Editora UFPE

Marilene Rosa dos Santos
André Pereira da Costa
[organizadores]

Subir a montanha para ampliar a vista

Alguns cenários de pesquisas em Educação Matemática

Subir a montanha para ampliar a vista

Alguns cenários de pesquisas em Educação Matemática

Marilene Rosa dos Santos
André Pereira da Costa
[organizadores]

Editora UFPE

RECIFE
2021

Editora associada à
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

Editoração
Revisão de Texto: Os autores
Projeto Gráfico: Pedro Henrique Gomes

Catalogação na fonte
Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

S941 Subir a montanha para ampliar a vista [recurso eletrônico]: alguns cenários de pesquisas em educação matemática / [organizadores]: Marilene Rosa dos Santos, André Pereira da Costa. – Recife: Ed. UFPE, 2021.

Vários autores
Inclui referências.
ISBN 978-65-5962-019-7 (online)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Professores de matemática – Formação. I. Santos, Marilene Rosa dos (Org.). II. Costa, André Pereira da (Org.).

372.7 CDD (23.ed.) UFPE (BC2021-021)

Editora UFPE
Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 | Várzea, Recife-PE | CEP: 50740-530
Fone: (81) 2126.8397 | editora@ufpe.br | www.editora.ufpe.br

Prefácio

Cada um terá a vista da montanha que subir.[1]
[Ícaro Fonseca]

Recebi, com alegria e também com grande responsabilidade, o convite para escrever o prefácio do livro *"Subir a montanha para ampliar a vista: alguns cenários de pesquisas em Educação Matemática"*, obra organizada por dois comprometidos professores, doutores e educadores matemáticos, meus amigos Marilene Rosa dos Santos e André Pereira da Costa.

Conhecedora das suas histórias de vida e percursos profissionais que fomentaram seus compromissos com a pesquisa em Educação Matemática e também com o ensino de Matemática, na educação básica, consequentemente, com a formação dos professores que atuam nesse nível de escolaridade, mergulhei na leitura dos seis capítulos e me abasteci com muitos conhecimentos. Por conseguinte, esses conhecimentos me ajudaram a subir um pouco mais a montanha para melhorar a vista, pois, me utilizando de uma licença poética, acredito que *"a vista que a gente tem, depende da montanha que a gente sobe"*.

Contextualizar esta obra, no cenário das pesquisas em Educação Matemática, não foi uma tarefa difícil. A montanha que venho escalando ao longo da minha carreira profissional e acadêmica – inicialmente, como professora da educação básica; atualmente, formadora de professores, orientadora de mestrado e doutorado, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica

1 *https://www.eusemfronteiras.com.br/cada-um-tera-a-vista-a-montanha-que-subir/*

(EDUMATEC–UFPE) da UFPE e diretora regional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática em Pernambuco (SBEM-PE) – tem me possibilitado uma vista privilegiada desse cenário.

Certamente, o que enxergamos é influenciado por quem somos, sabemos e acreditamos. Sendo assim, inicialmente apontarei de modo mais amplo, mas não aprofundado, qual vista compartilho sobre Educação Matemática e sobre pesquisas em Educação Matemática. Na sequência, com intuito de aguçar o interesse para leitura desta obra, aponto, a partir do local da montanha que estou e com o par de óculos de educadora matemática que utilizo, o meu ponto de vista sobre o conjunto das discussões apresentadas nesta obra.

A Educação Matemática se importa com o ensino do saber historicamente, socialmente e cientificamente construído na área do conhecimento matemático; como também, com todos os outros aspectos que envolvem esse ensino: didáticos, epistemológicos, cognitivos, inclusivos, tecnológicos, históricos, étnicos, culturais, etc. Ainda como incumbência dessa área de conhecimento, aponta-se a importância com a formação profissional daqueles que vão ensiná-la; com a qualidade e o desenvolvimento de recursos didáticos para este fim; com os processos avaliativos; com a contribuição dos conceitos matemáticos para a formação cidadã de todas as pessoas e com as articulações que podem ser feitas com outras áreas do conhecimento. Ademais, importa-se, inclusive, com as políticas públicas que garantirão o acesso e o uso dos conhecimentos matemáticos por todos e para todos.

Deste modo, me coaduno com os vários autores que veem a Educação Matemática como uma grande área de pesquisa educacional que visa compreender, interpretar e descrever fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem matemática e, também, como uma prática pedagógica, conduzida pelos desafios do cotidiano escolar. Ou seja, vejo-a como uma perspectiva que se preocupa com a matemática e com o seu ensino e a sua aprendizagem.

Em relação às pesquisas em Educação Matemática, antes tratadas como subtemas de duas categorias mais amplas – Educação e Matemática –, nos últimos anos, notadamente a partir da criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM[2]), vêm se constituindo como uma área de investigação. Têm como interesse principal a "compreensão, a interpretação e a descrição de fenômenos referentes ao ensino e à aprendizagem da matemática, nos diversos níveis de escolaridade, tanto na sua dimensão teórica, quanto prática" (PAIS, 2001, p. 10). Sua finalidade é "contribuir com a realidade tão complexa da sala de aula", como afirmam os organizadores deste livro.

É justamente assim, como uma contribuição para a realidade complexa da sala de aula, que vejo o conjunto de estudos apresentados ao longo dos capítulos desta obra. A educação básica no Brasil é dividida em três etapas: o ensino infantil, o ensino fundamental e o ensino médio. Essa obra tem como foco os anos finais do ensino fundamental e o ensino médio.

Sabemos que uma montanha é um caminho tortuoso, de subida íngreme. Nesse sentido, o título *"Subir a montanha para ampliar a vista: alguns cenários de pesquisas em Educação Matemática"* expressa coerentemente a mensagem que os autores pretendiam expor ao comporem esta obra com capítulos escritos por estudantes da Licenciatura em Matemática da UPE. Para estes, realizar uma pesquisa e publicá-la, nesta obra, representa um passo importante para subirem sua primeira montanha, possibilitando galgar uma das etapas na escalada acadêmica e profissional desses graduandos.

Além disso, as pesquisas aqui relatadas apresentam um rigor metodológico necessário à pesquisa científica. À medida que tecem reflexões importantes, no âmbito do ensino de Matemática na educação básica, notadamente, ao abordarem recursos amplamente conhecidos e utilizados pelos professores – como livros didáticos de matemática para os anos finais do ensino fundamental, softwares e

---

2 Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: *www.sbembrasil.org.br*

jogos –, fincam a primeira estaca para se firmar na montanha e jogam a corda para que outros companheiros também possam subir.

Ao mesmo tempo, os dados obtidos podem contribuir para que professores que já atuam profissionalmente possam lapidar seu olhar, tanto do ponto de vista conceitual, quanto didático.

Do ponto de vista conceitual, quando se debruçarem em leituras e reflexões sobre assuntos relacionados aos eixos temáticos das grandezas e medidas e da geometria, tais como: área de triângulos e de figuras planas no geral; conceito de circunferência e quadriláteros notáveis. Do ponto de vista didático, quando lerem sobre o modo que esses temas são abordados em livros didáticos em suas possibilidades e limitações, fomentando assim, um posicionamento crítico e uma tomada de decisões didáticas mais coerente.

A possibilidade de uso de softwares, notadamente envolvendo geometria no ensino médio, e a reflexão sobre o que professores pensam em relação a jogos matemáticos são discussões que lapidam o olhar de todos aqueles que se interessam por Educação Matemática e, consequentemente, pelo ensino de Matemática de modo mais significativo, eficiente e eficaz.

Destaca-se também, na maioria dos capítulos da obra, a adoção e o uso coerente de uma das teorias da Didática da Matemática mais reconhecidas na atualidade pelo seu rigor conceitual e metodológico, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), divulgada por Yves Chevallard (1999).

De modo geral, as pesquisas em Educação Matemática apresentadas, nesta obra, apontam elementos que ajudam a pensar e construir respostas para questões relacionadas ao ensino de matemática na educação básica, entre elas: como, quais, quando o professor pode propor atividades para potencializar o desenvolvimento de conhecimentos pelos estudantes em relação a estes temas matemáticos investigados?

Assim como outros autores, defendemos que uma das maiores consequências das Pesquisas, em Educação Matemática, para a educação básica deva ser compreender o conhecimento como um processo de construção. Logo, a transmissão oral não é suficiente, é preciso ação (do sujeito construtor do seu conhecimento), daí ter clareza sobre o que se desenvolve e sob que condições se desenvolve.

Também apontamos a importância de fazer chegar à escola básica os resultados de pesquisas em Educação Matemática. Vemos, na publicação de obras como esta, uma ótima oportunidade para fomentar o acesso e as trocas entre a academia e a escola.

Como dissemos antes, a vista que a gente tem, depende da montanha que a gente sobe, por isso, às vezes para se ter uma vista privilegiada de algo, é preciso escalar uma montanha e olhar de um ponto mais alto. Para isso, além de coragem, são necessários equipamentos adequados. A elaboração de cada um dos capítulos desta obra e, ao mesmo tempo, o conjunto representado por ela, é um desses equipamentos que permitem uma vista diferenciada em relação ao rigor metodológico necessário às pesquisas científicas; à utilização de uma teoria, neste caso, notadamente, a Teoria Antropológica do Didático.

Além disto, permite também visualizar como a pesquisa pode ser fomentada, desde a formação inicial; haja visto que, com exceção do capítulo introdutório, todos os outros retratam trabalhos desenvolvidos por estudantes da Licenciatura em Matemática, ou seja, futuros professores em formação inicial. Certamente, esses estudantes experimentaram, a partir da realização das suas pesquisas, uma aproximação privilegiada de uma vista consistente da sala de aula da educação básica.

Finalmente, concordamos com os organizadores ao afirmarem que esta obra se trata de uma "*coletânea de artigos de natureza teórica e de resultados de pesquisas, que poderá contribuir para a formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática, estudantes de pós-graduação, pesquisadores e demais interessados pela temática*".

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Professora Associada da UFPE/DMTE

Sumário

Uma breve introdução sobre a Educação Matemática a partir do ensino da Geometria e das Grandezas e Medidas

André Pereira da Costa
Marilene Rosa dos Santos

Atualmente, no Brasil, é possível se verificar uma movimentação crescente em torno da produção de conhecimentos em Educação Matemática. Esse movimento tem sido caracterizado por diversas pesquisas que usam diferentes quadros teóricos e procedimentos metodológicos de análise e interpretação de dados. Em geral, esses quadros e procedimentos são oriundos das Ciências Humanas.

Assim, professores que ensinam Matemática na escola básica, estudantes de licenciatura e de cursos de pós-graduação, pesquisadores e docentes universitários, técnicos das secretarias de educação, e demais educadores matemáticos, analisam livros didáticos, documentos de orientação curricular, produções de alunos, práticas pedagógicas, produzem sequências didáticas e materiais didáticos, etc. Apesar dessa diversidade de abordagens e de produções, todos têm a mesma finalidade, contribuir com a realidade tão complexa da sala de aula.

Desse modo, tais pesquisas promovem o "desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor" (FIORENTINI E LORENZATO, 2012, p. 4). Esses esforços têm impulsionado à consolidação da Educação Matemática como campo profissional e científico no país.

Assim, como pontuado pelos autores, a Educação Matemática é uma área de estudos em desenvolvimento, não apresentando um desenho metodológico único de investigação nem um quadro teórico visivelmente configurado. Contudo, para Navarro da Silva (2017), além de campo de pesquisa, ela é considerada como práticas em sala de aula, pois as experiências que ocorrem na escola necessitam das influências para debate dessas práticas. Segundo o pesquisador, a melhoria do ensino da Matemática demanda o envolvimento de investigações, logo, a ligação entre prática e teoria é denominado de pesquisa e se torna fundamental nesse processo.

Contudo, apesar desse inegável progresso ascendente verificado nas pesquisas em Educação Matemática, nem sempre, os seus resultados chegam à sala de aula. Dessa maneira, muitos de nossos colegas professores, que ensinam Matemática na educação básica, possuem dificuldades em realizar a transposição dos cenários de experimentação, nos quais foram realizadas as investigações, para o real contexto da escola, lócus da sua prática docente (PEREIRA DA COSTA, 2019).

Para Margolinas (1993), essa dificuldade é denominada de *reproductibilité*, ou seja, *reprodutibilidade*. Além disso, os efeitos desse fenômeno são "um *distanciamento progressivo* entre os resultados, extremamente positivos dessas pesquisas, e a realidade complexa e particular da sala de aula em Matemática" (CÂMARA DOS SANTOS, 2009, p. 177, grifo nosso).

O cenário se agrava bastante, se atentarmos, singularmente, ao ensino da Geometria e ao das Grandezas e Medidas. Com efeito, no âmbito desses dois campos da Matemática, "a dificuldade de articulação entre os resultados obtidos nas pesquisas educacionais e a realidade em sala de aula" (LIMA BORBA e PEREIRA DA COSTA, 2018, p. 60), tem fomentado a manifestação de certos problemas que tem danificado o processo de aprendizagem dos conceitos vinculados à Geometria e às Grandezas e Medidas.

Corroborando com isso, os resultados das avaliações em larga escala, em diferentes níveis (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica – SAEB, 2017; Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA, 2018; Sistema de Avaliação da Educação Básica de

Pernambuco – SAEPE, 2019), têm apresentado desempenhos insatisfatórios dos estudantes da educação básica, referentes à Matemática. A situação se agrava, ainda mais, nos itens que abordam conceitos da Geometria e das Grandezas e Medidas.

Esse evento tem provocado uma vasta discussão nacional entre os diversos pesquisadores em Educação Matemática (ROSA DOS SANTOS, 2015; KALEFF, 2017; BELLEMAIN, BRONNER e LARGUIER, 2017; NASSER e CALDATO, 2019; BARROS, 2018; MORETTI; HILLESSHEIM, 2018; PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2020; LEIVAS, 2020; entre outros), que buscam analisar seus fatores causadores, em específico, sobre o modo como a Geometria e as Grandezas e Medidas são abordadas na escola básica e nos cursos de formação de professores.

Entre os fatores que contribuem para este cenário, apontamos a abordagem geométrica nos cursos de formação de professores de Matemática. Aqui também incluímos os cursos de Pedagogia, pois os pedagogos ensinam conceitos matemáticos nos anos inicias do ensino fundamental. De acordo com Pereira da Costa (2020) os futuros professores do ensino básico, geralmente, estudam poucos conceitos geométricos, ou então, vivenciam experiências que exploram a geometria de forma desarticulada com suas futuras práticas docentes.

Nesse contexto, ao assumirem a docência na educação básica, tais profissionais não se sentem confortáveis em ensinar Geometria em sala de aula, visto que não possuem domínio matemático e didático desse tópico. Em vista disso, fica evidenciado que a *omissão geométrica* continua presente nas escolas do país. Esse fenômeno identificado há mais de duas décadas por Lorenzato (1995), ainda prevalece nas aulas de Matemática.

Além disso, pesquisas realizadas com estudantes de Licenciatura em Matemática (PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2017) e com professores em exercício[1] (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS,

1 Na época da pesquisa, os participantes tinham formação em Licenciatura em Matemática e lecionavam nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio.

2016), mostram que há várias lacunas conceituais que não foram superadas, como por exemplo, reconhecer um quadrado como um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

Essa lacuna também é verificada com os docentes que atuam nos anos iniciais do ensino fundamental:

> [...] os conhecimentos geométricos que os professores pedagogos dispõem não são suficientes para subsidiar a sua prática pedagógica nos anos iniciais do ensino fundamental. Nossa experiência com a formação de professores no PNAIC ratificou esse resultado e mostrou o quão frágil é a formação matemática do professor pedagogo e que se agrava ainda mais no campo da geometria (MORETTI e HILLESHEIM, 2018, p. 17).

No caso dos professores participantes dessas pesquisas, conjecturamos que, no ambiente de sala de aula, é possível que eles abordem os conceitos geométricos de forma equivocada ou, então, optam por não ensiná-los. Desse modo, a Geometria fica renegada ou excluída das práticas pedagógicas, gerando problemas à aprendizagem dos estudantes ao longo da escolarização.

Em relação aos livros didáticos de Matemática, em geral, podemos verificar que a Geometria não é deixada para os últimos capítulos. Além disso, os conceitos são abordados de forma articulada com outros campos matemáticos, tais como, Grandezas e Medidas, Álgebra, Números, entre outros. Todavia, "percebemos que as tarefas relacionadas à construção, à inclusão de classe e à identificação são pouco exploradas" (PEREIRA DA COSTA, 2020, p. 6). Também, para esse autor, é possível constatar uma grande ênfase no cálculo da medida de grandezas geométricas associadas às figuras geométricas, sobretudo, a partir do uso de equações lineares. Nesse sentido, entendemos que os campos da Álgebra e das Grandezas e Medidas são privilegiados, em detrimento com o campo geométrico.

Essa ênfase reforça entre os estudantes uma concepção conservadora e ultrapassada de que a Matemática é composta por números e pela realização de cálculos. Além disso, o uso da linguagem algébrica nos capítulos sobre Geometria é um resquício da influência do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que ocasionou a omissão geométrica.

Esse movimento, que surgiu no Brasil em meados dos anos de 1960, propôs a algebrização da Geometria. Para isso, fundamentou-se na Álgebra e na Teoria dos Conjuntos, focando no formalismo e no rigor do conhecimento matemático. Apesar de entrar em declínio na década seguinte, esse fenômeno causou a ruptura do modelo curricular antecessor, marcado por demonstrações com base na lógica e na dedução, gerando a exclusão do ensino de conceitos geométricos nas escolas.

Acerca dos problemas relativos ao ensino de Grandezas e Medidas, concordamos com Bellemain e Lima (2002) quando consideram que muitas das dificuldades surgem em decorrência da falta de compreensão sobre o conceito de grandeza:

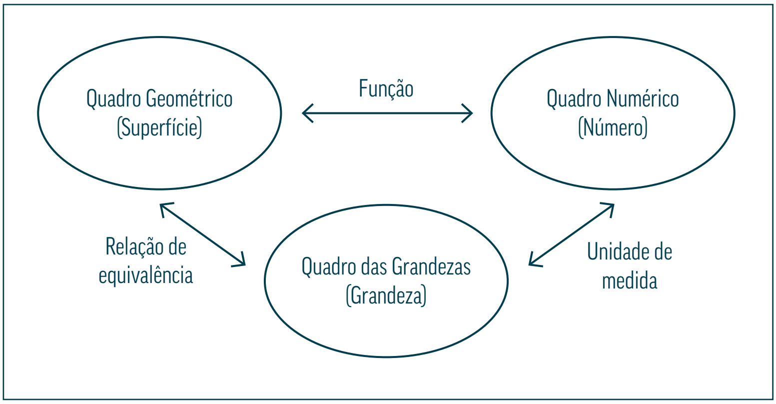
> no âmbito da conceituação, uma breve incursão nas obras que tratam do tema revela logo a diversidade e as divergências de pontos de vista quando se trata de responder à pergunta: O que é uma grandeza? No terreno da formação, a consulta à literatura especializada tem revelado as inúmeras e persistentes dificuldades de ensino e de aprendizagem associadas ao conceito de grandeza. Uma análise dos livros didáticos, de maneira análoga, confirma a presença frequente do tema e, em contrapartida, a ocorrência de evidentes falhas na condução de seu ensino (BELLEMAIN e LIMA, 2002, p. 4).

Esses autores sinalizam que grandezas são atributos de objetos que podem ser comparados a outros semelhantes do ponto de vista da igualdade ou desigualdade. Nessa direção, o comprimento, a área, o volume e a abertura de ângulo são classificados como grandezas geométricas, isto é, características associadas às figuras em Geometria. Além disso, tempo e massa são grandezas físicas, ou seja, atributos de fenômenos do mundo físico. Enquanto que valor monetário é uma grandeza relacionada à prestação de serviços ou à troca de bens.

Com relação às grandezas geométricas, Douady e Perrin-Glorian (1989) recomendam que sua abordagem na escola básica deve ocorrer de forma que esses conceitos sejam considerados como grandezas autônomas. Só assim, será possível que os estudantes compreendam o seu significado com êxito.

Assim, as autoras indicam que no estudo das grandezas, o professor deve realizar a diferença e estabelecer conexão entre três quadros que compõem o seu campo conceitual: o geométrico, o numérico e o das grandezas. Bellemain e Lima (2002) propõem um esquema que apresenta a articulação entre os mencionados quadros, conforme ilustrado pela Figura 1.

Figura 1: Articulação entre os quadros



Fonte: Adaptação de Bellemain e Lima (2002).

A partir desse esquema e considerando as discussões de Bellemain e Lima (2002), destacamos que o quadro geométrico é constituído por superfícies planas (quadrado, paralelogramo, triângulo, etc.). O quadro numérico consiste nas medidas das superfícies planas, que pertencem ao conjunto R^+ (5; 10; 8,5; 4,7 etc.) e o das grandezas, constituídas por classes de equivalência de superfícies de mesma medida. Logo, expressões compostas de um número e de uma unidade de medida constituem uma maneira de designar área como grandeza (3 cm^2, 10,5 m^2, 100 mm^2) (ROSA DOS SANTOS, 2015).

Para essa autora, embora os quadros sejam distintos, são interligados entre si e a relação de equivalência é o objetivo que possibilita passar do quadro geométrico para o das grandezas. Igualmente, as unidades de medida permitem passar do quadro das grandezas ao das medidas, e as funções que consentem a passagem do quadro geométrico ao numérico.

Por outro lado, se observarmos os livros didáticos de Matemática, sobretudo, os dos anos finais do ensino fundamental, constataremos que eles dão destaque exagerado ao uso de expressões matemáticas (as chamadas "fórmulas") na determinação das medidas de grandezas geométricas associadas às figuras planas (ROSA DOS SANTOS, 2018; PEREIRA DA COSTA, BATISTA e MORAIS, 2019). Tal perspectiva enfatiza o aspecto número, por meio do qual, o aluno compreenderá que a grandeza é uma medida, que a nosso ver, é um erro conceitual.

Com base nas orientações curriculares mais recentes, como a Base Nacional Comum Curricular (2018), a utilização dos cálculos de área e de volume, por exemplo, devem ocorrer nesse nível escolar após os estudantes reconhecerem "comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais" (BRASIL, p. 273).

Diante desse contexto, esta obra apresenta resultados de investigações vinculados a Grupos de Pesquisas, contemplando a produção de estudantes que desenvolveram estudos de iniciação científica e trabalho de conclusão de curso na Licenciatura em Matemática da UPE/Campus Garanhuns. Os manuscritos que formam essa obra abordam pesquisas vinculadas ao campo da Didática da Matemática e de algumas tendências em Educação Matemática. Nessa direção, o presente livro oferece uma coletânea de artigos de natureza teórica e de resultados de pesquisas, que poderá contribuir para a formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática, estudantes de pós-graduação, pesquisadores e demais interessados pela temática.

Neste tópico inicial, *Uma breve introdução sobre a Educação Matemática a partir do ensino da Geometria e das Grandezas e Medidas* é apresentado um panorama geral sobre a atual situação do ensino desses campos da matemática no Brasil. Assim, de forma sucinta, são discutidas questões de ordem didática e epistemológica relacionadas a esse processo.

No capítulo I é abordado um estudo que teve por objetivo[2] analisar a praxeologia matemática presente em um livro didático de Matemática do 8º ano do ensino fundamental, acerca do conceito de quadriláteros notáveis. Para tal, os autores adotaram como fundamentação teórica a definição de quadriláteros sinalizada por Pereira da Costa (2019) e a Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard (1999).

O capítulo II mostra os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar a abordagem do conceito de circunferência em um livro didático de Matemática do 8º ano do ensino fundamental. Então, os autores se apoiaram na definição de circunferência tomada por Cavalcanti (2011) e na Teoria Antropológica do Didático proposta por Yves Chevallard (1999).

No capítulo III, é apresentado o resultado de uma pesquisa que buscou analisar a organização matemática, acerca do estudo de área de triângulos, evidenciada em um livro de Matemática do 7º ano do ensino fundamental. Para tal fim, os autores utilizaram como suporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores, além do conceito de área

2 Os textos dos capítulos I, III e IV foram apresentados em uma versão preliminar no VI Congresso Nacional de Educação (CONEDU), em outubro de 2019.

como uma grandeza autônoma, conforme sinalizado por Douady e Perrin-Glorian (1989).

O capítulo IV apresenta resultados de uma pesquisa que teve por objetivo analisar a abordagem do conceito de área de figuras planas em um livro didático de Matemática do 6° ano do ensino fundamental. Para isso, os autores utilizaram como quadro teórico para o estudo, a Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1999) e a definição de área tomada por Teles (2007).

No capítulo V são apresentados os resultados de uma pesquisa que teve por objetivo analisar as potencialidades e as limitações de softwares de Geometria Dinâmica para o ensino médio. Desse modo, os autores se basearam nos pressupostos teóricos das Tecnologias em Educação Matemática, tendo por base as discussões de Borba (2001), Lagrange (2003), Borba, Silva e Gadanidis (2014).

Por fim, o capítulo VI, aborda os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo investigar as compreensões de professores que ensinam Matemática na educação básica, acerca do uso de jogos matemáticos nas práticas pedagógicas. Nessa direção, os autores utilizam os pressupostos teóricos sinalizados por Grando (2001), Nogueira (2005), Muniz (2010), Silva e Teles (2018), entre outros.

Desejamos aos leitores e às leitoras uma ótima leitura, e que as discussões apresentadas possam contribuir de alguma forma, para suas reflexões em Educação Matemática sobre a sala de aula da escola básica.

CAPÍTULO 1

O estudo dos quadriláteros notáveis em um livro didático de matemática sob o olhar da Teoria Antropológica do Didático[1]

Arthur Lucas Guilhermino da Silva
Marilene Rosa dos Santos

1 O trabalho apresenta alguns resultados de um projeto de pesquisa fomentada pelo CNPq – IC 2018/2019, que teve por objetivo analisar os livros de 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Introdução

A geometria é um campo da Matemática de grande relevância para a vida escolar e cotidiana de todo aluno, pois ao ser estudada, ela serve para despertar raciocínio, compreensão de problemas e resoluções. Além disso, o seu estudo auxilia outras áreas do conhecimento que utilizem elementos geométricos em seus respectivos contextos. Entre essas áreas, podemos citar, por exemplo, a Engenharia Civil e a Arquitetura.

Na Engenharia Civil, podemos ver aplicações de conceitos geométricos, na análise inicial de um terreno ou solo; na forma de delimitar o gabarito[2] para iniciar uma obra e em tipos de formas de blocos e lajotas de alvenaria. Na Arquitetura, podemos observar que a geometria está presente desde os primeiros rascunhos até que se tornem projetos, uma vez que possuem formas, superfícies e características visuais com vários elementos geométricos.

É por meio do ensino de geometria que os alunos podem desenvolver uma forma específica de pensar – o pensamento geométrico. Por meio desse pensamento, os estudantes analisam diversas situações-problemas as quais possibilitam o desenvolvimento de capacidades argumentativas, construções de hipóteses, conjecturas, entre outras.

2 Número máximo de pisos numa edificação, permitidos pela legislação.

Durante muitos anos, a geometria foi relegada a um segundo plano dos cursos de formação de professores, dos livros didáticos de Matemática, das práticas docentes e, também, da sala de aula na educação básica (PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2018). Essa situação foi denominada, por Lorenzato (1995), de omissão geométrica. Com efeito, esse fenômeno deixou muitas falhas conceituais no ensino de geometria, por parte de professores, e, consequentemente, por parte de alunos.

Apesar de passadas várias décadas, o cenário não mudou tanto, recentemente, com base em um levantamento bibliográfico realizado, encontramos algumas pesquisas (SANTOS e PEROVANO; 2018; PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS; 2018; PACHÊCO e PACHÊCO; 2017; PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS; 2015a) que apontam equívocos de ordem conceitual, tanto por parte de estudantes, em cursos de formação de professores, quanto por professores formados, que atuam na docência da escola básica. Assim como, também foi possível perceber que alunos da educação básica apresentam dificuldades semelhantes.

Nos documentos de orientação curricular, como a Base Nacional Comum Curricular de Matemática – BNCC (BRASIL, 2018) e o Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2019) é proposto que os conceitos geométricos sejam vivenciados desde os anos iniciais. Porém, é possível que a Geometria esteja sendo trabalhada de forma tímida na sala de aula da educação básica, ou seja, é provável que a omissão geométrica ainda sobreviva na escola básica brasileira (PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2020).

Nesse contexto, há pesquisas que apontam falhas também no ensino superior, a exemplo de Santos e Perovano (2018, p. 637), os quais afirmam que "os quadriláteros são, possivelmente, o conteúdo mais conhecido dos alunos do ensino fundamental e médio, mas, mesmo assim, alunos apresentam dificuldades quanto à sua compreensão". Com base nessa afirmação, inferimos que, mesmo que os alunos tenham vivenciado situações que exploraram esse conceito, na escola, dificuldades de diferentes naturezas são preservadas. Essas lacunas fazem com que haja falhas na aquisição do conteúdo por parte do aluno, pois, por mais que os alunos avancem de nível escolar, não conseguem avançar de nível de aprendizagem geométrica.

Outra pesquisa que aponta problemas no ensino da geometria, especificamente, no estudo dos quadriláteros notáveis é a de Pereira da Costa e Câmara dos Santos (2016). Esses autores sinalizam que para vários dos professores que ensinam Matemática na educação básica, também é notório que existam dificuldades conceituais em relação aos quadriláteros notáveis.

Diante desse cenário, fomos impulsionados a elaborar o seguinte problema de pesquisa: qual a abordagem do conceito de quadriláteros notáveis nos livros didáticos de matemática, do 8° e 9° ano do ensino fundamental, adotados nas escolas públicas de Garanhuns (Pernambuco-PE)?

Para responder ao nosso questionamento, adotamos a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard (1999), como pressuposto teórico e metodológico da pesquisa. Como pontuado pelo autor, a TAD estuda o homem diante do saber matemático e, mais particularmente, frente a situações matemáticas, partindo do princípio que todo trabalho matemático aparece como resposta a um tipo de tarefa (ROSA DOS SANTOS, 2015).

Nesse quadro teórico, a organização matemática é formada por algum tipo de tarefa (T), pelo menos uma técnica (τ), uma justificativa da técnica utilizada, a qual chamamos de tecnologia (θ), e uma teoria (Θ), logo, uma praxeologia é representada pela quádrupla, $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Portanto, temos como objetivo caracterizar elementos da praxeologia matemática existente em um livro didático de matemática, do 8° ano do ensino fundamental, adotado nas escolas públicas do município de Garanhuns-PE.

Quadro teórico

Os quadriláteros são objetos geométricos abstratos vinculados ao mundo das ideias; contudo, no mundo real, podemos verificar a presença de representações ou de objetos com formas que nos lembram esses objetos geométricos. Dessa forma, entre as diversas situações do dia a dia, podemos mencionar: a superfície de uma mesa ou de uma porta tem o formato de um retângulo, a forma de uma pipa remete a um losango, o desenho da cerâmica da cozinha ou do banheiro possui o contorno de um quadrado, entre outras.

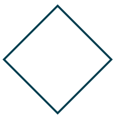
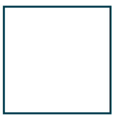
Nesta pesquisa, os quadriláteros são considerados pela definição proposta por Pereira da Costa (2019, p. 47):

> Consideremos quatro pontos aleatórios em um plano ou uma superfície (hiperbólica ou elíptica), tais como P, Q, R, S, de modo que três quaisquer deles não façam parte de uma mesma reta. Então, a coleção de pontos pertencentes aos segmentos de reta PQ, QR, RS e SP, ou então a porção do plano ou da superfície composta por todos esses segmentos de reta, nominamos de quadrilátero PQRS.

É possível encontrarmos diferentes tipos de quadriláteros, a depender do tipo de geometria considerada, seja ela do modelo euclidiano ou não euclidiano. Sendo assim, o autor comenta que "os euclidianos são formados pelos notáveis e pelos não notáveis, enquanto que os não euclidianos são compostos pelos quadriláteros hiperbólicos e pelos quadriláteros elípticos" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 47).

Além disso, segundo Dolce (1993, p. 100), "os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados". Assim, neste artigo, estudaremos a organização matemática dos quadriláteros notáveis. Acerca desse tipo de quadriláteros euclidianos, Pereira da Costa (2019) construiu um quadro, que apresenta as características e as propriedades, conforme ilustrado, a seguir, pelo Quadro 1.

Quadro 1: Tipos de quadriláteros notáveis e suas características

Quadriláteros	Definição	Propriedades
TRAPÉZIO 	É um quadrilátero notável que possui exatamente um único par de lados opostos paralelos. Os lados que são paralelos são chamados de bases do trapézio.	Os ângulos internos adjacentes a um mesmo lado transverso são suplementares. São classificados em três tipos: • trapézio escaleno: os lados opostos, não paralelos, não são congruentes; • trapézio isósceles: os lados opostos, não paralelos, são congruentes; • trapézio retângulo: possui dois ângulos internos congruentes retos. Além disso, eles possuem as diagonais congruentes.
PARALELOGRAMO 	É um quadrilátero notável que apresenta os dois pares de lados opostos paralelos entre si.	Os lados opostos são congruentes. Os ângulos internos opostos são congruentes. Dois ângulos internos adjacentes quaisquer são suplementares. As diagonais se cortam ao meio, em seus respectivos pontos médios.
RETÂNGULO 	É um paralelogramo que tem ângulos internos retos.	As diagonais dos retângulos são congruentes.
LOSANGO 	É um paralelogramo que possui todos os lados congruentes.	As diagonais são perpendiculares entre si e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos.
QUADRADO 	É um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.	As diagonais são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos.

