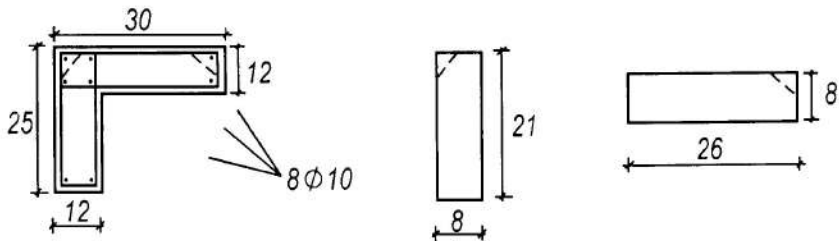
$36 < 40$ (satisfatório)
sem ganchos (ou passadores)

CONCRETO ARMADO

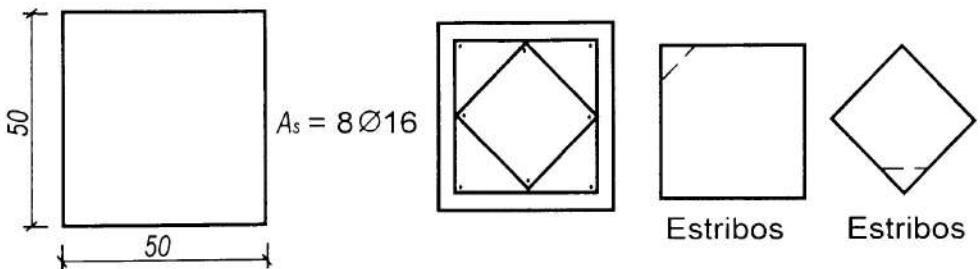
Há casos em que se tem de usar vários passadores, ou vários estribos suplementares, para garantir a não flambagem das barras longitudinais. O objetivo da Norma, quando o passador amarra o estribo principal, é evitar a deformação lateral desse estribo principal, quando forçado pelo esforço de curvatura das barras longitudinais, sujeitas à flambagem. Enrijecendo os estribos, evita-se a flambagem dessas barras longitudinais. Os passadores (ganchos) devem abraçar os estribos principais. Evidentemente, se as barras longitudinais são amarradas diretamente com passadores, também se tem resultado correto, desde que sejam aplicados passadores em todas as barras necessárias.

O detalhamento dessas barras transversais depende muito da opção do calculista, quer na forma de passadores, quer na de estribos suplementares. A seguir alguns exemplos:

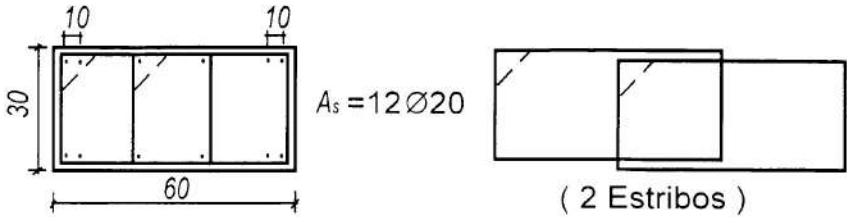
1-



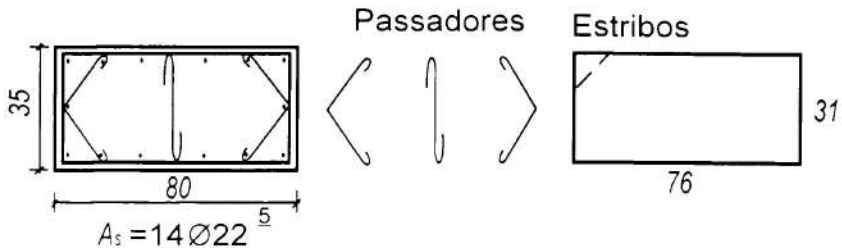
2-



3-



4-



Os detalhes de passadores, ou de estribos suplementares obedecem as mesmas exigências normativas dos estribos principais (bitola e espaçamento).

No cálculo da armação de pilares simples, a área de barras a serem usadas têm de satisfazer ao mínimo normativo:

- para $\lambda \leq 30$ $A_{smin} = 0,005 \times A_c$ (0,5 % da área da seção do pilar)
- para $30 < \lambda \leq 80$ $A_{smin} = 0,008 \times A_c$ (0,8 %)

essas porcentagens podem ser aplicadas sobre a seção teoricamente necessária. Prescreve ainda a Norma Brasileira que: "em nenhum caso a porcentagem será inferior a 0,5 % da área da seção real".

O cálculo de pilares sujeitos à solicitação de compressão centrada é tão somente uma aproximação de cálculo, não condizendo com a situação real, que ocorre na prática devido às incertezas do verdadeiro ponto de aplicação das forças externas. Os regulamentos dos diversos países recomendam que o cálculo considere uma

excentricidade accidental. A NBR-6118 também recomenda uma excentricidade accidental no valor de $h / 30$, não inferior a 2 cm, onde h é a maior dimensão da seção, na direção em que se considera a excentricidade.

É comum se chamar de pilares curtos àqueles em que $\lambda \leq 40$, e pilares medianamente esbeltos os que se situam em $40 < \lambda \leq 80$.

Como roteiro de cálculo, basicamente, pode-se seguir o desenvolvimento abaixo:

- 1 - Se $\lambda \leq 40$, $N'_d = N_d (1 + 6/h)$ com $1 + \frac{6}{h} \geq 1,1$ sendo h a menor dimensão da seção. Calcula-se a armadura A_s e a taxa relativa $\varphi = \frac{A_s}{A_c}$, que deve satisfazer a condição:

$$0,8\% \leq \varphi \leq 6\%$$

Se $\lambda \leq 30$, o valor mínimo da porcentagem pode ser 0,5 %.

- 2 - Se $40 < \lambda \leq 80$, $N'_d = N_d (1 + k \cdot e/h)$, com $1 + ke/h \geq 1,1$
seção circular $k = 4$
seção retangular $k=3$, ou $k = 4$, dependendo da disposição da armadura na seção (NBR-6118), onde

$$e = \frac{\ell_e^2}{10} \times \frac{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{(\nu + 0,5) \times h}$$

com $\nu = \frac{N_d}{A_c \times f_{cd}}$ (ν - força de compressão relativa)

- 3 - Pode-se, sempre, calcular a seção teoricamente necessária $A_{nec.}$, e se a seção real A_c for maior do que $A_{nec.}$, significa que se tem uma seção superabundante de concreto. A NBR-6118 permite que as porcentagens de armação sejam aplicadas à seção teoricamente necessária, $A_{nec.}$, e distribuída na seção real do pilar.

Em nenhum caso φ será inferior a 0,5 % da área da seção real.

- 4 - As barras longitudinais não devem ter espaçamento entre si, maior do que 40cm.
- 5 - Os estribos devem satisfazer ao espaçamento máximo t , prefixado pela Norma Brasileira, de modo a garantir a não flambagem das barras longitudinais:

$$t \leq \begin{cases} 30\text{cm} \\ \text{menor dimensão da seção do pilar} \\ 12 \times \phi_l & \text{Aço especial (CA-50, CA-60)} \\ \frac{190 \times \phi_l^2}{\phi_t} & \text{Aço especial (CA-50, CA-60)} \\ 21 \times \phi_l & \text{Aço Comum (CA-25, CA-32)} \\ \frac{340 \times \phi_l^2}{\phi_t} & \text{Aço Comum (CA-25, CA-32)} \end{cases}$$

as condições de proteção contra flambagem das barras longitudinais, devem obedecer ao item 6.3.4.3 da NBR- 6118.

- 6 - O coeficiente de majoração γ_f , da carga N , depende do valor da menor dimensão da seção. Sendo "a" a menor dimensão da seção, tem-se :

$$\text{se "a"} < \begin{cases} 20 \text{ cm, ou} \\ \dots\dots\dots \gamma_f = 1,8 \\ 1 / 25 h_{\text{livre}} \end{cases}$$

nos outros casos: $\gamma_f = 1.4$

Em presença de meio agressivo deve-se ter: $\gamma_f \times 1,2$.

- 7 - Se, $\lambda > 80$, deve-se levar em conta a deformação lenta.

Se, $\lambda > 140$, deve-se considerar a relação momento-curvatura, baseada nos diagramas tensão/deformação do concreto e do aço.

- 8 - Em hipótese alguma, o índice de esbeltez poderá ultrapassar 200 ($\lambda \leq 200$). Quando $140 < \lambda \leq 200$, a segurança deverá ser demonstrada por processo exato (NBR-6118, - 4. 1. 1. 3 B), levando em conta a vibração se for o caso, e o coeficiente de majoração da carga passa a ser:

$$\gamma_f = 1,4 + 0,01(\lambda - 140)$$

Então, quando $\lambda > 80$, o cálculo torna-se muito mais complexo. Daí ser sempre aconselhável que se adote seções de pilares que se enquadrem em esbeltez máxima de 80.

- 9 - Com respeito às exigências da Norma Brasileira, cabe uma análise quanto ao cálculo da força normal relativa

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \times f_{cd}}$$

A NBR-6118 exige que, para o cálculo simplificado de compressão simples, quando $40 < \lambda \leq 80$, obrigatoriamente se tenha: $\nu \geq 0,7$.

Quando se calcula o valor da excentricidade de segunda ordem (e), o valor mínimo de ν é de 0,5, vez que a Norma exige que na expressão abaixo, se tenha $\nu + 0,5 \geq 1$:

$$e = \frac{\ell_c^2}{10} \times \frac{0,0035 + \frac{f_{yd}}{E_s}}{(\nu + 0,5) \times h} \quad \text{onde } \nu + 0,5 \geq 1 \quad \therefore \nu_{\min} = 0,5$$

Na prática, é usual se tomar como valor mínimo $\nu = 0,5$.

Vale observar que se $\nu < 0,5$, tendo em vista a expressão:

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \times f_{cd}}$$

Existem três hipóteses possíveis:

- fixada a área da seção de concreto, e a taxa de trabalho do mesmo, a carga N_d , é pequena;
- fixada a taxa de trabalho do concreto e o valor da carga N_d , a área da seção de concreto é excessiva;
- fixada a área da seção de concreto, e o valor da carga N_d , o concreto está trabalhando com taxa além da necessária.

Destas três hipóteses a primeira e a terceira podem ser descartadas, vez que a carga tem seu valor de cálculo bem definido, e o valor de f_{cd} é, praticamente, fixo para a execução de toda uma estrutura, o que torna N_d e f_{cd} parâmetros não variáveis. É na segunda hipótese que se tem uma variável possível de se trabalhar, que é a área da seção A_c .

Quanto a distribuição das barras na periferia da seção de concreto do pilar, é importante observar, que se o concreto trabalha bem à compressão, mais do que ele trabalha o aço, pois suporta maiores tensões. Entretanto, há uma razão lógica para que se use barras de aço ajudando na resistência ao esforço de compressão, como também em se coloca-las na periferia da seção. Com uma parcela do esforço normal sendo absorvido pelo aço pode-se obter seções menores e, portanto, mais estéticas para o pilar. Sem as armaduras as seções de concreto seriam, de um modo geral, absurdamente grandes. A colocação dessas armaduras, na periferia da seção, responde com segurança ao combate à esforços de tração transversais, que aparecem quando a peça está sujeita à esforço de compressão longitudinal. Esta relação entre deformação transversal e deformação longitudinal, constante entre os limites elásticos das barras, é designada por μ , e é chamada de coeficiente de Poisson, em homenagem ao matemático francês que a determinou em seus estudos da estrutura molecular dos materiais.

As seções vazadas são calculadas obedecendo às mesmas condições usadas para as seções plenas: grau de esbeltez, área da

seção de armadura, estribos, etc. Para as seções em T, duplo T, em L, etc., existem tabelas já elaboradas para o cálculo do índice de esbeltez, como pode ser visto no volume 2, do livro "Dimensionamento de CONCRETO ARMADO", do professor Adolpho Polillo (1981), que consta em anexo (Tabela 12). Os momentos de inércia dessas seções podem ser encontrados na tabela 13, retirada do livro "Concreto Armado" de Aderson Moreira da Rocha, Vol. 1.

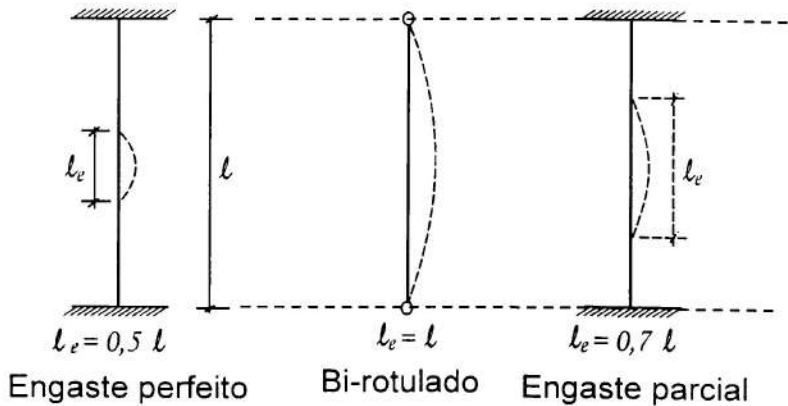
A Norma Brasileira exige, que a área da seção transversal das barras comprimidas, esteja compreendida entre 0,8 % e 6 %, *"inclusive no trecho de emenda por traspasse"*. Esta exigência leva o calculista a não ultrapassar, de um modo geral, o percentual em torno de 3% nesses trechos, ou seja, na seção de continuidade de um pilar com outro que lhe segue. De acordo com essa exigência, na estrutura de um edifício se uma seção de um pilar tem 4% em área de "armação de espera", o pilar sobre ele, que vai lhe dar continuidade, não poderá ter mais do que 2%.

No cálculo de pilares de um edifício as condições que fixam o comprimento elástico do pilar, de um modo geral, não são tão bem definidas, a ponto de serem enquadradas nos casos clássicos de vínculos de extremidades, como se tem nos estudos básicos de flambagem, da Resistência dos Materiais. Em um pilar de um edifício existe de fato, um certo grau de engastamento nas suas extremidades, que dependem do grau de rigidez do conjunto de peças estruturais que se ligam ao pilar, incluindo a rigidez do próprio pilar. Assim, no caso mais geral, não se tem condições de engaste perfeito, nem de articulação. Logo, não se pode dizer que:

$$\ell_e = 0,5\ell, \quad \text{ou}, \quad \ell_e = 0,7\ell, \quad \text{ou ainda}, \quad \ell_e = \ell.$$

Na verdade, existe um grau de engastamento cuja determinação exata, para definir o comprimento elástico do pilar, seria complexa demais para o uso nos casos comuns da prática. A experiência tem demonstrado que considerando um valor de ℓ_e entre $0,5 \ell$ e ℓ , não se incorre em erro apreciável nos cálculos de pilares de edifícios onde existe de fato ligações de engaste entre pilares e vigas. Como dizia Aristóteles *"in medium virtus"*, ou seja, "a virtude está no

meio". Essa média pode ser tomada como $\ell_e = 0,75.\ell$ ou mesmo, a favor da segurança, $\ell_e = 0,7.\ell$. A configuração da deformação de flambagem seria:



Evidentemente, quando se trata de pilar com a extremidade livre, a condição de $\ell_e = 2 \ell$, não pode ser desprezada.

17. TRAÇÃO AXIAL

O esforço de tração axial aparece nas peças de concreto armado como os tirantes, os pendurais, barras de treliças, paredes de tubos, reservatórios, silos, etc.

Devido ao esforço de tração poderá aparecer fissuras na superfície do concreto, que podem ser nocivas à própria estabilidade da peça, que passa a ser também vulnerável a ataques de agentes externos agressivos.

De acordo com a NBR-6118 haverá grande possibilidade de ter início a formação de fissuras normais à armadura longitudinal, quando:

- 1- a deformação de ruptura à tração do concreto for igual a $2,7 \times \frac{f_{tk}}{E_c}$, com

$$E_c = 21000 \cdot \sqrt{f_{cj}} \text{ kg/cm}^2 \cdot \text{com} \cdot f_{cj} = f_{ck} + 35 \text{ kg/cm}^2$$

- 2- na flexão, o diagrama de tensões de compressão no concreto é triangular (regime elástico). A tensão na zona tracionada é uniforme e igual a f_{tk} , multiplicando-se a deformação de ruptura acima indicada por 1,5.

- 3- as seções transversais planas permanecem planas.

No cálculo de peças solicitadas por tração axial deverá ser sempre levado em conta o efeito de retração. Para fins de simplificação, nos casos comuns, este efeito pode ser considerado supondo-se a tensão de tração igual a $0,75 \cdot f_{tk}$, e desprezando-se a armadura.

É importante lembrar, que de acordo com a Norma Brasileira o valor de f_{tk} , é o seguinte :

$$f_{tk} = \frac{f_{ck}}{10} \quad \text{para} \quad f_{ck} \leq 180 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{e} \quad f_{tk} = 0,06 f_{ck} + 7, \quad \text{para} \quad f_{ck} > 180 \text{ kg/cm}^2$$

17.1 EXIGÊNCIAS NORMATIVAS

A NBR-6118 considera que a fissuração é nociva, quando a abertura das fissuras na superfície do concreto ultrapassa os seguintes valores:

- a- 0,1mm, para peças não protegidas, em meio agressivo;
- b- 0,2mm, para peças não protegidas, em meio não agressivo;
- c- 0,3mm, para peças protegidas.

As condições acima tem razoável probabilidade de ocorrência, quando se verificam simultaneamente as seguintes desigualdades:

$$\frac{\phi}{2.\eta_h - 0,75} \times \frac{\sigma_s}{E_s} \times \left(\frac{4}{\rho_r} + 45 \right) > \begin{cases} 1 & \text{para alínea "a"} \\ 2 & \text{para alínea "b"} \\ 3 & \text{para alínea "c"} \end{cases}$$

$$\frac{\phi}{2.\eta_h - 0,75} \times \frac{\sigma_s}{E_s} \times \frac{3.\sigma_s}{f_{tk}} > \begin{cases} 1 & \text{para alínea "a"} \\ 2 & \text{para alínea "b"} \\ 3 & \text{para alínea "c"} \end{cases}$$

Onde:

- σ_s - tensão na armadura, sob solicitação (em serviço).
- ϕ - diâmetro das barras em mm.
- ρ_r - taxa geométrica da armadura na seção transversal de concreto A_{cr} , sujeita a fissuração ($\rho_r = \frac{A_s}{A_{cr}}$).

Nos tirantes : A_{cr} = área da seção transversal do tirante.

Nas seções retangulares e nas seções em T, submetidas à flexão simples : $A_{cr} = 0,25 \cdot b_w \cdot h$.

η_b , é um coeficiente de aderência, que depende da conformação superficial da armadura. Para os aços lisos, o seu valor é igual a 1; o seu valor máximo não deve ultrapassar 1,8.

Para os principais tipos de aço usados em estruturas de concreto armado no Brasil, os valores de η_b são:

- $\eta_b = 1,0$ - CA-25, CA-32
- $\eta_b = 1,5$ - CA-50 A, CA-50 B
- $\eta_b = 1,8$ - CA-60 A, CA- 60 B

No cálculo de tirantes só a armadura deve resistir ao esforço de tração, o concreto não é levado em conta para resistir a estes esforços.

17.2 APLICAÇÃO NUMÉRICA

1- Dimensionar um tirante para suportar um esforço normal de tração de 20 ton. Trabalha-se com aço CA-25, e exige-se que a abertura das fissuras não ultrapasse 0,2mm. A seção de concreto está fixada em 13 x 50, e $f_{ck} = 180 \text{ kg/cm}^2$.

RESPOSTA:

$$f_{yd} = 2500 / 1,15 = 2174 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_d = 20000 \times 1,4 = 28000 \text{ kg.}$$

A área das barras que devem resistir a esse esforço é:

$$A_s = 28\ 000 / 2174 = 12,9 \text{ cm}^2$$

Adotando 11 ϕ 12,5 (13,75 cm²), tem-se:

taxa de trabalho das barras:

$$\sigma_s = 28\ 000 / 13,75 = 2036 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_t = 12,9 / 650 = 0,0198$$

abertura das fissuras:

$$\frac{12,5}{2 \times 1 - 0,75} \times \frac{2036}{2100000} \times \left(\frac{4}{0,0198} + 45 \right) = 2,4$$

$$\frac{12,5}{2 \times 1 - 0,75} \times \frac{2036}{2100000} \times \frac{3 \times 2036}{18} = 3,3$$

Conclusão: a seção do tirante não satisfaz as exigências normativas.

2- Resolver o exercício anterior usando Aço CA-50 A.

RESPOSTA:

$$f_{yd} = 4348 \text{ kg/cm}^2 \quad A_s = 28\,000 / 4348 = 6,43 \text{ cm}^2$$

Adotando 12 ϕ 10 (9,6 cm²) , tem-se:

$$\sigma_s = 28\,000 / 9,6 = 2917 \text{ kg / cm}^2$$

$$\rho_r = 9,6 / 650 = 0,01477$$

tem-se assim

$$\frac{10}{2 \times 1,5 - 0,75} \times \frac{2917}{2100000} \times \left(\frac{4}{0,01477} \right) = 1,95$$

$$\frac{10}{2 \times 1,5 - 0,75} \times \frac{2917}{2100000} \times \frac{3 \times 2917}{18} = 3,0$$

Não sendo atendida somente uma das desigualdades, pode-se dizer que, de acordo com a NBR-6118, a fissuração que pode ocorrer não será nociva. Esta solução é portanto, aceitável.

REFERÊNCIAS

AMARAL, N. A. (1974), *Concreto Simples e Armado*, São Paulo: Grêmio Politécnico da USP - Departamento de Publicações.

CHAMECKI, S. (1948), *Cálculo no Regime de Ruptura das Lajes Armadas em Cruz*, Curitiba: Editora Guaíra Ltda.