Fonte: Pereira da Costa (2019, p. 58)

Além disso, conforme sinalizado pelo autor, os paralelogramos são divididos em: paralelogramos oblíquos (com ângulos internos não retos) e não-oblíquos (com todos os ângulos internos retos).

Ao observarmos o Quadro 1, temos a caracterização dos quadriláteros notáveis de forma organizada. Em geral, algumas definições mudam em relação aos seus ângulos internos e os lados. Além disso, algumas propriedades se correlacionam, a exemplo: o quadrado que é um retângulo e um quadrado, simultaneamente. Segundo Pereira da Costa (2019), estabelecer relações entre propriedades das figuras é chamado de inclusão de classes, que é um ponto bastante importante relativo ao pensamento geométrico, especificamente sobre os quadriláteros notáveis.

No que se refere ao livro didático, concordamos com Silva Júnior (2012, *apud*. MONTEIRO E ROSA DOS SANTOS, 2018, p. 2), ao comentar que:

> é um objeto fabricado para auxiliar o professor em suas atividades com relação à didática, a pedagogia, e a metodologia. Para tal ele aborda os conteúdos em sequência, com organização gráfica, bem como estruturas linguísticas e simbólicas.

A organização praxeológica ou, simplesmente, praxeologia pode ser considerada como a realização de algum tipo de tarefa (T) por meio de uma técnica (τ), na qual terá uma explicação da técnica usada por meio de elementos tecnológicos (θ), que serão justificados por uma teoria (Θ). Sendo assim, temos quatro elementos dentro da praxeologia – os tipos de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), respectivamente, representados pela quádrupla, $[T, \tau, \theta, \Theta]$, e está dividida em dois blocos da praxeologias, que são: saber-fazer $[T, \tau]$ e o do saber $[\theta, \Theta]$.

A praxeologia matemática vai tratar da realidade matemática presente com os tipos de tarefa (T), que pode existir em um grupo de várias tarefas com atributos comuns. Desse modo, para tipo de tarefa T_M – determinar a medida da abertura dos ângulos internos em quadriláteros pode existir: T_{M1}: determinar a medida da abertura dos ângulos internos de um retângulo; T_{M2}: determinar a medida da abertura dos ângulos internos de um losango, todas como sendo tarefas de T_M. Assim, percebemos que as tarefas (t) pertencem a um conjunto maior que é o tipo de tarefa (T), que por sua vez, possuem um sentido mais particular. Além disso, quando uma tarefa (t) faz parte de um tipo de tarefa (T), podemos denotar que $t \in T$.

Os tipos de tarefas (T) são respondidos por meio de técnicas (τ). Aqui temos o primeiro bloco do saber-fazer [T, τ], que será amparado pelo segundo bloco do saber: com justificação a partir das tecnologias (θ) e finalmente validades para teoria (Θ), completando assim o bloco do saber [θ, Θ], todas relativas a um objeto do saber, que, nesta pesquisa, foi o conceito sobre os quadriláteros notáveis.

Dessa forma, tomaremos como base a TAD – Teoria Antropológica do Didático e os estudos acerca dos quadriláteros notáveis; neste trabalho, trataremos sobre a análise da praxeologia matemática no livro didático, do 8° ano do ensino fundamental, adotado nas escolas públicas de Garanhuns-PE, relativo ao conceito de quadriláteros notáveis.

Procedimentos metodológicos

Para possibilitar uma aproximação mais estreita com o nosso objeto de estudo e nosso referencial teórico, optamos por uma abordagem de pesquisa qualitativa de cunho etnográfico. Nessa direção, concordamos com André (2011, p. 24), quando reflete sobre a dicotomia entre a pesquisa qualitativa e quantitativa: “não me parece muito conveniente continuar usando o termo “pesquisa qualitativa” de forma tão ampla e genérica”. Desse modo, ela sugere que esses termos sejam utilizados para diferenciar técnicas de coleta ou tipos de dados colhidos. A autora recomenda, então, usar denominações mais precisas para determinar o tipo de pesquisa realizada, como, por exemplo, a etnográfica.

Conforme a referida pesquisadora, “a etnografia é um esquema de pesquisa desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e a sociedade" (ANDRÉ, 2011, p. 27). Essa afirmativa vem contribuir com a nossa escolha em adotar a Teoria Antropológica do Didático. Na Educação, as pesquisas do tipo etnográfico caracterizam-se por fazerem uso das técnicas de observação participante, entrevista e análise de documentos.

Neste estudo, adotamos a Teoria Antropológica do Didático desenvolvida por Chevallard (1999), uma vez que ela situa a atividade de estudo em matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Nessa direção, o mencionado quadro teórico foi utilizado como sustentação teórica e metodológica para esta pesquisa.

O presente trabalho apresenta uma análise documental do livro didático do 8º ano do ensino fundamental da coleção "Vontade de Saber Matemática", sob a autoria de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, 3ª edição, 2015. O mesmo é utilizado nas escolas públicas de Garanhuns-PE, tendo sido aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2017, especificamente, o livro didático de matemática do professor. Para a análise do material, tomamos os elementos da praxeologia matemática para realizarmos as análises referentes aos quadriláteros notáveis.

Para analisarmos o conceito de quadriláteros, utilizamos os tipos de tarefas identificados por Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018, p. 362), que indicaram 9 tipos de tarefas que são relacionadas aos quadriláteros notáveis:

> T_M – Determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável
>
> T_R – Reconhecer quadriláteros
>
> T_E – Nomear elementos que compõem quadriláteros notáveis
>
> T_C – Construir quadriláteros notáveis
>
> T_V – Validar proposições sobre os quadriláteros notáveis

T_I – Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes

T_L – Localizar em um plano cartesiano as coordenadas dos vértices de um quadrilátero notável

T_P – Reconhecer propriedades dos quadriláteros notáveis

T_D – Associar elementos da definição ao quadrilátero notável correspondente

Esses tipos de tarefas serviram como bases para a nossa análise da praxeologia matemática, no livro didático do 8º ano do ensino fundamental. Além disso, escolhemos as categorias de Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018), visto que sua pesquisa é uma das primeiras no Brasil a investigar sobre o tema.

Resultados e discussão

Como já exposto na seção anterior, o livro analisado pertence a coleção "Vontade de Saber Matemática" dos autores Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro, 3ª edição, 2015, destinado ao 8º ano do ensino fundamental, sendo dividido em 12 capítulos. No final da obra, há um manual do professor, no qual se encontra 'orientações para o professor'. Nessa seção, é possível encontrarmos orientações gerais, objetivos, comentários e sugestões que podem auxiliar o professor na utilização do livro didático em questão. O capítulo 11 é destinado para quadriláteros e formas circulares, contendo tópicos e subtópicos sobre os quadriláteros, com início na página 236 e conclui-se na 259. No entanto, nossas análises focaram apenas no nosso objeto de estudo. No final desse capítulo, encontramos as seções Revisão; ENEM e OBMEP.

Em relação à análise da organização matemática, presente no livro, encontramos 91 tarefas (t) presentes no capítulo 11. Além disso, encontramos um tipo de tarefa (T) a mais do que as que foram indicadas por Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2018), sobre o nosso objeto de estudo: os quadriláteros notáveis. Portanto, ao analisarmos as tarefas presentes no livro, verificamos a necessidade de criar um novo tipo de tarefa, não indicada pelos autores supracitados, ou seja, acrescentamos o tipo de tarefa – T_{CL} (Classificar quadriláteros notáveis). Dessa forma, constatamos 10 tipos de tarefas, no capítulo destinado ao estudo dos quadriláteros no 8° ano do ensino fundamental, conforme apresentado na Tabela 1.

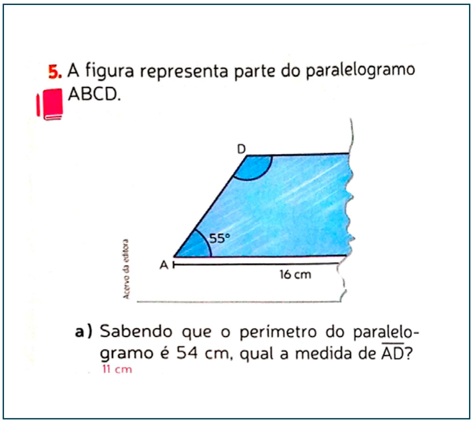
Tabela 1: Quantidade dos tipos de tarefas encontrados no livro de 8º ano

Tipos de tarefas encontradas no livro do 8º ano		Quantidade
T_M	Determinar a medida de uma grandeza associada a um quadrilátero notável	41
T_{CL}	Classificar quadriláteros notáveis	19
T_E	Nomear elementos que compõem quadriláteros notáveis	6
T_C	Construir quadriláteros notáveis	6
T_V	Validar proposições sobre os quadriláteros notáveis	6
T_D	Associar elementos da definição ao quadrilátero notável correspondente	4
T_R	Reconhecer quadriláteros notáveis	3
T_I	Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes	3
T_L	Localizar em um plano cartesiano as coordenadas dos vértices de um quadrilátero notável	2
T_P	Reconhecer propriedades dos quadriláteros notáveis	1
	TOTAL	91

Fonte: Acervo da pesquisa

Como podemos observar, na tabela acima, o tipo de tarefa mais recorrente foi T_M – Determinar a medida de uma grandeza associada a um quadrilátero notável, com 45,05% do total. Esse tipo de tarefa pede para o estudante calcular a medida de uma grandeza vinculada à figura representada. Conforme ilustrado na Figura 1, verificamos que se trata de determinar a medida do comprimento do lado do paralelogramo dado em questão.

Figura 1: Exemplo de tipo de tarefa T_M presente no livro didático



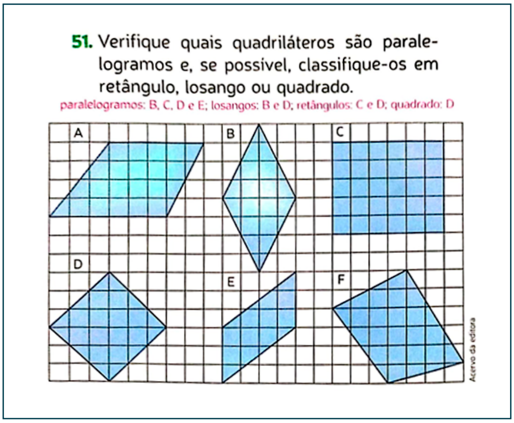
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 243)

Nesse tipo de tarefa (T), é pedido que o aluno encontre a medida do comprimento do lado $\overline{AD}$ desse paralelogramo, sabendo que o seu perímetro mede 54 cm. Para resolver essa tarefa, isto é, a técnica utilizada será a seguinte: o aluno observará que, no quadrilátero, um dos lados possui 16 cm de medida do comprimento e com base na propriedade do paralelogramo (de que os seus lados opostos são congruentes), ele identificará que se um dos lados possui 16 cm de comprimento, o outro lado também possuirá, assim, perceberá que 16 cm + 16 cm = 32 cm, ou então, 2 x 16 cm = 32 cm.

Após essa primeira análise, o aluno prosseguirá para encontrar a medida do comprimento do lado $\overline{AD}$ que, como vimos na figura, será congruente ao seu lado oposto. Dessa maneira, podemos inferir que a soma da medida do comprimento do lado $\overline{AD}$ como a medida do comprimento do seu lado oposto é duas vezes o valor de $\overline{AD}$, ou seja, $2\overline{AD}$. Para finalizar com outra técnica (t), justificada pela equação do 1º grau, o aluno pode encontrar a medida do comprimento do lado $\overline{AD}$, com os seguintes procedimentos: $32 \text{ cm} + 2\overline{AD} = 54 \text{ cm} \therefore \overline{AD} = 11 \text{ cm}$.

Em seguida, temos como o segundo tipo de tarefa que mais predomina, T_{CL} – Classificar quadriláteros notáveis, com 20,88% do total. Nesse tipo de tarefa, os itens vão além de classificar, pois existem tarefas que podem abordar (ou não) inclusão de classes (isso é algo que nos chama bastante atenção); sendo assim, pode aumentar a quantidade de tarefas desse tipo e, como foi falado anteriormente, traz um leque de possibilidades de questões com esse tipo de tarefa. Então, é esperado que o aluno possa diferenciar que, além da análise da representação geométrica, deve haver a análise das propriedades desses quadriláteros, conforme ilustrado, a seguir:

Figura 2: Exemplo do tipo de tarefa T_{CL} presente no livro didático analisado



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 257)

Conforme o exposto, a questão se divide em duas partes – verificar quais quadriláteros são paralelogramos e, se possível classificá-los em retângulo, losango ou quadrado, para responder a primeira parte, o usuário do livro deverá mobilizar os conhecimentos sobre paralelogramos, tais como definição e propriedades. Em relação à definição, as figuras esperadas como respostas seriam: as que representassem um quadrilátero notável com dois pares de lados opostos paralelos entre si. No que se referem às propriedades, as figuras esperadas, como respostas, deveriam ser as que apresentassem lados e ângulos internos opostos congruentes; dois ângulos internos adjacentes, que são suplementares e diagonais que se cortam ao meio nos seus pontos médios.

Com essa técnica, o estudante poderá responder quais dos quadriláteros apresentados, na questão, são paralelogramos. Assim, é esperado que ele responda que as figuras representadas pelos itens B, C, D e E são classificadas como paralelogramos, a partir da técnica justificada pela definição dos paralelogramos – todo paralelogramo possui dois pares de lados opostos paralelos entre si.

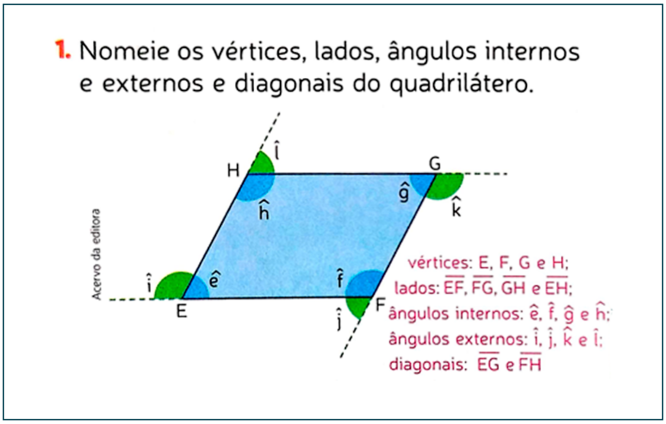
Na segunda parte dessa questão, outra técnica a ser utilizada pelo o aluno é a referente à classificação, isto é, ele classificará novamente, mas agora, como sendo paralelogramos não-oblíquos, que são: retângulo, losango e quadrado. Nessa direção, teríamos como resposta: retângulo – C e D, losango – B e D; quadrado – D.

As justificativas para a técnica utilizada, na segunda parte, referem-se às propriedades – retângulo – as diagonais dos retângulos são congruentes; losango: as diagonais são perpendiculares entre si e estão localizadas nas bissetrizes dos ângulos internos; quadrado: as diagonais são congruentes entre si, perpendiculares e ainda são as bissetrizes dos ângulos internos – e às classificações dos paralelogramos não-oblíquos – retângulo é um paralelogramo que tem ângulos internos retos; losango é um paralelogramo que possui todos os lados congruentes; quadrado é um paralelogramo que é retângulo e losango ao mesmo tempo.

As figuras representadas pelos itens A e F não são paralelogramos, pois, com o auxílio da malha quadriculada, o aluno poderá verificar que os lados opostos não possuem medidas iguais relativas aos seus comprimentos. Logo, não satisfaz a definição de paralelogramo, ou seja, não apresenta dois pares de lados paralelos entre si, e, consequentemente, não é nenhum paralelogramo não-oblíquo.

Dando continuidade, com 6,59% do total de tarefas, temos T_E – Nomear elementos que compõem quadriláteros notáveis. Logo, nesse tipo de tarefa, é pedido para o aluno realize a nomeação dos componentes dos quadriláteros, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3: Exemplo do tipo de tarefa T_E presente no livro didático analisado

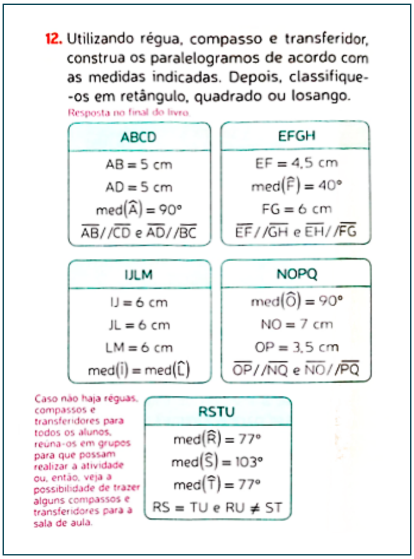


Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 238)

Para o aluno responder essa questão, a técnica mobilizada será justificada pelos elementos que compõem os paralelogramos. Desse modo, o aluno deverá verificar onde esses elementos se encontram e nomear aqueles que são correspondentes ao paralelogramo. Ainda no capítulo do livro, é encontrado o bloco tecnológico-teórico [θ, Θ], que apresenta os componentes que formam os quadriláteros notáveis: vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e diagonais.

Em seguida, identificamos mais um tipo de tarefa: T_C – Construir quadriláteros notáveis, com uma frequência de 6,59% entre as questões analisadas.

Figura 4: Exemplo do tipo de tarefa T_C presente no livro didático analisado



12. Utilizando régua, compasso e transferidor, construa os paralelogramos de acordo com as medidas indicadas. Depois, classifique-os em retângulo, quadrado ou losango.
Resposta no final do livro.

ABCD	EFGH
AB = 5 cm	EF = 4,5 cm
AD = 5 cm	$med(\hat{F}) = 40°$
$med(\hat{A}) = 90°$	FG = 6 cm
$\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$	$\overline{EF}//\overline{GH}$ e $\overline{EH}//\overline{FG}$

IJLM	NOPQ
IJ = 6 cm	$med(\hat{O}) = 90°$
JL = 6 cm	NO = 7 cm
LM = 6 cm	OP = 3,5 cm
$med(\hat{I}) = med(\hat{L})$	$\overline{OP}//\overline{NQ}$ e $\overline{NO}//\overline{PQ}$

Caso não haja réguas, compassos e transferidores para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer alguns compassos e transferidores para a sala de aula.

RSTU
$med(\hat{R}) = 77°$
$med(\hat{S}) = 103°$
$med(\hat{T}) = 77°$
RS = TU e RU ≠ ST

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 244)

Para resolver esse item, o aluno terá que mobilizar seus conhecimentos sobre os paralelogramos, as suas características e propriedades como, por exemplo, lados opostos congruentes, ângulos internos opostos congruentes e diagonais que se cortam ao meio nos respectivos pontos médio. Além disso, no item, são disponibilizadas as medidas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos internos do quadrilátero notável. Essas informações possibilitarão uma forma mais precisa de como o aluno deve construir esses quadriláteros.

Com relação à técnica (t) utilizada, o aluno verificará os dados que lhe foram apresentados para, em seguida, utilizar as medidas do comprimento dos lados e da abertura dos ângulos internos de cada um dos cinco paralelogramos, que é pedido para construir. Assim, o estudante deverá verificar também quais figuras têm lados opostos paralelos entre si e quais desses lados são congruentes (ou não).

A técnica utilizada é justificada pela classificação dos paralelogramos e pelas propriedades dos paralelogramos: os lados opostos são congruentes; os ângulos internos opostos são congruentes; dois ângulos internos adjacentes quaisquer são suplementares; as diagonais se cortam ao meio em seus respectivos pontos médios.

Posteriormente, com a mesma frequência de 6,59%, temos T_V – Validar proposições sobre os quadriláteros notáveis.

Figura 5: Exemplo do tipo de tarefa T_V presente no livro didático analisado

> **3.** Se todos os lados de um paralelogramo tiverem medidas iguais, podemos afirmar que ele é um quadrado? Justifique.
> Não, pois para ser um quadrado o paralelogramo também deverá ter todos os ângulos internos retos.

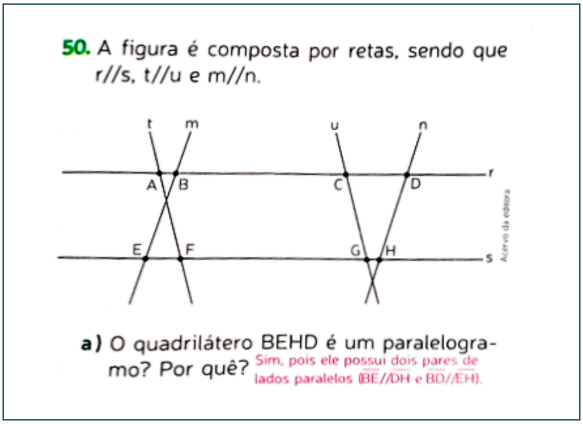
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 256)

Para responder esse item, o aluno precisará recorrer às propriedades dos paralelogramos, em específico, do quadrado. Nessa direção, será possível verificar se a afirmação está correta ou não; observe que o quadrado é um paralelogramo que possui ângulos internos retos (há congruência em suas aberturas) e com todos os lados com comprimentos congruentes, mas a condição de existência desse paralelogramo não-oblíquo é de que seus ângulos internos devem ser retos, sendo assim, a afirmativa é falsa.

A justificativa presente na tecnologia (θ), para essa técnica, se sustenta na definição do quadrado: além de todos os lados com comprimentos congruentes entre si, ainda deve possuir todos os ângulos internos retos.

Em seguida, temos T_D – Associar elementos da definição ao quadrilátero notável correspondente, que correspondeu a 4,40% do geral. A seguir, podemos encontrar um exemplo desse tipo de tarefa identificada no livro (Figura 6).

Figura 6: Exemplo do tipo de tarefa T_D presente no livro didático analisado



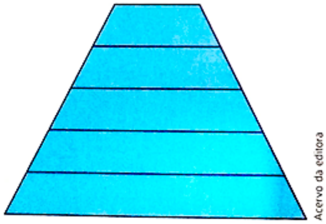
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 257)

Para responder a esse item, o aluno deve mobilizar conhecimentos acerca dos paralelogramos, é esperado que o aluno fale sobre sua definição e alguma das propriedades. Espera-se que ele associe o quadrilátero notável BEHD à definição de paralelogramo: quadrilátero notável com dois pares de lados opostos paralelos entre si. As propriedades que poderiam ser citadas, como justificativas, são: lados e ângulos internos opostos congruentes; dois ângulos internos adjacentes, que são suplementares e diagonais que se cortam ao meio nos seus pontos médio.

Depois, temos T_R – Reconhecer quadriláteros notáveis, com 3,30% do total de itens analisados. Foi possível encontramos diversas tarefas, nas quais é pedido para o aluno analisar e reconhecer os quadriláteros notáveis que são lhe apresentados, conforme exemplificado na Figura 7.

Figura 7: Exemplo do tipo de tarefa T_R presente no livro didático analisado

4. Quantos trapézios é possível identificar na imagem? 15 trapézios



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 238)

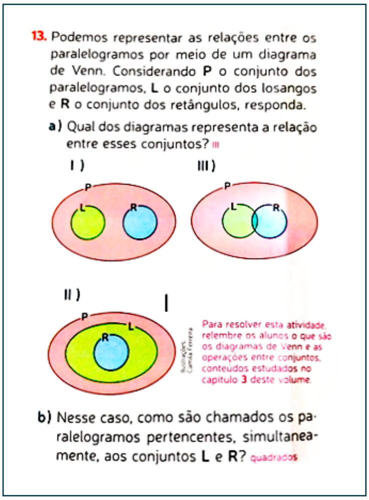
A questão, presente na Figura 7, que foi escolhida para analisar o tipo de tarefa, é pedido que o aluno verifique quantos trapézios são possíveis identificar na imagem. Assim, o estudante mobilizará conhecimentos sobre o trapézio – a definição e propriedades.

Nessa técnica, ao associar a figura geométrica, presente, com a definição e verificar se alguma das propriedades correspondem a figura dada, o aluno observará, na imagem, as combinações que podem ser feitas para encontrar os trapézios. Desse modo, será necessária atenção para encontrar os pares de lados opostos que sejam paralelos, sendo assim, a técnica presente é justificada pela definição de trapézio: é um quadrilátero notável que possui exatamente um único par de lados opostos paralelos.

Em seguida, temos T_I – Estabelecer inclusão de classes entre os quadriláteros notáveis correspondentes, com também 3,30% do total das tarefas presentes no livro, como apresentando pela Figura 8.

Para responder este tipo de tarefa (T), o aluno deverá utilizar a técnica (t), que consiste em identificar a classificação do paralelogramo em relação aos elementos da definição e propriedades que possui. A técnica utilizada para resolver essa questão se justifica no bloco do saber [θ, Θ], com as definições e propriedades.

Figura 8: Exemplo do tipo de tarefa T_I presente no livro didático analisado


13. Podemos representar as relações entre os paralelogramos por meio de um diagrama de Venn. Considerando **P** o conjunto dos paralelogramos, **L** o conjunto dos losangos e **R** o conjunto dos retângulos, responda.

a) Qual dos diagramas representa a relação entre esses conjuntos? III

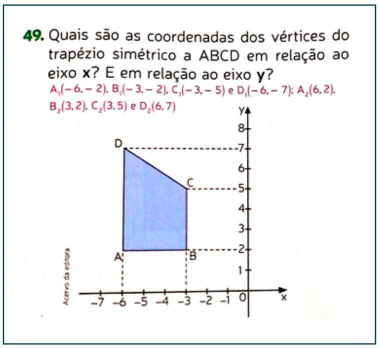
Para resolver esta atividade, relembre os alunos o que são os diagramas de Venn e as operações entre conjuntos, conteúdos estudados no capítulo 3 deste volume.

b) Nesse caso, como são chamados os paralelogramos pertencentes, simultaneamente, aos conjuntos **L** e **R**? quadrados

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 244)

Dando continuidade, temos T_L – Localizar em um plano cartesiano as coordenadas dos vértices de um quadrilátero notável, que corresponde a 2,20% das tarefas analisadas, como exemplificado a seguir (Figura 9).

Figura 9: Exemplo do tipo de tarefa T_L presente no livro didático analisado


49. Quais são as coordenadas dos vértices do trapézio simétrico a ABCD em relação ao eixo **x**? E em relação ao eixo **y**?
$A_1(-6, -2)$, $B_1(-3, -2)$, $C_1(-3, -5)$ e $D_1(-6, -7)$; $A_2(6, 2)$, $B_2(3, 2)$, $C_2(3, 5)$ e $D_2(6, 7)$

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 257)

Com base na Figura 9, notamos que essa questão focou, apenas, nas coordenadas do trapézio em um plano cartesiano. As possíveis técnicas usadas pelos alunos, para responderem a essa questão, seriam: analisar os pontos nos quais cada vértice está representado no eixo das abscissas (X) e das ordenadas (Y), algo bem intuitivo, em que teriam um par ordenado (X, Y). Nessas condições, o aluno deveria retomar ao assunto, que, provavelmente, tenha estudado em anos anteriores, sobretudo, simetria.

Fazendo uso de simetria, o estudante poderia ainda responder o item levando em consideração cada eixo, considerado como eixo de reflexão sobre o quadrilátero. Nesse caso, o trapézio seria construído, considerando os seus pontos simétricos em relação aos pontos iniciais, conforme solicitado no enunciado da questão.

Por fim, temos o tipo de tarefa que menos aparece na nossa análise: T_P – Reconhecer propriedades dos quadriláteros notáveis, com 1,10% do total, com ilustrado a seguir pela Figura 10.

Figura 10: Exemplo do tipo de tarefa T_P presente no livro didático analisado

2. *Que semelhanças e diferenças há entre paralelogramos e trapézios?* Resposta esperada: ambos são quadriláteros, porém, o paralelogramo possui dois pares de lados paralelos e o trapézio possui apenas um par de lados paralelos.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 257)

Nessa questão, a técnica utilizada pelo aluno será justificada pelas propriedades desses dois tipos de quadriláteros, para assim, estabelecer essa relação de semelhanças e diferenças que ambos possuem. Na técnica utilizada, é esperado que o estudante responda que as semelhanças existentes ocorrem pelo fato de ambos serem quadriláteros. Porém, nas propriedades, a diferença é de que os paralelogramos possuem dois pares de lados opostos paralelos entre si e os trapézios possuem apenas um único par de lados opostos paralelos entre si.

Considerações finais

Neste trabalho, tivemos por objetivo caracterizar elementos da praxeologia matemática existente em um livro didático de matemática, do 8º ano do ensino fundamental, adotado nas escolas públicas do município de Garanhuns-PE. Para isso, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático – TAD, desenvolvida por Chevallard (1999), como sustentação teórica.

Destacamos, na revisão literária que nos auxiliou na etapa inicial do estudo, que o ensino da geometria apresenta várias lacunas, seja por estudantes de cursos de formação de professores, seja por parte de professores formados há tempos e, por conseguinte, por partes dos alunos da Educação Básica (SANTOS e PEROVANO; 2018; PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS; 2018; PACHÊCO e PACHÊCO; 2017).

Como consequência disso, na análise realizada, identificamos que ainda existem aspectos presentes do fenômeno da "omissão geométrica" (LORENZATO, 1995), visto que há um destaque no cálculo de área. Desse modo, o foco do tipo de tarefa mais presente está no estudo das grandezas e medidas e não na Geometria.

Entre os fatores analisados no levantamento bibliográfico (lacunas conceituais de alunos da Educação Básica, de professor e em formação de professores que atuam na escola básica) constatou-se que muitos professores não têm os conhecimentos necessários para a sua prática pedagógica; outro ponto é de que esses profissionais, por vezes, dão uma importância exagerada ao livro didático em sala de aula. Sendo assim, ao analisarmos o livro didático, notamos que a maioria das tarefas foca no cálculo da medida de grandezas associadas aos conceitos geométricos. Desse modo, a geometria ocupa um segundo plano na abordagem desse recurso didático.

Analisando a praxeologia matemática, presente no livro do 8º ano, evidenciamos que há um foco maior no tipo de tarefa T_M – Determinar a medida de uma grandeza associada a um quadrilátero notável, com 45,05% do total de tarefas. Assim, embora as questões desse tipo de tarefas tratem dos quadriláteros notáveis, algo que nos chama atenção é a forma que alguns elementos são propostos nos tipos de tarefa; o exemplo, disso, a tarefa que mais aparece, nos mostra que há um enfoque no campo das grandezas e medidas.

Logo, notamos isso pelo fato de haver uma discrepância entre a quantidade de tarefas (t) de cada tipo de tarefa (T). Então, acreditamos que deveria ocorrer de forma balanceada essa distribuição da quantidade de tarefas presentes, para que abarque cada um dos tipos de tarefas.

Dessa forma, indicamos que o professor não deve somente se prender ao livro didático; tal profissional deve trazer complementos para a sua aula, sendo assim, não haveria tipos de tarefas com menores frequências, que são por vezes deixados de lado. O bloco teórico-tecnológico [θ, Θ], do saber de alguns tipos de tarefas (T), justifica as técnicas (t), que são validadas pela teoria (Θ), a qual está abordada nas respostas dos tipos de tarefas.

As dificuldades, acerca do conceito de quadriláteros, são comuns aos vários níveis de escolaridade. Com o passar dos anos, os alunos vão se perdendo no meio do caminho por 'n' fatores, que possibilitam uma não aprendizagem, seja por dificuldades em fundamentos triviais ou nos conceitos e representações em geometria.

Dessa forma, esta pesquisa traz uma contribuição para o ensino de quadriláteros notáveis, ao identificar algumas dificuldades que ainda estão enraizadas. Mostramos um ponto frágil para que seja observado, não com um olhar de negligência, mas com um olhar de urgência para ser resolvida.

Assim, esperamos que este trabalho contribua com o desenvolvimento de futuras pesquisas, tornando-se importantes ferramentas, para que possibilitem mudanças em algumas realidades intrínsecas no âmbito da Educação Matemática.

CAPÍTULO 2

Análise praxeológica do conceito de circunferência em um livro didático do 8° ano do ensino fundamental

Gilmara Ribeiro Bezerra
Thayná Thayse Melo Monteiro
Marilene Rosa dos Santos

Introdução

A utilização da geometria durante a história de toda a civilização humana mostra o quanto essa área do conhecimento é necessária para entender e conhecer as formas e a organização do espaço. Pode ser que de forma específica a medição de terras tenha contribuído para o seu surgimento, uma vez que, etimologicamente, a palavra deriva do grego *geo* = terra + *metrein* = medir, ou seja, medição de terra (SANTOS, 2009).

Diariamente, no presente, tanto quanto acontecia no passado, os diferentes grupos sociais usam os conhecimentos geométricos nas mais diversas situações do seu cotidiano. Assim, concordamos com Piaseski (2010), quando afirma que:

> o estudo da geometria é indispensável para o pleno desenvolvimento do ser humano, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento, devido à grande importância que a geometria assume no cotidiano do indivíduo (PIASESKI, 2010, p. 06).

Apesar da sua importância para a formação humana, por muito tempo na história da escola básica do Brasil, essa área do conhecimento ficou relegada a um segundo plano na sala de aula de Matemática. Esse fenômeno foi denominado de "omissão geométrica" por Lorenzato (1995), na década de 90 do século passado. Logo, naquela época, era bastante evidente que professores e alunos apresentassem lacunas conceituais a respeito desse campo matemático.

Contudo, nos últimos anos, o ensino da geometria tem sido alvo de muitas pesquisas, (PIASESKI, 2010; LIMA, 2014; WAGNER e FLORES, 2017; GABRIEL e ALLEVATO, 2018), no âmbito da Educação Matemática. Tais estudos proporcionou mudanças relevantes como a formulação de documentos curriculares, tanto nacionais como estaduais, e as alterações nas abordagens dos livros didáticos, uma vez que no passado, a geometria era quase sempre apresentada na última parte do livro e, atualmente aparece de forma mais articulada (PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2018; PEREIRA DA COSTA, 2019).