FUSCO, P. B. (1976), *Estruturas de Concreto - Fundamentos do Projeto Estrutural*, São Paulo: McGraw-Hill do Brasil.

GUERRIN, A. & LAVOUR, R. C. (1971), *Traité de Béton Armé*, Paris: Dunod.

GUERRIN, A., LAVOUR, R.C. & LECROQ, P. (1978), *Hormigon Armado-Tratado Práctico*, Barcelona: Editores Técnicos Associados, S.A.

JOHANSEN, K. W. (1962), *Linhas de Rutura- Teoria e Prática*, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A.

LANGENDONCK, T. V. (1954), *Cálculo de Concreto Armado*, São Paulo: Associação Brasileira de Cimento Portland.

LANGENDONCK, T. V. (1965), Charneiras Plásticas em Lajes de Edifícios, . *Revista Estrutura*, Rio de Janeiro: Editora Científica, nº 58.

LOESER, B. (1949), *Concreto Armado*, São Paulo: Distribuidora Editora Científica. Copyright by Gerth Todtmann.

MORAES, M. C. (1982), *Concreto Armado*, São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda.

POLILLO, A. (1981), *Dimensionamento de Concreto Armado*, São Paulo: Livraria Nobel S.A. Editora –Distribuidora.

ROCHA, A. M. DA (1959), *Cálculo das Lajes Contínuas no Regime de Rutura*, Rio de Janeiro: Editora Científica.

ROCHA, A. M. DA (1981), *Concreto Armado*, Rio de Janeiro: Editora Científica.

SIGALOV, E. & STRONGIN, S. (1962), *Reinforced Concrete*, Moscou: Foreign Languages Publishing House.

SUSSEKIND, J. C. (1975), *Curso de Análise Estrutural*, Porto Alegre: Editora Globo.

TELLES, P. C. S. (1984), *História da Engenharia no Brasil*, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

TIMOSHENKO, S. P. (1969), *Resistência dos Materiais*, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A. vol.1 e 2.

VASCONCELOS, A. C. (1985), *O Concreto no Brasil*, São Paulo: Copiare Duplicadora.

TRABALHOS PUBLICADOS PELO AUTOR:

Vieira, Geraldo (1962), "*Concreto Armado*" (em colaboração com o Prof. Eleumar Martorelli e o Prof. Agerson Corrêa), Pernambuco: Escola de engenharia da UFPE.

_____.(1965), "*Métodos de Cross*" (em colaboraçãoa com o Prof. José Brasileiro), Pernambuco: Escola Politécnica, FESP.

_____.(1971), "*tabelas para a determinação de armadura de lajes – métodos de ruptura*" Pernambuco: Escola de engenharia da UFPE.



TABELA 1
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ – MARCUS

$$M_x = q \frac{l_x^2}{m_x}$$

$$M_y = q \frac{l_y^2}{m_y}$$

$$q_x = k_x q$$

l_x / l_y	K_x	m_x	m_y
0,50	0,059	169,18	42,29
0,51	0,063	158,42	41,20
0,52	0,068	148,64	40,19
0,53	0,073	139,70	39,24
0,54	0,078	131,55	38,36
0,55	0,084	124,10	37,53
0,56	0,089	117,25	36,77
0,57	0,095	110,96	36,05
0,58	0,102	105,19	35,38
0,59	0,108	99,86	34,76
0,60	0,115	94,94	34,18
0,61	0,112	90,40	33,64
0,62	0,129	86,20	33,13
0,63	0,136	82,30	32,66
0,64	0,144	78,68	32,23
0,65	0,151	75,32	31,82
0,66	0,159	72,19	31,44
0,67	0,168	69,27	31,09
0,68	0,176	66,54	30,77
0,69	0,185	63,99	30,46
0,70	0,194	61,60	30,18
0,71	0,203	59,37	29,93
0,72	0,212	57,27	29,69
0,73	0,221	55,29	29,47
0,74	0,231	53,44	29,26
0,75	0,240	51,69	29,07
0,76	0,250	50,04	28,90
0,77	0,260	48,48	28,74
0,78	0,270	47,01	28,60
0,79	0,280	45,61	28,46
0,80	0,290	44,29	28,34
0,81	0,301	43,03	28,23
0,82	0,311	41,84	28,13
0,83	0,322	40,70	28,04
0,84	0,332	39,62	27,96
0,85	0,343	38,59	27,88
0,86	0,354	37,61	27,81
0,87	0,364	36,67	27,75
0,88	0,375	35,77	27,70
0,89	0,385	34,91	27,65
0,90	0,396	34,09	27,61
0,91	0,407	33,30	27,57
0,92	0,417	32,54	27,54
0,93	0,428	31,81	27,51
0,94	0,438	31,11	27,49
0,95	0,449	30,44	27,47
0,96	0,459	29,79	27,45
0,97	0,469	29,17	27,44
0,98	0,480	28,57	27,43
0,99	0,490	27,99	27,43
1,00	0,500	27,43	27,43



TABELA 2
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

$$M_x = q l_x^2 \frac{m_x}{m_x}$$

$$M_y = q l_y^2 \frac{m_y}{m_y}$$

$$q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	m_y	l_y/l_x	k_x	m_x	m_y
1,00	0,500	27,43	27,43	1,01	0,839	13,7	31,36
1,01	0,510	26,89	27,43	1,51	0,839	13,75	31,36
1,02	0,520	26,37	27,43	1,52	0,842	13,64	31,52
1,03	0,529	25,87	27,43	1,53	0,846	13,53	31,68
1,04	0,539	25,38	27,43	1,54	0,849	13,43	31,85
1,05	0,549	24,91	27,47	1,55	0,852	13,32	31,01
1,06	0,558	24,46	27,48	1,56	0,855	13,22	32,18
1,07	0,567	24,02	27,50	1,57	0,859	13,13	32,36
1,08	0,576	23,60	27,52	1,58	0,862	13,03	32,53
1,09	0,585	23,19	27,55	1,59	0,865	12,94	32,71
1,10	0,594	22,79	27,57	1,60	0,868	12,85	32,89
1,11	0,603	22,41	27,61	1,61	0,870	12,76	33,08
1,12	0,611	22,03	27,64	1,62	0,873	12,68	33,27
1,13	0,620	21,67	27,67	1,63	0,876	12,59	33,46
1,14	0,628	21,32	27,71	1,64	0,878	12,51	33,65
1,15	0,636	20,99	27,76	1,65	0,881	12,43	33,85
1,16	0,644	20,66	27,80	1,66	0,884	12,35	34,04
1,17	0,652	20,34	27,85	1,67	0,886	12,28	34,24
1,18	0,660	20,04	27,90	1,68	0,888	12,21	34,45
1,19	0,667	19,74	27,95	1,69	0,891	12,13	34,65
1,20	0,675	19,45	28,01	1,70	0,893	12,06	34,87
1,21	0,682	19,17	28,07	1,71	0,895	12,00	35,08
1,22	0,689	18,90	28,13	1,72	0,897	11,93	35,29
1,23	0,696	18,64	28,20	1,73	0,899	11,86	35,51
1,24	0,703	18,39	28,27	1,74	0,902	11,80	35,73
1,25	0,709	18,14	28,34	1,75	0,904	11,74	35,95
1,26	0,716	17,90	28,42	1,76	0,906	11,68	36,17
1,27	0,722	17,67	28,50	1,77	0,907	11,62	36,40
1,28	0,729	17,44	28,58	1,78	0,909	11,56	36,63
1,29	0,735	17,23	28,67	1,79	0,911	11,51	36,86
1,30	0,741	17,01	28,76	1,80	0,913	11,45	37,10
1,31	0,746	16,81	28,85	1,81	0,915	11,40	37,33
1,32	0,752	16,61	28,94	1,82	0,916	11,34	37,58
1,33	0,758	16,42	29,04	1,83	0,918	11,29	37,82
1,34	0,763	16,23	29,14	1,84	0,920	11,24	38,06
1,35	0,769	16,05	29,25	1,85	0,921	11,19	38,31
1,36	0,774	15,87	29,36	1,86	0,923	11,15	38,56
1,37	0,779	15,70	29,47	1,87	0,924	11,10	38,81
1,38	0,784	15,53	29,58	1,88	0,926	11,05	39,07
1,39	0,789	15,37	29,70	1,89	0,927	11,01	39,32
1,40	0,793	15,21	29,82	1,90	0,929	10,96	39,58
1,41	0,798	15,06	29,95	1,91	0,930	10,92	39,84
1,42	0,803	14,91	30,07	1,92	0,931	10,88	40,10
1,43	0,807	14,77	30,20	1,93	0,933	10,84	40,37
1,44	0,811	14,63	30,34	1,94	0,934	10,80	40,63
1,45	0,815	14,49	30,47	1,95	0,935	10,76	40,91
1,46	0,820	14,36	30,61	1,96	0,936	10,72	41,18
1,47	0,824	14,23	30,76	1,97	0,938	10,68	41,45
1,48	0,827	14,11	30,90	1,98	0,939	10,64	41,73
1,49	0,831	13,99	31,05	1,99	0,940	10,61	42,01
1,50	0,835	13,87	31,21	2,00	0,941	10,57	42,29



TABELA 3
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

l_x	$M_x = q \frac{l_x^2}{m_x}$	$M_y = q \frac{l_x^2}{m_y}$	$M_x = -q \frac{l_x^2}{n_x}$	$q_x = k_x \cdot q$
l_y / l_x	k_x	m_x	n_x	m_y
0,50	0,135	140,93	59,20	45,13
0,51	0,145	132,96	55,31	44,11
0,52	0,154	125,68	51,77	43,22
0,53	0,165	119,03	48,56	42,38
0,54	0,175	112,94	45,64	41,60
0,55	0,186	107,35	42,97	40,88
0,56	0,197	102,20	40,54	40,21
0,57	0,209	97,46	38,32	39,60
0,58	0,220	93,08	36,28	39,03
0,59	0,232	89,03	34,41	38,51
0,60	0,245	85,28	32,69	38,04
0,61	0,257	81,79	31,11	37,60
0,62	0,270	78,55	29,66	37,20
0,63	0,282	75,53	28,31	36,83
0,64	0,295	72,71	27,07	36,49
0,65	0,308	70,07	25,93	36,19
0,66	0,322	67,60	24,86	35,92
0,67	0,335	65,28	23,88	35,67
0,68	0,348	63,10	22,97	35,44
0,69	0,362	61,05	22,12	35,25
0,70	0,375	59,12	21,33	35,07
0,71	0,388	57,30	20,59	34,92
0,72	0,402	55,58	19,91	34,78
0,73	0,415	53,95	19,27	34,67
0,74	0,428	52,41	18,67	34,57
0,75	0,442	50,94	18,11	34,50
0,76	0,455	49,56	17,59	34,44
0,77	0,468	48,24	17,10	34,39
0,78	0,481	46,98	16,64	34,36
0,79	0,493	45,79	16,21	34,35
0,80	0,506	44,65	15,81	34,35
0,81	0,518	43,56	15,43	34,36
0,82	0,531	42,53	15,08	34,39
0,83	0,543	41,54	14,74	34,42
0,84	0,554	40,60	14,43	34,48
0,85	0,566	39,69	14,13	34,54
0,86	0,578	38,83	13,85	34,62
0,87	0,589	38,01	13,59	34,70
0,88	0,600	37,22	13,34	34,80
0,89	0,611	36,46	13,10	34,91
0,90	0,621	35,73	12,88	35,03
0,91	0,632	35,04	12,67	35,16
0,92	0,642	34,37	12,47	35,29
0,93	0,652	33,73	12,28	35,44
0,94	0,661	33,12	12,10	35,60
0,95	0,671	32,53	11,93	35,77
0,96	0,680	31,97	11,77	35,95
0,97	0,689	31,43	11,61	36,13
0,98	0,697	30,91	11,47	36,33
0,99	0,706	30,41	11,33	36,53
1,00	0,714	29,93	11,20	36,74

TABELA 3 (Continuação)
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

CÁLCULO DAS ESSES EM CÉZ - MARCOS				
$M_x = q l_x^2$	$M_y = q l_y^2$	$X_y = q l_y^2$	$q_x = k_x q$	
$\frac{m_x}{k_x}$	$\frac{m_y}{k_y}$	$\frac{n_y}{k_y}$		
l_y / l_x	k_x	m_x	n_x	m_y
1.00	0.711	2.697	11.20	36.74
1.02	0.730	26.12	10.96	37.19
1.04	0.745	25.35	10.73	37.68
1.06	0.759	24.47	10.53	38.19
1.08	0.773	23.59	10.35	38.74
1.10	0.785	22.72	10.18	39.31
1.12	0.797	21.84	10.03	39.92
1.14	0.808	20.97	9.89	40.55
1.16	0.819	20.10	9.77	41.21
1.18	0.829	19.23	9.65	41.90
1.20	0.838	18.35	9.45	42.62
1.22	0.847	17.48	9.44	43.36
1.24	0.855	16.60	9.55	44.13
1.26	0.863	15.72	9.27	44.93
1.28	0.870	14.84	9.19	45.75
1.30	0.877	13.96	9.12	46.59
1.32	0.884	13.08	9.05	47.46
1.34	0.889	12.20	8.99	48.34
1.36	0.895	11.32	8.93	49.26
1.38	0.901	10.44	8.88	50.20
1.40	0.906	9.56	8.83	51.15
1.42	0.910	8.68	8.79	52.14
1.44	0.915	7.80	8.74	53.14
1.46	0.919	6.92	8.70	54.16
1.48	0.923	6.04	8.67	55.21
1.50	0.927	5.16	8.63	56.28
1.52	0.930	4.28	8.60	57.36
1.54	0.934	3.40	8.57	58.47
1.56	0.937	2.52	8.54	59.60
1.58	0.940	1.64	8.51	60.74
1.60	0.942	0.76	8.49	61.91
1.62	0.945	0.88	8.46	63.11
1.64	0.948	0.00	8.44	64.31
1.66	0.950	0.88	8.42	65.53
1.68	0.952	0.00	8.40	66.78
1.70	0.954	0.88	8.38	68.04
1.72	0.956	0.00	8.36	69.33
1.74	0.958	0.88	8.35	70.63
1.76	0.960	0.00	8.33	71.96
1.78	0.962	0.88	8.32	73.30
1.80	0.963	0.00	8.30	74.65
1.82	0.965	0.00	8.29	76.03
1.84	0.966	0.88	8.28	77.42
1.86	0.968	0.00	8.27	78.85
1.88	0.969	0.88	8.26	80.27
1.90	0.970	0.00	8.24	81.73
1.92	0.971	0.00	8.23	83.18
1.94	0.972	0.88	8.23	84.67
1.96	0.974	0.00	8.22	86.19
1.98	0.975	0.88	8.21	87.70
2.00	0.976	0.00	8.20	89.22

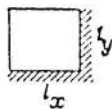


TABELA 4
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q l_y^2}{m_y} \quad X_x = \frac{q l_x^2}{n_x}$$

$$X_y = \frac{q l_y^2}{n_y} \quad q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
1,00	0,500	37,14	16,00	37,14	16,00
1,01	0,510	36,42	15,69	37,15	16,00
1,02	0,520	35,72	15,39	37,16	16,01
1,03	0,529	35,05	15,11	37,19	16,03
1,04	0,539	34,42	14,84	37,22	16,05
1,05	0,549	33,81	14,58	37,27	16,07
1,06	0,558	33,21	14,34	37,32	16,11
1,07	0,567	32,65	14,10	37,38	16,15
1,08	0,576	32,11	13,88	37,45	16,19
1,09	0,585	31,59	13,67	37,53	16,24
1,10	0,594	31,09	13,46	37,61	16,29
1,11	0,603	30,61	13,27	37,71	16,35
1,12	0,611	30,14	13,08	37,81	16,41
1,13	0,620	29,70	12,91	37,92	16,48
1,14	0,628	29,27	12,74	38,04	16,55
1,15	0,636	28,85	12,57	38,16	16,63
1,16	0,644	28,46	12,42	38,29	16,71
1,17	0,652	28,08	12,27	38,43	16,79
1,18	0,660	27,71	12,13	38,58	16,88
1,19	0,667	27,35	11,99	38,73	16,98
1,20	0,674	27,00	11,85	38,89	17,07
1,21	0,682	26,8	11,73	39,06	17,18
1,22	0,690	26,36	11,61	39,23	17,28
1,23	0,696	26,05	11,49	39,41	17,39
1,24	0,703	25,75	11,38	39,59	17,50
1,25	0,709	25,46	11,28	39,78	17,62
1,26	0,716	25,18	11,17	39,98	17,74
1,27	0,722	24,92	11,07	40,19	17,86
1,28	0,729	24,66	10,98	40,40	17,99
1,29	0,735	24,40	10,89	40,61	18,12
1,30	0,741	24,16	10,80	40,83	18,25
1,31	0,746	23,93	10,72	41,06	18,39
1,32	0,752	23,70	10,63	41,29	18,53
1,33	0,758	23,48	10,56	41,53	18,67
1,34	0,763	23,26	10,48	41,77	18,82
1,35	0,769	23,06	10,41	42,02	18,97
1,36	0,774	22,86	10,34	42,28	19,12
1,37	0,779	22,66	10,27	42,54	19,28
1,38	0,784	22,48	10,21	42,80	19,43
1,39	0,789	22,29	10,14	43,07	19,60
1,40	0,793	22,12	10,08	43,35	19,76
1,41	0,798	21,95	10,02	43,63	19,93
1,42	0,803	21,78	9,97	43,92	20,10
1,43	0,807	21,62	9,91	44,21	20,27
1,44	0,811	21,46	9,86	44,50	20,45
1,45	0,815	21,31	9,81	44,80	20,62
1,46	0,820	21,16	9,76	45,11	20,80
1,47	0,824	21,02	9,71	45,42	20,99
1,48	0,827	20,88	9,67	45,74	21,17
1,49	0,831	20,75	9,62	46,06	21,36
1,50	0,835	20,61	9,58	46,38	21,55

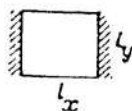
TABELA 4 (Continuação)
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q l_y^2}{m_y} \quad X_x = \frac{q l_x^2}{n_x}$$

$$X_y = \frac{q l_y^2}{n_y} \quad q = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
1,50	0,835	20,61	9,58	46,38	21,55
1,51	0,839	20,49	9,54	46,71	21,75
1,52	0,842	20,36	9,50	47,05	21,94
1,53	0,846	20,24	9,46	47,38	22,14
1,54	0,849	20,12	9,42	47,73	22,34
1,55	0,852	20,01	9,39	48,07	22,55
1,56	0,855	19,90	9,35	48,43	22,76
1,57	0,859	19,79	9,32	48,78	22,96
1,58	0,862	19,69	9,28	49,14	23,17
1,59	0,865	19,58	9,25	49,51	23,09
1,60	0,868	19,48	9,22	49,88	23,60
1,61	0,870	19,39	9,19	50,25	23,82
1,62	0,873	19,29	9,16	50,63	24,04
1,63	0,876	19,20	9,13	51,01	24,26
1,64	0,878	19,11	9,11	51,40	24,49
1,65	0,881	19,02	9,08	51,79	24,72
1,66	0,884	18,94	9,05	52,19	24,95
1,67	0,886	18,86	9,03	52,58	25,18
1,68	0,888	18,77	9,00	52,99	25,41
1,69	0,891	18,70	8,98	53,39	25,65
1,70	0,893	18,62	8,96	53,81	25,89
1,71	0,895	18,54	8,93	54,22	26,13
1,72	0,897	18,47	8,91	54,64	26,37
1,73	0,899	18,40	8,89	55,07	26,61
1,74	0,902	18,33	8,87	55,49	26,86
1,75	0,904	18,26	8,85	55,92	27,11
1,76	0,906	18,18	8,83	56,36	27,36
1,77	0,907	18,13	8,81	56,80	27,61
1,78	0,909	18,07	8,80	57,24	27,87
1,79	0,911	18,00	8,78	57,68	28,13
1,80	0,913	17,94	8,76	58,14	28,39
1,81	0,915	17,88	8,74	58,59	28,65
1,82	0,916	17,83	8,73	59,05	28,91
1,83	0,918	17,77	8,71	59,51	29,18
1,84	0,920	17,72	8,70	59,97	29,44
1,85	0,921	17,66	8,68	60,44	29,72
1,86	0,923	17,61	8,67	60,92	29,99
1,87	0,924	17,56	8,65	61,39	30,26
1,88	0,926	17,51	8,64	61,88	30,54
1,89	0,927	17,46	8,63	62,36	30,81
1,90	0,929	17,41	8,61	62,85	31,09
1,91	0,930	17,36	8,60	63,34	31,38
1,92	0,931	17,32	8,59	63,83	31,66
1,93	0,933	17,27	8,58	64,33	31,94
1,94	0,934	17,23	8,56	64,83	32,23
1,95	0,935	17,18	8,55	65,34	32,52
1,96	0,936	17,14	8,54	65,84	32,81
1,97	0,938	17,10	8,53	66,36	33,10
1,98	0,939	17,06	8,52	66,88	33,40
1,99	0,940	17,02	8,51	67,39	33,70
2,00	0,941	16,98	8,50	67,92	34,00