No que se refere ao livro didático, pesquisas como as de Silva Junior e Regnier (2007) e Rosa dos Santos (2015), apontam que o livro didático possui influência direta no planejamento didático dos professores, que utilizam os textos, atividades e sugestões para seu apoio. Tal fato justifica a necessidade do desenvolvimento de pesquisas acerca desse recurso e, em especial, sobre como os conceitos geométricos são abordados.

Diante desse cenário, nesta investigação, questionou-se: qual a abordagem que o livro didático de Matemática do 8° ano do ensino fundamental apresenta em relação ao conceito de circunferência?

Para responder a esse problema de pesquisa, utilizou-se como apoio a Teoria Antropológica do Didático, divulgada por Yves Chevallard (1999) e seus colaboradores. Para esse autor, toda atividade humana pode ser descrita por uma organização praxeológica ou praxeologia (ROSA DOS SANTOS, 2015).

Com isso tem-se por objetivo geral analisar a abordagem do livro didático de Matemática do 8° ano do ensino fundamental em relação ao conceito de circunferência. De forma mais específica, busca identificar os tipos de tarefas de circunferência mais presentes na abordagem do livro e caracterizar a praxeologia matemática mais dominante no tocante ao conceito de circunferência[1].

1 O presente trabalho apresenta um recorte dos resultados de um projeto de iniciação científica fomentado pelo CNPq UPE IC 2019/2020, que teve por objetivo analisar os livros de 8º e 9º ano do ensino fundamental.

O Conceito de circunferência

Durante toda a sua vida o ser humano tem se deparado com representações geométricas em seu cotidiano. Desse modo, pode-se encontrar vários conceitos geométricos representados por embalagens, objetos, construções, pinturas artísticas, entre outros. Tal fato reforça a importância de estudar geometria na escola, uma vez que possibilita ao indivíduo compreender e representar as formas no espaço em que vive.

Entre esses conceitos é possível citar o objeto matemático "circunferência", o qual se faz presente no currículo escolar da Educação Básica. Esse conceito é base para outros conteúdos da própria Matemática, como a trigonometria, por exemplo, ou ainda para outras áreas do conhecimento, como a Física e a Engenharia. Dessa forma, justifica-se a necessidade de explorar bem os conceitos básicos no estudo da geometria plana, visto que muitas dificuldades que surgem em outros contextos geométricos se devem ao ensino inadequado desse tópico (ROGENSKI e PEDROSO, 2015).

No âmbito da Matemática, a circunferência é identificada como um lugar geométrico, no qual há variadas definições que fazem referência a esse objeto. Todavia, nomeia-se circunferência como sendo "um lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizadas a uma distância *r* de um ponto fixo, denominado o centro da circunferência" (CAVALCANTI, 2011, p. 18, grifo nosso).

Todos os lugares geométricos são compostos de propriedades específicas, as quais fazem com que eles sejam reconhecidos e diferenciados uns dos outros. A circunferência, por sua vez, possui propriedades que a caracterizam, "como o fato de ser a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. É também a única figura simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria" (CAVALCANTI, 2011, p. 18).

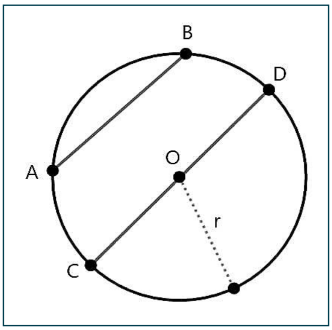
Na estrutura de uma circunferência, são instituídos alguns elementos particulares, os quais fazem com que ela seja distinguida dos demais lugares geométricos existentes, são eles: a corda, o diâmetro, o raio, o arco, o ângulo central e o ângulo inscrito.

A corda de uma circunferência "é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência" (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 144). Assim, dados dois pontos A e B de uma circunferência, designa-se a corda $\overline{AB}$ o segmento de reta de extremos A e B.

Diz-se que o diâmetro "é uma corda que passa pelo centro" (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 144). Assim, por tratar-se da maior corda de uma circunferência, podemos caracterizá-lo como um caso particular de corda. Portanto, tem-se que o diâmetro apresenta o dobro da medida do comprimento do raio (MACHADO, 2012). Então, dados dois pontos C e D de uma circunferência, designa-se o diâmetro $\overline{CD}$ o segmento de reta de extremos C e D.

O raio é denominado como sendo "um segmento com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência" (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 144). Logo, o ponto de partida estará sobre a região limitada da circunferência, enquanto o ponto de chegada será interior à circunferência. Seja r o raio, representando a metade da medida do comprimento do diâmetro descrito anteriormente. Dada uma circunferência λ, de centro O. É possível observar, na Figura 1 a representação gráfica desses três elementos:

Figura 1: Elementos: corda, diâmetro, raio



Fonte: Acervo da pesquisa

Chama-se ângulo central "todo o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência" (GUERREIRO, 2017, p. 31). Por outro lado, o arco é a "interseção de uma dada circunferência com um ângulo ao centro" (IBIDEM, p. 31). Consequentemente, a medida do arco é equivalente à amplitude do ângulo central correspondente a ele.

O ângulo inscrito é um ângulo que possui o vértice sobre a circunferência e os lados secantes a mesma (DOLCE e POMPEO, 1993). A medida do ângulo inscrito equivale à metade do ângulo central correspondente (IBIDEM, 1993).

Além dos elementos que estão presentes em uma circunferência, mencionados anteriormente, pode-se analisar as relações entre esse conceito e outros objetos geométricos a partir das posições existentes entre eles. Como é o caso das posições relativas entre pontos e circunferência ou das posições relativas entre retas e circunferência. Por último, ainda se pode estudar a relação das posições entre duas circunferências.

Com relação às posições relativas entre ponto e circunferência, sendo *O* o centro da circunferência λ, considera-se que:

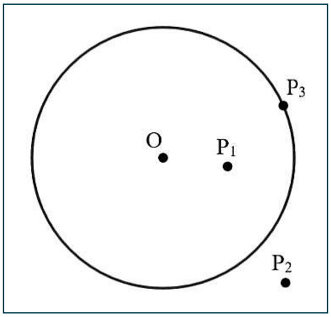
- um ponto P_1 é dito interno à circunferência, quando $d(P_1, O) < r$. A distância desse ponto até o centro da circunferência é menor do que o comprimento do raio. Portanto, "o conjunto de todos os pontos interiores a uma circunferência é chamado de interior da circunferência" (MACHADO, 2012, p. 90);

- um ponto P_2 é externo a uma circunferência, quando $d(P_2, O) > r$. A distância desse ponto até o centro da circunferência é maior do que o comprimento do raio. Logo, "o conjunto de todos os pontos exteriores a ela é chamado exterior da circunferência" (MACHADO, 2012, p. 90);

- um ponto P_3 é pertencente à circunferência, quando $d(P_3,O) = r$. A distância do ponto até o centro da circunferência é igual ao comprimento do raio. Desse modo, o conjunto desses pontos está sobre as extremidades da circunferência.

Nesse sentido, pode-se observar essas posições por meio da figura a seguir:

Figura 2: Posições relativas entre ponto e circunferência



Fonte: Acervo da pesquisa

No que se refere às posições relativas entre reta e circunferência, há três tipos de retas: secante, tangente e exterior. O quadro a seguir, apresenta uma descrição para essa classificação:

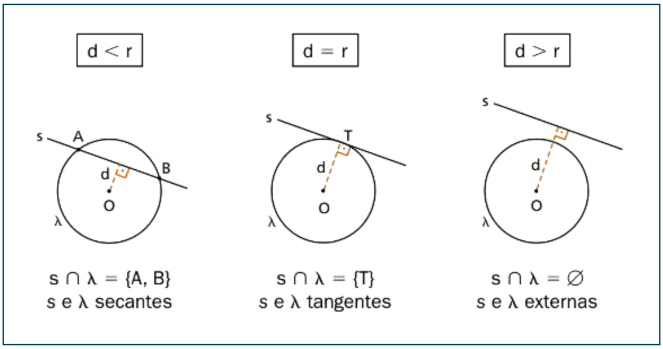
Quadro 1: Classificação e descrição das posições relativas entre reta e circunferência

Classificação	Descrição
Reta secante à circunferência.	Reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.
Reta tangente à circunferência.	Reta que intercepta a circunferência num único ponto.
Reta exterior à circunferência.	Reta que não intercepta a circunferência.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 151-154)

Com base nas características citadas anteriormente, é possível relacionar a distância e o raio de cada posição relativa entre uma reta e uma circunferência. Dessa maneira, “considerando uma reta s, uma circunferência λ (O, r) e sendo a distância ($d = d_{o,s}$), há três possibilidades para s e λ”. (DOLCE e POMPEO, 1993, p. 154). Essa situação encontra-se ilustrada na Figura 3:

Figura 3: Distâncias entre reta e circunferência



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 154)

No que diz respeito às posições relativas entre duas circunferências, pode-se identificar cinco tipos de posições existentes entre elas: tangentes internas, tangentes externas, secantes, externas e internas. Como são descritas por meio do Quadro 2:

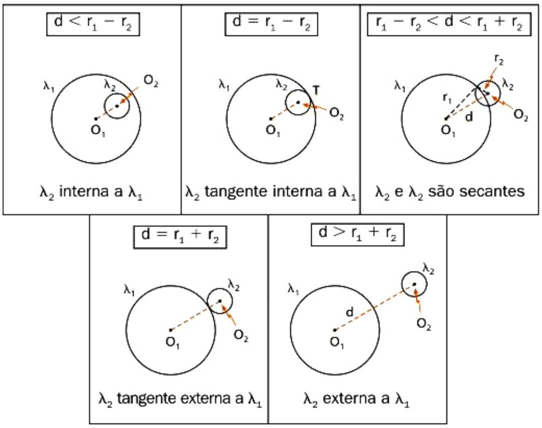
Quadro 2: Classificação e descrição das posições relativas entre duas circunferências

Classificação	Descrição
Tangentes internas	Uma circunferência é *tangente interna* a outra se têm um único ponto em comum e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.
Tangentes externas	Duas circunferências são *tangentes externas* se têm um único ponto comum e os demais pontos de uma são externos a outra.
Secantes	Duas circunferências são *secantes* se têm em comum somente dois pontos distintos.
Externas	Duas circunferências são *externas* se os pontos de uma delas são externos a outra.
Internas	Uma circunferência é *interna* a outra se todos os pontos são pontos internos a outra.

Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 155, grifo do autor)

A partir dessas definições, são constituídas algumas desigualdades que relacionam a distância entre o centro das duas circunferências e seus raios. Nesse sentido, "considerando duas circunferências $\lambda_1(O_1, r_1)$ e $\lambda_2(O_2, r_2)$ com $r_1 > r_2$ e sendo d a distância entre os centros, prova-se que há cinco possibilidades para λ_1 e λ_2" (DOLCE e POMPEO, 1993, p. 154). Tal contexto pode ser ilustrado pela Figura 4 a seguir:

Figura 4: Distância entre os centros de duas circunferências



Fonte: Dolce e Pompeo (1993, p. 155)

Ao se retomar a definição de circunferência, tem-se que a mesma trata de "um lugar geométrico de todos os pontos de um plano que estão localizadas a uma distância *r* de um ponto fixo, denominado centro da circunferência" (CAVALCANTI, 2011, p. 18, grifo nosso). Enquanto círculo é "a região do plano cuja fronteira é a circunferência" (LEIVAS, 2009, p. 226). Desse modo, o círculo representará a superfície, cujo limite é demarcado pela própria circunferência. Portanto, pode-se afirmar que é evidente a distinção entre círculo e circunferência, o que nos permite associar esta com a grandeza perímetro e aquele com a grandeza área.

Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), divulgada por Yves Chevallard (1999), surgiu como uma ampliação da transposição didática. Essa teoria parte da hipótese de que toda atividade humana pode ser descrita por um modelo único, ou seja, uma organização praxeológica ou praxeologia (ROSA DOS SANTOS, 2015). Estabelecendo-se como uma ferramenta teórica e metodológica importante para a Didática da Matemática. Ainda, para Rosa dos Santos (2015, p. 38):

> o foco de interesse são as situações nas quais há intenção de modificar a relação ao saber de uma pessoa ou de um conjunto de pessoas, sob a ótica antropológica, que corresponde a situar a atividade de estudo em matemática no conjunto das atividades humanas.

Segundo Chevallard (1999), a TAD é fundamentada, inicialmente, por meio de três conceitos básicos iniciais, sendo eles: objetos (O), pessoas (X) e instituições (I). Além disso, o autor admite a existência de relações entre esses conceitos.

O objeto O é fundamental para o desenvolvimento da teoria. Para Bessa de Menezes (2010), tudo pode ser considerado um objeto, desde que seja declarado por pelo menos uma pessoa ou instituição. Dessa forma, "aparecerão a relação pessoal de X com O, que será denotada por R(X,O), e a relação institucional de I com O, R(I,O)" (IBIDEM, p. 72).

Como relatado por Araújo (2009, p.34, grifo do autor) o conceito de pessoa é definido como "o par formado por um indivíduo X e pelo sistema de suas *relações pessoais* com os objetos O, designadas por R(X,O), em determinados momentos da história de X".

Toda pessoa, inicialmente precisará passar pelo estágio de indivíduo, porém, nem todo indivíduo será uma pessoa, pois o indivíduo perdura sem variação, enquanto a pessoa sofre modificações de acordo com as relações pessoais existentes entre ela e os objetos ao longo da sua vida (ROSA DOS SANTOS, 2015).

Com base na TAD, Barbosa (2011) explicita que a Instituição (I), segundo Chevallard, é um dispositivo social total que pode ter uma extensão reduzida no espaço social, mas que, no entanto, permite e impõe a seus sujeitos, os modos de fazer e de pensar.

A próxima fase constitui a passagem de indivíduo para sujeito. Nessa direção, "o indivíduo se torna um sujeito quando se relaciona com uma Instituição I qualquer ou, melhor dizendo, quando se sujeita a uma Instituição I, sob suas demandas, hábitos, formas; enfim, se sujeitando a essa relação" (CÂMARA DOS SANTOS e BESSA DE MENEZES, 2015, p. 652).

Ainda, segundo Santos e Freitas (2017, p. 53), a Teoria Antropológica do Didático "possibilita investigar as práticas docentes por meio da praxeologia. Para tanto, são necessárias as seguintes atividades: observar, descrever e analisar os aspectos didáticos e matemáticos".

Com base na TAD, a praxeologia matemática está compreendida na determinação da realidade matemática presente na resolução de um tipo de tarefa (T), a qual precisa da construção de uma técnica (τ), justificada por uma tecnologia (θ), que por sua vez é validada pela teoria (Θ). Logo, temos o quarteto formado por [T, τ, θ, Θ], no qual o tipo de tarefa e a técnica fazem parte do bloco do saber-fazer e a tecnologia e teoria do bloco do saber. De acordo com Chevallard (1998, *apud* Barbosa, 2011, p. 65)

> a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa, e uma tecnologia relativa a esta técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

No que se refere ao tipo de tarefa (T), esse elemento praxeológico está relacionado a um objetivo claro, sendo, geralmente, indicado por um verbo de ação, como reconhecer, classificar, determinar, entre outros. Assim, entende-se que tipo de tarefas (T) é um grupo maior, que abrangem tarefas (t) que pertencem a esse grupo e, que apesar de estarem estreitamente ligados, são distintos. As tarefas (t) são mais particulares e os tipos de tarefas (T) englobam as tarefas com características comuns (ROSA DOS SANTOS, 2015).

Quanto à técnica (τ), entende-se que está relacionada à maneira de realizar a tarefa, em que, por vezes, a utilização de apenas uma técnica não é suficiente para resolver todas as tarefas $t \in T$. Nesse caso, é preciso utilizar ou criar uma nova técnica para realizar a tarefa. A tecnologia (θ) surge com o objetivo de esclarecer e explicar a técnica. Já a teoria (Θ) aparece quando em algumas circunstâncias têm-se a necessidade de justificação da tecnologia, isso ocorre a partir de teoremas, axiomas. Logo, a teoria é de natureza abstrata.

Procedimentos metodológicos

A presente pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, a qual consistiu na análise documental do livro didático de matemática do 8° ano do ensino fundamental utilizado nas escolas públicas do Município de Garanhuns (Pernambuco-PE); em especial, o livro do professor. Esse material foi aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD de 2017.

No que tange à pesquisa qualitativa, Minayo (2017, p. 02) afirma que "a pesquisa qualitativa, usando-se a linguagem de Kant, busca a "intensidade do fenômeno", ou seja, trabalha muito menos preocupada com os aspectos que se repetem e muito mais atenta com sua dimensão sociocultural [...]".

Quanto à pesquisa documental, Silva, Damaceno, Martins, Sobral e Farias (2009, p. 4555) explicitam que esse método de pesquisa é "aquele que busca compreendê-la de forma indireta por meio da análise dos inúmeros tipos de documentos produzidos pelo homem".

A princípio, ressalta-se que ao contatar a Gerência Regional de Educação (GRE) – Agreste Meridional foi verificado que a escolha da nova coleção para o ano posterior ainda não havia ocorrido. Assim, o livro utilizado para análise foi o mais adotado pelas escolas públicas de Garanhuns (PE) atualmente, visto que no início de vigência da pesquisa (2019), a coleção estaria no seu último ano válido para uso.

O livro analisado foi "Vontade de Saber" dos autores Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro da editora FTD. Desse modo, foi realizada a análise dessa obra, em específico, do capítulo 11, a fim de explorar a subseção "Circunferência e Círculo"; a qual nos propiciou analisar o conceito de circunferência abordado, bem como, caracterizar os elementos da praxeologia matemática existente.

O estudo da circunferência inicia-se na página 249 e termina na página 259, nessas 10 páginas, além do estudo do conceito analisado, também é apresentado o conceito de círculo[2]. No qual é iniciado com a exposição de imagens que fazem referência à circunferência e ao círculo, e em seguida, os autores realizam uma breve afirmação de que nessas imagens é possível encontrar formas que podem ser associadas ao círculo e à circunferência. Logo após, há a explanação a respeito do conceito de circunferência, seguido da apresentação de seus elementos e características. A partir disso, os autores realizam o início do estudo de círculo depois do que foi apresentado sobre a forma analisada, sendo então uma página dedicada ao estudo tecnológico-teórico dessas formas.

Dando sequência à nossa análise, observa-se um tópico de *Atividades*, composto por questões que abordam círculo e circunferência. Os autores abordam um tópico sobre *Posições relativas* contendo três subtópicos – *Posição relativa entre ponto e circunferência*; *Posição relativa entre reta e circunferência*; e *Posição relativa entre duas circunferências*, respectivamente.

Durante a exploração desse tópico, encontramos um estudo sintético sobre a posição de um ponto em relação à circunferência,

2 Ressaltamos que o conceito de círculo não foi considerado nessa pesquisa.

ou seja – se esse é externo, interno ou pertence à forma – como também, são expostas as posições das retas – se são externas, tangentes ou secantes –; tais fatos trazem informações referentes à distância entre o centro da circunferência e a reta, relacionando o raio da circunferência.

Além disso, o capítulo aborda a posição entre duas circunferências, ou seja, se são tangentes (internas ou externas), ou secantes. Nesse momento, os autores relacionam as distâncias entre os centros das circunferências com os respectivos raios. O mesmo ocorre quando se trata das circunferências externas, internas ou concêntricas. Todas as posições citadas apresentam figuras como auxílio para visualização e compreensão.

Posteriormente, aparece outro tópico de *Atividades*, dessa vez, são abordadas quase três páginas completas de questões, contendo a última delas o tópico denominado *Refletindo sobre o capítulo*. Depois deste, segue outros dois tópicos nomeados de *Revisão* e *ENEM e OBMEP*, respectivamente, trazendo outros tipos de questões e encerrando o estudo de circunferência no capítulo.

No final do livro, é exposta uma seção, destinada ao professor, intitulada como *Objetivos, comentários e sugestões*, onde são narradas algumas orientações para o docente a fim de auxiliá-lo em sua prática pedagógica.

Na referida seção, cada página do livro é retomada novamente, ampliando os conhecimentos matemáticos, a partir de breves comentários, demonstrações de expressões matemáticas, contextualização e resolução de questões trabalhadas ao longo dos capítulos. Outro ponto que vale destacar é a introdução de sugestões de atividades, geralmente voltadas à prática, possibilitando a exploração de outros tipos de tarefas. Porém essa sistemática não aparece com frequência, pois nem todos os capítulos possuem orientações destinadas a atividades complementares.

Análise de resultados

A partir da análise do capítulo sobre o conceito de circunferência do livro investigado, foram encontradas 59 tarefas relativas ao mencionado conceito, as quais foram classificadas em 12 tipos de tarefas, como é possível observar na tabela a seguir:

Tabela 1: Tipos de Tarefas presentes no capítulo de circunferência no livro didático analisado

Tipos de tarefa		Quantidade	Percentual
T_E	Determinar a medida do comprimento dos elementos traçados na circunferência.	11	18,6%
T_I	Identificar as posições relativas entre as circunferências.	8	13,6%
T_P	Determinar a posição relativa dos pontos em relação à circunferência.	7	11,9%
T_G	Determinar a medida de outra grandeza a partir dos elementos da circunferência.	6	10,2%
T_D	Determinar a medida das distâncias entre os centros de duas circunferências.	6	10,2%
T_R	Determinar a posição relativa das retas em relação à circunferência.	5	8,5%
T_C	Classificar segmentos de reta traçados na circunferência.	5	8,5%
T_{CC}	Construir circunferência.	3	5%
T_V	Verificar as condições da posição de um ponto em relação à circunferência.	3	5%
T_T	Reconhecer propriedades dos triângulos a partir dos elementos da circunferência.	2	3,4%
T_{VV}	Validar propriedades entre duas circunferências.	2	3,4%
T_{DD}	Diferenciar circunferência e círculo.	1	1,7%
	TOTAL	59	100%

Fonte: Acervo da pesquisa

A partir dos dados apresentados, na Tabela 1, é possível observar que o tipo de tarefa mais presente no capítulo analisado é T_E – Determinar a medida dos elementos da circunferência, representando 18,6% do total, o que corresponde a um total de 11 tarefas.

Além disso, foi realizada uma praxeologia pontual referente ao tipo de tarefa mais evidente no livro que, nesse caso, foi T_E. Então, identificamos cinco subtipos de tarefas, conforme a tabela a seguir:

Tabela 2: Subtipos de tarefa T_E identificados no capítulo referente ao conceito de circunferência

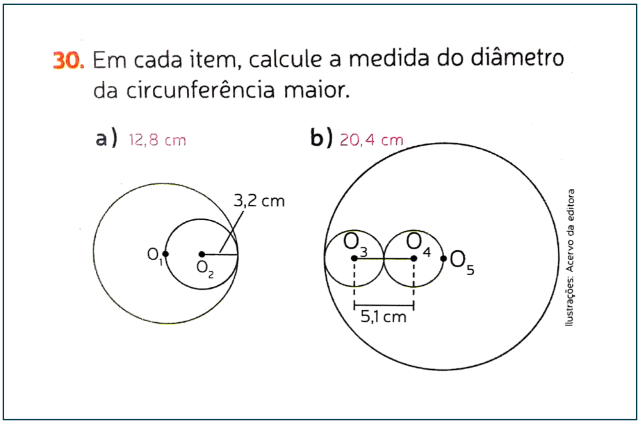
Subtipos		Quantidade
T_{E1}	Determinar a medida do comprimento do raio ou do diâmetro, dado a medida de comprimento de outro elemento da circunferência.	3
T_{E2}	Determinar a medida do comprimento do raio a partir da posição relativa entre duas circunferências.	2
T_{E3}	Determinar a medida do comprimento do raio ou do diâmetro a partir da malha quadriculada/plano cartesiano.	3
T_{E4}	Determinar a medida do comprimento do diâmetro, dadas às medidas de grandezas associadas à figuras geométricas.	2
T_{E5}	Determinar a medida do comprimento do raio da menor circunferência, a partir da medida do comprimento do raio da maior circunferência em relação as suas posições.	1

Fonte: Acervo da pesquisa

No subtipo T_{E1}, as técnicas de resolução são muito parecidas, em ambas as tarefas são dadas as medidas de comprimento de elementos da circunferência. É possível observar que se trata de diferentes elementos – raio ou corda, em que o objetivo final é encontrar as medidas do comprimento do diâmetro ou o raio.

A técnica do subtipo T_{E1} baseia-se em duplicar a medida do comprimento do raio da menor circunferência, dado pelo enunciado, para ser encontrado o valor do comprimento do raio da circunferência maior. Reconhecendo que o diâmetro da menor circunferência é o dobro de seu raio, consequentemente, representa o raio da maior circunferência. Em seguida, caso seja necessário, deve-se repetir o procedimento. Assim, é necessário duplicar o raio encontrado da circunferência maior, para encontrar o seu diâmetro.

Figura 5: Exemplo do subtipo de tarefa T_{E1} encontrado no capítulo analisado


30. Em cada item, calcule a medida do diâmetro da circunferência maior.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 250)

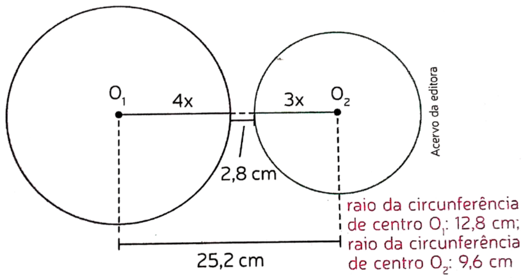
A tecnologia que justifica essa técnica está nas definições dos elementos que podem ser encontrados na circunferência, ou seja, a maior corda é o diâmetro, e este tem sua medida do comprimento como o dobro da medida do comprimento do raio. Logo, a medida do comprimento deste será a metade da medida do comprimento do diâmetro. Nesse subtipo nota-se a presença de ilustrações para o auxílio do indivíduo.

Em T_{E2}, a técnica consiste em observar a posição relativa entre as duas circunferências para então, utilizar a desigualdade adequada para a posição relativa entre elas, que relaciona a distância entre seus centros e seus respectivos raios. Logo após, deve-se substituir os valores algébricos e numéricos, dados pelo enunciado, na desigualdade. Por fim, desenvolver a inequação, realizando as manipulações necessárias para encontrar o valor de X e substituí-lo nas expressões dos raios correspondentes.

A tecnologia que fundamenta esse subtipo é constituída pelos conceitos de posições entre duas circunferências, bem como as propriedades de desigualdades existentes entre as posições das duas circunferências. A Figura 6 ilustra o subtipo de tarefa T_{E2}.

Figura 6: Exemplo do subtipo de tarefa T_{E2} encontrado no capítulo analisado

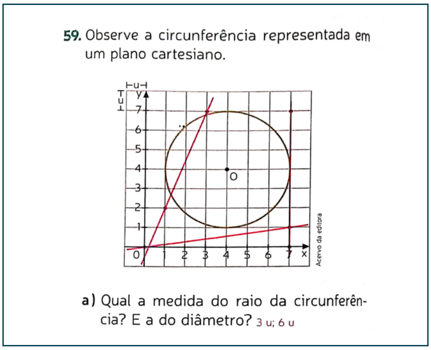
56. Calcule o raio de cada circunferência.



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 258)

No subtipo T_{E3}, pode-se observar que há a inserção do plano cartesiano em uma malha quadriculada na representação da circunferência. Logo, a técnica constitui-se em localizar o centro da circunferência no plano cartesiano. Em seguida, é necessário realizar a contagem de unidades (u) do centro até uma extremidade da circunferência, ou de encontro a uma reta tangente a ela. Ao final, é pedida a medida do comprimento do diâmetro. Desse modo, basta duplicar o valor da medida do comprimento do raio, conforme ilustrado na Figura 7.

Figura 7: Exemplo do subtipo de tarefa T_{E3} encontrado no capítulo analisado

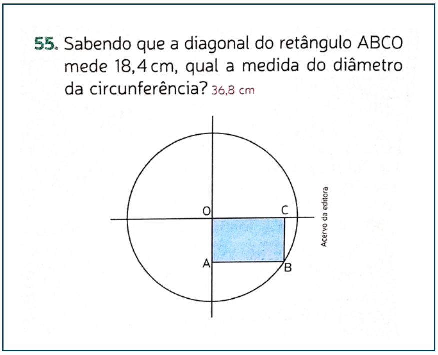


Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 258)

A tecnologia para essa técnica encontra-se nas definições de diâmetro e raio, como também, na relação entre as medidas dos seus comprimentos, uma vez que – o diâmetro tem a sua medida do comprimento igual ao dobro da medida do comprimento do raio. Ainda, a tecnologia fundamenta-se em noções simples do princípio de contagem – ao adicionar unidade por unidade e ao contar a distância no plano cartesiano apresentado.

No subtipo $T_{E4,}$ na realização das técnicas, é necessário recorrer a conhecimentos específicos de outra representação geométrica, como exemplificada na Figura 8:

Figura 8: Exemplo do subtipo de tarefa T_{E4} encontrado no livro analisado



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 258)

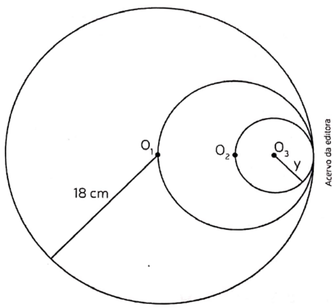
A priori, para resolver essa tarefa, é fundamental conhecer o que é a diagonal. Como se pode verificar, a medida do comprimento da diagonal é fornecida no enunciado, basta observar que ela corresponde à medida do comprimento do raio da circunferência. Assim, é só dobrar o valor dessa medida que o aluno encontrará a medida do comprimento do diâmetro.

A justificativa para essa técnica se baseia na definição da diagonal do retângulo, que é um segmento de reta que liga dois vértices opostos. As definições de raio também sustentam essa técnica, visto que é à distância do centro a um ponto extremo da circunferência. Como uma das diagonais corresponde ao raio e à medida do comprimento do diâmetro é o dobro da medida do comprimento do raio, é possível encontrar seu valor.

Quanto ao subtipo T_{E5}, a técnica para resolução é analisar as posições relativas entre duas circunferências e as posições relativas entre ponto e circunferência. Isso pode ser observado no exemplo dado na Figura 9:

Figura 9: Subtipo de tarefa T_{E5} encontrado no capítulo analisado

46. As circunferências são tangentes internas. Calcule a medida **y** indicada. $y = 4{,}5$ cm



Fonte: Souza e Pataro (2015, p.256)

Nesse caso, é preciso observar que as duas circunferências são tangentes internas, e para encontrar a distância entre os centros basta realizar a diferença entre os raios maior e menor, representada por (I) $d = r_1 - r_2$. Contudo, como O_1 é um ponto que pertence à circunferência de centro O_2, então, a distância entre os dois centros é igual ao raio menor. Assim, substitui o raio menor pela distância em (I), ficando $r_2 = r_1 - r_2$ e perceberá que a medida solicitada é a metade da medida do comprimento do raio maior, pois temos (I) $r_2 = \frac{r_1}{2}$.

O mesmo ocorre quando se analisa as circunferências de centros O_2 e O_3, visto que ambas têm as mesmas características anteriores: a posição do centro O_2 pertencente à circunferência de centro O_3 e essas formas são tangentes internas em relação as suas posições.

Assim, sendo a diferença entre as medidas dos comprimentos dos raios maior e menor dessas circunferências representada por (II) $d = r_2 - r_3$, mas pela Figura 9, tem-se que a distância entre os dois centros é igual à medida do comprimento do raio da menor circunferência. Com isso, pode-se realizar a substituição em (II), então, tem-se $r_3 = r_2 - r_3$, semelhante ao caso anterior, encontra-se que $r_3 = \frac{r_2}{2}$. Porém, como y corresponde à medida do comprimento do raio da menor circunferência, logo, tem-se (II) $y = \frac{r_2}{2}$. Substituindo (I) em (II), segue que $y = \frac{r_1}{4}$, então tem-se que $y = \frac{18}{4}$cm; $y = 4{,}5$ cm.

Para justificar a técnica, a tecnologia está baseada na definição da posição de um ponto que pertence à circunferência e, a partir disso, sua distância torna-se igual ao raio. Além disso, outra possibilidade é analisar as posições entre duas circunferências, que nesse caso, são as tangentes internas, as quais têm como característica: a distância entre os seus centros se dá pela diferença das medidas dos comprimentos dos raios maior e menor.

De posse disso e sabendo que o raio de uma circunferência é um segmento de reta que parte do centro até um ponto extremo da circunferência, vale a relação de que, nesse caso, y constitui-se em raio.

Considerações finais

A partir da investigação acerca do conceito de circunferência no livro didático, tendo como embasamento teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD); foi permitido analisar e observar como se dá a construção e o desenvolvimento desse conceito no LD, bem como os aspectos que têm maior ou menor enfoque durante o estudo da circunferência.

Ao analisar o livro "Vontade de Saber", mais especificamente, o décimo primeiro capítulo, o qual se dedica ao estudo do conceito de circunferência; observamos que no que se refere à praxeologia matemática, encontram-se 59 tarefas, dos quais 11 estão focadas no cálculo da medida do comprimento do raio ou do diâmetro, ou então, na determinação da medida de comprimento de outro elemento da circunferência, como a corda.

Quanto à distribuição dos tipos de tarefas, apesar de ser diversificada, é distribuída de forma desigual, pois é possível observar que enquanto há um foco maior na determinação de medidas e de posições, como também na sua identificação; por outro lado, encontram-se apenas três tarefas que tratam da construção da circunferência.

Além disso, identificamos apenas uma tarefa que exige do estudante uma diferenciação entre circunferência e círculo, ou seja, nesse tipo de tarefa, o estudante precisa afirmar o que de fato é uma circunferência a partir do seu conceito.