TABELA 5
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS



$$M_x = -q l_x^2 \frac{m_x}{n_x}$$

$$M_y = -q l_y^2 \frac{n_y}{m_y}$$

$$N_x = -q l_x^2 \frac{1}{n_x}$$

$$N_y = -q l_y^2 \frac{1}{m_y} \quad q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y
0.50	0.238	137,06	50,40	49,92
0.51	0.253	130,06	47,48	49,11
0.52	0.268	123,66	44,83	48,38
0.53	0.283	117,79	42,42	47,72
0.54	0.298	112,39	40,23	47,13
0.55	0.314	107,42	38,23	46,60
0.56	0.330	102,83	36,40	46,13
0.57	0.345	98,59	34,74	45,72
0.58	0.361	94,67	33,21	45,35
0.59	0.377	91,02	31,81	45,04
0.60	0.393	87,62	30,52	44,77
0.61	0.409	84,46	29,33	44,54
0.62	0.425	81,51	28,24	44,35
0.63	0.441	78,76	27,24	44,21
0.64	0.456	76,18	26,30	44,10
0.65	0.472	73,76	25,45	44,02
0.66	0.487	71,49	24,65	43,98
0.67	0.502	69,36	23,91	43,97
0.68	0.517	67,36	23,22	43,96
0.69	0.531	65,47	22,59	44,03
0.70	0.545	63,69	22,00	44,11
0.71	0.559	62,01	21,44	44,21
0.72	0.573	60,42	20,93	44,34
0.73	0.587	58,92	20,45	44,49
0.74	0.600	57,51	20,00	44,66
0.75	0.613	56,16	19,58	44,86
0.76	0.625	54,89	19,19	45,08
0.77	0.637	53,69	18,83	45,33
0.78	0.649	52,54	18,48	45,59
0.79	0.661	51,46	18,16	45,87
0.80	0.672	50,42	17,86	46,17
0.81	0.683	49,44	17,57	46,50
0.82	0.693	48,51	17,31	46,84
0.83	0.703	47,62	17,06	47,20
0.84	0.713	46,78	16,82	47,57
0.85	0.723	45,97	16,60	47,97
0.86	0.732	45,21	16,39	48,38
0.87	0.741	44,48	16,19	48,81
0.88	0.750	43,78	16,00	49,25
0.89	0.758	43,12	15,82	49,71
0.90	0.766	42,48	15,66	50,19
0.91	0.774	41,87	15,50	50,68
0.92	0.782	41,30	15,35	51,18
0.93	0.789	40,74	15,21	51,50
0.94	0.796	40,21	15,07	52,24
0.95	0.803	39,70	14,95	52,78
0.96	0.809	39,22	14,82	53,35
0.97	0.816	38,75	14,71	53,92
0.98	0.822	38,31	14,60	54,52
0.99	0.828	37,88	14,50	55,12
1.00	0.833	37,47	14,40	55,74

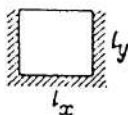
TABELA 5 (Continuação)
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ – MARCUS

$$M_x = \frac{q L_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q L_y^2}{m_y} \quad X_x = \frac{-q L_x^2}{n_x}$$

$$X_y = \frac{-q L_y^2}{n_y} \quad q_x = k_x q$$

l_y / l_x	k_x	m_x	n_x	m_y
1,00	0,833	37,47	14,40	55,74
1,2	0,844	36,71	14,22	57,01
1,4	0,854	36,00	14,05	58,33
1,6	0,863	35,34	13,90	59,70
1,8	0,872	34,74	13,76	61,12
1,10	0,880	34,18	13,64	62,59
1,12	0,887	33,66	13,52	64,10
1,14	0,894	33,18	13,42	65,66
1,16	0,900	32,74	13,32	67,26
1,18	0,906	32,32	13,24	68,91
1,20	0,912	31,93	13,16	70,60
1,22	0,917	31,57	13,08	72,33
1,24	0,922	31,23	13,01	74,11
1,26	0,926	30,92	12,95	75,92
1,28	0,931	30,62	12,89	77,78
1,30	0,934	30,34	12,84	79,66
1,32	0,938	30,08	12,79	81,60
1,34	0,942	29,83	12,74	83,58
1,36	0,945	29,60	12,70	85,58
1,38	0,948	29,39	12,66	87,63
1,40	0,950	29,18	12,62	89,72
1,42	0,953	28,99	12,59	91,84
1,44	0,955	28,80	12,56	94,01
1,46	0,958	28,63	12,53	96,20
1,48	0,960	28,47	12,50	98,45
1,50	0,962	28,31	12,47	100,72
1,52	0,964	28,16	12,45	103,02
1,54	0,966	28,02	12,43	105,38
1,56	0,967	27,89	12,40	107,76
1,58	0,969	27,76	12,38	110,16
1,60	0,970	27,64	12,37	112,61
1,62	0,972	27,53	12,35	115,12
1,64	0,973	27,42	12,33	117,62
1,66	0,974	27,31	12,32	120,17
1,68	0,975	27,21	12,30	122,76
1,70	0,977	27,12	12,29	125,41
1,72	0,978	27,03	12,27	128,04
1,74	0,979	26,94	12,26	130,75
1,76	0,980	26,86	12,25	133,50
1,78	0,980	26,78	12,24	136,24
1,80	0,981	26,70	12,23	139,05
1,82	0,982	26,63	12,22	141,85
1,84	0,983	26,56	12,21	144,78
1,86	0,983	26,49	12,20	147,65
1,88	0,984	26,43	12,19	150,60
1,90	0,985	26,37	12,18	153,54
1,92	0,985	26,31	12,18	156,53
1,94	0,986	26,25	12,17	159,56
1,96	0,987	26,19	12,16	162,60
1,98	0,987	26,14	12,16	165,75
2,00	0,988	26,09	12,15	168,89

TABELA 6
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ – MARCUS



$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q l_y^2}{m_y} \quad X_s = \frac{-q l_x^2}{n_x}$$

$$X_y = \frac{-q l_y^2}{n_y} \quad q_s = k_s q$$

l_y / l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
0,50	0,111	246,42	108,00	71,43	36,00
0,51	0,119	230,76	100,70	69,53	34,92
0,52	0,127	216,51	95,07	67,77	33,91
0,53	0,136	203,52	88,05	66,13	32,97
0,54	0,145	191,66	82,56	64,60	32,10
0,55	0,155	180,83	77,57	63,18	31,29
0,56	0,164	170,91	73,01	61,86	30,53
0,57	0,174	161,79	68,84	60,63	29,82
0,58	0,184	153,42	65,02	59,49	29,16
0,59	0,195	145,72	61,52	58,42	28,55
0,60	0,206	138,61	58,30	57,43	27,98
0,61	0,217	132,05	55,34	56,52	27,45
0,62	0,228	125,98	52,61	55,67	26,96
0,63	0,239	120,36	50,09	54,88	26,51
0,64	0,251	115,15	47,76	54,15	26,08
0,65	0,263	110,30	45,61	53,48	25,69
0,66	0,275	105,81	43,62	52,85	25,33
0,67	0,287	101,61	41,77	52,28	25,00
0,68	0,299	97,70	40,06	51,76	24,70
0,69	0,312	94,06	38,47	51,28	24,42
0,70	0,324	90,65	36,99	50,84	24,17
0,71	0,337	87,46	35,61	50,45	23,93
0,72	0,349	84,48	34,33	50,09	23,73
0,73	0,362	81,68	33,13	49,77	23,54
0,74	0,375	79,05	32,01	49,38	23,37
0,75	0,387	76,58	30,96	49,23	23,22
0,76	0,400	74,26	29,98	49,00	23,09
0,77	0,413	72,08	29,07	48,81	22,98
0,78	0,425	70,02	28,21	48,65	22,88
0,79	0,438	68,08	27,40	48,51	22,80
0,80	0,450	66,24	26,65	48,40	22,74
0,81	0,463	64,51	25,94	48,32	22,69
0,82	0,475	62,88	25,27	48,26	22,65
0,83	0,487	61,33	24,64	48,22	22,63
0,84	0,499	59,86	24,05	48,21	22,63
0,85	0,511	58,47	23,49	48,22	22,63
0,86	0,522	57,15	22,97	48,25	22,65
0,87	0,543	55,90	22,47	48,30	22,68
0,88	0,545	54,71	22,00	48,37	22,72
0,89	0,556	53,58	21,56	48,46	22,77
0,90	0,567	52,51	21,14	48,57	22,84
0,91	0,578	51,49	20,75	48,69	22,91
0,92	0,589	50,51	20,37	48,83	22,99
0,93	0,599	49,59	20,02	48,99	23,09
0,94	0,610	48,70	19,68	49,17	23,19
0,95	0,620	47,86	19,37	49,06	23,30
0,96	0,629	47,06	19,06	49,57	23,42
0,97	0,639	46,29	18,78	49,80	23,56
0,98	0,648	45,55	18,50	50,04	23,70
0,99	0,658	44,85	18,25	50,29	23,84
1,00	0,667	44,18	18,00	50,56	24,00

TABELA 6 (Continuação)
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

$$M_x = q l_x^2 \frac{m_x}{n_x} \quad M_y = q l_y^2 \frac{m_y}{n_y} \quad X_x = -q l_x^2 \frac{X_1}{n_x}$$

$$X_1 = -q l_x^2 \frac{X_1}{n_x} \quad q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
1,00	0,667	44,18	18,00	50,56	24,00
1,2	0,684	42,92	17,54	51,14	24,33
1,4	0,700	41,77	17,13	51,76	24,70
1,6	0,716	40,71	16,75	52,44	25,10
1,8	0,731	39,74	16,41	53,18	25,52
1,10	0,745	38,84	16,10	53,95	25,97
1,12	0,759	38,01	15,81	54,78	26,45
1,14	0,772	37,25	15,55	55,64	26,95
1,16	0,784	36,54	15,31	56,55	27,47
1,18	0,795	35,88	15,09	57,50	28,02
1,20	0,806	35,27	14,89	58,50	28,59
1,22	0,816	34,70	14,71	59,53	29,19
1,24	0,825	34,17	14,54	60,60	29,80
1,26	0,834	33,68	14,38	61,71	30,44
1,28	0,843	33,22	14,23	62,85	31,10
1,30	0,851	32,79	14,10	64,03	31,77
1,32	0,859	32,38	13,98	65,25	32,47
1,34	0,866	32,01	13,86	66,50	33,18
1,36	0,872	31,65	13,75	66,78	33,92
1,38	0,879	31,32	13,65	69,10	34,67
1,40	0,885	31,01	13,56	70,45	35,44
1,42	0,890	30,72	13,47	71,83	36,23
1,44	0,896	30,44	13,39	73,24	37,03
1,46	0,901	30,18	13,32	74,69	37,86
1,48	0,906	29,94	13,25	76,17	38,70
1,50	0,910	29,71	13,18	77,67	39,55
1,52	0,914	29,49	13,12	79,20	40,43
1,54	0,918	29,28	13,07	80,77	41,32
1,56	0,922	29,09	13,01	82,36	42,22
1,58	0,926	28,90	12,96	83,98	43,14
1,60	0,929	28,73	12,91	85,64	44,08
1,62	0,932	28,56	12,87	87,34	45,03
1,64	0,935	28,40	12,83	89,02	46,00
1,66	0,938	28,25	12,79	90,77	46,99
1,68	0,941	28,11	12,75	92,52	47,98
1,70	0,943	27,97	12,72	94,32	49,00
1,72	0,946	27,84	12,68	96,13	50,03
1,74	0,948	27,72	12,65	97,98	51,08
1,76	0,950	27,60	12,62	99,86	52,14
1,78	0,952	27,49	12,60	101,75	53,21
1,80	0,954	27,38	12,57	103,68	54,30
1,82	0,956	27,28	12,55	105,63	55,41
1,84	0,958	27,18	12,52	107,62	56,63
1,86	0,960	27,09	12,50	109,63	57,67
1,88	0,961	27,00	12,48	111,65	58,81
1,90	0,963	26,91	12,46	113,71	59,97
1,92	0,964	26,83	12,44	115,79	61,15
1,94	0,966	26,75	12,42	117,89	62,33
1,96	0,967	26,68	12,41	120,04	63,55
1,98	0,968	26,61	12,39	122,19	64,76
2,00	0,970	26,54	12,37	124,35	65,98

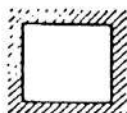


TABELA 7
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ – MARCUS

$$M_x = -q \frac{l_x^2}{m_x} \quad M_y = -q \frac{l_y^2}{m_y} \quad X_x = -q \frac{l_x^2}{n_x}$$

l_x

$$X_y = -q \frac{l_y^2}{n_y} \quad q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
1,00	0,500	55,74	24,00	55,74	24,00
1,01	0,510	54,65	32,53	55,75	24,00
1,02	0,520	53,61	32,09	55,78	24,02
1,03	0,529	52,62	22,66	55,82	24,04
1,04	0,539	51,76	22,26	55,88	24,07
1,05	0,549	50,76	21,87	55,96	24,11
1,06	0,558	49,89	21,50	56,06	24,16
1,07	0,567	49,06	21,15	56,17	24,22
1,08	0,576	48,27	20,82	56,30	24,28
1,09	0,585	47,50	20,50	56,44	24,36
1,10	0,594	46,77	20,20	56,59	24,44
1,11	0,603	46,07	19,90	56,76	24,52
1,12	0,611	45,40	19,63	56,95	24,62
1,13	0,620	44,75	19,36	57,14	24,72
1,14	0,628	44,13	19,10	57,36	24,83
1,15	0,636	43,54	18,86	57,58	24,94
1,16	0,644	42,97	18,63	57,82	25,06
1,17	0,652	42,42	18,40	58,07	25,19
1,18	0,660	41,89	18,19	58,33	25,33
1,19	0,667	41,38	17,98	58,60	25,47
1,20	0,675	40,90	17,79	58,89	25,61
1,21	0,682	40,42	17,60	59,19	25,76
1,22	0,689	39,97	17,42	59,49	25,92
1,23	0,696	39,54	17,24	59,81	26,09
1,24	0,703	39,12	17,07	60,15	26,25
1,25	0,709	38,71	16,91	60,49	26,43
1,26	0,716	38,32	16,76	60,84	26,61
1,27	0,722	37,95	16,61	61,20	26,79
1,28	0,729	37,58	16,47	61,57	26,98
1,29	0,735	37,23	16,33	61,96	27,18
1,30	0,741	36,89	16,20	62,05	27,38
1,31	0,746	36,57	16,07	62,75	27,58
1,32	0,752	36,25	15,95	63,16	27,79
1,33	0,758	35,95	15,83	63,59	28,01
1,34	0,763	35,65	15,72	64,02	28,23
1,35	0,769	35,37	15,61	64,46	28,45
1,36	0,774	35,09	15,51	64,91	28,68
1,37	0,779	34,83	15,41	65,36	28,91
1,38	0,784	34,57	15,31	65,83	29,15
1,39	0,789	34,32	15,21	66,31	29,39
1,40	0,793	34,08	15,12	66,79	29,64
1,41	0,798	33,85	15,04	67,29	29,89
1,42	0,803	33,62	14,95	67,79	30,15
1,43	0,807	33,40	14,87	68,30	30,40
1,44	0,811	33,19	14,79	68,82	30,67
1,45	0,815	32,98	14,71	69,34	30,94
1,46	0,820	32,78	14,64	69,88	31,21
1,47	0,824	32,59	14,57	70,42	31,48
1,48	0,827	32,40	14,50	70,97	31,76
1,49	0,831	32,22	14,43	71,53	32,04
1,50	0,835	32,04	14,37	72,10	32,33

TABELA 7 (Continuação)
CÁLCULO DAS LAJES EM CRUZ - MARCUS

$$M_x = \frac{q l_x^2}{m_x} \quad M_y = \frac{q l_y^2}{m_y} \quad N_x = \frac{-q l_x^2}{n_x}$$

$$N_y = \frac{-q l_y^2}{n_y} \quad q_x = k_x q$$

l_y/l_x	k_x	m_x	n_x	m_y	n_y
1,50	0,835	32,04	14,37	72,10	32,33
1,51	0,839	31,87	14,31	72,67	32,62
1,52	0,842	31,71	14,25	73,25	32,92
1,53	0,846	31,54	14,19	73,84	33,22
1,54	0,849	31,39	14,13	74,44	33,52
1,55	0,852	31,24	14,08	75,04	33,82
1,56	0,855	31,09	14,03	75,65	34,13
1,57	0,859	30,94	13,97	76,27	34,45
1,58	0,862	30,80	13,92	76,90	34,76
1,59	0,865	30,67	13,88	77,52	35,08
1,60	0,868	30,54	13,83	78,17	35,41
1,61	0,870	30,41	13,79	78,81	35,73
1,62	0,873	30,28	13,74	79,47	36,06
1,63	0,876	30,16	13,70	80,13	36,40
1,64	0,878	30,04	13,66	80,80	36,74
1,65	0,881	29,93	13,62	81,48	37,08
1,66	0,884	29,82	13,58	82,16	37,42
1,67	0,886	29,71	13,54	82,84	37,77
1,68	0,888	29,60	13,51	83,54	38,12
1,69	0,891	29,50	13,47	84,24	38,47
1,70	0,893	29,40	13,44	84,95	38,83
1,71	0,895	29,30	13,40	85,67	39,19
1,72	0,897	29,20	13,37	86,38	39,55
1,73	0,899	29,11	13,34	87,12	39,92
1,74	0,902	29,02	13,31	87,85	40,29
1,75	0,904	28,93	13,28	88,60	40,67
1,76	0,906	28,84	13,25	89,34	41,04
1,77	0,907	28,76	13,22	90,09	41,42
1,78	0,909	28,68	13,19	90,86	41,81
1,79	0,911	28,60	13,17	91,61	42,19
1,80	0,913	28,52	13,14	92,39	42,58
1,81	0,915	28,44	13,12	93,17	42,97
1,82	0,916	28,37	13,09	93,96	43,37
1,83	0,918	28,29	13,07	94,75	43,77
1,84	0,920	28,22	13,05	95,54	44,17
1,85	0,921	28,15	13,02	96,35	44,57
1,86	0,923	28,09	13,00	97,16	44,98
1,87	0,924	28,02	12,98	97,98	45,09
1,88	0,926	27,95	12,96	98,80	45,81
1,89	0,927	27,89	12,94	99,62	46,22
1,90	0,929	27,83	12,92	100,46	46,64
1,91	0,930	27,77	12,90	101,30	47,06
1,92	0,931	27,71	12,88	102,14	47,49
1,93	0,933	27,65	12,86	103,00	47,92
1,94	0,934	27,60	12,85	103,85	48,35
1,95	0,935	27,54	12,83	104,72	48,78
1,96	0,936	27,49	12,81	105,58	49,21
1,97	0,938	27,43	12,80	106,45	49,65
1,98	0,939	27,38	12,78	107,35	50,10
1,99	0,940	27,33	12,76	108,23	50,55
2,00	0,941	27,28	12,75	109,12	50,99

TABELA 8

**CONCRETO ARMADO – ESTADO LIMITE ÚLTIMO
DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES**

CONCRETO ARMADO – ESTADO LIMITE ÚLTIMO								NBR - 6118							
DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES															
S	α	ϕ	Valores de α para					Valores de r para f_{ck} (Kg/cm ²)							
			CA 25	CA 32	CA 40	CA 50	CA 60								
					A e B	A e B	A e B	110	140	150	170	200	220		
0,207	0,258	0,896	0,718	0,561	0,449	0,359	0,299	10,63	99,42	9,10	8,55	7,88	7,52		
0,220	0,275	0,890	0,723	0,565	0,452	0,361	0,301	10,35	99,17	8,86	8,32	7,67	7,32		
0,240	0,300	0,880	0,732	0,571	0,457	0,365	0,304	9,96	8,83	8,53	8,01	7,39	7,04		
0,260	0,325	0,870	0,740	0,578	0,462	0,370	0,308	9,63	8,53	8,24	7,74	7,14	6,81		
0,280	0,350	0,860	0,749	0,585	0,468	0,374	0,312	9,33	8,27	7,99	7,50	6,92	6,60		
0,300	0,375	0,850	0,758	0,591	0,473	0,378	0,315	9,07	8,04	7,76	7,29	6,72	6,41		
0,320	0,400	0,840	0,767	0,598	0,479	0,383	0,319	8,83	7,83	7,56	7,10	6,55	6,24		
0,340	0,425	0,830	0,776	0,605	0,484	0,387	0,323	8,62	7,64	7,38	6,93	6,39	6,09		
<u>0,351</u>	0,438	0,824	0,781	0,610	0,488	0,390	<u>0,325</u>	8,51	7,55	7,29	6,85	6,31	6,02		
0,360	0,450	0,820	0,785	0,613	0,490	0,392	0,327	8,43	7,47	7,22	6,78	6,25	5,96		
<u>0,370</u>	0,462	0,815	0,790	0,617	0,493	<u>0,395</u>	0,329	8,33	7,38	7,14	6,70	6,18	5,90		
0,380	0,475	0,810	0,795	0,620	0,496	0,397	0,331	8,25	7,31	7,07	6,64	6,12	5,84		
<u>0,391</u>	0,488	0,804	0,800	0,625	<u>0,500</u>	0,400	0,333	8,17	7,24	6,99	6,57	6,0	5,77		
0,400	0,500	0,800	0,805	0,628	0,503	0,402	0,335	8,09	7,17	6,93	6,51	6,00	5,72		
0,420	0,525	0,790	0,815	0,636	0,509	0,407	0,339	7,95	7,04	6,81	6,39	5,89	5,62		
0,440	0,550	0,780	0,825	0,645	0,516	0,412	0,344	7,82	6,93	6,69	6,28	5,80	5,53		
0,460	0,575	0,770	0,836	0,653	0,522	0,418	0,348	7,69	6,82	6,59	6,19	5,71	5,44		
0,468	0,585	0,766	0,840	0,656	0,525	0,420	0,350	7,65	6,78	6,55	6,15	5,67	5,41		
0,480	0,600	0,760	0,847	0,661	0,529	0,423		7,58	6,72	6,49	6,10	5,62	5,36		
0,500	0,625	0,750	0,858	0,670	0,536	0,429		7,48	6,63	6,40	6,01	5,51	5,29		
0,503	0,628	0,748	0,860	0,672	0,538	0,430		7,46	6,62	6,39	6,00	5,53	5,28		
0,520	0,650	0,740	0,870	0,679	0,543			7,38	6,54	6,32	5,94	5,47	5,22		
0,540	0,675	0,730	0,882	0,689	0,551			7,29	6,46	6,24	5,87	5,41	5,16		
0,543	0,678	0,728	0,884	0,690	0,552			7,28	6,45	6,23	5,86	5,40	5,15		
0,560	0,700	0,720	0,894	0,698				7,21	6,39	6,17	5,80	5,35	5,10		
0,580	0,725	0,710	0,907	0,708				7,13	6,32	6,11	5,74	5,29	5,04		
0,600	0,750	0,700	0,920					7,06	6,26	6,05	5,68	5,24	5,00		
0,617	0,771	0,692	0,930					7,00	6,21	6,00	5,64	5,20	4,95		