No entanto, ao se analisar as técnicas para o tipo de tarefa mais frequente T_E – Determinar a medida do comprimento dos elementos da circunferência, na qual se concentrou nosso estudo, foi possível perceber que há uma evolução da técnica no decorrer das tarefas. Como exemplo disso, notamos que em alguns casos há a presença das representações geométricas, em outros há plano cartesiano e malha quadriculada, ou seja, existe um trabalho da técnica, que exige do estudante diversos conhecimentos, de modo que ele construa uma nova técnica para resolução.

No que se refere à tecnologia e à teoria, encontramos por todo o capítulo, sendo dividido em pequenos estudos; no início, tem-se o conceito de circunferência, seus elementos e características; em seguida, após uma seção de atividades, os estudos de posições são iniciados. Aqui se faz necessário ressaltar que o bloco tecnológico-teórico presente no capítulo, dá suporte para que os alunos consigam chegar às soluções e usar as técnicas em todos os subtipos.

Nesse sentido, ressaltamos aos professores que ao utilizarem esse livro didático em suas práticas pedagógicas, quanto ao estudo do conceito de circunferência, não se detenham apenas nas tarefas propostas por esse recurso didático. Desse modo, recomendamos que os tipos de tarefas, acerca desse tópico, sejam aprofundados, uma vez que a obra analisada traz uma descrição sucinta da forma geométrica analisada.

Portanto, destaca-se a importância de completar sempre que possível o bloco da teoria e tecnologia, assim como os tipos de tarefas, em especial os referentes à produção da circunferência. Além disso, a manipulação de materiais na construção de conceitos geométricos pode ser importante para disseminar possíveis lacunas.

CAPÍTULO 3

A praxeologia matemática do livro didático em relação à área de triângulos

Iolanda Possidonio dos Santos
André Pereira da Costa

Introdução

Se pararmos, por um minuto, para observar o mundo a nossa volta, perceberemos que as grandezas estão presentes em diversas situações. Como exemplo, podemos mencionar a utilização de grandezas no preparo de uma simples receita de um bolo, na qual mesmo sem termos noção fazemos o uso delas, como da massa ao medirmos a quantidade necessária de cada ingrediente, a temperatura que o forno tem que está para assar o bolo ou até mesmo o tempo para sabermos a duração que levará até ele ficar pronto.

Se focarmos o nosso olhar para o ambiente escolar, o estudo das grandezas é recomendado tanto por documentos de orientação curricular, como por pesquisas em Educação Matemática. Contudo, por muitas vezes, esse conceito foi/é confundido com um conteúdo presente apenas nas aulas da disciplina da Matemática. O que não é verdade. As grandezas também estão presentes no ensino da Física, da Química, da Geografia e em tantos outros.

No caso da Física, as grandezas podem ser escalares ou vetoriais. Um exemplo de grandeza escalar pode ser a medição de uma temperatura corporal a 40° C, e de uma grandeza vetorial, o deslocamento medido por a distância de 2 km que você caminhou da sua casa até a escola. Uma das grandezas da Química é a densidade, que é a relação entre a massa e o volume de um material, por exemplo, os icebergs são blocos de gelo gigantes, no entanto, eles flutuam sobre a água do mar.

Isso acontece porque como são apenas água pura solidificada e a água do mar contém sais, sua densidade é maior. Já na Geografia podemos citar como exemplo, a densidade demográfica, que nos permite avaliar a distribuição da população em determinado território.

Há alguns anos, com o desenvolvimento das investigações educacionais, em especial, no âmbito da Matemática, surgiram várias recomendações curriculares para a Educação Básica, que influenciaram em modificações nas abordagens apresentadas nos livros didáticos. Tais mudanças, acerca do ensino das grandezas e medidas, tiveram como intenção promover a valorização desse tópico, numa tentativa de melhorar a aprendizagem dos estudantes.

Nessa direção, Bellemain e Lima (2002, p. 167) destacam que "ao longo desse período, podemos observar alguma evolução no ensino deste campo e, sem dúvida, é dada maior atenção a ele nos estudos acadêmicos sobre questões de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos". Esse progresso também foi influenciado pelos baixos índices apresentados pelos alunos nas avaliações em larga escala em nível nacional e internacional (LIMA e BELLEMAIN, 2010).

Outro motivo que também nos fez optar por fazer esse estudo, foi a importância desse conceito no campo da Geometria, pois, a partir da representação do triângulo pode-se produzir vários outros polígonos. Sobre esse conceito, Lima e Carvalho (2010, p. 153) afirmam que os triângulos: "podem se constituir em "células básicas" para a construção de muitas das figuras que estudamos na geometria e, além disso, escondem, na sua aparente simplicidade, uma enorme riqueza de propriedades matemáticas".

O nosso estudo é feito a partir de uma abordagem qualitativa, por meio da qual, analisamos o capítulo referente ao estudo de triângulos em um livro didático, especificamente, acerca do ensino de área de triângulos. Para tanto, acreditamos que se faz importante a análise do livro didático, por ele ser, muitas vezes, o único instrumento de utilização tanto para o professor, em sua prática pedagógica, como também o único recurso de estudo e pesquisa dos alunos, auxiliando-os nas suas aprendizagens.

Nesse sentido, surgiu o nosso problema de pesquisa: qual a abordagem do estudo de área de triângulos em um livro didático do 7° ano do ensino fundamental, adotado em uma escola municipal de Saloá-PE, aprovado no Programa Nacional do Livro Didático de 2017?

Para a análise dos dados, utilizamos como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999) e seus colaboradores. Dessa maneira, tomamos os elementos praxeológicos da organização matemática como critérios metodológicos de análise, ou seja, os tipos de tarefas, as técnicas, a tecnologia e a teoria.

Diante desse contexto, neste artigo, vamos trabalhar com a grandeza área, de forma mais ampla, temos por objetivo geral analisar a praxeologia matemática do estudo de área de triângulos, presente em um livro didático de Matemática do 7° ano do ensino fundamental, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2017.

Em específico, buscamos identificar como esse livro caracteriza a organização matemática sobre área de triângulos, percebendo, assim, quais são as praxeologias matemáticas presentes nas tarefas relacionadas a esse assunto, e até que ponto esse livro pode contribuir ou não para os professores e estudantes que fazem uso dele em relação ao conceito em estudo.

Quadro teórico

Nas nossas primeiras reflexões sobre a elaboração deste artigo, nos indagamos sobre o que é grandeza? Nesse sentido, fomos buscar na literatura uma definição que se aproximasse melhor do nosso quadro teórico. Assim, concordamos com Bellemain e Lima (2002), ao afirmarem que as grandezas são atributos de objetos, que podem ser comparados a outros semelhantes, do ponto de vista da igualdade ou desigualdade.

Na Educação Básica, o ensino de grandezas vem sendo apresentado de forma ineficaz, abordando, muitas vezes, apenas o uso de expressões matemáticas (as chamadas “fórmulas”) para o cálculo de área, perímetro, volume, entre outras. Tal perspectiva favorece a compreensão de área enquanto medida, que é um equívoco conceitual gerador de dificuldades para a aprendizagem dos estudantes.

Dessa forma, se faz necessário o uso de novos métodos de ensino, que utilizem o conteúdo de forma abrangente ao cotidiano do estudante, onde o ensino de grandezas possa ser vivenciado por situações, nas quais o aluno entenda que ela é uma característica daquilo que se pode medir. Tomamos como exemplo, o comprimento da frente de uma escola que mede 33,2 metros. A grandeza é comprimento, 33,2 é a medida e metros a unidade de medida.

Com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) é importante, neste momento, não dar exclusividade à utilização de unidades do sistema métrico, insistindo-se na utilização de unidades não convencionais que sejam significativas para o aluno. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC, também sinaliza essa importância: “sugere-se que esse processo seja iniciado utilizando, preferencialmente, unidades não convencionais para fazer as comparações e medições, o que dá sentido à ação de medir, evitando a ênfase em procedimentos de transformação de unidades convencionais”, (BRASIL, 2018, p. 273).

O tópico de grandezas é de suma importância, pois está ligado não só a vários conteúdos matemáticos e de outras disciplinas, mas também às práticas sociais, como por exemplo, na vivência profissional do pedreiro, da costureira, da dona de casa e entre outros. Esses trabalhadores utilizam vários tipos de grandezas em suas rotinas diárias, mesmo sem a necessidade da formalização do conteúdo. Nessa direção, “os exemplos ilustram a relevância social das grandezas e medidas e mostram que conhecimentos limitados nesse campo da matemática restringem a capacidade das pessoas de exercerem plenamente sua cidadania” (LIMA e BELLEMAIN, 2010, p. 170).

Fazendo uma revisão de literatura, percebemos que existem várias pesquisas como, (TELES, 2007; ROSA DOS SANTOS, 2015; BOTH, 2016) sendo desenvolvidas sobre grandezas geométricas. Baseadas nos trabalhos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e seus colaboradores. Em geral, essas autoras sugerem que a abordagem do conceito de comprimento, volume, área, abertura de ângulo, capacidade e outros, sejam trabalhados como grandezas autônomas, para que possam favorecer a compreensão e construção desses conceitos pelos alunos, principalmente, dos anos iniciais do ensino fundamental.

Nesse sentido, as pesquisadoras propõem que, em sala de aula, é necessário abordar as grandezas fazendo a distinção e articulação entre três quadros: o quadro geométrico, o quadro numérico e o das grandezas. Portanto, neste artigo, vamos voltar nosso olhar para a área, sendo que aqui consideramos esse conceito como uma grandeza autônoma, conforme sinalizado por Douady e Perrin-Glorian (1989). Tal abordagem será essencial para que o estudante compreenda o conceito em questão.

Quadro 1: Articulações entre os quadros

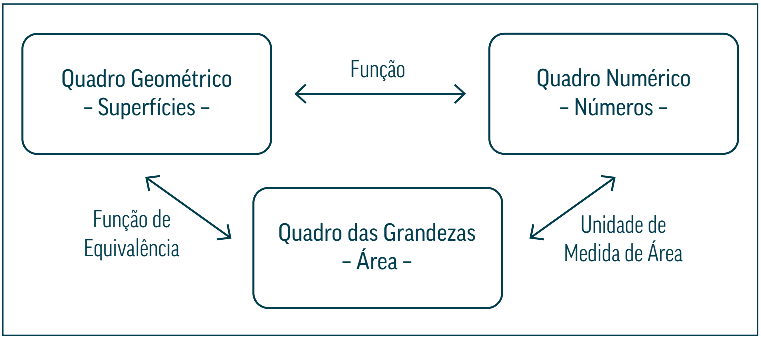
Quadro	Conceito
Geométrico	Constituído por superfícies planas. Exemplos: as figuras planas, triângulos, quadriláteros, dentre outros.
Numérico	Consistindo nas medidas da área das superfícies, que pertencem ao conjunto dos números reais não negativos. Exemplos: 2; 4; 7,5; dentre outros.
Grandezas	Contexto próprio da noção de área, que integra os dois primeiros e é caracterizado formalmente como classes de equivalência de superfícies de mesma área. Exemplos: expressões compostas de um número e de uma unidade de medida como $2m^2$, dentre outros.

Fonte: Bellemain e Lima (2002, p. 28 e 29)

Dessa maneira, tendo em vista o que foi discutido anteriormente, consideramos que área "é um atributo de uma região ou superfície plana, é uma grandeza que pode ser medida ou comparada" (TELES, 2007, p. 32).

Para entendemos melhor o motivo pelo qual o conceito área está vinculado ao campo das grandezas e medidas, observamos o esquema apresentado a seguir na Figura 1, o qual foi retirado da pesquisa de Rosa dos Santos (2015, p. 82). Trata-se da articulação entre os quadros propostos por Bellemain e Lima (2002).

Figura 1: Esquema de articulação dos quadros



Fonte: Bellemain e Lima (2002 *apud* ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 82)

Para analisar a organização matemática presente no livro didático, adotamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), que foi idealizada por Chevallard (1999), sobretudo, as praxeologias matemáticas referentes a esse conceito matemático.

A TAD é uma ampliação da Teoria da Transposição Didática, O termo foi introduzido em 1975 pelo sociólogo Michel Verret e rediscutido por Yves Chevallard em 1985 em seu livro *La Transposition Didactique*, no qual mostra as transposições que um saber sofre quando passa do campo científico para o campo escolar. (POLIDORO e STIGARE, 2010, p. 2), e ampliada por Yves Chevallard na década de 90.

"A TAD estuda o homem diante do saber matemático e, mais particularmente, frente a situações matemáticas, partindo do princípio que todo trabalho matemático aparece como resposta a um tipo de tarefa." (ROSA DOS SANTOS, 2015, p. 38). Para o autor francês, toda atividade humana pode ser descrita por uma organização praxeológica.

Essa teoria considera que toda ação humana pode ser explicada por uma organização praxeológica que é composta por quatro componentes, denominados elementos praxeológicos, a saber: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Para entendermos melhor esses elementos vamos pensar em um exemplo, como, classificar triângulos quanto aos ângulos. O tipo de tarefa (T) é expresso por o verbo (classificar), no qual será desenvolvida uma maneira de fazer ou realizar a técnica (t), como com o uso do transferidor, em que o aluno irá alinhá-lo ao vértice do triângulo e em seguida identificar em qual ângulo a sua abertura corresponde.

Esse procedimento deve ser justificado por uma tecnologia (θ), de forma racional, assegurando que a técnica permita que se cumpra bem o tipo de tarefa. Nesse caso, seria pelas características dos ângulos internos desse triângulo (acutângulo, retângulo e obtusângulo), que por sua vez, é justificada com a teoria (Θ), aqui, com os Elementos de Euclides.

Na TAD os tipos de tarefas (T) e as técnicas (t) formam o bloco "saber fazer" que é representado por [T, t] e está relacionado à prática, já as tecnologias e teorias formam o bloco do "saber" representado por [θ, Θ] que é associado à razão.

Procedimentos metodológicos

Nesta pesquisa, estamos trabalhando com abordagem documental de caráter qualitativo. A abordagem qualitativa é uma metodologia de caráter exploratório, que busca analisar e compreender os acontecimentos sociais e suas dificuldades (TRIVIÑOS, 1987).

Concordamos com Rosa dos Santos (2015, p. 96), que "As pesquisas qualitativas têm como preocupação principal o estudo e a análise do mundo empírico em seu ambiente natural".

Portanto, buscamos analisar a praxeologia matemática do estudo de área de triângulos, presentes em um livro didático de Matemática do 7º ano do ensino fundamental. É importante ressaltar que a obra analisada foi recomendada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2017.

O livro analisado é *Matemática Bianchini*, do autor Edwaldo Bianchini, do 7º ano do ensino fundamental, ano 2015. Ele foi adotado no município de Saloá-PE, sendo utilizado em escolas públicas entre 2017 e 2019. O livro está dividido em 10 capítulos e subdividido em tópicos. Ao final de cada capítulo, ele apresenta exercícios complementares e uma seção intitulada *Diversificando*.

Vamos analisar o décimo capítulo do livro, tendo como tema: Área de Regiões Poligonais, que se inicia na página 236 e se estende até a página 263, com um total de 27 páginas. Contudo, o nosso foco será no tópico de área do triângulo, tendo em vista que esse é o nosso objeto de pesquisa.

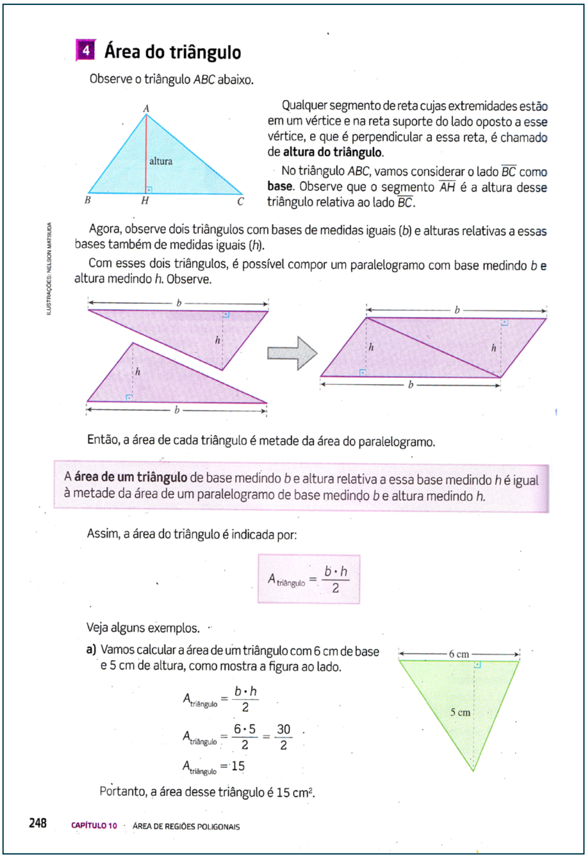
O capítulo é dividido em tópicos e seções, ele apresenta um total de 118 atividades, das quais: 13 são da seção *Pense mais um pouco...;* 3 da seção *Para saber mais*; 8 da sessão *Trabalhando a informação;* 18 da seção *Exercícios complementares;* e 3 da seção *Diversificando*. As outras 73 atividades aparecem no capítulo como *Exercícios propostos.*

No total, o capítulo apresenta 39 tarefas referentes à área de triângulos, sendo 21 delas em atividades que exploram a área de outras regiões poligonais; 8 aparecem no tópico do conceito de área; outras 8 na seção *Pense mais um pouco...*; que antecede o tópico do ensino de triângulos, 2 no tópico Área de trapézio; e as outras 3 na seção *Exercícios complementares,* no final do capítulo.

Resultados e discussão

Em geral, o ensino de área de triângulos se inicia com a definição do seu conceito e a demonstração da expressão matemática utilizada no cálculo de sua medida, seguido de algumas aplicações, com exemplos, e, por fim, exercícios são propostos. Tal fato pode ser verificado a seguir, com base na Figura 2.

Figura 2: Apresentação de como se inicia o estudo de área de triângulos no livro analisado



4 Área do triângulo

Observe o triângulo *ABC* abaixo.

Qualquer segmento de reta cujas extremidades estão em um vértice e na reta suporte do lado oposto a esse vértice, e que é perpendicular a essa reta, é chamado de **altura do triângulo**.

No triângulo *ABC*, vamos considerar o lado $\overline{BC}$ como **base**. Observe que o segmento $\overline{AH}$ é a altura desse triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.

Agora, observe dois triângulos com bases de medidas iguais (*b*) e alturas relativas a essas bases também de medidas iguais (*h*).

Com esses dois triângulos, é possível compor um paralelogramo com base medindo *b* e altura medindo *h*. Observe.

Então, a área de cada triângulo é metade da área do paralelogramo.

A **área de um triângulo** de base medindo *b* e altura relativa a essa base medindo *h* é igual à metade da área de um paralelogramo de base medindo *b* e altura medindo *h*.

Assim, a área do triângulo é indicada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Veja alguns exemplos.

a) Vamos calcular a área de um triângulo com 6 cm de base e 5 cm de altura, como mostra a figura ao lado.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 15$$

Portanto, a área desse triângulo é 15 cm².

248 CAPÍTULO 10 · ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS

Fonte: Bianchini (2015, p. 248)

Na análise do livro didático, especificamente, do capítulo que aborda o ensino de área de triângulos, identificamos 39 tarefas, que foram categorizadas em 7 tipos de tarefas, como ilustrado na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1: Tipos de tarefas identificados no capítulo, acerca da área de triângulos

Tipos de tarefas		Quantidade	Percentual
T_C	Comparar medidas de área de triângulos	2	5,1%
T_D	Determinar a medida de área de um triângulo	18	46,1%
T_G	Determinar o valor de uma medida de grandeza diferente de área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de triângulos.	2	5,1%
T_O	Operar com medidas de áreas de triângulos	7	17,9%
T_P	Produzir triângulos a partir de área fornecida	1	2,6%
T_U	Estudar os efeitos de deformação e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de triângulos	2	5,1%
T_V	Validar proposições referentes ao conceito de área de triângulos	7	17,9%
	TOTAL	39	100%

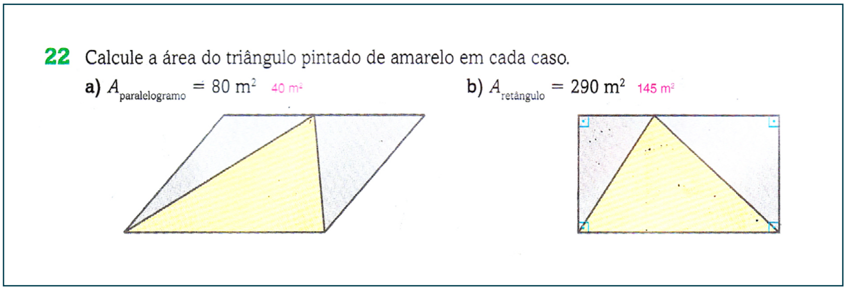
Fonte: Autoria própria

Ao observarmos a Tabela 1, podemos perceber que o tipo de tarefa mais presente no capítulo é "determinar a medida de área de um triângulo" (T_D), com uma frequência de 46,1%. Notamos que há um equilíbrio entre os tipos de tarefas "operar com medidas de áreas de triângulos" (T_O) e "validar proposições referentes ao conceito de área de triângulos" (T_V), ambas com 17,9% do total.

No entanto, há uma marginalização entre os demais tipos de tarefas (T_C, T_U, T_G e T_P), que poderiam ter sido mais explorados, sem privilegiar uma em detrimento das outras. Defendemos que, quanto mais equilibrados e diversificados sejam os tipos de tarefas apresentados aos alunos, mais eles terão condições de construir com significado o conceito área de triângulos.

A seguir, mostraremos um exemplo de cada tipo de tarefa encontrado na análise desse livro didático. Assim, iniciamos com “determinar a medida de área de um triângulo” (T_D), que aparece com maior frequência, sendo 18 tarefas das 39 encontradas no capítulo, correspondendo a 46,1% do geral. A seguir, encontramos uma ilustração na Figura 3 dessa tarefa.

Figura 3: Exemplo do tipo de tarefa T_D presente no livro didático analisado

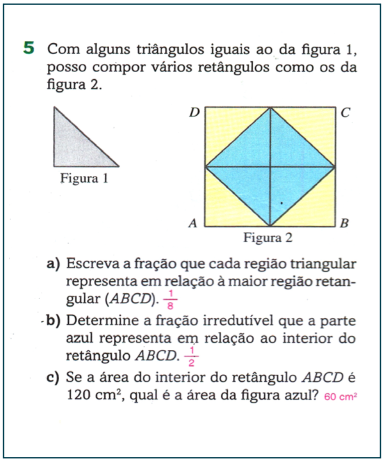


Fonte: Bianchini (2015, p. 249)

Nesse tipo de tarefa, sobre determinar a medida da área de triângulo, destacamos o quadro numérico, no qual, o estudante terá que medir e calcular. Como mostra a Figura 3 acima, o autor propõe que o aluno calcule a área do triângulo pintado de amarelo. Desse modo, a questão explora o uso da expressão matemática utilizada no cálculo de área de triângulo para, assim, descobrir o que se pede.

Os tipos de tarefa “operar com medidas de áreas de triângulos” (T_O) e “validar proposições referentes ao conceito de área de triângulos” (T_V) aparecem em segundo lugar, apresentando 7 itens cada um. Tal frequência corresponde a 17,9% do total de itens analisados. A seguir, a Figura 4 ilustra o tipo de tarefa (T_O).

Figura 4: Exemplo do tipo de tarefa T_0 presente no livro didático analisado



5 Com alguns triângulos iguais ao da figura 1, posso compor vários retângulos como os da figura 2.

a) Escreva a fração que cada região triangular representa em relação à maior região retangular ($ABCD$). $\frac{1}{8}$

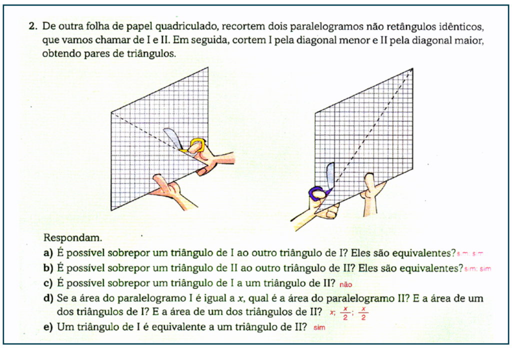
b) Determine a fração irredutível que a parte azul representa em relação ao interior do retângulo $ABCD$. $\frac{1}{2}$

c) Se a área do interior do retângulo $ABCD$ é 120 cm², qual é a área da figura azul? 60 cm²

Fonte: Bianchini (2015, p. 239)

Nessa atividade proposta e ilustrada na Figura 4, antes de operar com as medidas de área, é necessário realizar operações básicas, nesse caso, com frações. Sem o conhecimento prévio de frações, o estudante fica impossibilitado de resolver uma questão como essa. A seguir, temos a Figura 5, que ilustra o tipo de tarefa T_V.

Figura 5: Exemplo do tipo de tarefa T_V presente no livro didático analisado



2. De outra folha de papel quadriculado, recortem dois paralelogramos não retângulos idênticos, que vamos chamar de I e II. Em seguida, cortem I pela diagonal menor e II pela diagonal maior, obtendo pares de triângulos.

Respondam.

a) É possível sobrepor um triângulo de I ao outro triângulo de I? Eles são equivalentes? sim; sim

b) É possível sobrepor um triângulo de II ao outro triângulo de II? Eles são equivalentes? sim; sim

c) É possível sobrepor um triângulo de I a um triângulo de II? não

d) Se a área do paralelogramo I é igual a x, qual é a área do paralelogramo II? E a área de um dos triângulos de I? E a área de um dos triângulos de II? x; $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}$

e) Um triângulo de I é equivalente a um triângulo de II? sim

Fonte: Bianchini (2015, p. 247)

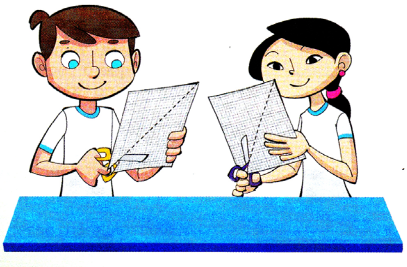
Já nesse tipo de tarefa, apresentado na Figura 5, é explorada a validação de proposições referentes ao conceito de área de triângulos. O discente terá que analisar as informações fornecidas no enunciado, para isso, terá que fazer uso dos conhecimentos sobre as proposições do conceito de área de triângulos. Assim, ele terá mais condições para melhor responder a atividade corretamente.

Em terceiro lugar, aparecem os tipos de tarefa T_C – “comparar medidas de áreas de triângulos”, T_U – “estudar os efeitos de deformação e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de triângulos” e T_G – “determinar o valor de uma medida de grandeza diferente de área, em problemas cujo enunciado comporta dados relativos à área de triângulos”. No total, foram identificados dois itens referentes a cada um desses tipos de tarefas, representando 5,1% do total de tarefas. A seguir, a Figura 6 apresenta o tipo de tarefa T_C.

Figura 6: Exemplo do tipo de tarefa T_C presente no livro didático analisado

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1. De uma folha de papel quadriculado, recortem vários retângulos de diferentes medidas de base e de altura. Em seguida, cortem cada retângulo por uma de suas diagonais, obtendo pares de triângulos.



Agora, respondam.

a) Para cada par de triângulos assim obtido, é possível sobrepor um triângulo ao outro? sim

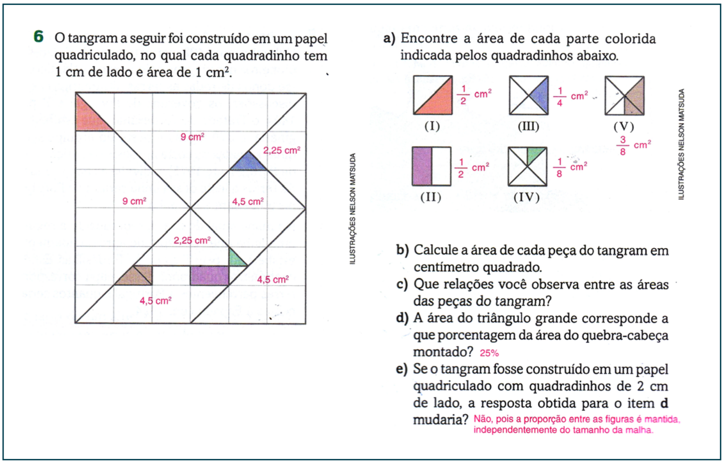
b) Se a área de um desses retângulos fosse 18, qual seria a área de um dos triângulos dele obtido? 9

c) Se *x* é a área de um dos triângulos obtidos pelo corte de uma das diagonais de um retângulo, qual é a área desse retângulo? 2*x*

Fonte: Bianchini (2015, p. 247)

Conforme a Figura 6, a atividade trabalha com o estudo de comparação, no qual o aluno terá que, por meio de composição e decomposição, identificar que se ele tem um retângulo e fazer a decomposição dele a partir de um segmento de reta que parte de um dos vértices e intercepta o lado oposto, perpendicularmente, ele terá dois triângulos equivalentes[1], dessa forma, suas áreas também serão iguais. A seguir, a Figura 7 exemplifica o tipo de tarefa que estuda os efeitos de deformação e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de triângulos.

Figura 7: Exemplo do tipo de tarefa T_U presente no livro didático analisado



6 O tangram a seguir foi construído em um papel quadriculado, no qual cada quadradinho tem 1 cm de lado e área de 1 cm².

a) Encontre a área de cada parte colorida indicada pelos quadradinhos abaixo.

b) Calcule a área de cada peça do tangram em centímetro quadrado.

c) Que relações você observa entre as áreas das peças do tangram?

d) A área do triângulo grande corresponde a que porcentagem da área do quebra-cabeça montado? 25%

e) Se o tangram fosse construído em um papel quadriculado com quadradinhos de 2 cm de lado, a resposta obtida para o item **d** mudaria? Não, pois a proporção entre as figuras é mantida, independentemente do tamanho da malha.

Fonte: Bianchini (2015, p. 239)

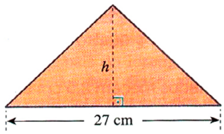
A atividade apresentada na Figura 7 é considerada uma das mais importantes para a formulação do conceito de área por os estudantes, pois permite o entendimento, por exemplo, de que a área é conservada em transformações geométricas no plano, em especial, em isometrias (simetrias, rotações e translações). A seguir, a Figura 8 traz o tipo de tarefa T_G.

1 Consideramos triângulos equivalentes quando possuem suas áreas iguais na mesma unidade de medida.

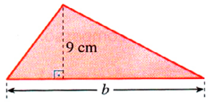
Figura 8: Exemplo do tipo de tarefa T_G presente no livro didático analisado

9 Determine o que se pede.

a) A medida *h* da altura deste triângulo de área 182,25 cm². 13,5 cm



b) A medida *b* da base deste triângulo de área 101,25 cm². 22,5 cm



Fonte: Bianchini (2015, p. 251)

Como ilustrado na Figura 8 no item *a*, o discente terá que, por meio dos dados fornecidos na atividade, descobrir qual será o valor da medida do comprimento relativo à altura. Como já foi fornecido, o valor da medida da área e do comprimento da base de cada triângulo, o estudante encontrará o valor de *h*, a partir do uso da fórmula do cálculo de área de triângulo. A seguir, a Figura 9 apresenta o tipo de tarefa T_p – “Produzir triângulos a partir de área fornecida”.

Figura 9: Exemplo do tipo de tarefa T_P presente no livro didático analisado

31 Reúna-se com colegas e façam o que se pede.

De um triângulo *ABC*, são conhecidas as medidas do lado $\overline{AB}$, que é igual a 9 cm, do lado $\overline{AC}$, igual a 7 cm, da altura relativa ao lado $\overline{AC}$, igual a 8,9 cm, e da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, igual a 6,2 cm. Calculem as medidas aproximadas do lado $\overline{BC}$ e da altura relativa ao lado $\overline{AB}$. 10 cm, 7 cm

Sigam as etapas abaixo para resolver o problema acima.

- Façam um esboço do triângulo *ABC* citado no problema. Nesse esboço, indiquem com números as medidas dadas e com letras as medidas pedidas.
- Verifiquem se já resolveram um problema parecido com este ou com parte dele que possa ajudar na resolução.
- Tracem e executem um plano de resolução.
- Para verificar as respostas obtidas, convém calcular a área do triângulo *ABC* três vezes, usando em cada vez as medidas de um lado e da respectiva altura.

Fonte: Bianchini (2015, p. 251)

Nesse tipo de tarefa, destaca-se o quadro geométrico. Desse modo, o aluno terá que construir a figura que representa o triângulo a partir dos dados fornecidos. Mas, destacamos aqui, que esse tipo de tarefa, conforme a Figura 9, também faz relação com os outros quadros (numérico e das grandezas). Isso ocorre, pois, o resultado obtido expressará um valor numérico (quadro numérico) e com o quadro das grandezas, por estarmos considerando área como uma grandeza, neste estudo.

De forma global, ao observarmos todos os tipos de tarefas sobre área de triângulos, encontradas no capítulo investigado, percebemos que o autor enfatiza o tipo de tarefa T_D. Em todas as tarefas, ele propõe que elas sejam resolvidas por meio do uso da expressão matemática referente ao cálculo de área.

Acreditamos que trabalhar o cálculo de área apenas pelo uso de expressão matemática, pode levar o aluno a vivenciar sempre um processo de mecanização, tendo, como consequência a má compreensão do conceito de área, e os impossibilitando de desenvolver um raciocínio crítico.

Considerações finais

Em nossa pesquisa, buscamos caracterizar a organização matemática de um livro didático do 7º ano do ensino fundamental, acerca do conceito área de triângulo e quais são as praxeologias matemáticas presentes nas tarefas relacionadas a esse assunto. Observando também, até que ponto esse livro pode contribuir ou não para os professores e estudantes que fazem uso dele em relação ao conceito em estudo.