Unidades: tonelada, centímetro

$$\begin{aligned}
 \gamma_c &= 1,4 & y &= sd & M_0 &= \frac{bd^2}{r^2_{lim}} & \alpha_s &= \frac{\alpha_s M}{d} \\
 \gamma_s &= 1,15 & z &= \phi d \\
 \gamma_t &= 1,4 & x &= \xi \cdot d & d &= r \frac{M}{b}
 \end{aligned}$$

Obs.: Os valores sublinhados correspondem aos limites do aço tipo B (seção normalmente armada)

TABELA 9

PARA TENSÃO NA ARMADURA COMPRIDA EM FUNÇÃO DE $m = \frac{A'_s}{h} \times 100$ $\beta = \sigma_s / k$, $A'_s = 1,4 \cdot \frac{\Delta M}{\beta (d-d')}$ ΔM em: kgf.cm d e d' em: cm								
m %	VALORES DE β EM $\frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$ PARA AÇOS							
	CATEGORIA A					CATEGORIA B		
	25	32	40	50	60	40	50	60
1	2174	2783	3478	4348	5217	3419	4137	4801
2	2174	2783	3478	4348	5217	3399	4111	4768
3	2174	2783	3478	4348	5217	3380	4085	4736
4	2174	2783	3478	4348	5217	3360	4059	4702
5	2174	2783	3478	4348	5217	3339	4032	4668
6	2174	2783	3478	4348	5217	3318	4004	4633
7	2174	2783	3478	4348	5217	3297	3976	4597
8	2174	2783	3478	4348	5217	3275	3947	4560
9	2174	2783	3478	4348	5217	3253	3918	4523
10	2174	2783	3478	4348	5217	3230	3888	4485
11	2174	2783	3478	4348	5217	3207	3857	4446
12	2174	2783	3478	4348	5217	3183	3825	4412
13	2174	2783	3478	4348	5217	3159	3793	4371
14	2174	2783	3478	4348	5217	3134	3760	4333
15	2174	2783	3478	4348	5132	3108	3726	4298
16	2174	2783	3478	4348	4956	3082	3709	4265
17	2174	2783	3478	4348	4776	3055	3676	4226
18	2174	2783	3478	4348	4591	3028	3639	4182
19	2174	2783	3478	4348	4402	3000	3605	4141
20	2174	2783	3478	4348	4208	2971	3571	4102
21	2174	2783	3478	4240	4009	3018	3538	4065
22	2174	2783	3478	4051	3805	3140	3498	4031
23	2174	2783	3478	3856	3596	3265	3458	4000
24	2174	2783	3478	3656	3381	3394	3418	3971
25	2174	2783	3478	3451	3161	3478	3378	3944

TABELA 10

**MOMENTOS NAS LAJES SIMPLEMENTE APOIADAS EM 4 LADOS PELO
MÉTODO DE RUPTURA**

Caso de armadura constante

$$M_x^0 = \frac{qL^2}{m_k} \quad M_y^0 = k M_x^0 \quad k = \frac{J_y}{J_x}$$

Valores de m_k dados na tabela

$\lambda_x \backslash k$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
1,0	24,00	22,80	21,60	20,40	19,20	18,00	16,80	15,60	14,40
1,1	21,91	20,87	19,83	18,78	17,74	16,70	15,65	14,61	13,57
1,2	20,31	19,98	18,46	17,54	16,62	15,69	14,77	13,85	12,92
1,3	19,03	18,21	17,38	16,55	15,72	14,90	14,07	13,24	12,41
1,4	18,00	17,25	16,50	15,75	15,00	14,25	13,50	12,75	12,00
1,5	17,14	16,46	15,77	15,08	14,40	13,71	13,03	12,34	11,66
1,6	16,42	15,79	15,16	14,53	13,89	13,26	12,63	12,00	11,37
1,7	15,80	15,22	14,63	14,05	13,46	12,88	12,29	11,71	11,12
1,8	15,27	14,73	14,18	13,64	13,10	12,54	12,00	11,45	10,90
1,9	14,81	14,30	13,79	13,28	12,77	12,26	11,74	11,23	10,72
2,0	14,40	13,92	13,44	12,96	12,48	12,00	11,52	11,04	10,56
2,1	14,04	13,58	13,13	12,68	12,23	11,77	11,32	10,87	10,42
2,2	13,71	13,29	12,86	12,43	12,00	11,57	11,14	10,71	10,29
2,3	13,42	13,02	12,61	12,20	11,80	11,39	10,98	10,58	10,17
2,4	13,16	12,77	12,39	12,00	11,61	11,22	10,84	10,45	10,06
2,5	12,92	12,55	12,18	11,82	11,45	11,08	10,71	10,34	9,97
2,6	12,71	12,35	12,00	11,65	11,29	10,94	10,59	10,24	9,88
2,7	12,51	12,17	11,83	11,49	11,16	10,82	10,48	10,14	9,80
2,8	12,32	12,00	11,68	11,35	11,03	10,70	10,38	10,05	9,73
2,9	12,16	11,84	11,53	11,22	10,91	10,60	10,29	9,97	9,66
3,0	12,00	11,70	11,40	11,10	10,80	10,50	10,20	9,90	9,60
3,2	11,72	11,44	11,16	10,88	10,60	10,33	10,05	9,77	9,49
3,4	11,48	11,22	10,96	10,70	10,43	10,17	9,91	9,65	9,39
3,6	11,26	11,02	10,77	10,53	10,29	10,04	9,80	9,55	9,31
3,8	11,08	10,85	10,61	10,38	10,15	9,92	9,69	9,46	9,23
4,0	10,91	10,69	10,47	10,25	10,04	9,82	9,60	9,38	9,16
4,4	10,62	10,43	10,23	10,03	9,83	9,64	9,44	9,25	9,05
4,8	10,39	10,21	10,03	9,85	9,67	9,49	9,31	9,13	8,95
5,0	10,28	10,11	9,94	9,77	9,60	9,43	9,25	9,08	8,91

TABELA 11**VALORES GEOMÉTRICOS DE CÁLCULO**

Fios trefilados CA-60

DIÁM. Ø (mm)	Seção transv. cm ²	Peso (Kg/m)	Perim. (cm)	SEÇÃO TRANSVERSAL PARA GRUPO DE FIOS IGUAIS (cm ²)									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.4	0.090	0.072	1.07	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54	0.63	0.72	0.81	0.90
4.2	0.140	0.110	1.30	0.14	0.28	0.42	0.56	0.70	0.84	0.98	1.12	1.26	1.40
4.6	0.170	0.132	1.45	0.17	0.34	0.51	0.68	0.85	1.02	1.19	1.36	1.53	1.70
5.0	0.200	0.160	1.60	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
6.0	0.280	0.230	1.90	0.28	0.56	0.84	1.12	1.40	1.68	1.96	2.24	2.52	2.80
6.4	0.320	0.260	2.00	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20
7.0	0.385	0.30	2.20	0.39	0.77	1.16	1.54	1.93	2.31	2.70	3.08	3.47	3.85
8.0	0.50	0.40	2.50	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

TABELA 11

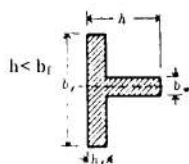
VALORES GEOMÉTRICOS DE CÁLCULO

Aço CA-50

DIÂMETRO		Seção Trans. (cm ²)	Peso (kg/m)	Perim. (cm)	SEÇÃO TRANSVERSAL PARA GRUPO DE BARRAS (cm ²)									
mm	pol.				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6,3	1/4"	0,315	0,25	2,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,89	2,20	2,52	2,83	3,15
8	5/16"	0,50	0,40	2,50	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
10	3/8"	0,80	0,63	3,15	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00
12,5	1/2"	1,25	1,00	3,00	1,25	2,50	3,75	5,00	6,25	7,50	8,75	10,00	11,25	12,50
16	5/8"	2,00	1,60	5,00	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	12,00	14,00	16,00	18,00	20,00
20	3/4"	3,15	2,50	6,30	3,15	6,30	9,45	12,60	15,75	18,90	22,05	25,20	28,35	31,50
22,5	7/8"	4,00	3,15	7,10	4,00	8,00	12,00	16,00	20,00	24,00	28,00	32,00	36,00	40,00
25	1"	5,00	4,00	8,00	5,00	10,00	15,00	20,00	25,00	30,00	35,00	40,00	45,00	50,00
32	1 1/4"	8,00	6,30	10,00	8,00	16,00	24,00	32,00	40,00	48,00	56,00	64,00	72,00	80,00

TABELA 12

ÍNDICE DE ESBELTEZ



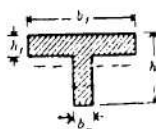
k – dado da tabela

$$i = \frac{b_f}{k}$$

$$\lambda_c = k \frac{l_e}{b_f}$$

h_f / h	b_w / b_f								
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,10	4,75	5,17	5,60	5,78	5,96	5,94	5,91	5,74	5,56
0,15	4,42	4,75	5,09	5,25	5,42	5,43	5,44	5,34	5,23
0,20	4,09	4,33	4,58	4,73	4,88	4,93	4,98	4,94	4,90
0,25	3,96	4,16	4,37	4,50	4,63	4,68	4,73	4,71	4,69
0,30	3,84	4,00	4,16	4,27	4,38	4,43	4,49	4,48	4,48
0,35	3,77	3,91	4,04	4,14	4,23	4,28	4,33	4,33	4,34
0,40	3,71	3,82	3,93	4,01	4,09	4,13	4,18	4,19	4,21
0,45	3,67	3,76	3,85	3,92	3,99	4,03	4,07	4,08	4,10
0,50	3,63	3,70	3,78	3,84	3,90	3,93	3,97	3,98	4,00

$h < b_f$

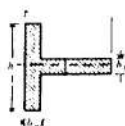


$$i = \frac{h}{k}$$

$$\lambda_c = k \frac{l_e}{h}$$

b_w / b_f	h_f / h								
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,10	3,25	3,53	3,81	4,09	4,37	4,57	4,77	4,84	4,91
0,15	3,20	3,40	3,60	3,82	4,04	4,22	4,40	4,48	4,57
0,20	3,14	3,26	3,39	3,55	3,72	3,87	4,03	4,13	4,24
0,25	3,16	3,25	3,34	3,47	3,61	3,74	3,88	3,98	4,08
0,30	3,18	3,23	3,29	3,39	3,50	3,61	3,73	3,83	3,92
0,35	3,20	3,24	3,28	3,36	3,45	3,55	3,65	3,73	3,82
0,40	3,23	3,25	3,27	3,34	3,41	3,49	3,58	3,65	3,73
0,45	3,26	3,27	3,28	3,33	3,39	3,46	3,54	3,60	3,67
0,50	3,29	3,29	3,29	3,33	3,38	3,44	3,50	3,56	3,62

TABELA 12 (Continuação)



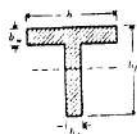
$$h < b_f \quad i = h / k$$

ÍNDICE DE ESBELTEZ

$$\lambda = k \frac{l_e}{h}$$

k ----- dado na tabela

b_w / b_f	b_f / h								
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,10	4,75	5,17	5,60	5,78	5,96	5,94	5,91	5,74	5,56
0,15	4,42	4,75	5,09	5,25	5,42	5,43	5,44	5,34	5,23
0,20	4,09	4,33	4,58	4,73	4,88	4,93	4,98	4,94	4,86
0,25	3,96	4,16	4,37	4,50	4,63	4,68	4,73	4,71	4,66
0,30	3,84	4,00	4,16	4,27	4,38	4,43	4,49	4,48	4,48
0,35	3,77	3,91	4,04	4,14	4,23	4,28	4,33	4,33	4,34
0,40	3,71	3,82	3,93	4,01	4,13	4,18	4,18	4,19	4,21
0,45	3,67	3,76	3,85	3,92	3,99	4,03	4,07	4,08	4,10
0,50	3,63	3,70	3,78	3,84	3,90	3,93	3,97	3,98	4,00



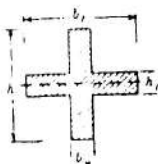
$$h < b_f$$

$$\lambda = k \frac{l_e}{b_f}$$

$$i = \frac{b_f}{k}$$

h_f / h	b_w / b_f								
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,10	3,25	3,53	3,81	4,09	4,37	4,57	4,77	4,84	4,91
0,15	3,20	3,40	3,60	3,82	4,04	4,22	4,40	4,48	4,57
0,20	3,14	3,26	3,39	3,55	3,72	3,87	4,03	4,13	4,24
0,25	3,16	3,25	3,34	3,47	3,61	3,74	3,88	3,98	4,08
0,30	3,18	3,23	3,29	3,39	3,50	3,61	3,73	3,83	3,92
0,35	3,20	3,24	3,28	3,36	3,45	3,55	3,65	3,73	3,82
0,40	3,23	3,25	3,27	3,34	3,41	3,49	3,58	3,65	3,73
0,45	3,26	3,27	3,28	3,33	3,39	3,46	3,54	3,60	3,67
0,50	3,29	3,29	3,29	3,33	3,38	3,44	3,50	3,56	3,62

TABELA 12 (Continuação)

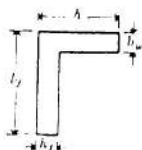


$$h < b_f$$

$$\lambda = k \cdot \frac{l_c}{h}$$

$$i = \frac{h}{k}$$

h_u, b_f	h_f/h								
	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0,10	4,75	5,17	5,60	5,78	5,96	5,94	5,91	5,74	5,56
0,15	4,42	4,75	5,09	5,25	5,42	5,43	5,44	5,34	5,23
0,20	4,09	4,33	4,58	4,73	4,88	4,93	4,98	4,94	4,90
0,25	3,96	4,16	4,37	4,50	4,63	4,68	4,73	4,71	4,69
0,30	3,84	4,00	4,16	4,27	4,38	4,43	4,49	4,48	4,48
0,35	3,77	3,91	4,04	4,14	4,23	4,28	4,33	4,33	4,34
0,40	3,71	3,82	3,93	4,01	4,09	4,13	4,18	4,19	4,21
0,45	3,67	3,76	3,85	3,92	3,99	4,03	4,07	4,08	4,10
0,50	3,63	3,70	3,78	3,84	3,90	3,93	3,97	3,98	4,00



$$h < b_f$$

$$\lambda = k \cdot \frac{l_c}{h}$$

$$i = \frac{h}{k}$$

h_u, b_f	h_f/h				
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
0,20	5,14	4,84	4,66	4,59	4,52
0,30				4,53	4,35
0,40	4,98	4,74	4,83	4,48	4,18
0,50				4,53	4,20
0,60					4,23



TABELA 13
MOMENTOS DE INÉRCIA $J = b d_o^3 / \mu$ DE VIGAS T
A tabela fornece os coeficientes μ

d/d ₀	b ₀ / b =													
	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,21	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
0,08	44,6	42,8	41,1	39,7	38,3	37,1	34,9	33,0	31,3	29,9	28,6	27,4	26,3	
09	43,4	41,6	40,1	38,6	37,3	36,1	34,0	32,2	30,6	29,2	27,9	26,8	25,7	
10	42,4	40,7	39,2	37,8	36,5	35,3	33,3	31,5	30,0	28,6	27,3	26,3	25,3	
11	41,7	40,0	38,4	37,0	35,8	34,6	32,6	30,9	29,4	28,1	26,9	25,8	24,8	
12	41,0	39,3	37,8	36,4	35,2	34,1	32,1	30,4	28,9	27,6	26,5	25,4	24,4	
0,13	40,5	38,8	37,3	35,9	34,7	33,6	31,6	29,9	28,5	27,2	26,2	25,1	24,1	
14	40,0	38,4	36,9	35,5	34,3	33,2	31,2	29,6	28,1	26,9	25,7	24,7	23,8	
15	39,7	38,0	36,5	35,2	34,0	32,9	30,9	29,3	27,8	26,6	25,4	24,5	23,6	
16	39,4	37,7	36,2	34,9	33,7	32,6	30,6	29,0	27,6	26,3	25,2	24,3	23,4	
17	39,2	37,5	36,0	34,7	33,4	32,3	30,4	28,8	27,3	26,1	25,0	24,1	23,2	
0,18	39,0	37,3	35,8	34,5	33,2	32,1	30,2	28,6	27,1	25,9	24,8	23,9	23,0	
19	38,8	37,1	35,6	34,3	33,0	31,9	30,0	28,4	26,9	25,7	24,6	23,7	22,8	
20	38,7	37,0	35,5	34,2	32,9	31,8	29,9	28,3	26,8	25,6	24,5	23,6	22,7	
22	38,6	36,9	35,3	34,0	32,7	31,6	29,7	28,1	26,6	25,4	24,3	23,5	22,5	
24	38,5	36,8	35,2	33,9	32,6	31,5	29,6	27,9	26,5	25,2	24,2	23,2	22,4	
0,26	38,5	36,7	35,2	33,8	32,6	31,4	29,5	27,8	26,4	25,1	24,1	23,1	22,3	
28	38,5	36,7	35,2	33,8	32,6	31,4	29,4	27,8	26,3	25,1	24,0	23,0	22,2	
30	38,5	36,7	35,2	33,8	32,5	31,4	29,4	27,7	26,3	25,1	24,0	23,0	22,1	
32	38,5	36,7	35,2	33,8	32,5	31,4	29,4	27,7	26,3	25,1	24,0	23,0	22,1	
34	38,4	36,6	35,1	33,7	32,5	31,4	29,4	27,7	26,3	25,1	24,0	23,0	22,1	
0,36	38,3	36,6	35,1	33,7	32,5	31,4	29,4	27,7	26,3	25,0	23,9	23,0	22,1	
38	38,1	36,5	34,9	33,6	32,4	31,3	29,4	27,7	26,3	25,0	23,9	23,0	22,1	
40	37,9	36,3	34,8	33,5	32,3	31,2	29,3	27,6	26,3	25,0	23,9	23,0	22,1	
42	37,5	36,0	34,6	33,3	32,1	31,1	29,2	27,6	26,2	25,0	23,9	22,9	22,1	
44	37,1	35,6	34,3	33,1	31,9	30,9	29,1	27,5	26,1	24,9	23,9	22,9	22,1	

d/d ₀	b ₀ / b =													
	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	
1	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		
0,08	25,3	24,4	23,6	22,8	22,1	21,4	20,8	20,2	19,6	19,1	18,6	18,1	17,7	
09	24,8	23,9	23,1	22,4	21,7	21,1	20,5	19,9	19,4	18,9	18,4	18,0	17,5	
10	24,3	23,5	22,7	22,0	21,4	20,8	20,2	19,6	19,1	18,6	18,2	17,8	17,3	
11	24,0	23,1	22,4	21,7	21,1	20,5	19,9	19,4	18,9	18,4	18,0	17,6	17,2	
12	23,6	22,8	22,1	21,4	20,8	20,2	19,7	19,2	18,7	18,3	17,8	17,4	17,0	
0,13	23,3	22,5	21,8	21,2	20,6	20,0	19,5	19,0	18,5	18,1	17,7	17,3	16,9	
14	23,0	22,3	21,6	20,9	20,4	19,8	19,3	18,8	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	
15	22,8	22,0	21,4	20,7	20,2	19,6	19,1	18,6	18,2	17,8	17,4	17,0	16,7	
16	22,6	21,8	21,2	20,6	20,0	19,5	19,0	18,5	18,1	17,7	17,3	16,9	16,6	
17	22,4	21,6	21,0	20,4	19,8	19,3	18,8	18,4	18,0	17,6	17,2	16,8	16,5	
0,18	22,2	21,5	20,9	20,3	19,7	19,2	18,7	18,3	17,9	17,5	17,1	16,7	16,4	
19	22,0	21,4	20,8	20,2	19,6	19,1	18,6	18,2	17,8	17,4	17,0	16,6	16,3	
20	21,9	21,3	20,6	20,0	19,5	19,0	18,5	18,1	17,7	17,3	16,9	16,6	16,2	
22	21,7	21,1	20,4	19,8	19,3	18,8	18,3	17,9	17,5	17,1	16,8	16,4	16,1	
24	21,6	20,9	20,3	19,7	19,2	18,7	18,2	17,8	17,4	17,0	16,7	16,3	16,0	
0,26	21,5	20,8	20,2	19,6	19,1	18,5	18,1	17,7	17,3	16,9	16,6	16,2	15,9	
28	21,4	20,7	20,1	19,5	19,0	18,4	18,0	17,6	17,2	16,8	16,5	16,2	15,9	
30	21,3	20,6	20,0	19,4	18,9	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	16,4	16,1	15,8	
32	21,3	20,6	20,0	19,4	18,9	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	16,4	16,1	15,8	
34	21,3	20,6	20,0	19,4	18,9	18,4	17,9	17,5	17,1	16,8	16,4	16,1	15,8	
36	21,3	20,6	20,0	19,4	18,9	18,4	17,9	17,5	17,1	16,7	16,4	16,0	15,7	

Montado e impresso nas oficinas gráficas da

Editora  UFPE
Universitária

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 • Várzea
Fone: (0xx81) 3271.8397 • (0xx81) 3271.8930
Fax: (0xx81) 3271.8395 • CEP 50740-530
Recife • PE



ISBN 85-7315-192-7



9 798573 151922 >