Ao analisarmos os tipos de tarefas presentes no capítulo que envolve área de triângulos, percebemos que o autor não apresenta uma distribuição equilibrada. Assim, notamos que há um grande destaque para o tipo de tarefa T_D – “determinar a medida de área de um triângulo”, com 46,1% do total.

Enquanto isso, o tipo de tarefa T_P – “produzir triângulo a partir de área fornecida”, aparece apenas uma única vez. Além disso, é nesse tipo de tarefa que é introduzida, pela primeira vez, a ideia de que qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. Neste estudo, verificamos que essa relação não foi trabalhada anteriormente, no decorrer do tópico do assunto em tela.

A partir desta análise, podemos observar com base nos resultados obtidos, o quanto a Teoria Antropológica do Didático foi importante para a identificação da abordagem que o autor traz sobre o ensino de área de triângulos no livro didático do 7° ano do ensino fundamental. Isso foi possível a partir do reconhecimento e da classificação dos tipos de tarefas. Assim, foi possível notarmos quais os tópicos desse conceito matemático foram abordados com mais frequência e os que mais foram marginalizados.

Portanto, claramente, concluímos que o ensino de área de triângulos é explorado por esse autor com uma abordagem mecânica e tecnicista, na qual o aluno precisa apenas aplicar a expressão matemática, sem ter uma formulação inicial do conceito explorado nos tipos de tarefas.

Por fim, sugerimos que os professores que ensinam Matemática na Educação Básica e que são usuários desse livro didático, completem a abordagem do ensino de área de triângulos. Para isso, é importante oportunizar aos alunos outros tipos de tarefas, que não foram enfatizadas no capítulo analisado.

CAPÍTULO 4

O conceito de área de figuras planas em um livro didático de matemática sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático

Juari Henrique dos Santos
Marilene Rosa dos Santos

Introdução

Neste trabalho, nos propomos a investigar o conceito de área de figuras planas, o qual desempenha um papel muito importante no currículo de Matemática, da educação básica. Nessa perspectiva, destacamos que essa grandeza geométrica possui uma forte aplicação na vida cotidiana das pessoas e nas diversas práticas profissionais. Ademais, permite a articulação com outros conceitos da Matemática e favorece a conexão com outras disciplinas escolares (LIMA; BELLEMAIN, 2010).

No entanto, durante muito tempo, o ensino de área de figuras planas, na escola, foi marcado por uma metodologia extremamente pautada na prática das conversões de unidades e na introdução de expressões matemáticas, as quais denominamos de "fórmulas", sem que houvesse atribuição dos seus respectivos significados. Além disso, diversas pesquisas, aqui frisando as desenvolvidas por Baltar (1996), Rosa dos Santos (2005; 2015), Teles (2007), Pereira da Costa e Rosa Santos (2015), Barros (2016) e Pereira da Costa, Batista e Morais (2019), corroboram que o processo de ensino/aprendizagem do referido conteúdo ainda é permeado por dificuldades de ordem conceitual.

Dessa forma, consideramos como questão problema desta pesquisa a abordagem do conceito de área de figuras planas adotada pelo Livro Didático de Matemática (LDM) do 6º ano do ensino fundamental, utilizado nas escolas públicas do município de Garanhuns-PE. Para tanto, justificamos a referida delimitação a partir do papel que desempenha o conceito de área no currículo da Educação Básica, no Brasil, e das dificuldades conceituais, mais frequentes, encontradas na aprendizagem dos estudantes ao longo do período de escolarização.

À vista disso, e valendo-se dos diversos recursos didáticos existentes, tomamos como objeto de análise o Livro Didático de Matemática (LDM), uma vez que este material, geralmente, apresenta os conteúdos por meio do encadeamento de uma série de conceitos, organizados em uma sequência lógica, que nem sempre é explicitada, discutida e/ou justificada aos professores que o utilizam em suas práticas pedagógicas na escola (CARVALHO, 2012; SANTANA, 2006; SILVA, 2011).

Sobre o LDM, sabemos que é o recurso pedagógico mais utilizado, pelos professores da área, no ambiente escolar. Dessa maneira, vale mencionar que a formação do profissional, seja ela inicial ou continuada, a relação deste com o saber, neste caso, especificamente, com os conhecimentos referentes às abordagens conceituais de área de figuras planas, e o método de uso do livro didático influenciará, de modo positivo ou negativo, no processo de ensino/aprendizagem o qual o estudante estará inserido.

Em relação ao conceito de área, “vários livros apresentam exclusivamente as unidades padronizadas de medidas e grandezas. Outros dedicam excessiva importância à conversão de unidades de medida” (LIMA; BELLEMAIN, 2010). Além do mais, em alguns livros, é dado um foco precoce e exacerbado no uso de expressões matemáticas para o cálculo de área de figuras planas. Nessa direção, concordamos com Rosa dos Santos (2015, p. 224) quando afirma que o livro didático “é um recurso de grande apoio nas aulas dos professores, mas em alguns casos, é utilizado de forma equivocada sem que haja uma adaptação dos conteúdos à realidade do aluno”.

Na busca de respostas ao nosso problema de pesquisa e na intenção de proceder às análises a partir de uma fundamentação teórica, optamos por utilizar a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1992; 1999). Dito isto, é importante frisar que a referida teoria estuda as relações do ser humano diante do saber matemático e, mais particularmente, frente às situações matemáticas.

Esse autor compreende um saber constituído pelas noções de tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). A fim de exemplificar os princípios expostos, podemos citar como tipo de tarefa (T) calcular a área de um quadrado, dado a medida do comprimento do lado. A técnica (τ) seria substituir a medida do comprimento do lado na expressão $A = | x |$. O bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ consiste na aplicação da expressão matemática referente ao cálculo da área do quadrado, justificada e apoiada na contagem da quantidade de linhas e colunas e no significado da multiplicação da configuração retangular.

Ainda de acordo com Chevallard (1992, 1999), o conjunto dessas noções organizadas, para um tipo de tarefa, forma uma organização praxeológica, a qual é uma ferramenta teórico-metodológica que permite modelar as práticas sociais em uma instituição. Essa organização pode ser de natureza matemática ou didática.

A Organização Matemática (OM) estuda a situação, por exemplo, que se observa em um livro didático, em relação ao objeto matemático (tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria). A Organização Didática (OD), além de observar os objetos matemáticos, também analisa a maneira como essa situação foi construída (momentos de estudos).

Estes momentos de estudo, conforme sinalizado por Rosa dos Santos (2015) são: o primeiro encontro com a organização matemática a ser estudada, por meio de pelo menos um tipo de tarefa; a exploração dos tipo de tarefas e elaboração de técnicas; a constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica; trabalhar a técnica, tornando-a mais econômica e eficiente; a institucionalização, que tem por objetivo oficializar com precisão a organização matemática elaborada; e, por fim, a avaliação.

Assim, a TAD é, também, um referencial teórico-metodológico que permite identificar e analisar as características praxeológicas matemática e didática, expressas nos livros escolares. Logo, podemos verificar se os livros didáticos adotados pelos professores da rede pública estadual de Garanhuns (Pernambuco) contribuem para a construção do conceito de área de figuras planas.

É importante destacar que o livro didático analisado nesta pesquisa foi aprovado pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do Ministério da Educação do Brasil. Sua distribuição no país ocorreu em 2017, sendo utilizado nas escolas públicas no período trienal de 2017–2019. Tendo em vista todas as abordagens aqui explicitadas, este artigo tem por objetivo analisar a abordagem do conceito de área de figuras geométricas planas no LDM do 6° ano do ensino fundamental, utilizado nas escolas de rede municipal de Garanhuns-PE.

Quadro teórico

Para nossa compreensão acerca do conceito de área de figuras geométricas planas, seguimos as perspectivas de Baltar (1996), Souza (2004), Rosa dos Santos (2005; 2015), Teles (2007), além de Bellemain e Lima (2010). Com isso, seguimos a mesma linha de pensamento destes autores e classificamos a área como uma grandeza geométrica.

Por várias décadas, o conceito de área de figuras planas foi explorado no livro didático e nas aulas de Matemática como um tema relativo ao campo geométrico. Contudo, tal opção deixa implícita uma questão essencial, a qual diz respeito à consideração de área como uma grandeza associada à figura geométrica (PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2015).

Nessa direção, concordamos com Bellemain e Lima (2002), uma vez que estes autores consideram a percepção de grandezas enquanto atributos, ou seja, características de objetos que podem ser comparados a outros análogos ou de mesma natureza, por meio da igualdade ou desigualdade. Assim, o comprimento, a área, o volume e a abertura de ângulo são exemplos de grandezas geométricas.

Com relação ao conceito de área, Teles (2007) alega que a área de figuras planas é uma característica de uma superfície plana ou região, logo, é uma grandeza que pode ser comparada ou medida. Desse modo, fica justificado a nossa opção em considerarmos área como uma grandeza geométrica autônoma. Portanto, concordamos com Teles (2007, p. 32) quando defende que área enquanto grandeza significa, inicialmente, "distinguir área e figura (pois figuras distintas podem ter mesma área) e também área e número (pois se medimos a área de uma figura com diferentes unidades, obtemos números diferentes para expressar a medida da área e obviamente a área não se altera)".

Com isso, apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD), que segundo Chevallard (1999) estuda o homem diante do saber matemático. Este mesmo autor parte do pressuposto que toda atividade humana pode ser descrita por uma organização praxeológica, que por sua vez é constituída pelas noções de tipo de tarefa (T), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ). Dessa maneira, a TAD considera que os tipos de tarefa e a técnica [T, τ] formam o bloco prático-técnico, enquanto a tecnologia e a teoria [θ, Θ] formam o bloco tecnológico-teórico.

De forma geral, o Livro Didático de Matemática (LDM) é uma referência para o professor em sala de aula. Na maioria das vezes, é por meio deste veículo didático que os professores e alunos interagem e discutem sobre determinado assunto. Tal recurso é de grande importância para o discente, enquanto uma ferramenta de aprendizagem, e para o professor, valendo-se, pois, que muitas vezes é o único meio pedagógico explorado nas aulas. Por isso, concordamos com Rosa dos Santos (2015, p. 99), quando diz que o livro didático "configura-se como uma fonte de pesquisa, tanto para o professor quanto para o aluno".

Com relação aos estudos sobre a abordagem do conceito de área em Livros Didáticos de Matemática (LDM) do 6º ano do ensino fundamental, sob a ótica da TAD, podemos mencionar as pesquisas desenvolvidas pelos seguintes autores: Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2015), Rosa dos Santos (2015), Moura, Barros, Pereira da Costa e Vieira (2017).

No caso da primeira pesquisa, os autores Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2015) identificaram cinco tipos de tarefas no capítulo sobre área de figuras planas, em um livro didático aprovado pelo PNLD de 2008. No total, foram considerados 115 itens, sendo determinar a medida da área de uma figura ou região o tipo de tarefa mais frequente, apresentando um índice de 51%.

Resultados similares podem ser percebidos em Rosa dos Santos (2015), que fez um estudo praxeológico do capítulo de área de um livro didático recomendado pelo PNLD de 2014. A pesquisadora classificou seis tipos de tarefas entre 101 tarefas categorizadas e verificou que determinar a medida da área de uma figura ou região foi a mais evidente, com uma frequência de 60% do geral.

Tal fato também pode ser evidenciado na pesquisa desenvolvida por Moura, Barros, Pereira da Costa e Vieira (2017), que investigaram a praxeologia matemática relativa ao conceito de área em um livro didático aprovado pelo PNLD de 2017. Os autores analisaram 32 itens e reconheceram quatro tipos de tarefas, sendo dominante determinar a medida da área de uma figura ou região, com uma frequência de 69,44%.

Com relação ao 8º ano do ensino fundamental, Pereira da Costa, Batista e Morais (2019) analisaram um livro didático indicado pelo PNLD de 2017, em especial, o capítulo acerca da abordagem do conceito de área de figuras planas. No total, foram investigados 78 itens, sendo identificados 9 tipos de tarefas, das quais, os pesquisadores constaram uma frequência de 78,21% da tarefa "determinar a medida da área de uma figura ou região".

Em todas as pesquisas mencionadas, observamos que o tipo de tarefa mais presente foi determinar a medida da área de uma figura ou região. Tomando isto como base, podemos evidenciar que este fato valoriza o aspecto numérico do conceito de área, ou seja, o estudante compreenderá área enquanto medida. Esta perspectiva não é adequada, visto que área é uma grandeza geométrica, ou seja, uma característica de um objeto, que pode ser comparada ou medida.

Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa apresenta uma abordagem quantitativa e qualitativa, que constituiu na análise documental do Livro Didático de Matemática (LDM), intitulado "Vontade do Saber", do 6° do ensino fundamental.

Segundo Lima Ferreira (2015), o debate entre as abordagens quantitativa e qualitativa é antigo nas ciências, e sua diferença básica consiste na forma como os cientistas representam o real. Por um lado, temos a percepção dos quantitativistas, que percebem a realidade por meio de números, e em contrapartida, temos a visão dos qualitativistas, que se volta mais para aspectos subjetivos.

Esse livro foi escolhido a partir de um levantamento realizado na Secretaria Municipal de Educação de Garanhuns-PE e constatamos que a coleção adotada para todas as escolas municipais do ensino fundamental, anos finais, era a *Vontade do Saber*, cujos autores são Joamir Souza e Patrícia Pataro. Logo, optamos pelo volume destinado aos alunos do 6° ano, pois, de acordo com a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018) e o Currículo de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2019), o conceito de área é objeto de estudo neste ano escolar.

Em seguida, estabelecemos duas categorias de análise: a primeira, relativa à praxeologia matemática que diz respeito aos tipos de tarefas, as técnicas, tecnologia e a teoria (caracterização definida por Chevallard, 1999); e a segunda, referente às análises do conceito de área de figuras planas proposto por Bellemain (2013) e adaptadas por Rosa dos Santos (2015). Para isso, estabelecemos oito tipos de tarefas diferentes, as quais se tornaram nossas categorias de análise. Observe:

Quadro 1: Tipos de tarefa estabelecidos

Sigla	Significado
T_C	Comparar medidas de áreas de figuras geométricas planas
T_D	Determinar a medida da área de uma figura ou região
T_T	Converter unidades de medida de área
T_E	Estimar medida de área de figuras planas
T_O	Operar com medidas de áreas de figuras planas
T_P	Produzir superfícies de área dada
T_G	Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas
T_U	Estudar os efeitos de deformações e transformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies
T_S	Determinar a medida da área de uma figura ou região, cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s)

Fonte: Acervo da pesquisa

Destacamos que todas as tarefas expostas no Quadro 1, com exceção de T_S, já foram mencionadas em diversas outras pesquisas, aqui enfatizando as desenvolvidas por Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2015), Rosa dos Santos (2015), Moura, Barros, Pereira da Costa (2017) e Pereira da Costa, Batista e Morais (2019). É importante salientar, que o último tipo de tarefa apresentado no quadro, $T_{S,}$ foi proposto com base no estudo de Silva Filho e Rosa dos Santos (2017). Por fim, propomos uma atividade para fins de observação, ou seja, que a análise do livro didático escolhido nos fornecesse o conceito de área de figuras planas.

Resultados e discussões

Durante a análise do Livro Didático de Matemática (LDM) do 6° ano do ensino fundamental, foi constatado um total de 192 tarefas ao longo do capítulo, referentes ao conceito área de figuras planas. Deste quantitativo, 38 tarefas apresentam reflexões e questões de cunho pessoal e/ou de ordem matemática que não utilizam conceitos referentes à área para serem resolvidos. Dessa forma, nosso *corpus* de análise se constituiu a partir de 154 tarefas. Na sequência, estas tarefas foram distribuídas e organizadas, numa tabela, de acordo com a sua tipologia/natureza.

Tabela 1: Tipos de tarefas referentes ao conceito de área identificado no capítulo do livro analisado

Tipo de tarefa		Quantidade de tarefas	Percentual
T_D	Determinar a medida da área de uma figura ou região	67	43,5 %
T_C	Comparar medidas de área de figuras geométricas planas	18	11,68%
T_O	Operar com medidas de área de figuras planas	29	18,83%
T_T	Converter unidades de medida de área	29	18,83%
T_G	Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à ária de figuras planas	3	1,94%
T_P	Produzir superfícies de área dada	0	0%
T_E	Estimar medidas de área de figuras planas	4	2,59%
T_U	Estudar os efeitos de transformações e deformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies	1	0,64%
T_S	Determinar a medida da área de uma figura ou região, cujo enunciado comporta dados relativos à outra(s) grandeza(s)	3	1,94%
	TOTAL	154	100%

Fonte: Acervo da pesquisa

À vista desses aspectos, e tomando como base os resultados apontados nas pesquisas de Pereira da Costa e Rosa dos Santos (2015), Rosa dos Santos (2015), Moura, Barros, Pereira da Costa e Vieira (2017), Pereira da Costa, Batista e Morais (2019), evidenciamos que os autores do LDM analisado nesta pesquisa dão ênfase no tipo de tarefa T_D (determinar a medida da área de uma figura ou região), que por sua vez representa 43,5% das tarefas presentes no capítulo.

Ademais, constatamos que T_O (operar com medidas de área de figuras planas) e T_T (converter unidades de medida de área) se mostraram bastante presentes dentre as tarefas analisadas, representando cada uma 18,83% do total de tarefas, seguidas por T_C (comparar medidas de área de figuras geométricas planas), com 11,68%.

Em contrapartida, T_P (produzir superfícies de área dada) não aparece em nenhum item do capítulo. Além de T_S (determinar a medida da área de uma figura ou região, cujo enunciado comporta dados relativos à outras grandezas) e T_G (determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área de figuras planas), ambas com 1,94% das tarefas, T_U (estudar os efeitos de transformações e deformações geométricas e numéricas sobre a área de uma família de superfícies) com 0,64% e T_E (estimar medidas de área de figuras planas) com 2,59%, aparecem com uma frequência mínima. Juntas, elas somaram apenas 7,11% das tarefas identificadas.

Em decorrência da ênfase dada pelos autores ao tipo de tarefa T_D, aprofundamos nosso estudo neste tópico e o categorizamos em subtipos de tarefas, valendo-se, pois, da praxeologia matemática pontual referente a esse tipo de tarefa, como mostrará a Tabela 2.

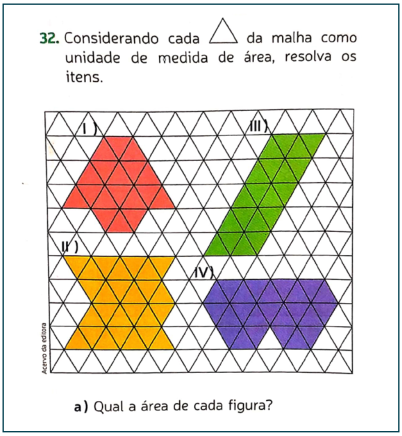
Analisando detalhadamente as tarefas de determinar a medida da área de uma figura ou região, percebemos que grande parte delas pede para se calcular a medida da área de uma figura ladrilhável, com quantidade finita ou metade de superfícies unitárias (T_{D1}), como podemos verificar na Figura 1.

Tabela 2: Resultado da análise quantitativa dos subtipos de tarefas de T_D

Tipo de tarefa	Subtipo de tarefa	Quantidade
T_D – Determinar a medida da área de uma figura ou região.	T_{D1} – Determinar a medida da área de uma figura ladrilhável, com quantidade finita ou metade de superfícies unitárias	30
	T_{D2} – Determinar a medida da área de um retângulo dadas as medidas do comprimento dos lados	28
	T_{D3} – Determinar a medida da área de um quadrado, dada a medida do comprimento do lado	4
	T_{D4} – Determinar a medida da área de uma figura que pode ser decomposta em retângulos	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 1: Exemplo do subtipo de tarefa T_{D1}


32. Considerando cada △ da malha como unidade de medida de área, resolva os itens.

a) Qual a área de cada figura?

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 283)

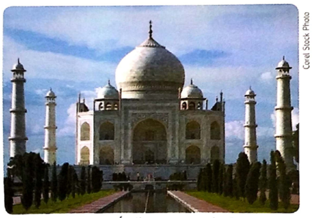
Neste subtipo de tarefa, a técnica (τ_1) consiste em realizar a contagem da quantidade de superfícies unitárias necessárias para recobrir toda figura. Se houver metades, a cada duas metades conta-se como uma superfície unitária a mais. Nesse sentido, o elemento tecnológico teórico (Θ, θ) é que toda área é dada pela quantidade de superfícies unitárias necessárias para cobrir uma figura. O conceito e a propriedade aditiva de área de figuras planas são utilizados para justificar a técnica.

Entretanto, outro subtipo de tarefa que apareceu em grande parte das atividades classificadas como tipo de tarefa T_D foi o de determinar a medida da área de um retângulo, dadas as medidas do comprimento dos lados (T_{D2}), como será evidenciado na figura abaixo.

Figura 2: Exemplo do tipo de tarefa T_{D2}

17. Localizado na cidade de Agra, na Índia, o Taj Mahal foi construído no século XVII pelo imperador Shah Jahan. O terreno onde ele encontra-se tem forma de retângulo com 580 m de comprimento por 304 m de largura.

Quantos metros quadrados tem o terreno onde fica o Taj Mahal?



Taj Mahal, Agra, Índia, no ano de 2009.

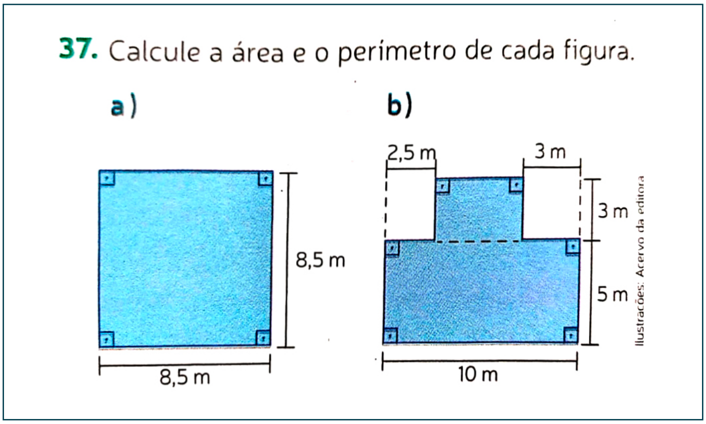
Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 277)

Dessa vez, a técnica (τ_2) utilizada para resolver o problema é substituir as medidas na expressão A = comprimento x largura, obtendo assim o valor numérico, que será a medida da área acompanhada da unidade de área exposta no problema. O que justifica essa técnica é a aplicação da expressão matemática que determina a medida da área do retângulo, justificada e apoiada na contagem da quantidade de linhas e colunas e no significado da multiplicação da configuração retangular.

Por outro lado, outros subtipos de tarefa aparecem de forma minoritária, ou seja, com menor frequência. Porém, não menos importante. É o caso dos subtipos de tarefa T_{D3} e T_{D4}.

Para o subtipo T_{D3}, a técnica aplicada e sua justificativa são as mesmas utilizadas em T_{D2}, ou seja, substituir as medidas na expressão matemática, obtendo assim o valor numérico que será a medida da área acompanhada da unidade de área exposta no problema, adaptando apenas a expressão $A = | x |$.

Figura 3: Exemplo do subtipo de tarefa T_{D3}



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 281)

Por fim, para o subtipo T_{D4}, que também aparece de forma tímida no capítulo, utiliza-se ainda como técnica a decomposição da figura em retângulos, e em seguida, deve-se medir os lados com algum instrumento de medida convencional. Determinar a medida da área de cada figura decomposta por meio da expressão matemática (T_{D2}), para depois somar os valores encontrados.

Nessa direção, a medida da área total será obtida a partir do somatório das áreas acompanhadas da unidade de área. Assim, a técnica é justificada pela propriedade aditiva de área, pois a área total é dada pelo somatório das áreas de cada figura, obtidas pela decomposição. Como exemplo deste último subtipo de tarefa, tomamos o item b da Figura 3. Portanto, podemos perceber a presença de oito tipos de tarefas diferentes. No entanto, a predominância é para determinar a medida da área de figuras ou regiões, a qual corresponde quase à metade do total presente no capítulo, o que revela um aspecto numérico do conceito de área.

As técnicas que predominaram foram a contagem e o uso de expressão matemática do cálculo de área do retângulo e do quadrado. Mas de forma geral, o livro didático trabalha de forma gradativa, avançando aos poucos em suas tarefas. O bloco tecnológico-teórico é apresentado de forma clara, pois os argumentos utilizados são válidos, ou seja, estão corretos do ponto de vista matemático e são bem explorados no decorrer do capítulo.

Vale destacar que o Livro Didático de Matemática (LDM) estudado, na grande maioria das tarefas, quando é necessário determinar a medida da área de alguma figura, há um realce do uso da unidade de medida desejada. Tal fato contribui para a ênfase da dupla, número e unidade de medida, que de acordo com nossa fundamentação, vem a favorecer a construção do conceito de área enquanto grandeza.

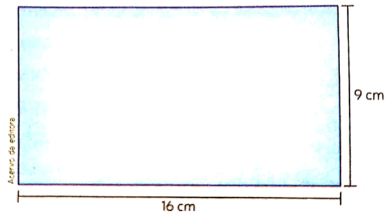
Entretanto, isso não é o suficiente para a construção do conceito de área, visto que os autores deram uma grande ênfase em um único tipo de tarefa, e ao mesmo tempo, deram pouca ou nenhuma importância a outros tipos de tarefas, fazendo com que grande parte das atividades do livro sejam sobre determinar a medida da área, utilizando expressões matemáticas, as fórmulas. Tomando isto como base, apresentaremos uma proposta de atividade que pode complementar a abordagem do livro didático em questão.

Atividades interessantes identificadas

Como visto anteriormente, o livro didático não coloca à disposição do aluno nenhuma tarefa de construção/produção. Contudo, ao observarmos o manual do professor, percebemos que os autores sugerem ao docente a realização da seguinte atividade em sala de aula:

Figura 4: Exemplo utilizado pelo autor para sugerir a aplicação da tarefa produzir área

7. Qual deve ser a medida do lado de um quadrado para que ele tenha a mesma área do retângulo a seguir?



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 282)

Nesta atividade, o livro pede para que o aluno determine a medida do comprimento do lado de um quadrado, para que na sequência, ele tenha a mesma área do retângulo representado na Figura 4. Para isso, o estudante deveria, a princípio, determinar a medida da área do retângulo apresentado, que seria 144 cm^2. Em seguida, extrair a raiz quadrada desse valor, que seria igual a 12. Logo, o quadrado de mesma área que o retângulo deveria ter o lado com medida do comprimento igual a 12 cm.

O manual do professor sugere que essa atividade seja complementada, de modo que os alunos reproduzam o retângulo da figura em uma cartolina, e posteriormente, o recortem. Após isso, o docente deve incentivá-los a obterem um quadrado por meio da composição e decomposição, mostrando assim, neste caso especificamente, que o retângulo e o quadrado apresentam superfícies diferentes, mas possuem a mesma medida de área. Portanto, consideramos uma excelente proposta, visto que poderá contribuir para a aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza autônoma.

Proposta de atividade a partir das nossas observações

Apresentaremos nesta seção um jogo intitulado "Produzindo área", o qual poderá contribuir para as aulas dos professores de Matemática, em especial, para aqueles que utilizam o volume didático analisado neste trabalho. O objetivo deste jogo é apresentar o conceito de área de uma figura por meio de produção, ou seja, fazer com que os alunos jogadores percebam que superfícies geométricas diferentes podem ter a mesma medida de área.

Neste jogo, podem participar no mínimo dois e no máximo quatro alunos por rodada. Para o desenvolvimento desta atividade lúdica, são necessárias 20 cartas que apresentam figuras geométricas, a medida das suas respectivas áreas e a figura a ser produzida. Por exemplo, a carta 1 contém a representação de um quadrado com 9 cm^2 de área, e logo abaixo da referida figura plana existe um enunciado, o qual solicita a produção de uma outra figura de mesma natureza (geométrica) e mesma área, que neste caso, trata-se de um triângulo. Na sequência, temos a representação do que foi explicitado.

Figura 5: Carta 1 do jogo "Produzindo Área"

Fonte: Elaborada pelos autores

As cartas do jogo são previamente elaboradas. Embaralham-se as cartas e cada jogador pega apenas uma, porém, só pode verificá-la após um determinado sinal, para que todos os participantes iniciem sua atividade juntos. Aquele que realizar o que pede a carta em menos tempo e de forma correta, soma um ponto na rodada. Ao fim de quatro rodadas, vence aquele que obtiver mais pontuação.

No caso de empate, ambos recebem pontuação. Além disso, se houver empate no resultado final do jogo, divide-se o prêmio (que pode ser algum atrativo escolhido pelo professor e que tenha utilidade para o aluno, como livros, cadernos, ou se preferir, doces).

A título de exemplo do jogo – Supondo que há dois jogadores: Jogador 1 = J1 e Jogador 2 = J2. Após embaralhar as cartas, os jogadores J1 e J2, respectivamente, pegaram suas cartas. Após o sinal, J1 verificará que tem um quadrado de área medindo 16 cm^2, e na sequência precisará produzir um retângulo com mesma medida de área, ou seja, um retângulo com comprimento dos lados medindo 2 cm e 8 cm, respectivamente. Paralelo a isso, J2 viu que sua carta contém um retângulo de área medindo 10 cm^2, e precisará produzir um triângulo com a mesma medida de área. Logo, uma possível solução para J2 seria um triângulo com comprimento dos lados medindo 5 cm e 4 cm.

Dessa forma, e considerando que J1 pensou mais rápido que J2, terminando sua produção em menos tempo, depreendemos que J1 ganha a pontuação respectiva a sua vitória na atividade – 1 ponto. Dito isto, e tomando como referência tais princípios, o jogo segue até a quarta e última rodada.

Considerações finais

Este trabalho analisou e discutiu a abordagem do conceito de área de figuras planas no Livro Didático de Matemática (LDM) do 6° ano do ensino fundamental, utilizado nas escolas da rede municipal de Garanhuns-PE, entre o intervalo trienal 2017–2019.

Ao procedermos uma análise no material pedagógico em questão, percebemos que o conceito de área é muito importante para a formação dos estudantes e para a vida pessoal e profissional de todos, visto que tal conteúdo pode ter uma aplicabilidade na vida cotidiana. Porém, o ensino desse saber é marcado por uma ênfase exagerada no uso de expressões matemáticas e na perspectiva numérica (medida), o que não contribui para a aprendizagem dos estudantes.

Durante a pesquisa, constatamos que o livro didático analisado dá uma ênfase muito grande no quadro numérico do conceito de área de figuras planas, com um uso excessivo de fórmulas, não instigando o aluno a criar técnicas para solucionar o problema em questão.

Neste estudo, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi uma ferramenta teórica que nos ajudou na análise das praxeologias matemáticas presentes no capítulo que trata sobre área de figuras planas. Dessa forma, foi possível verificar que há uma grande ênfase no tipo de tarefa T_D – determinar a medida da área de uma figura ou região. Logo, verificamos que o livro, na maioria de suas tarefas acerca o cálculo da medida da área, destaca o uso da unidade de medida. Entretanto, esta metodologia não se mostra suficiente para a construção do conceito de área enquanto grandeza.

Observamos também, a falta do tipo de tarefa T_P (Produzir superfícies de área dada) nas atividades propostas aos alunos. À vista disso, vale frisar que esta tarefa de construção é de suma importância à aprendizagem e ao desenvolvimento do pensamento matemático, porém o livro não apresenta. Contudo, no manual do professor esse tipo de tarefa é explicitado, mas pelo fato de ser apenas uma sugestão, o profissional pode optar por querer trabalhar ou não o conteúdo a partir deste viés; considerar ou não essas orientações em seu planejamento.

Portanto, sugerimos aos professores que utilizam o LDM do 6° ano do ensino fundamental, intitulado *Vontade do Saber*, que complementem a abordagem do conceito área de figuras planas, nas suas aulas. Nesse sentido, sugerimos como atividade pedagógica a proposta do jogo aqui exposto, valendo-se, pois, que sua finalidade é fazer com que os estudantes produzam áreas e compreendam que superfícies diferentes podem ter a mesma área. Da mesma forma, trouxemos como proposta a vivência da atividade inserida no manual do livro didático do professor.

Diante do exposto, depreendemos que o LDM analisado nesta pesquisa necessita ser reavaliado, de maneira que tal observação permita com que os autores reflitam acerca das atividades referentes ao conteúdo área de figuras planas para que os seus próximos volumes, que futuramente serão distribuídos nas redes públicas de ensino, contemplem um repertório mais diversificado de tipos de tarefas; frisando seu foco para tarefas de construção/produção, cuja ausência é notória.

CAPÍTULO 5

Potencialidades e limitações de softwares geométricos para o ensino médio

Jonnathan Felipe Araújo Guimarães
Marilene Rosa dos Santos

Introdução

Há certo consenso, entre os professores, que ensinar Matemática é uma tarefa complexa. Inicialmente, uma das principais dificuldades, em nossa compreensão, é a aversão dos alunos à disciplina, que, geralmente, a caracterizam como muito difícil, sem sentido e, em alguns casos, até, como algo impossível de se aprender (LIMA BORBA e PEREIRA DA COSTA, 2018).

Tal fenômeno, chamado de "matofobia" por Nimier (1988), dificulta o bom desempenho do professor, fazendo com que o resultado do processo de aprendizagem não seja satisfatório. Outro ponto a ser notado, é que, em alguns casos, nos deparamos com alunos desinteressados, e isso se deve, muitas vezes, ao tecnicismo das aulas, na maioria das vezes, limitadas ao livro e ao quadro.

Se por um lado, hoje, estamos vivendo a era das tecnologias e, cada vez mais, surgem computadores com rapidez de processamento, sistemas operacionais mais eficientes e softwares/programas que ajudam as pessoas a desempenharem funções do seu cotidiano, de forma mais eficaz, tais como estudo, trabalho e lazer. Por outro lado, o ensino de Matemática, em particular, as aulas de geometria, nem sempre nos deparamos com a utilização dessas tecnologias por parte dos professores.

Esse fato, isto é, o não uso de tecnologias nas aulas de geometria, pode estar associado, primeiramente, pela "omissão geométrica"

(LORENZATO, 1995) na escola. Desse modo, a geometria ficou excluída da sala de aula por várias décadas, gerando lacunas conceituais em professores e alunos. Assim, diversos trabalhos de pesquisadores brasileiros (CÂMARA DOS SANTOS, 2009; PEREIRA DA COSTA, 2016; 2019) nos chamam atenção a esse respeito.

Segundo Pereira da Costa e Câmara dos Santos (2016), essa ausência, inicialmente, pode ser explicada pela exclusão da geometria nas salas de aula da educação básica, por quase quarenta anos, por decorrência do Movimento da Matemática Moderna, no fim da década de 1960 e pelas lacunas conceituais nos cursos de formação de professores. Assim, para os autores, muitos docentes têm dificuldades para trabalhar os conceitos geométricos na sala de aula da educação básica.

Na década de 90, Lorenzato (1995) comentava que essa ausência tem início ainda na sala do ensino fundamental, e afirma que este pode ser um dos grandes problemas, pois torna ainda mais difícil a compreensão, quando os estudantes chegam ao ensino médio.

Com o passar do tempo, ocorreram mudanças na forma de tratamento da geometria, em decorrência do desenvolvimento da Educação Matemática. Dessa maneira, tivemos a chegada de documentos curriculares com o eixo específico, várias pesquisas em geometria para o auxílio dos profissionais da área e o avanço dos livros didáticos em relação aos conteúdos geométricos. Tudo isso representou grande importância para que o panorama fosse modificado.

Entretanto, estudos de Pereira da Costa (2020) e colaboradores (PEREIRA DA COSTA e CÂMARA DOS SANTOS, 2015b; PEREIRA DA COSTA E ROSA DOS SANTOS; 2020), atestam que alunos do ensino básico à universidade apresentam dificuldades conceituais e de aprendizagem referentes à geometria.

Para Santos (2006), a geometria é um ramo da matemática que exige certa capacidade visual para ser desenvolvida. Neste sentido, do ponto de vista pedagógico, o uso das tecnologias possibilita consideráveis contribuições à aprendizagem. Ou seja, inserir o recurso tecnológico nas aulas de geometria, pode ser um grande passo para que estas dificuldades possam ser amenizadas.

Assim, a ideia deste estudo se deu durante a realização do estágio supervisionado curricular, referente à regência no ensino médio, no ano de 2018 pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Pernambuco – UPE – Campus de Garanhuns (Pernambuco). Durante esse estágio, observamos certa dificuldade dos alunos, dos 1° e 2° anos do ensino médio, no que dizia respeito aos conteúdos de geometria. Em relação aos professores, percebemos que estes usavam apenas lápis e quadro nas suas aulas.

Nesse sentido, surgiu o seguinte questionamento de pesquisa: Quais softwares geométricos poderiam auxiliar os professores que ensinam Matemática no ensino médio, de forma que eles pudessem utilizá-los em suas práticas pedagógicas, contribuindo com a aprendizagem dos estudantes?

Atualmente, podemos encontrar em diversos artigos e trabalhos acadêmicos, tais como Borba (2012) e Gravina (1998), que a utilização de vários softwares de geometria dinâmica tem ajudado tanto aos docentes quanto aos discentes a manipular representações de objetos geométricos de uma maneira fácil, proporcionando uma visualização muito melhor que experimentos feitos, por exemplo, no quadro. Podemos citar alguns softwares que ajudam nesta tarefa, e que serão analisados neste trabalho, entre eles: GeoGebra, Cabri II Plus, PolyPro, Dr. Geo, Cinderella e o Cabri 3D.

Dessa forma, pretendemos, por meio deste estudo, observar o uso de softwares como uma ferramenta facilitadora da aprendizagem em geometria no ensino médio, analisando suas potencialidades e limitações. Essa pesquisa se justifica em decorrência da importância dos conhecimentos geométricos na vida das pessoas, seja na aplicação em situação do cotidiano, ou, em contextos mais complexos, como Física e Astronomia, por exemplo.

De modo geral, temos por objetivo analisar as potencialidades e limitações de softwares geométricos para o ensino médio. De forma específica, buscamos mapear alguns softwares geométricos que podem ser trabalhados no ensino médio; analisar softwares geométricos a partir de alguns critérios pré-estabelecidos; e verificar como os softwares se comportam em níveis de diferentes dificuldades em relação à geometria plana, espacial e analítica.

Assim, esperamos contribuir com a comunidade acadêmica, e com aqueles que se interessam pelo tema, trazendo uma visão global do uso de softwares de geometria como um recurso pedagógico, dos quais os profissionais da educação podem dispor.

Quadro teórico

A geometria está presente ao nosso redor de várias formas diferentes, seja aplicada em construções, na arte, na natureza ou representada em objetos que costumamos utilizar em nosso dia a dia. Ela é utilizada em nosso meio desde as antigas civilizações, sendo assim, uma das áreas da Matemática mais antigas. Em relação a sua importância concordamos com Lima e Carvalho (2010, p. 135) quando afirmam que:

> Uma das razões da importância da geometria é sua presença constante em nosso dia a dia.[...] O desenvolvimento motor e cognitivo posterior das pessoas vai permitir que elas exercitem competências geométricas cada vez mais elaboradas de localização, de reconhecimento de deslocamentos, de representação de objetos do mundo físico, de classificação das figuras geométricas e de sistematização do conhecimento.

Fazer com que as pessoas desenvolvam o conhecimento geométrico é importante, pois ele é fundamental para interpretação, compreensão e resolução de questões de diferentes áreas do conhecimento. Assim, entendemos que a geometria é um excelente apoio às outras disciplinas, como, por exemplo, a geografia, estatística e álgebra. Ainda sobre este uso do conhecimento geométrico em outras áreas do conhecimento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também destacam:

> o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Além disso, acerca do pensamento geométrico, a Base Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 271) destaca:

> a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.

Mas, porque devemos ter o ensino de geometria presente nas escolas? Porque temos que aprender geometria? Para responder a esses questionamentos, Lorenzato (1995) explica que sem estudar geometria, as pessoas não desenvolveriam o pensamento geométrico e o raciocínio visual. Nessa direção, sem essa habilidade, elas não conseguiriam resolver situações da sua vida, que tenham a geometria em seu meio. Ou seja, sem o conhecimento geométrico, a leitura de diversas circunstâncias que acontecem cotidianamente na vida de um indivíduo, e que envolvem esse saber, se tornará distorcida.

Diante disto, em decorrência da importância do ensino de geometria para os estudantes, conforme mencionado, os professores devem realizar um planejamento adequado. Para que o trabalho seja desenvolvido com sucesso, se faz necessário que esse profissional se atente às diversas formas de ensinar com o livro didático e com outros recursos didáticos, explorando situações que tenham sentido aos discentes. Desse modo, utilizar as tecnologias (como o vídeo, softwares matemáticos, internet e computador) é essencial para o trabalho pedagógico do professor e, consequentemente, para a aprendizagem dos alunos.

Segundo Borba (2012), podemos dividir o uso de tecnologias na educação matemática em quatro fases. Na primeira fase, seus principais destaques foram: a criação no software LOGO e a implantação de laboratórios de informática dentro das escolas. Na segunda, ocorreu a criação de softwares como o Winplot, e o Graphmathica, estes voltados à representação de funções, e também o Cabri Géomètre e o Geometricks, estes últimos, para o auxílio em estudos sobre geometria dinâmica.

Na terceira fase, a internet é utilizada como fonte de informações e comunicações entre estudantes e professores. Além disso, cursos à distância são oferecidos aos docentes por meio de e-mail e fóruns de discussão, e a ferramenta de pesquisa Google começa a ser um importante aliada entre discentes e docentes na busca de novos conhecimentos.

Por fim, a quarta fase é caracterizada pela chegada da internet rápida e pela transformação da comunicação online. Assim, temos a criação do software GeoGebra, que criou novos cenários de investigação matemática, seja por meio da geometria ou da álgebra. Também, são produzidos ambientes de comunicação online como, por exemplo, o Skype, Moodle, Facebook e WhatsApp. Esta última fase é a que estamos vivenciando, atualmente.

Quando falamos no ensino de Matemática, temos a consciência que os elementos conceituais[1], sempre foram superiores aos elementos observáveis/visuais[2]. No entanto, hoje em dia, o "observar" está cada vez mais ganhando espaço com o surgimento e utilização de tecnologias em sala de aula.

Uma das tecnologias utilizadas para o crescimento dos elementos observáveis é o computador. Sobre esta tecnologia, diversas pesquisas (LAGRANGE, 2003; BORBA, SILVA e GADANIDIS, 2014) atestam que para que possamos utilizá-la em atividades matemáticas, temos que saber o papel que será desempenhado na sala de aula. Tal função será realizada com sucesso por meio da mediação do professor. Ou seja, ao utilizar este recurso tecnológico para ensinar ou aprender, o usuário tem que ter conhecimento do que irá fazer, ou do que está fazendo com o computador.

Contudo, devemos saber administrar o uso das tecnologias na sala de aula, pois nem todo conceito matemático abordado a partir das tecnologias é compreendido pelos alunos. Isso ocorre, geralmente, quando não há um planejamento adequado, com objetivos educacionais claros pelo professor. Dessa forma, enquanto profissionais de ensino, devemos saber como trabalhar da melhor maneira, os conteúdos em relação às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), para que os diferentes tipos de raciocínio sejam postos a prova.

Acerca do uso da informática no campo educacional, Borba (2001, p. 138) destaca que:

> ela (a informática) é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.

---

1 Um elemento conceitual, não é visível pode ser um pensamento, como próprio nome já o define é um conceito.

2 Os elementos visuais formam a parte mais proeminente da representação gráfica, pois são aquilo que podemos ver de fato.

No ensino de Matemática, as dificuldades para utilizarmos as TIC vão muito além da necessidade de termos bons softwares. Ainda, apresentar aos professores estas inovações tecnológicas não é suficiente, pois é necessário que esses trabalhadores tenham uma formação (inicial e continuada) adequada para o uso didático-pedagógico das tecnologias em sala de aula. Nessa direção, Carvalho (2017) defende esta necessidade de orientar a aprendizagem durante a formação acadêmica do professor, para a construção do conhecimento tecnológico pedagógico de conteúdo.

Por fim, introduzir as tecnologias nas aulas de Matemática possui como principal obstáculo fazer com que o professor lecione de maneira mais dinâmica e reflexiva. A integração do ensino com os recursos tecnológicos trará novos desafios, novas abordagens, e novos tratamentos acerca de conceitos matemáticos, que de fato, serão potencializados com a ajuda dos diferentes tipos de tecnologias que podem ser utilizadas. Tal fato contribuirá com o ensino e com a aprendizagem no contexto matemático.

Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa apresenta uma abordagem qualitativa, com caráter exploratório, no qual utilizamos o método de análise de conteúdo proposta por Bardin (2009). Conforme pontuado pela autora, esse método toma um conjunto de técnicas sistematizadas que possibilitam a análise de uma determinada temática.

A sistematização metodológica de técnicas foi fundamentada em Campos (2007), que usa, entre outras estratégias, a análise de conteúdo para a investigação. No caso de nossa pesquisa, investigamos as potencialidades e limitações de softwares geométricos para o ensino médio, a partir de uma sequência de três etapas: pré-análise, exploração do material, e o tratamento e interpretação dos resultados obtidos.

A pré-análise apresenta a descrição do objeto a ser pesquisado, assim, buscamos analisar os softwares de Geometria Dinâmica:

GeoGebra, Cabri II Plus, Cinderella, Dr. Geo, Polly Pro e Cabri 3D. Esses softwares foram escolhidos alguns por sugestões de professores, e outros por experiência de utilização na universidade.

A *exploração do material* trata sobre a execução do trabalho propriamente dito, neste caso, a exploração dos softwares escolhidos. Aqui utilizaremos uma ficha de avaliação de softwares[3], dividida em quatro partes: características técnicas gerais, características pedagógicas gerais, particularidades didáticas e exploração do conteúdo matemático. Ainda, nesta fase, será realizada uma abordagem sobre os conceitos de geometria trabalhados no ensino médio. Dessa forma, elencamos três assuntos de cada ano escolar, para ser explorado com o uso dos softwares. Os conteúdos são relativos à geometria plana, espacial e analítica e servirão para a análise didática dos softwares.

Finalmente, como última etapa da pesquisa, teremos o *tratamento e interpretação dos resultados obtidos*, no qual analisaremos a ficha de avaliação e as potencialidades e limitações do software diante de conceitos geométricos.

Resultados e discussão

Pré-Análise

Nesta fase, inicialmente, iremos mapear, descrever e analisar as características técnicas dos softwares geométricos. Isso será importante para termos uma visão holística dos mencionados softwares.

No mapeamento, identificamos 6 (seis) softwares que podem ser trabalhados com a geometria e que são de fácil acesso para os professores da educação básica. Esses programas podem ser reproduzidos no sistema operacional Windows, sendo cinco deles em Mac OS, e três no Linux.

3 Ficha de avaliação adaptada da disciplina de Tecnologias Aplicadas ao Ensino de Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Pernambuco, Campus Garanhuns.

Entre os softwares analisados, constatamos que o GeoGebra também pode ser reproduzido na própria Web, ou seja, não necessita que o usuário baixe o programa no computador. Além disso, conta com versões para utilizar em aparelhos celulares e tablets, seja por Android ou IOS.

No que diz respeito ao idioma utilizado pelos programas, em quase todos, percebemos a utilização da língua portuguesa, com exceção do Poly Pro, no qual contamos apenas com o inglês e o espanhol.

O próximo ponto abordado foi em relação à licença que os softwares possuem. Como resultados obtidos, temos quatro softwares gratuitos e dois softwares com licença comercial. Contudo, estes últimos contam com um período de 30 dias de demonstração e uso livre para os interessados.

Em seguida, mais dois pontos foram analisados, um a respeito de sua instalação, e outro relativo à disponibilidade de um manual. Como resultados obtidos, notamos que todos eles possuem uma instalação fácil, e os usuários que, por ventura, queiram utilizá-los, não sentirão nenhuma dificuldade nesse quesito. Tudo isso levando em conta que nesta análise, foram utilizados computadores com sistema operacional Windows e celulares com sistema Android (no caso do GeoGebra).

No que se refere ao segundo item verificado, todos os softwares investigados possuem manuais. Porém, quatro deles (GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D e o Cinderella) têm os manuais escritos em português, enquanto que o Poly Pro só possui em inglês, e o Dr. Geo utiliza o inglês ou o francês.

Por fim, o último ponto a ser observado foi sobre a velocidade que os softwares tiveram quando estavam desempenhando atividades. Como parâmetros, utilizamos os seguintes testes: Se o comando é realizado pelo software de forma instantânea, dizemos que ele possui uma resposta ótima, se o comando é realizado de uma maneira rápida, mas não instantânea dizemos que o mesmo tem uma resposta boa, e se o aplicativo apresentar uma resposta com certa lentidão, dizemos que ele apresenta uma resposta não muito satisfatória. Como resultados obtidos, tivemos 3 com uma velocidade de resposta ótima e 3 com velocidade boa, ou seja, a experiência de utilização foi muito positiva na análise.

O segundo levantamento feito foi sobre as características pedagógicas dos softwares analisados na pesquisa. O primeiro ponto foi sobre a questão dos objetivos que estavam explícitos na apresentação do software, objetivos estes, que constavam no seu respectivo site de origem. Como apresentado no Quadro 1, obtemos os seguintes resultados:

Quadro 1: Objetivos dos softwares analisados explícitos na apresentação do site de cada um deles

Software	Objetivo
GeoGebra	O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar.
Cabri II Plus	Cabri é o sketchbook interativo que você precisa para construir figuras geométricas. Com uma tela idêntica ao software atual principal, o Cabri II Plus oferece uma interface estruturada e intuitiva. Reconhecido pelo interesse pedagógico (RIP) pela facilidade de uso e sua fundamentação didática, o Cabri II Plus permite realizar, em poucos cliques, construções geométricas e numéricas: transformações, medidas e cálculos, placas e representações gráficas de funções, expressões e equações.
Cinderella	Cria facilmente construções geométricas surpreendentes. Partindo de relações triangulares simples, continuando com teoremas trigonométricos até fractais e grupos de transformação, Cinderela permite criar e manipular visualizações de uma forma intuitiva.
Cabri 3D	Até agora, a geometria tridimensional era difícil de ensinar – a complexidade dos projetos em perspectiva, modelos que são difíceis e demorados de construir. O Cabri 3D é o único programa que permite aliviar essas dificuldades de construção e que também contém os benefícios de geometria interativa.

Software	Objetivo
Poly Pro	Poly é um programa shareware para exploração e construção de poliedros. PolyPro inclui todas as características de Poly e adiciona a capacidade de exportar modelos de poliedros, utilizando formatos padrão de arquivo 3D (DXF, STL, e 3DMF). Modelos tridimensionais que foram exportados para Poly Pro, podem ser importados para o software de terceiros-modelagem, como mostra a tiros de tela para a direita. Com PolyPro, você também pode exportar animações de poliedros, girando como arquivos GIF animado. Imagens estáticas podem ser exportadas como arquivos GIF ou PCX.
Dr. Geo	O Dr. Geo pretende ser um software aberto, fácil de estudar, modificar e estender a geometria interativa. Ele é distribuído com seu código-fonte. O usuário pode modificar seu próprio código-fonte ao usá-lo. Crianças de dez anos usam o Dr. Geo para explorar o esboço geométrico euclidiano, as crianças ágeis o estendem e programam com sua linguagem dinâmica e interface de usuário Smalltalk incorporadas. Assim, como outros softwares de geometria interativa, como Cabri, Cinderella, Geogebra, Carmetal, com o Dr. Geo, o usuário cria um esboço geométrico e o manipula de acordo com suas restrições. O que diferencia o Dr. Geo do outro software de geometria é a possibilidade de estudar e até mesmo modificar/estender seu código-fonte enquanto ele o estiver usando para criar uma figura.

Fonte: Site de apresentação dos softwares[4]

Logo após, observamos se de fato os objetivos que estavam explícitos em sua apresentação são atingidos. Assim, pudemos observar que sim, ou seja, todos os objetivos que foram colocados na apresentação são atendidos pelo seu respectivo software. A única ressalva a ser colocada é que no programa Cabri 3D, no qual é explicitado que "[...] o Cabri 3D é o único programa que permite aliviar essas dificuldades de construção" (CABRI, 2018). Entretanto, em nossas análises, ele não foi o único capaz de realizar tal feito.

Dentre os softwares que mais se aproximam de acordo com seus objetivos, podemos colocar o Geogebra e o Cabri II Plus, por

4 Sites de apresentação dos softwares: *https://www.geogebra.org/about*; *https://cabri.com/es/profesor/cabri-ii-plus/*; *https://cabri.com/es/profesor/cabri-3d/*; *http://www.peda.com/polypro/*; *https://cinderella.de/tiki-index.php*; *http://www.drgeo.eu/home*

não trabalharem apenas com geometria, mas também com outras áreas do campo matemático. O Cinderella e o Dr. Geo são dois que se assemelham muito em suas características, pelo seu trabalho, apenas em geometria dinâmica, não abordando outros campos matemáticos.

Fazendo uma abordagem entre os que mais se distanciam, colocamos o Cabri 3D, pelo seu trabalho com geometria em três dimensões, algo que não foi citado em nenhum dos outros softwares. Por fim, temos o Poly Pro, que trabalha apenas com construções e modelagem de poliedros.

Como vimos anteriormente, alguns dos softwares possuem em seus objetivos o trabalho em outros campos da matemática. Diante disso, analisamos quais áreas estes aplicativos conseguem desenvolver atividades, ou seja, se eles conseguem promover atividades em geometria, estatística e probabilidade, álgebra e funções, grandezas e medidas e números e operações. Para esta última análise, utilizamos uma rápida observação no nos programas analisados, a fim de encontrar alguns elementos a respeito de cada uma das áreas matemáticas ditas anteriormente.

Entre os resultados obtidos, notamos que o GeoGebra consegue desenvolver trabalhos em todos os cinco campos matemáticos, confirmando, assim, o que foi abordado em sua apresentação inicial. Em seguida, verificamos que o Cabri II Plus, Cinderella, Dr. Geo e o Cabri 3D conseguem trabalhar nas áreas de geometria, álgebra e funções, grandezas e medidas, e números e operações.

O software Poly Pro foi o que mais se distanciou dessa perspectiva, pois só consegue realizar trabalhos no campo da geometria, algo que já era esperado em relação à sua apresentação dos objetivos.

Exploração do material

O próximo passo da pesquisa foi saber se os conteúdos e objetivos estão de acordo com o currículo escolar. Dessa forma, observamos os assuntos de geometria que devem ser trabalhados no ensino médio e, para isso, utilizamos os Parâmetros Curriculares Nacionais para o

Ensino Médio – PCN+ (BRASIL, 2006) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco – PCPE (PERNAMBUCO, 2012), conforme descrição apresentada no quadro a seguir:

Quadro 2: Relação dos saberes geométricos descritos nos documentos curriculares vigentes para o ensino médio

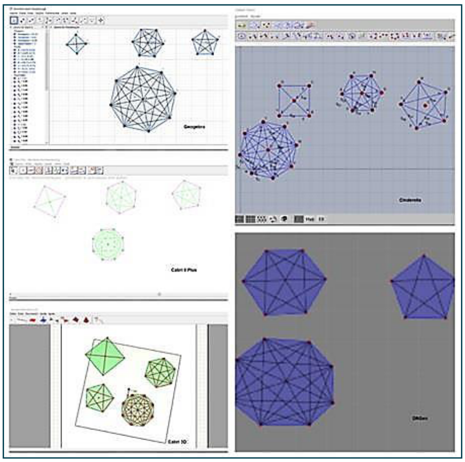
Documento	Ano escolar Ensino Médio	Saberes
PCN+ (Brasil, 2006)	1º	Geometria Plana: semelhança e congruência; representações de figuras.
	2º	Geometria Espacial: poliedros, sólidos redondos, propriedades relativas à posição e inscrição e circunscrição de sólidos. Métricas: áreas de volumes; estimativas.
	3º	Geometria Analítica: representações no plano cartesiano e equações, intersecção e posições relativas de figuras.
PCPE Pernambuco (2012)	1º	Sólidos geométricos; polígonos inscritos; reflexão, translação e rotação; teorema de Tales; semelhança de triângulos; prismas e pirâmides; razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente); lei do seno e lei do cosseno; poliedros; corpos redondos; projeções ortogonais; pontos no plano cartesiano; equações da reta; segmentos proporcionais e vetor.
	2°	Representação de figuras espaciais; reflexão, translação e rotação; teorema de Tales; lei dos Senos; lei dos cossenos; posição relativa entre retas, pontos e planos; projeções ortogonais sobre um plano; identificação de figuras poligonais por meio das coordenadas de seus vértices; reta; vetor.
	3°	Leis do seno e do cosseno; projeções ortogonais no plano; distância entre dois pontos no plano cartesiano; equação da reta; identificação de figuras poligonais por meio das coordenadas de seus vértices; associar os coeficientes de retas (paralelas, perpendiculares e oblíquas) às suas representações geométricas; associar a equação de uma circunferência a sua representação no plano cartesiano; vetor e operações com vetor.

Fonte: Brasil (2006) e Pernambuco (2012)

Após esta análise de conteúdo, fez-se necessário a criação de uma atividade contendo três níveis de problematização: nível fácil, com questões envolvendo geometria plana; nível médio, com questões envolvendo geometria espacial; e nível difícil, com questões sobre geometria analítica. Tudo isso, levando em consideração que de acordo com os documentos curriculares considerados neste estudo, há uma ênfase maior sobre conceitos de geometria plana no 1º ano, de geometria espacial no 2º ano e de geometria analítica no 3º ano do ensino médio. Dessa forma, os níveis estão organizados conforme o ano de escolaridade.

A primeira questão da atividade explora a construção de polígonos (quadrilátero, hexágono, pentágono e octógono). Logo após, devem ser traçadas todas as diagonais possíveis, a partir de um dos vértices. Os softwares que foram utilizados para a realização dessa tarefa, a partir das intervenções propostas, foram os seguintes: GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinderella e Dr. Geo, como podemos observar na figura a seguir:

Figura 1: Prints da tela do computador durante a execução da atividade

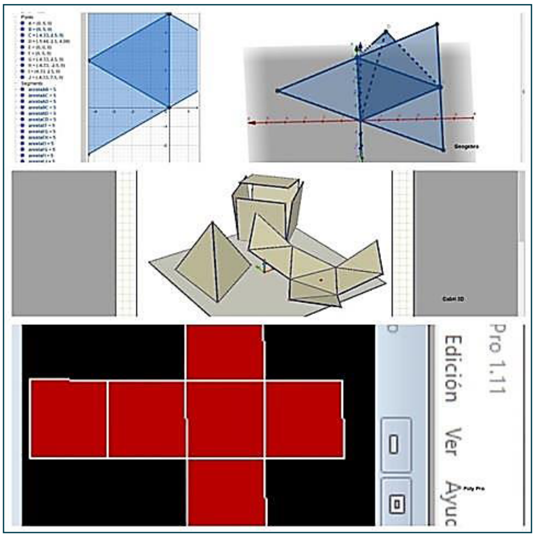


Fonte: Acervo da pesquisa

Como podemos notar, cinco dos seis softwares conseguiram desenvolver com sucesso todos os comandos referentes à atividade sobre geometria plana. Damos destaque aos softwares GeoGebra, Cabri II Plus e Cabri 3D e Cinderella pela facilidade em realizar os comandos necessários à atividade, algo que não é verificado com o Dr. Geo. Esta facilidade implicou em uma maneira melhor de trabalho junto ao software, conseguindo, dessa maneira, ótimos resultados em relação à visualização das propriedades de cada polígono.

A segunda questão foi referente ao nível médio, na qual foram explorados conceitos da geometria espacial. A tarefa consistia em criar sólidos geométricos, tais como: cubo, tetraedro e octaedro e, em seguida, realizar a sua planificação. Os programas GeoGebra, Cabri 3D e Poly Pro foram utilizados para a realização da atividade, conforme ilustrado na Figura 2, a seguir.

Figura 2: Prints da tela do computador durante a execução da atividade



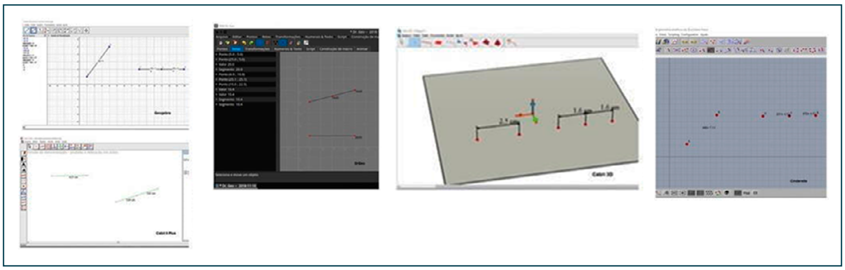
Fonte: Acervo da pesquisa

Com isso, em apenas três dos seis softwares analisados foi possível desenvolver a atividade sobre os conhecimentos de geometria espacial, algo que pode ser explicado pela falta de uma janela ou aba de visualização tridimensional, ausentes em alguns softwares. Os destaques ficam por conta do GeoGebra e do Cabri 3D, pois apresentaram mais recursos durante sua utilização. Contudo, apesar do PolyPro ser mais simples, os resultados foram considerados muito satisfatórios em relação à atividade proposta.

Por fim, no nível difícil, em que foram abordados conceitos de geometria analítica, foi testado se os softwares conseguiam calcular a distância entre dois pontos e as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Nessa atividade, cinco softwares desenvolveram bem a tarefa proposta, foram eles: GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinderella e Dr. Geo.

Mais uma vez, cinco dos seis softwares desenvolveram as atividades relacionadas à geometria analítica. Aqui, percebemos que foram os mesmos softwares que conseguiram desenvolver a atividade sobre geometria plana. Neste caso, todos eles foram muito dinâmicos no que se refere aos comandos. Porém, apesar do Cabri 3D desenvolver esta atividade, não recomendamos que o professor o utilize em suas práticas na sala de aula do ensino médio, visto que este conta apenas com um espaço 3D, e para a realização da atividade, um plano com eixos X e Y dará resultados mais satisfatórios.

Figura 3: Prints da tela do computador durante a execução da atividade



Fonte: Acervo da pesquisa

Feita esta análise de conteúdo, junto ao trabalho desenvolvido com os softwares, podemos responder ao restante das questões abordadas no questionário. Inicialmente, concluímos que todos os seis softwares investigados atendem a uma parte do currículo escolar da Educação Básica.

O próximo ponto da análise foi caracterizar os softwares analisados em abertos ou fechados. Neste trabalho, iremos chamar de abertos, os programas que o usuário pode modificar e manipular o conteúdo a maneira que desejar, e de fechados, os que o usuário não pode realizar alterações.

Nesta direção, dos softwares utilizados, notamos que cinco deles podem ser caracterizados como abertos, são eles: GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinderella e Dr. Geo. O único fechado foi o Poly Pro.

Para tanto, podemos concluir que estes softwares abertos garantem ao usuário uma maneira mais livre de se navegar. Por exemplo, o professor poderá trabalhar algum conceito de maneira livre, realizando, assim, o que desejar durante seu trabalho. De forma contrária, temos os softwares fechados, que não propiciam esta mesma maneira de uso, pois o trabalho do Poly Pro, por exemplo, é um pouco mais mecânico, fechado em apenas um assunto (manipulação de sólidos geométricos).

Em seguida, fizemos uma análise de como o erro e o acerto são tratados durante a execução de alguma atividade. Sobre isto, notamos que os softwares livres ou abertos, o erro e o acerto só podem ser percebidos pelo próprio usuário, por exemplo, quando houver um erro no desenvolvimento de uma determinada atividade, ou algo relacionado aos conceitos de um determinado assunto a ser trabalhado junto ao software.

A questão do erro nos softwares estudados só é detectada quando eles não reconhecem algum comando que o usuário utilizou durante a sua utilização. No único aplicativo fechado que testamos, o Poly Pro, não há possibilidade de erro, ou seja, as informações já estão todas inseridas, logo, o usuário irá apenas o manipular da maneira que desejar.

Em relação à representação dos conteúdos nos softwares, tais como gráficos, figuras, imagens, textos e sons, obtemos os resultados presentes no Quadro 3, a seguir:

Quadro 3: Representação dos conteúdos no software

Software	Gráficos	Figuras	Imagens	Textos	Sons
GeoGebra	X	X	X	X	–
Cabri II Plus	X	X	–	X	–
Poly Pro	–	X	–	–	–
Cinderella	X	X	–	X	–
Dr. Geo	X	X	–	-	–
Cabri 3D	X	X	–	X	–

Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com Quadro 3, percebemos que o GeoGebra é o software que melhor representa os conteúdos trabalhados, contendo quatro representações das cinco abordadas inicialmente. O único ponto negativo fica por conta do recurso de som, que não está presente no mesmo. Dessa forma, podemos concluir que este é o software que mais apresenta potencialidades no que se concerne às representações.

Logo após, temos os programas que atingiram três das cinco representações, que são o Cabri II Plus, Cabri 3D e Cinderella, os quais não tiveram nenhum tipo de representação na questão de inserção de imagens e não apresentam o recurso de som. Nesta análise, concluímos que os mencionados softwares possuem uma potencialidade média sobre esta abordagem.

Posteriormente, observamos que o software Dr. Geo comporta apenas o trabalho com dois tipos de representação: os gráficos e figuras. Além disso, verificamos que o PolyPro admite apenas um tipo, que é o trabalho com figuras. Assim, estes dois softwares são os que menos têm potencialidade de representação, perante todos os programas analisados para este quesito.

Um dos últimos tópicos abordados foi sobre a interface dos softwares, ou seja, a forma como as informações são postas na tela. Acerca disso, temos que os programas GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D e Dr. Geo contém uma interface bastante intuitiva e satisfatória. Esses softwares apresentam uma barra de menus de fácil visualização e com ícones e descrições bastante claras, propiciando ao usuário o desenvolvimento das suas atividades sem grandes dificuldades.

Entretanto, na versão analisada do Cinderella, as palavras que aparecem no menu estão um pouco confusas, com "%" ou "½" em letras que levam acento, e algumas palavras aparecem em inglês. Tal fato também ocorre no Poly Pro, pois na versão de análise, ele estava em espanhol, o que pode dificultar um pouco a experiência de utilização para os brasileiros que não têm familiaridade com o idioma.

Vale também ressaltar que o feedback (retorno imediato das ações) entre aluno/software é muito rápido, em todos os aplicativos testados. Todos os comandos foram reproduzidos com grande velocidade e precisão, o que torna a experiência bastante satisfatória.

Outro ponto que vale ser destacado é que alguns dos aplicativos analisados contam com um botão de help, o que de fato pode ajudar o usuário, caso surja alguma dúvida durante a utilização. Foram os casos do GeoGebra, Cinderella, Polly Pro, Cabri II Plus e Cabri 3D, estes dois últimos possuem até um assistente, com orientações sobre como utilizar o software e alguns trabalhos que podem ser desenvolvidos com a utilização deles.

Também, analisamos se havia a presença de um histórico com as informações que estavam sendo trabalhadas. Este ponto é de grande importância, pois é por meio dele que podemos ver todos os comandos que foram utilizados, até chegar ao que se deseja. Como resultados, vimos que os aplicativos abertos (GeoGebra, Cabri II Plus, Cabri 3D, Cinderella e Dr. Geo) possuem este tipo de recurso. Contudo, o fechado (Poly Pro) não possui esse histórico.

Vale destacar ainda que durante a análise, notamos os diferentes tipos de interação que estes softwares podem levar durante o seu trabalho. A primeira foi a aluno/máquina, pois é possível sim que um aluno, que não tenha tido qualquer tipo de contato com o software, desenvolva trabalhos a partir do seu manuseio, e realize rápidas pesquisas na internet, ou seja, interagindo apenas com a máquina.

Além disso, outra interação possível é a aluno/professor, que pode ser expandida para aluno/professor/grupo. Essa influência mútua pode ser utilizada muitas vezes nas salas de aula, e a utilização de um mediador (professor) propiciará uma interação mais completa durante seu manuseio.

Diante disso, notamos a importância que o professor tem a respeito da utilização destes programas em sala de aula. Segundo Valente (2001), o uso do computador no meio educacional dependerá da concepção de educação e do contexto em que esta tecnologia será utilizada. Dessa forma, o professor não deve saber apenas como utilizar o computador, mas também saber como integrá-lo à sua prática pedagógica, enfatizando sempre uma melhor construção de conhecimentos e criação de ambientes de aprendizagem.

Tratamento e interpretação dos resultados obtidos

Terminada a análise, listamos os pontos positivos e negativos a respeito de cada software analisado, conforme quadro a seguir:

Quadro 4: Pontos positivos e negativos referentes aos softwares analisados

Software	Pontos positivos	Pontos negativos
GeoGebra	Capacidade de ser reproduzido na maioria das plataformas (incluindo celulares); é gratuito; seu menu é interativo; capacidade de desenvolver todos os exercícios da análise; pode ser utilizado na educação básica e no ensino superior; pode ser trabalhado em todos os campos da matemática básica; conter uma janela de visualização em 3D.	Não utiliza som.

Software	Pontos positivos	Pontos negativos
Cabri II Plus	Seu menu é interativo; seu assistente permite ensinar a manipular o software, que conta com alguns exercícios a serem desenvolvidos; facilidade de construir o que o usuário deseja; pode ser utilizado na educação básica e no ensino superior.	Ser reproduzido em apenas duas plataformas; não reproduziu todos os exercícios da análise; poderia contar com o espaço em 3D; não utiliza som e imagens.
Cabri 3D	Seu menu é interativo; seu manual de instruções que conta com exercícios; facilidade de construir o que o usuário deseja; capacidade de desenvolver todos os exercícios da análise mesmo se tratando de um software 3D; pode ser utilizado na educação básica e no ensino superior.	Ser reproduzido em apenas duas plataformas; seu espaço de criação poderia ser mais bem elaborado; não utiliza sons e imagens.
Cinderella	É gratuito; é reproduzido na maioria das plataformas (exceto celulares); pode ser utilizado na educação básica e no ensino superior; conta com uma janela para trabalhos com geometria hiperbólica e esférica.	Seu menu é interativo, mas poderia ser melhorado, por exemplo, com a inclusão de uma janela de visualização 3D; não desenvolveu todos os exercícios da análise; não utiliza sons e imagens.
Dr. Geo	É um software livre; é reproduzido na maioria das plataformas (exceto celulares), seu menu é de fácil visualização; pode ser utilizado na educação básica e no ensino superior, mas de maneira elementar.	Sua interface poderia ser melhorada; não tem um instalador; não possui janela 3D; não desenvolveu todos os exercícios da análise; só utilizar gráficos e figuras em suas representações.
Poly Pro	É livre; conta com uma visualização 3D; pode ser utilizado na matemática básica; seu menu é de fácil visualização, apesar de não estar na língua portuguesa.	Só é possível reproduzi-lo em uma plataforma; só utiliza figuras em suas representações; só desenvolveu uma atividade da análise.

Fonte: Acervo da pesquisa

Sobre o GeoGebra, devemos destacar o quanto o software é completo, o que pode ajudar o professor em seu trabalho em sala de aula. Isso é possível, pois o software trabalha nas diversas frentes do conhecimento matemático, principalmente, no campo da geometria. Desse modo, sua utilização no ensino médio pode ser de grande valia para o ensino de Matemática. Dentre todos os softwares analisados, o GeoGebra é o que apresenta maior potencialidade, visto que proporciona um excelente retorno de comandos e representações, além de conseguir responder a todas as atividades propostas.

Acerca do Cabri II Plus, no geral, é um software muito bom de ser trabalhado, pois sua interação é adequada, propiciando, assim, a execução de bons trabalhos. Nesse caso, atividades envolvendo geometria plana e geometria analítica foram bem executadas, sem grandes dificuldades, apenas utilizando o menu interativo. O principal ponto negativo fica por conta da não possibilidade do trabalho com geometria espacial, que o tornaria ainda mais completo.

Em relação ao Cabri 3D, trata-se de um software muito bom, a princípio. A expectativa era de que ele trabalhasse apenas com assuntos relacionados à natureza da terceira dimensão, ou seja, funcionando como uma espécie de complemento do Cabri II Plus, desenvolvendo as atividades de geometria espacial que o anterior não desenvolveu. Mas, o Cabri 3D também desenvolveu as atividades de geometria plana e analítica, muito embora, a visualização não seja a mesma do Cabri II Plus, por se tratar de um espaço 3D. Contudo, ele também as desenvolveu, tornando-o de fato mais adequado que seu antecessor.

O software Cinderella, em geral, é muito bom, principalmente, no que se diz respeito à geometria euclidiana, o que de fato facilitará o trabalho do professor no ensino desse tópico. Ele é menos interativo que outros já abordados anteriormente, entretanto, isso não o impossibilita de ajudar nas aulas de geometria no ensino médio.

Com relação ao programa Dr. Geo, ele pode construir com a prática pedagógica do professor em sala de aula, sobretudo, em assuntos relacionados à geometria euclidiana. Porém, não é um software completo como outros, que também estão disponíveis na versão livre (como o GeoGebra), que conta com muito mais recursos e representações.

Por fim, o Poly Pro é um software simples e muito fácil de trabalhar. Mas, por se tratar de um software fechado, ou seja, que foi feito apenas para o trabalho de construção e planificação de sólidos, ele atende bem as expectativas. É um aplicativo recomendável para o trabalho no ensino médio, todavia, é muito limitado, e o professor só poderá usufruir dele em aulas de geometria espacial, sobre o assunto em que ele foi projetado.

Considerações finais

Fazendo uma retrospectiva de tudo que foi realizado nesta pesquisa, inicialmente, partimos pela escolha do tema, que se deu como, por exemplo, ao observarmos a falta de interesse por alunos do ensino médio sobre conceitos geométricos vistos em sala de aula. Tal contexto resultou no seguinte questionamento de pesquisa: Quais softwares geométricos poderiam auxiliar os professores que ensinam Matemática no ensino médio, de forma que eles pudessem utilizá-los em suas práticas pedagógicas, contribuindo com a aprendizagem dos estudantes?

Neste sentido, mapeamos seis softwares de geometria dinâmica a fim de descobrir as potencialidades e limitações de cada um deles. Para isso, utilizamos um questionário de avaliação, o qual contém questões sobre as características dos softwares, a parte pedagógica, e questões envolvendo geometria plana, espacial e analítica.

A partir deste trabalho, podemos concluir que o GeoGebra e o Cabri 3D foram os softwares que apresentaram as maiores potencialidades, pois possuem uma ótima dinâmica sobre os comandos que lhes são apresentados e representações muitos satisfatórias e intuitivas, além de terem desenvolvido todas as atividades propostas, inicialmente.

Também verificamos que o Cabri II Plus e Cinderella possuem uma média potencialidade, entretanto, ficaram um pouco atrás dos citados antes, por não realizarem o trabalho com a geometria espacial. Tal fato ocorre por conta da falta de uma janela de visualização em três dimensões, algo que seus concorrentes possuem.

O que apresentou as menores potencialidades foi o software Dr. Geo, que ofereceu certas dificuldades em relação aos comandos inseridos e por não trabalhar com a geometria espacial. Outro que se enquadra nessa categoria de programas com baixo potencial é o Poly Pro, pois apesar de ser muito intuitivo, é limitado para o ensino de representações e planificações de sólidos, ou seja, ajudará o professor apenas nesta construção de conhecimento em sala de aula.

Analisando a pesquisa de maneira geral, podemos concluir que a maior contribuição que os softwares estudados oferecem à aprendizagem matemática, é em relação às demonstrações e as visualizações que são feitas por meio deles. De fato, desenhos e demonstrações mais complexas, se tornam muito mais atrativas, dinâmicas e de fácil manipulação, algo que se compararmos ao quadro e lápis, por exemplo, sem dúvidas não teríamos a mesma resposta comparando os dois métodos.

Assim, podemos falar que esses softwares podem ser de grande ajuda ao professor na sala de aula do ensino médio, cabendo a este profissional escolher o software que se adapte melhor ao conteúdo que quer ser trabalhado. Com isso, há uma grande possibilidade das aulas de geometria se tornarem mais dinâmicas e atrativas, após a incorporação destes aplicativos no ensino geométrico.

Por fim, sugerimos que, nas próximas pesquisas, os softwares investigados sejam explorados em situações reais de sala de aula de Matemática no ensino médio. Desse modo, será possível avaliar o ensino e a aprendizagem mediados por essas tecnologias.

Com base em todas as características discutidas e a partir das análises feitas neste trabalho, buscamos contribuir na busca de conhecimentos sobre o uso de softwares no ensino de conceitos geométricos. Vale ressalvar que tudo isto não é de fato uma receita, que o professor pegará e colocará o uso desses softwares na sala de aula, sem uma reflexão a respeito do uso didático-pedagógico desses recursos. Contudo, sua utilização adequada, certamente, contribuirá com o trabalho docente em sala de aula.

CAPÍTULO 6

O uso de jogos no ensino de matemática: o que discorrem os docentes da educação básica?

Armando da Silva Pereira Neto
André Pereira da Costa

Introdução

Para Mota (2009), a educação, por meio dos jogos, tem-se tornado uma importante alternativa metodológica e pedagógica amplamente utilizada, visto que contribuem com a expansão da formação do conhecimento, incorporando propriedades lúdicas que promovem a capacidade de proatividade e criticidade, de forma prazerosa, para o estudante. Assim, o jogo torna-se uma relevante ferramenta possibilitadora de habilidades e conhecimentos necessários para o ambiente escolar e social.

De acordo com Vygotsky (1989), a brincadeira e o jogo são atividades pertinentes ao contexto da infância, no qual a criança recria a realidade utilizando sistemas simbólicos; essa é uma atividade social, com contexto cultural e social. Nessa circunstância, usam-se jogos, em ambiente escolar, como uma forma de aliar o conteúdo abordado, em sala de aula, ao interesse e atenção que os estudantes têm por essas intervenções lúdicas.

No ensino de Matemática, sobretudo, no âmbito da Geometria, visto que esse campo matemático passou por um longo período excluído do currículo escolar, o jogo torna-se um importante instrumento didático, por ser capaz de contribuir para com o saber e percepção de mundo do indivíduo. Tal percepção é construída pela vivência com os conceitos geométricos na escola, sendo fundamental para que o estudante tenha uma participação ativa no reconhecimento e leitura do meio social.

Além disso, segundo Grando (2001), os jogos podem proporcionar a interdisciplinaridade; a significação de conceitos presumivelmente incompreensíveis; a integração social entre os alunos; a conscien-cialização do trabalho em grupo; a ressignificação de conceitos já compreendidos, de uma forma motivadora para o estudante; entre outras contribuições.

Ademais, na Geometria, tais características podem ser potencializadas, visto que os seus conceitos podem ser representados por meio de vários objetos que compõem o mundo da criança. Nessa direção, os jogos podem ser utilizados no ensino de Matemática, mas tendo, como base, os objetivos pedagógicos e de aprendizagens, propostos pelo professor. Na Geometria, eles contribuem para o estímulo e desenvolvimento da criança em relação à habilidade de pensar de forma geométrica, assim, contribuindo para o seu processo de construção de conhecimento lógico matemático (KAMII, 1992).

É perceptível alguns pontos em comum relativos à função educativa dos jogos e da Matemática. Os jogos oportunizam o desenvolvimento de técnicas intelectuais e cognitivas, ampliando o pensamento lógico e o raciocínio; enquanto a Matemática, favorece aos discentes um composto de recursos que potencializam e enriquecem as suas estruturas mentais, como também, os habilitam para explorar a realidade.

Portanto, devido à atividade mental ocasionada, os jogos são um bom ponto inicial para ensinar a Geometria, servindo como alicerce para formação do pensamento geométrico, posteriormente. Além disso, é um recurso que possibilita e promove a apreciação do aluno para com o campo geométrico.

De acordo com Borin (1996), mais uma justificativa para inserir jogos nas aulas de Matemática, em especial, acerca da Geometria, seria a oportunidade de amenizar os bloqueios e o receio pela suposta incapacidade de compreender os conceitos geométricos – problema relatado por uma considerável parcela dos estudantes.

Porém, nas circunstâncias de jogo, nota-se que os estudantes falam uma linguagem matemática e apresentam um desempenho súpero e atitudes construtivas frente ao seu processo de aprendizagem; visto que se tem uma ampla motivação a qual, geralmente, resulta em uma atitude ativa do estudante.

Nesse contexto, fomos incentivados a produzir o seguinte problema de pesquisa: como os professores de Matemática da educação básica compreendem o uso de jogos como ferramenta didática em suas práticas pedagógicas?

Para responder esse questionamento, nos baseamos nas contribuições propostas por autores como Huizinga (1951), Christie (1991 *apud* KISHIMOTO, 1997), Borin (1996), Kishimoto (1997), Grando (2001), Nogueira (2005), Muniz (2010), Silva e Teles (2018), pois apresentam importantes construtos teóricos acerca do uso pedagógico de jogos nas aulas de Matemática.

Portanto, temos como objetivo geral analisar a compreensão de professores, que ensinam Matemática na educação básica, acerca do uso de jogos matemáticos nas práticas pedagógicas.

Quadro teórico

Huizinga (1951) aponta que os jogos apresentam diversas características, tais como: o prazer, o caráter "não-sério" do jogo, a liberdade, a separação dos fenômenos do cotidiano, as regras, o caráter fictício e sua limitação no tempo e no espaço.

O autor destaca, ainda, que o caráter não-sério está vinculado à diversão e ao ato lúdico do jogo, contrapondo-se a atividades sérias. Ao passo que a característica de liberdade, pertinente ao jogo, refere-se à conduta voluntária do ser humano em jogar, pois se for imposto, deixa de ser jogo. Além disso, no momento do jogo, é tomado certa distância da realidade, contribuindo para a construção da representação mental da realidade. Destaca-se também a existência de regras que ordenam e conduzem o jogo para que aconteça em determinado contexto espaço-temporal.

Em um contexto mais recente, Christie (1991a *apud* KISHIMOTO, 1997) desenvolve uma rediscussão a respeito das características do jogo. Para a autora, considera-se jogo a partir dos seguintes critérios: a não-literalidade, pois o jogo apresenta um aspecto no qual o sentido não-literal se sobrepõe à realidade; efeito positivo, visto que o jogo é normalmente caracterizado pelo prazer e pela recreação dos integrantes; flexibilidade, pois as crianças estarão mais propensas às novas ideias e novos comportamentos durante essas atividades, promovendo a criatividade, exploração, alternativas de ação etc.; prioridade do processo de brincar; livre escolha, uma vez que será exclusivamente jogo se for uma atividade voluntária, senão enquadra-se em trabalho ou ensino; controle interno, pois, nessa atividade, os próprios jogadores regulam o progresso dos acontecimentos, e "quando o professor utiliza um jogo educativo em sala de aula, de modo coercitivo, não oportuniza aos alunos liberdade e controle interno. Predomina, nesse caso, o ensino, a direção do professor" (KISHIMOTO, 1997, p. 26).

Com relação à característica de prioridade, do processo de brincar, pertinente ao jogo infantil, Christie (1991a *apud* KISHIMOTO, 1997, p. 26) afirma que:

> enquanto a criança brinca, sua atenção está concentrada na atividade em si e não em seus resultados ou efeitos. O jogo infantil só pode receber esta designação quando o objetivo da criança é brincar. O jogo educativo, utilizado em sala de aula, muitas vezes, desvirtua esse conceito ao dar prioridade ao produto, à aprendizagem de noções e habilidades.

Segundo Christie (1991b *apud* KISHIMOTO, 1997), os indicadores mais úteis e, relativamente, confiáveis, para determinar se é jogo infantil são: a não-literalidade, o efeito positivo, a flexibilidade e a finalidade em si. Nessa direção,

> para auxiliar pesquisadores na tarefa de discriminar se os professores concebem atividades escolares como jogo ou trabalho, os dois últimos são os mais indicados. Se a atividade não for de livre escolha e seu desenvolvimento não depender da própria criança, não se terá jogo, mas trabalho (KISHIMOTO, 1997, p. 26).

No âmbito da Geometria, os jogos tornam-se importantes por trazerem objetos de estudo, desse campo matemático, de maneira lúdica e aprazível; assim, despertando o interesse dos estudantes. Como também, viabiliza a capacidade refletir sobre os conceitos geométricos envolvidos, criar hipóteses, testá-las e avaliá-las de forma autônoma ou em grupo; nessa ótica, destaca-se:

> [...] o trabalho pedagógico com jogos envolve o raciocínio dedutivo para a jogada, para a argumentação e troca de informações, além de permitir a comprovação da eficiência de estratégias pensadas. Resgatam o lúdico da sala de aula e contribuem para a diminuição de bloqueios apresentados por crianças e adolescentes que temem a Matemática e se sentem incapacitados para aprendê-la, pois passam a ter experiência que aprender é uma atividade interessante e desafiadora (NOGUEIRA, 2005, p. 53).

Acerca do uso de jogos no ensino de Geometria, Silva e Teles (2018) afirmam que nas práticas pedagógicas dos professores, diversos conhecimentos são mobilizados. Entre esses conhecimentos, as autoras destacam os relativos ao conteúdo e ao ensino, tais como: o levantamento dos conhecimentos geométricos prévios dos alunos, sobre os conceitos geométricos presentes no jogo; apresentação do jogo, explorando alguns conceitos em Geometria; distribuição das peças do jogo e solicitação da classificação pelos estudantes.

Ao utilizar jogos no ensino de Geometria, Silva (2017, p. 57) observa que:

> é importante ressaltar que traçar estratégia metodológica para o uso dos jogos nas suas diversas facetas é pertinente, uma vez que o professor poderá direcionar suas aplicações, reconhecendo os atributos do jogo e considerando as peculiaridades dos mesmos. Incorporar o jogo à sua prática pedagógica passa a ser uma alternativa interessante para estabelecer possibilidades de aprendizado nos mais variados aspectos, além de contribuir significativamente para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Desse modo, fica evidenciada a importância de o professor realizar um planejamento para utilizar um jogo referente ao campo geométrico. A partir de um objetivo educacional proposto, com organização, é possível a obtenção de resultados satisfatórios referentes ao processo de aprendizagem em Geometria.

De acordo com Rita (2013), ao utilizar jogos, nas aulas de Matemática, os jogadores reveem os erros de forma natural, o que os permite controlar, retificar e progredir na partida por meio do planejamento de jogadas mais eficazes. Além disso, a partir da utilização de conhecimentos produzidos previamente, é possível propiciar a construção de novas ideias e novos conhecimentos. Nessa perspectiva, Muniz (2010, p. 45) ressalta:

> as crianças jogando, mesmo quando em atividades solitárias, desenvolvem determinada atividade Matemática num processo de criação ou de resolução de problemas que as lançam a colocar em cena suas capacidades cognitivas, sejam conhecimentos já adquiridos, sejam suas capacidades de criar e de gerenciar novas estratégias de pensamento. Nesse processo, a criança pode utilizar conceitos e procedimentos que não são tratados no contexto escolar.

As aulas tradicionais de Matemática tendem a não estabelecer uma relação entre a teoria dos assuntos abordados com as situações do cotidiano dos alunos, dificultando a significação do objeto de estudo. Tal cenário resulta em uma visão deturpada de que a Matemática é apenas seguir regras e aplicar algoritmos e, portanto, causando bloqueio aos estudantes em aprendê-la. "Nesse caso, os jogos matemáticos podem ser empregados para despertar o aluno para a importância da Matemática em sua vida e, como estratégia e recurso, para resgatar de forma lúdica, aspectos do pensamento matemático" (RITA, 2013, p. 13). Outrossim, Borin (1996) salienta que jogos, nas aulas, permitem diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados de assimilar o conteúdo estudado; como também, a autora enfatiza que dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, nota-se que estes alunos apresentam um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem, ao mesmo tempo que falam Matemática.

Diante do exposto, neste trabalho, defendemos que os jogos constituem um importante recurso didático para o trabalho do professor, auxiliando na mediação das aprendizagens dos estudantes. Todavia, para ter êxito em sala de aula, é necessário um planejamento adequado, com objetivos educacionais claros, além de conhecimentos matemáticos e pedagógicos acerca do uso dos jogos.

Procedimentos metodológicos

A pesquisa apresenta natureza qualitativa, uma vez que nos possibilita explorar os dados obtidos de maneira global. Para Resende (2016, p. 51):

> Este método enfatiza o interpretativismo, a importância de estudar o todo, focando-se na experiência subjetiva dos indivíduos, estudando como as pessoas percebem, criam e interpretam seu mundo.

Assim, foi realizada uma entrevista, a partir de um questionário, com cinco professores que lecionam Matemática, em uma escola da rede pública de ensino do município de Correntes, no agreste meridional pernambucano. As entrevistas são meios profícuos no que tange à pesquisa qualitativa, pois permitem “aceder à forma como os participantes observam determinado tipo de fenômeno, o que sentem e pensam sobre ele” (Hastie e Hay, 2012, p. 79).

No período em que foi realizada a coleta de dados, os docentes eram responsáveis por ministrar aulas em turmas do 6° (sexto) ao 9° (nono) ano do ensino fundamental, na referida escola. Entre os cinco professores entrevistados, quatro deles têm formação na área em destaque, ou seja, possuem graduação em Licenciatura em Matemática; O outro professor é formado no curso de Licenciatura em História, todavia, executa o trabalho como professor de Matemática.

O questionário foi composto por cinco questões abertas, as quais versam sobre aspectos relativos à utilização de jogos educativos com fins pedagógicos, especialmente, jogos matemáticos. Logo, esse instrumento de coleta possibilita-nos examinar as concepções apresentadas pelos docentes, indicando um panorama relativo ao proveito deste recurso didático no ensino básico.

A entrevista tinha por intenção conhecer aspectos, de cada professor, relativos ao referido tema, tais como: o que o docente considera como característica de um jogo matemático; em qual etapa do processo de ensino, ele considera ser mais adequado à implementação de jogos; quais as dificuldades em introduzi-los; se estes recursos didáticos já foram implantados por eles; por fim, foi questionado como estes docentes conduziriam a utilização de jogos em sala de aula. Os itens que compõem o questionário podem ser observados no Quadro 1.

Quadro 1: Questionário aplicado aos docentes entrevistados para levantamento de informações sobre o uso de jogos em sala de aula

1 Quais as características de um jogo matemático?
2 Em qual momento/etapa do processo de ensino os jogos matemáticos seriam mais efetivos?
3 Quais dificuldades podem ser encontrados ao introduzir jogos em sala de aula?
4 Você já utilizou jogos em sala de aula? Se sim, quais? Se não, por quê?
5 Como você conduziria a utilização de um jogo em sala de aula? (Desde a escolha até a sua aplicação)

Fonte: Acervo da pesquisa

Diante das condições estabelecidas, a presente pesquisa visa apresentar uma análise, de caráter qualitativo e diagnóstico, com a intenção de investigar e elencar diversas características dos professores de Matemática quanto ao uso de jogos matemáticos, em sala de aula.

Mais especificamente, nos interessamos em verificar se esses profissionais consideram os jogos como ferramenta didática em suas práticas pedagógicas. Para isso, na análise dos dados, consideramos os construtos teóricos, sobre a utilização de jogos no ensino de Matemática, apresentados pelos seguintes autores: Huizinga (1951), Christie (1991 *apud* KISHIMOTO, 1997), Borin (1996), Kishimoto (1997), Grando (2001), Nogueira (2005), Muniz (2010), Silva e Teles (2018).

Resultados e discussão

A primeira pergunta, indagada aos docentes, foi relativa ao que eles consideram como características pertinentes a um jogo matemático. As respostas de cada professor podem ser analisadas no Quadro 2.

Quadro 2: Respostas, dos professores entrevistados, referentes à primeira pergunta

Pergunta 1: Quais as características de um jogo matemático?	
Professor	Resposta
P1	Uma das características dos jogos matemáticos é a motivação para a aprendizagem, desenvolvendo no educando a autoconfiança, a organização, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo, estimulando a socialização e a interação entre os educandos.
P2	É unir o lúdico, o concreto ao abstrato, ajudar a despertar o interesse dos alunos pela disciplina.
P3	Criar condições adequadas para uma aprendizagem com significado. Desenvolve o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Aumenta a motivação para a aprendizagem, a concentração etc.
P4	Acredito que corresponda a aspectos numerais que possam vir a facilitar a perspectiva a respeito das quatro operações, noções básicas da Matemática e outras temáticas que se trabalhadas de maneira tradicional nem sempre é capaz de chegar aos alunos.
P5	Possuir primeiro a ideia do ato de brincar, segundo o envolvimento de raciocínio lógico ou a proposta do currículo em estudo.

Fonte: Acervo da pesquisa

Dos cinco entrevistados, três docentes (P1, P2 e P3) consideram como uma das características inerentes ao jogo matemático, a promoção de motivação aos estudantes; a qual permite que os estudantes despertem o interesse pelo processo de aquisição de conhecimentos dos conteúdos relativos à disciplina.

Ademais, P2, assim como P4, ainda evidenciam que os jogos conseguem tratar dos conteúdos matemáticos de maneira lúdica. Portanto, percebe-se que há associação entre o que defende Nogueira (2005) e os profissionais supracitados, em razão do lúdico na sala de aula. Tal fato contribui para amenizar as barreiras que alguns estudantes têm para com a Matemática, obtendo a experiência de que aprendê-la é uma atividade instigante, ou seja, corroborando com promoção de motivação aos educandos, quanto à aprendizagem matemática.

Nessa direção, Borin (1996) ressalta, assim como Nogueira (2005) e conforme sinalizado nas falas dos participantes entrevistados, que os jogos matemáticos possibilitam a diminuição dos bloqueios apresentados por muitos estudantes que se sentem incapacitados de aprender os conteúdos matemáticos. Como pontuado pelo autor, uma atitude passiva é, geralmente, pouco exequível dentro da situação de jogo, e quanto ao envolvimento do estudante, é notório uma grande motivação. Todo esse contexto de estímulo ao educando, colabora para que os alunos disponham de atitudes mais positivas frente à sua aprendizagem.

O quarto docente (P4) cita, além da ludicidade, que tais jogos propiciam trabalhar a Matemática de forma inovadora, afastando-se do tradicionalismo, já que as aulas tradicionais tendem a não estabelecer uma relação entre a teoria dos assuntos abordados com as situações do cotidiano dos alunos. Esse aspecto dificulta a significação, resultando em uma visão deturpada de que a Matemática é apenas seguir regras e aplicar algoritmos e, portanto, pode motivar bloqueios aos estudantes em aprendê-la.

O participante P4 destaca ainda que os jogos matemáticos são característicos por apresentarem conceitos matemáticos. Fundamentalmente, o docente diz estar presentes conceitos aritméticos básicos. Logo, percebemos que há uma relação entre essa concepção e os aspectos defendidos pelo quinto docente (P5); ambos destacam que nos jogos há a presença de conteúdo do currículo em estudo.

Os profissionais P1, P3 e P5 citaram a propiciação de raciocínio lógico-dedutivo como características pertencentes aos jogos matemáticos. Além disso, P1 e P3 mencionam que os jogos matemáticos proporcionam a capacidade de atenção e concentração dos discentes.

Outro ponto apontado pelo profissional P3, é que os jogos promovem uma maior criatividade e capacidade de resolver problemas aos estudantes, logo, viabiliza melhores condições de aprendizagem com significação. Tais alegações convergem ao que foi justificado por

Muniz (2010), uma vez que os jogos desenvolvem determinada atividade matemática num processo de criação ou de resolução de problemas. Tal fato possibilita alavancar as capacidades cognitivas dos discentes, sejam por meio de conhecimentos já produzidos ou pela capacidade de criar e de gerenciar novas estratégias de pensamento.

Por fim, P1 ainda menciona que os jogos matemáticos apresentam como uma de suas características, promover a organização e autoconfiança dos estudantes, além da socialização que ocorre no momento da execução da atividade. Enquanto que P3, assim como Huizinga (1951), apontam que o brincar, logo, o caráter "não-sério" e o prazer são características dos jogos matemáticos.

Na segunda pergunta, o grupo de professores foi questionado sobre qual o momento ideal para a utilização dos jogos matemáticos de maneira efetiva. Com isso, podemos verificar as respostas de cada docente, no Quadro 3.

Quadro 3: Respostas, dos professores entrevistados, referentes à segunda pergunta

Pergunta 2: Em qual momento/etapa do processo de ensino os jogos matemáticos seriam mais efetivos?	
Professor	Resposta
P1	Na resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for difícil e abstrato.
P2	Na apresentação do conteúdo como introdução, relacionando adequadamente as situações-problema.
P3	Para sanar lacunas que se produzem diariamente, introduzindo conteúdos que os estudantes apresentaram mais dificuldades de aprendizagem.
P4	Seria importante se em cada assunto que compõe a grade curricular tivesse um jogo que mudasse o olhar que o aluno possui a respeito da disciplina, fazendo com que a Matemática seja vista como algo divertido, que faz parte do cotidiano e não apenas algo necessário para a obtenção da nota.
P5	Após a introdução do conteúdo, no entanto há conteúdos que podem ser trabalhados com jogos matemáticos, mesmo quando citados inicialmente.

Fonte: Acervo da pesquisa

Conforme exposto no Quadro 3, os profissionais P1, P3 e P5 consideram que o momento ideal para uso do jogo, em sala de aula, é após introduzir/explanar sobre o conteúdo, ou seja, utilizar os jogos matemáticos de forma a consolidar o que foi visto, anteriormente, com relação ao assunto. No entanto, mesmo apresentando semelhanças, as respostas possuem especificidades.

O primeiro docente (P1) considera que a inserção de jogos é mais efetiva no momento em que os alunos estejam resolvendo problemas, ou seja, quando os estudantes tenham conhecimento do que foi abordado, inicialmente, em sala; assim, os jogos devem ser utilizados para a prática e treinamento desse conhecimento.

O pensamento defendido por P2 assemelha-se ao do P1, pois consideram que os jogos devem ser utilizados como forma de "treinamento" dos conteúdos já trabalhados; sendo os conteúdos que se estabeleçam com mais obstáculos aos estudantes. Desta forma, os jogos têm como objetivo aprimorar a compreensão e minimizar as dificuldades relativas a esses assuntos. Salienta-se que P5 considera que existem alguns assuntos que podem ser introduzidos a partir dos jogos matemáticos.

O professor P4 não deixa claro em que momento devem ser aplicados os jogos matemáticos. Ele apenas esclarece que seria importante aplicá-los em todos os conteúdos que compõem a grade curricular, para que a Matemática possa ser vista como algo divertido, pertinente ao cotidiano de todos.

Por fim, o professor P2 menciona que os jogos são mais efetivos na introdução de um conteúdo, pois trazem situações-problemas que podem contribuir para esse processo introdutório.

Na terceira pergunta, a indagação foi relativa às dificuldades que podem ser encontradas ao promover a utilização de jogos como recurso didático-metodológico em sala de aula. O Quadro 4 exibe a alegação de cada um.

Quadro 4: Respostas, dos professores entrevistados, referentes à terceira pergunta

Pergunta 3: Quais dificuldades podem ser encontradas ao introduzir jogos em sala de aula?	
Professor	Resposta
P1	Fazer com que o educando se interesse pelo jogo e a falta de concentração dos mesmos.
P2	A falta de costume dos alunos com esse tipo de abordagem na introdução dos conteúdos matemáticos.
P3	Despertar o interesse dos alunos desde a confecção do jogo até a aplicação.
P4	Tumulto. A palavra "jogos" atrai os estudantes que passam, na maioria das vezes, a enxergar não a parte educativa onde o assunto pode ser encaixado e sim a parte divertida. Confecção e recursos necessários, ou seja, uma espécie de suporte que ajude os professores na criação e desenvolvimento.
P5	Deve-se possuir o cuidado de que o jogo não tenha muito a característica do brincar, sem a proposta do conteúdo envolvido. Outro cuidado seria quanto a avaliação do aluno através da utilização de jogos matemáticos.

Fonte: Acervo da pesquisa

Dois (P1 e P3), dos cinco entrevistados, afirmam que despertar o interesse dos alunos em participar dos jogos é difícil e custoso. Além disso, o primeiro docente (P1) cita a falta de concentração dos estudantes ao inserir jogos em sala. Portanto, percebemos que, nas declarações dos docentes, há uma conjuntura preocupante, visto que o objetivo do professor ao incorporar jogos em sala de aula, na maioria dos casos, é promover o conteúdo de forma lúdica, a fim de despertar a atenção dos educandos. No entanto, observa-se que nem tais propostas estão tornando-se suficientes para atraí-los.

Os professores P4 e P5 apresentam concepções semelhantes no que diz respeito ao comportamento dos estudantes diante de uma atividade lúdica; ambos consideram que o foco predomina na diversão e recreação, desprezando o conteúdo matemático trabalhado. Desta forma, isso vem a ser um fator dificultador na utilização de jogos na sala de aula.

Além dos obstáculos apresentados no parágrafo anterior, notamos no discurso dos professores (P4 e P5) mais algumas outras condições complicadoras. Ressalta-se que o quarto professor (P4) alega que os recursos materiais e a confecção do jogo tornam-se outro elemento complicador. Tal fato ocorre, uma vez que os professores não dispõem de qualquer tipo de suporte para criação e construção desses jogos. Enquanto que o quinto docente (P5) menciona a dificuldade em avaliar os discentes no decorrer do jogo.

Por fim, mas não menos importante, o professor P2 exprime a ideia de que os estudantes não estão habituados a essa metodologia, ao introduzir os conteúdos matemáticos, o que dificulta a dinâmica da atividade em sala de aula.

Huizinga (1951) aponta que o caráter "não-sério", ou seja, a diversão, tem que estar presente nos jogos. Além disso, Kishimoto (1997) cita que o jogo educativo desvirtua do conceito da diversão por dar prioridade apenas à aprendizagem de noções e habilidades. Portanto, o pensamento dos professores P4 e P5 se contrapõe ao que os referidos autores defendem.

Na quarta pergunta, foi indagado se os entrevistados já utilizaram jogos como ferramenta didática e, seguidamente, a justificativa da sua resposta; conforme verifica-se a pergunta e a argumentação de cada professor, no Quadro 5.

Quadro 5: Respostas, dos professores entrevistados, referentes à quarta pergunta

Pergunta 4: Você já utilizou jogos em sala de aula? Se sim, quais? Se não, por quê?	
Professor	Resposta
P1	Sim, um Tangram, não convencional.
P2	Sim. O Tangram.
P3	Sim. Tangram, Dominó das operações, desafios, jogo de tabuleiro, gincana, ábaco, trilha etc.

P4	Não. Por não ser da área de formação e principalmente por ser iniciante, tendo que ser adaptada a área à metodologia e didática etc.
P5	Sim, jogos com números primos, jogo do labirinto com números decimais e números inteiros.

Fonte: Acervo da pesquisa

Com exceção do quarto entrevistado analisado (P4), que afirma que nunca utilizou jogos, em sala de aula, por não desfrutar de ampla experiência na docência, visto que graduou-se recentemente, e por não ser da área de formação (possui licenciatura em História), todos os outros relataram ter utilizado jogos como ferramenta de ensino.

Dos professores que relataram ter utilizado jogos em sala, três deles (P1, P2, P3) citaram o Tangram. Apesar de haver controvérsias quanto ao Tangram ser jogo ou não, ao verificar as características de jogo defendidas por Huizinga (1951) e Christie (1991a *apud* KISHIMOTO, 1997), este recurso respeita todos os critérios mencionados. Portanto, o Tangram se faz de uma ferramenta relevante, no campo dos jogos matemáticos, por trabalhar conceitos geométricos de maneira lúdica, estimulando a participação e despertando o interesse dos educandos. Além do Tangram, o terceiro professor (P3) cita dominó das operações, desafios, jogo de tabuleiro, jogo de trilha, gincana, ábaco, etc.

Outrossim, o professor P5 menciona a utilização de jogos que enfatizam no conjunto numéricos, tais como, jogos com números primos, jogo do labirinto com números decimais e números inteiros.

Na quinta e última pergunta, questionamos como os docentes coordenariam a aplicação de um jogo matemático. As respostas de cada um dos professores estão dispostas no Quadro 6.

Quadro 6: Respostas, dos professores entrevistados, referentes à quinta pergunta

Pergunta 5: Como você conduziria a utilização de um jogo em sala de aula? (Desde a escolha até a sua aplicação).	
Professor	Resposta
P1	Planejar o jogo, orientação sobre as regras, formatação dos grupos e interação dos grupos para a construção do conhecimento.
P2	Apresentaria o jogo e suas relações com os conteúdos a serem vivenciados, confeccionaria o jogo em sala com a participação efetiva dos alunos, e na sequência dividiria os alunos da sala em grupo de forma conveniente para jogar. No momento em que eles tivessem jogando eu iria observar se alcançou o objetivo desejado.
P3	Escolher um jogo que facilite a aprendizagem dos conteúdos que os alunos sentiram mais dificuldade. Na aplicação, em grupos, escolher alguns alunos que assimilaram com mais facilidade para monitores.
P4	A utilização do jogo seria proposta através do objetivo de uma aula com maior interação, onde o conduziria a relação entre diversão e aprendizagem, sempre valorizando o que pode ser levado como conhecimento.
P5	O jogo deve possuir primeiramente utilidade quanto a proposta do conteúdo, deve-se analisar também o nível do brincar para que não seja maior quanto a proposta que se queira verificar, e por último limitar o tempo e o suporte ao aluno quanto a compreensão e a busca de resultados.

Fonte: Acervo da pesquisa

Todos os docentes apresentam pontos convergentes entre si, porém, com as particularidades das respostas inerentes a cada um.

O professor P1 apresenta, respectivamente, que executaria o planejamento do jogo, explicação das regras, formação de grupos e socialização dos estudantes, a fim de construir o conhecimento do conteúdo proposto. Já o terceiro docente (P3) relata que planejaria/organizaria o jogo de forma a facilitar aprendizagem dos conteúdos que representem maiores dificuldades aos estudantes. Tal fala converge com a ideia do P1, em fazer um planejamento inicial do que executará em sala. Além disso, P3 concorre ao que menciona P1, no que tange a formação de grupos. Porém, este terceiro docente ressalta que será eleito um monitor por grupo, posição essa que será ocupada por estudantes que compreenderam o conteúdo de forma mais satisfatória, assim, poderão prestar qualquer assistência necessária.

O profissional P5 destaca que o intuito principal é que o jogo possua utilidade quanto à proposta do conteúdo matemático tratado; além de reforçar o que foi dito na terceira pergunta, que o objetivo está na aprendizagem, mas não no brincar. Por fim, este docente ressalta a importância de limitar o tempo e prestar suporte aos alunos no que refere à compreensão do conteúdo e obtenção dos objetivos propostos.

O segundo professor (P2), descreve que faria a apresentação do jogo; também pronunciaria aos alunos o conteúdo matemático intrínseco ao jogo. Em seguida, ele relata que a confecção do jogo seria feita junto com os alunos. No entanto, é válido ressaltar que esta atitude consumiria grande parte do período da aula, sem qualquer atividade educativa, desviando o propósito do ensino.

Assim como P1 e P3, o profissional P2 expõe que constituiria grupos para socialização do jogo proposto. Por fim, este docente menciona a necessidade de avaliação quanto aos objetivos desejados por meio da observação ao longo de todo o processo.

O docente P4 salienta que a escolha e a utilização do jogo se dariam pelo objetivo em promover a interação entre os estudantes, tal que propiciasse diversão e aprendizagem, valorizando o conhecimento alcançado na atividade. Logo, é evidenciado a correspondência de ideias entre P4 e Christie (1991a *apud* KISHIMOTO, 1997).

Verifica-se, no discurso do quarto docente, o efeito positivo do jogo, caracterizado, essencialmente, pelo prazer; pela flexibilidade, posto que tais atitudes são mais propensas às novas ideias que promovem a criatividade, e estas serão valorizadas pelo docente; prioridade do processo de brincar, pois o objetivo principal é a diversão, e o conhecimento será algo atrelado ao desenvolver da atividade pelos educandos.

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo geral analisar a compreensão de professores que ensinam Matemática, na Educação Básica, acerca do uso de jogos matemáticos nas práticas pedagógicas. Para isso, recorremos aos pressupostos teóricos indicados por Huizinga (1951), Christie (1991 *apud* KISHIMOTO, 1997), Borin (1996), Kishimoto (1997), Grando (2001), Nogueira (2005), Muniz (2010), Silva e Teles (2018).

Em razão dos dados coletados, por meio do questionário utilizado para realização da entrevista, verificamos que os docentes consideram que os jogos matemáticos contribuem com a prática pedagógica. Essa contribuição se dá por meio da incorporação de propriedades lúdicas, para o desenvolvimento dos discentes quanto ao raciocínio lógico-dedutivo, a capacidade de resolver problemas, a organização, a concentração, etc. Logo, observa-se uma convergência com os estudos de Nogueira (2005), Borin (1996) e Muniz (2010).

Também, constatamos que a maioria dos docentes considera que o momento ideal para utilização dos jogos, em sala de aula como instrumento didático, seria após ter realizado a explanação do conteúdo, ou seja, utilizar os jogos matemáticos de forma a consolidar o que foi visto anteriormente em relação ao assunto. No entanto, alguns dos docentes consideram a possibilidade de introduzir assuntos a partir dos jogos matemáticos.

O objetivo do professor, ao inserir jogos em sala de aula, majoritariamente, é abordar o conteúdo matemático por meio da ludicidade, objetivando despertar a motivação dos alunos. No entanto, observamos que nem tais propostas estão sendo suficientes para atrair todos os educandos, já que alguns docentes relataram que uma das dificuldades em inserir tais atividades, em sua rotina didática, é despertar o interesse dos discentes. Tal fato indica uma conjuntura bastante preocupante.

Além disso, notamos que alguns professores se contrapõem ao que Huizinga (1951) e Kishimoto (1997) defendem em seus estudos, principalmente, ao marginalizar o brincar, o prazer e o caráter "não-sério" nos jogos.

A maioria dos docentes declara já terem utilizados jogos matemáticos como instrumento didático. O único professor que declarou não ter usado jogo, é licenciado em História e leciona Matemática há pouco tempo.

Contudo, a baixa presença de citações sobre a aplicação de jogos no ensino de Geometria, nas falas dos professores, sinaliza que esses profissionais utilizam esse recurso com pouca frequência, ou então, fazem um uso pedagógico inadequado. Do total de cinco professores investigados, três deles mencionaram o Tangram como jogo usado em suas práticas de ensino. Todavia, pelas falas, este é o único recurso lúdico presente nas aulas de Geometria desses profissionais.

Tal fato contribui com a omissão geométrica, conforme indicada por Lorenzato (1995). Isso significa que, provavelmente, a Geometria não está presente nas práticas pedagógicas desses docentes, ou então, são destinadas poucas aulas para os conceitos geométricos. Nesse contexto, tais fatos podem comprometer tanto a aprendizagem dos estudantes, como o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Em geral, todos os docentes apresentam pontos convergentes entre si, quanto à forma de conduzir a utilização de um jogo nas aulas de Matemática, com exceção ao ensino de Geometria. Assim, cada um dos entrevistados apresentou particularidades, de acordo com sua característica e metodologia de ensino.

Portanto, comumente, há expectativas promissoras quanto à melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, visto que as concepções dos atuais docentes estão em crescente processo de transição para os campos idealizados pela comunidade da Educação Matemática.

Com isso, esperamos que a educação seja formulada e conceituada, de modo a tornar os professores cada vez mais proativos buscando metodologias de ensino que propiciem a melhora no desempenho dos estudantes, além de instigá-los na busca do conhecimento matemático.

Referências

ANDRADE, D.; NOGUEIRA, C. M. I. *Educação Matemática e as operações fundamentais*. Maringá: EDUEM, 2005.

ANDRÉ, M. E. D. A. *Etnografia da prática escolar*. Campinas: Papirus, 2011.

ARAUJO, A. J. *O ensino da álgebra no Brasil e na França:* estudo sobre o ensino de equações do 1° grau à luz da Teoria Antropológica do Didático. 2009. 290f. Tese (Doutorado) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

BALTAR, P. M. *Ensegnement et aporprentissage de la notion d'aire de surface planes:* une étude de I'acquisition des relations entre les loungueurs et les aires au collège. 1996. 241f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier. Grenoble.

BARBOSA, E. J. B. *Equação do primeiro grau em livros didáticos sob a ótica da teoria antropológica do didático*. 2011. 142f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70 Persona, 2009.

BARROS, A. L. de S. Identificando tipos e subtipos de tarefas em torno do conceito de área em uma coleção de matemática do ensino médio. In: São Paulo – SP: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016. In: 12° ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. *Anais do 12° ENEM*... São Paulo: SBEM, 2016, p.1-12.

BARROS, A. L. S. *Ecologia de saberes matemáticos no ensino técnico integrado ao ensino médio*. 2018. 283f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

BELLEMAIN, P. M. B. *Análise comparativa da relação institucional às grandezas geométricas no ensino fundamental, no Brasil e na França.* Relatório das atividades desenvolvidas no âmbito do projeto de estágio pós-doutoral no exterior financiado pelo CNPq. Recife, 2013.

BELLEMAIN, P. M. B.; BRONNER, A.; LARGUIER, M. Análise comparativa da relação institucional à grandeza área no 6° ano no Brasil e na França. In: TELES, R. A. M.; BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.). *Investigações em Didática da Matemática.* Recife: Editora da UFPE, 2017, p. 10-63.

BELLEMAIN, P. M. B; LIMA, P.F. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental.* Natal: SBHMat, 2002.

BESSA DE MENEZES, M. *Praxeologia do professor e do aluno:* uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

BIANCHINI, E. *Matemática Bianchini:* 7° ano. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas:* uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: CAEM/IME-USP, 1996.

BORBA, M. C. Coletivos Seres-Humanos-com-Midias e a Produção de Matemática. In: 1° SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2001, Curitiba. *Anais do 1° Simpósio...* Curitiba: UFPR, 2001, 135-146.

BORBA, M. C. Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM,* Berlin, v. 44, p. 802-814, abr./maio. 2012.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:* sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BOTH, M. *Relações entre grandezas geométricas:* um estudo de caso baseado na aprendizagem significativa e análise de erros. 2015. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Centro de Ciências Naturais e Exatas. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN+ Ensino Médio): Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Curricular Comum.* Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. *Relatório Brasil no PISA 2018.* Brasília: INEP, 2018.

BRASIL. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. *Sistema de Avaliação da Educação Básica:* Matemática. Brasília: INEP, 2017.

CÂMARA DOS SANTOS, M. O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In: BORBA, R.;

GUIMARÃES, G. (org.). *A Pesquisa em Educação Matemática:* repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 177-211.

CÂMARA DOS SANTOS, M.; BESSA DE MENEZES, M. A Teoria Antropológica do Didático: uma releitura sobre a teoria. *Perspectivas da Educação Matemática,* Campo Grande, v. 8, n.18, p. 648-670, jan./dez. 2015.

CARVALHO, D. G. *Uma análise de abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do projovem urbano sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.* 2012. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

CARVALHO, R. L. *Contribuições do campo conceitual multiplicativo para a formação inicial de professores de matemática com suporte das tecnologias digitais.* 2017. 182f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. Fortaleza.

CAVALCANTI, V. de S. *Composição de paródias:* um recurso didático para compreensão sobre conceitos de circunferência. 2011. 165f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportées par une approche anthropologique. *Recherches em didactique des mathématiques:* Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, v. 12, p. 160-163, jan./dez. 1992.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: I'approche anthropologique. *Recherches em didactique des mathématiques:* Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, v. 19, n.b56, p. 221-265, jan./dez.1999.

CHRISTIE, J. F. La fonction de jeu au niveau des enseignements prescolaires et primaires (1ère partie), *L'éducation par le jeu et l'environnement,* Broché, n. 43, p. 3-8, jul./set. 1991a.

CHRISTIE, J. F. Programme de jeux pour les structures prescolaires et les cours primaires (2ère partie), *L'éducation par le jeu et l'environnement,* Broché, n. 44, p. 3-6, out./dez. 1991b.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar:* geometria plana. Ed. 7. Vol. 9. São Paulo: Atual, 1993.

DOLCE, O; POMPEO, J.N. *Fundamentos da matemática elementar:* geometria plana. 5 ed. São Paulo: Atual, 2013.

DOUADY R.; PERRIN-GLORIAN M. J. Un processusd'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *EducationalStudies in Mathematics,* Utrecht, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática.* Campinas: Autores Associados, 2012.

GABRIEL, L. S.; ALLEVATO, N. S. G. O reino dos Quadriláteros: uma sequência didática para o ensino de Geometria na Educação Básica. *Revista Boletim online de Educação Matemática,* Joinville, v. 6, n. 10, p. 145-164, jan./jul. 2018.

GRANDO, R. C. *O jogo na educação:* aspectos didático-metodológicos do jogo na educação matemática. Unicamp, 2001. Disponível em: <http://descobertamat.blogspot.com/2010/12/o-jogo-na-educacao--aspectos-didaticos.html>; acesso em 06 fev. 2020, às 17h38.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. In: 4 CONGRESSO RIBIE, 1998, Brasília. *Anais do 4° CONGRESSO RIBIE...* Brasília: RIBIE, 1998. p. 1-24.

GUERREIRO, M. M. A. *O raciocínio geométrico de alunos do 9° ano no estudo da circunferência.* 2017. 246 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade de Lisboa, Lisboa.

HASTIE, P.; HAY, P. *Qualitative approaches.* Research methods in physical education and youth sport, London: Routledge, p. 79-84, 2012.

HUIZINGA, J. *Homo Ludens:* ensaio sobre a função social do brincar. Paris: Gallimard, 1951.

KALEFF, A. M. M. R. Considerações sobre a diversidade dos saberes docentes e a formação em Geometria do professor de Matemática nos cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense? *Educação Matemática em Foco,* Campina Grande, v. 06, p. 07-38, jan./jun. 2017.

KAMII, C. K; DEVRIES, R. G. *Jogos em Grupo na Educação Infantil:* implicações na teoria de Piaget. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.* São Paulo: Cortez, 1997.

LAGRANGE, J. B. Analysing the impact of ICT on mathematics teaching practices. In: 3ª CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 2003, Bellaria. *Anais da 3ª Conference...* Bellaria: European Society for Researche in Mathematics Education, 2003, p. 1-10.

LEIVAS, J. C. P. Uma viagem sob o olhar de um geômetra. *Pesquisa e Ensino,* v. 1, p. 1-21, jan./dez. 2020.

LEIVAS, J. C.P. *Imaginação, Intuição, e Visualização:* a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. 294f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação do Setor de Educação. Universidade Federal do Paraná. Curitiba.

LIMA, E. M. B. *Um estudo sobre as disciplinas de geometria em cursos de licenciatura em matemática.* 2014. 132f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pró-Reitoria de Graduação. Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Grandezas e Medidas. In: CARVALHO, J. B. P. F. *Coleção Explorando o Ensino – Matemática:* ensino fundamental. v.17. Brasília: MEC/Secretária de Educação Básica, 2010, p. 167-200.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. P. F. Geometria. In: CARVALHO, J. B. P. F. *Coleção Explorando o Ensino – Matemática:* ensino fundamental. v. 17. Brasília: MEC/Secretária de Educação Básica, 2010, p. 135-166.

LIMA BORBA, V. M.; PEREIRA DA COSTA, A. Sucesso e fracasso no ensino da Matemática: o que dizem futuros professores de uma IES? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, Cascavel, v. 2, p. 55-76, jan./abr. 2018.

LIMA FERREIRA, C. A. Pesquisa quantitativa e qualitativa: perspectivas para o campo da educação. *Revista Mosaico*, Vassouras, v. 8, n. 2, p. 173-182, jul./dez. 2015.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, Brasília, n. 4, p. 3-13, jan./ mar. 1995.

MACHADO, P. F. *Fundamentos de geometria plana*. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012, p.89-101.

MARGOLINAS C. *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1993.

MINAYO, M. C. S. Amostragem e saturação em pesquisa qualitativa: consensos e controvérsias. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v.5, n. 7, p. 01-12, abril. 2017.

MONTEIRO, T. T. M.; ROSA DOS SANTOS, M. O livro didático do 6° ano do ensino fundamental: uma análise sobre a praxeologia Matemática dos quadriláteros. In: 5° CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2018, Recife. *Anais do 5° CONEDU*... Recife, Realize, 2018, p. 1-12.

MORETTI, M. T.; HILLESHEIM, S. F. Linguagem natural e formal na semiosfera da aprendizagem matemática: o caso da geometria para a formação do pedagogo. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, Recife, v. 9, n. 1, p. 1-19, jan./abr. 2018.

MOURA, A. P.; BARROS, A. L. S.; PEREIRA DA COSTA, A.; VIEIRA, M. S. L. M. Área de figuras planas no 6° ano do ensino fundamental: um olhar para a praxeologia matemática preconizada em um livro didático. In: 7° Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 2017, Garanhuns. *Anais do 7° EPEM*... Recife: SBEM Regional de Pernambuco, 2017, p. 1-12.

MOTA, P. C. C. L. M. *Jogos no ensino da Matemática*. 2009. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia. Universidade Portucalense Infante D. Henrique. Porto.

MUNIZ, C. A. *Brincar e Jogar:* enlaces teóricos e metodologias no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

NASSER, L.; CALDATO, J. Investigação sobre o desenvolvimento do processo dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa),* São Paulo, v. 10, p. 80-96, mar./abr. 2019.

NAVARRO DA SILVA, M. *A Educação Matemática na América Latina:* um estudo comparativo dos currículos de Matemática do Brasil e México. 2017. 360f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

NIMIER, J. *Les modes de rélations aux mathématiques.* Paris: Méridiens-Klincksieck, 1988.

NOGUEIRA, C. M. I. *Tendências em Educação Matemática escolar:* das relações aluno-professor e o saber matemático. Maringá: EDUEM, 2005.

PACHÊCO, F. F. F.; PACHÊCO, G. F. Geometria plana: um estudo sobre o quadrado com alunos do 7° ano do ensino fundamental sob a ótica da Teoria de Van Hiele. *Revista Principia,* João Pessoa, n. 33, p. 50-57, jan./mar. 2017.

PAIS, L.C. Didática da Matemática: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PEREIRA DA COSTA, A. *A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6° anodo ensino fundamental:* um estudo sob a luz da teoria vanhieliana. 2016. 243f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

PEREIRA DA COSTA, A. *A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:* o caso dos quadriláteros notáveis. 2019. 401f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

PEREIRA DA COSTA, A. A geometria na educação básica: um panorama sobre o seu ensino no Brasil. *Educação Matemática em Foco,* Campina Grande, v. 1, p. 1-26, jan./abr. 2020.

PEREIRA DA COSTA, A.; BATISTA, R.; MORAIS, M. D. Área de figuras planas no 8º ano do ensino fundamental do Brasil: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. *Revista Acta Latino americana de Matemática Educativa,* Ciudad de México, v. 32, n.2, p. 150-158, jul./dez. 2019.

PEREIRA DA COSTA, A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do Ensino Médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros. In: 14ª CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez. *Anais da 14ª CIAEM...* Tuxtla Gutiérrez: CIACEM, 2015a, p. 1-9.

PEREIRA DA COSTA A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. Investigando os níveis de pensamento geométrico de alunos do 6º ano do ensino médio: um estudo envolvendo os quadriláteros. In: 4º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Ilhéus. *Anais do 4º SIPEMAT...* Ilhéus: UESC, 2015b, p. 998-1009.

PEREIRA DA COSTA, A.; CÂMARA DOS SANTOS, M. O pensamento geométrico de professores de Matemática do ensino básico: um estudo sobre os quadriláteros notáveis. *Educação Online,* Rio de Janeiro, v. 1, n. 22, p. 1-19, mai./ago. 2016.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. Análise Praxeológica relativa ao objeto área de figuras planas em um livro didático do 6° ano do ensino fundamental. In: 4° SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Ilhéus. *Anais do 4° SIPEMAT...* Ilhéus: UESC, 2015b, p. 1010-1021.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de estudantes de uma Licenciatura em Matemática no Estado de Pernambuco: um estudo sob a ótica da teoria de Van-Hiele. *Educação Online,* Rio de Janeiro, v. 1, n. 25, p. 1-23, mai./ago. 2017.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. Os quadriláteros notáveis no 8° ano do ensino fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. *Revista de Educação Matemática,* São Paulo, v. 15, n. 19, p.353-372, mai/ago. 2018.

PEREIRA DA COSTA, A.; ROSA DOS SANTOS, M. O pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. *Educação Matemática Debate,* Montes Claros, v. 1, p. 1-20, jan./dez. 2020.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:* Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Recife: SEE, 2012.

PERNAMBUCO. Secretaria Estadual de Educação. *Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco – SAEPE:* Matemática. Recife: Revista da Gestão Escolar, 2019.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. *Currículo de Pernambuco – Ensino Fundamental:* área de Matemática. Recife: SEE, 2019.

PIASESKI, C. M. *A geometria no ensino fundamental.* 2010. 39f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões URI. Erechim.

POLIDORO, L. F.; STIGAR, R.; Transposição Didática: a passagem do saber científico ao saber escolar. *Ciberteologia,* São Paulo, v. 27, p. 1-6, jan./fev. 2010.

RESENDE, R. *Técnica de Investigação Qualitativa:* ETCI. Journal of Sport Pedagogy & Research, v. 2, p. 50-57, 2016.

RITA, C. H. *O professor e o uso de jogos em aulas de Matemática.* 2013. 49f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Licenciatura em Ciências Exatas) – Universidade Federal do Pampa. Caçapava do Sul.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. *O Ensino da Geometria na Educação Básica:* Realidade e Possibilidades. 2015. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>; Acesso em: 5 set. 2019, às 17h13.

ROSA DOS SANTOS, M. *Resolução de problemas envolvendo área de paralelogramo:* um estudo sob a ótica das variáveis didáticas e do contrato didático. 2005. 178f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

ROSA DOS SANTOS, M. *A transposição didática do conceito de área de figuras planas no 6° ano do ensino fundamental:* um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. 2015. 281f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

ROSA DOS SANTOS, M. O conceito de área de figuras planas: um olhar para a organização didática. In: 5° SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Belém. *Anais do 5° SIPEMAT...* Belém: UNAMA, 2018, p. 1-15.

SANTANA, W. M. G. *O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área:* uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental. 2006. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SANTOS, S. C. *A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem:* o caso da geometria euclidiana espacial. 2006. 144f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

SANTOS, E. *Geometria:* história e ensino. Webartigos, 2009. Disponível em: <https://www.webartigos.com/artigos/geometria-historia-e-ensino/21366/>; acesso em 06 abr. 2020, às 14h40.

SANTOS, A. C.; PEROVANO, A. P. Relatando a experiência de uma oficina sobre quadriláteros. *Revista de Educação Matemática,* São Paulo, v. 15, n. 20, p. 629-639, set. /dez. 2018.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da Teoria Antropológica do didático na formação de professores de matemática. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática,* Belém, v. 13, n. 27, p. 51-66, mai./ago. 2017.

SILVA, J. V. G. *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6° ano do ensino fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.* 2011. 194f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, R. S. *Conhecimentos matemáticos de professores dos anos iniciais do ensino fundamental:* um estudo sobre o jogo da velha com figuras geométricas como recurso didático. 2017. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SILVA, R. S.; TELES, R. A. Conhecimentos e práticas de professores utilizando o Jogo da Velha com figuras geométricas. *Com a Palavra, o Professor*, Vitória da Conquista, v. 3, p. 85-110, set./ dez. 2018.

SILVA, L. R. C.; DAMACENO, A. D.; MARTINS, M. C. R.; SOBRAL, K. M.; FARIAS, I. M. S.Pesquisa documental: alternativa investigativa na formação docente. In: 9° Congresso Nacional de Educação e 3° Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 2009, Curitiba. *Anais do IX EDUCERE*... Curitiba: PUC-PR, 2009, p. 4555-4566.

SILVA FILHO, E. S; ROSA DOS SANTOS, M. *A área do círculo no livro didático de matemática do 9° ano do ensino fundamental:* um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.In: 7° Encontro Pernambucano de Educação Matemática, 2017, Garanhuns. *Anais do 7° EPEM*... Recife: SBEM Regional de Pernambuco, 2017, p. 1-12.

SILVA JUNIOR, C. G.; RÉGNIER, J. Critérios de adoção e utilização do livro didático de matemática no ensino fundamental do nordeste brasileiro: estudo exploratório baseado na análise estatística implicativa. In: 4e Rencontres sur l'Analyse Statistique Implicative, 2007, Castellon. *Anais do 4e Rencontres*... Castellon: ASI, 2007, p. 145-166.

SOFTWARE CABRI II PLUS. Disponível em: <https://cabri.com/en/student/cabri-ii-plus/>; acesso em 01 set. 2018, às 18h30.

SOFTWARE CABRI 3D. Disponível em: <https://cabri.com/en/student/cabri-3d/>; acesso em 02 set. 2018, às 18h20.

SOFTWARE CINDERELLA. Disponível em: <https://www.cinderella.de/tiki-index.php>; acesso em 03 set. 2018, às 18h10.

SOFTWARE DRGEO. Disponível em: <http://www.drgeo.eu/download>; acesso em 04 set. 2018, às 18h06.

SOFTWARE GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>; acesso em 05 set. 2018, às 18h31.

SOFTWARE POLY PRO. Disponível em: <http://www.peda.com/download>; acesso em 06 set. 2018, às 18h03.

SOUZA, J. C. *Análise de estratégias de resolução de problemas de grandezas geométricas em avaliações institucionais em larga escala de redes públicas do Estado de Pernambuco.* 2004. 150f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Departamento de Educação. Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife.

SOUZA, J.; PATARO, P. *Vontade de Saber Matemática 8° ano.* São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J.; PATARO, P. *Vontade de Saber Matemática 6° ano.* São Paulo: FTD, 2015.

TELES, R. A. M. *A influência de imbricações entre campos conceituais na Matemática Escolar:* um estudo sobre fórmulas de área de figuras geométricas planas.2007. 297f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

TRIVIÑOS, A. N. S. *Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais:* a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VALENTE, J. A. Aprendendo para a vida: o uso da informática na educação especial. In: FREIRE, F. M. P.; VALENTE, J. A. *Aprendendo para a vida:* os computadores na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2001, p. 53-74.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente:* o papel do brinquedo no desenvolvimento. São Paulo: Editora Martins Fontes, 1989.

WAGNER, D. R.; FLORES, C. R. Nas travessias de uma formação de professores, a emergência de geometria. *Revista Educação Matemática em Foco,* Campina Grande, v. 6, n. 1, p. 4-31, jan./jun. 2017.

Sobre os autores

Marilene Rosa dos Santos

rosa.marilene@gmail.com

Doutora e Mestra no Ensino das Ciências e Matemática – UFRPE. Docente da Universidade de Pernambuco/UPE e Professora permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica/UFPE. Líder do Grupo Intelectus de Pesquisa e estudos em Educação Matemática – GIPEM certificado pelo CNPq desde 2016, vice-líder do grupo SEMEAR/UFPE e membro do grupo Pró-Grandezas/UFPE. Membro da diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Estado de Pernambuco (SBEM-PE) triênio 2020–2023.

André Pereira da Costa

andre.pcosta@outlook.com

Doutor e Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGEns) e do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Associado aos grupos de pesquisa Pró-Grandezas/UFPE, NUMEP/UFPE e LIPEM/UFOB.

Arthur Lucas Guilhermino da Silva

arthurlucas-gs@hotmail.com

Graduando do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade de Pernambuco. Associado ao Grupo de Pesquisa – Grupo Intelectus de Pesquisa e estudos em Educação Matemática – GIPEM e desenvolveu pesquisa no Programa de Iniciação Científica PIBIC – CNPq 2018/2019.

Gilmara Ribeiro Bezerra
gilmara123ribeiro@gmail.com

Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade de Pernambuco. Associada aos grupos de pesquisa e estudos SEMEAR/UFPE e GIPEM/UPE. Atualmente, é bolsista do CNPq, pelo programa de iniciação científica PIBIC – 2019/2020.

Thayná Thayse Melo Monteiro
tmonteiro210@gmail.com

Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade de Pernambuco. Associada aos Grupos de Pesquisas – Grupo Intelectus de Pesquisa e estudos em Educação Matemática – GIPEM/UPEe SEMEAR/UFPE. Desenvolveu pesquisa no Programa de Iniciação Científica PIBIC – Programa de Fortalecimento Acadêmico – PFA/UPE 2018.

Iolanda Possidonio dos Santos
iolandapds2@gmail.com

Licenciada em Matemática pela Universidade de Pernambuco – UPE. Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática – PPGECM – UFPE/CAA. Associada aos grupos de pesquisas SEMEAR/UFPE e NUPEFAP/UFPE. Membro da diretoria da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Estado de Pernambuco (SBEM-PE) triênio 2020–2023.

Juari Henrique dos Santos Oliveira
juarihenrique@gmail.com

Graduando do curso de Licenciatura em Matemática – Universidade de Pernambuco. Associado ao grupo de pesquisa GIPEM/UPE. Desenvolveu pesquisas por meio do Programa de Bolsas de Incentivo Acadêmico – BIA/UPE em 2016. Professor da Rede Municipal de Terezinha/PE.

Jonnathan Felipe Araujo Guimarães.
felipejonnathan@gmail.com

Licenciado em Matemática pela Universidade de Pernambuco. Especialização em Ensino de Matemática pela Faculdade Única de Ipatinga (2020). Desenvolveu pesquisas no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência PIBID/UPE – CAPES (2017–2018).

Armando da Silva Pereira Neto
armando.pereira@upe.br

Graduando do curso de Licenciatura Plena em Matemática – Universidade de Pernambuco. Associado ao grupo de pesquisa Física Aplicada e Matemática Computacional (FAMAC)/UPE. Membro do Conselho Municipal de Educação de Correntes-PE.

Título Subir a montanha para ampliar a vista:
alguns cenários de pesquisas em Educação Matemática
Organização Marilene Rosa dos Santos
André Pereira da Costa

Formato *E-book*
Tipografia Kazimir Text e Good Pro
Desenvolvimento Editora UFPE

ISBN 978-65-5962-019-7

9 786559 620197 >