

Mario Duarte Costa  
Alcy Vieira Costa

# Geometria Gráfica Tridimensional

Vol. 2 - PONTO, RETA E PLANO  
3ª edição





# **Geometria Gráfica Tridimensional**

## UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

**Reitor:** Prof. Mozart Neves Ramos

**Vice-Reitor:** Prof. Geraldo José Marques Pereira

**Diretor da Editora:** Prof<sup>ª</sup> Ana Maria de França Bezerra

### COMISSÃO EDITORIAL

*Presidente:* Prof<sup>ª</sup> Célia Maria de Medicis Maranhão

*Titulares:* Ana Maria de França Bezerra, Benício de Barros Neto, Carlos Teixeira Brandt, Dilosa Carvalho de A. Barbosa, Flávio Henrique Albert Brayner, Nelly Medeiros de Carvalho, Roberto Gomes Ferreira, Roberto Mauro Cortez Motta, Sylvio Loreto, Valdevez Pinto Ferreira.

*Suplentes:* Ângela Maria Barbosa Neves, Benício de Barros Neto, Célia Maria da Silva Salsa, Gilda Maria Lins de Araújo, José Thadeu Pinheiro, Josélia Pacheco de Santana, Manuel de Jesus da Cunha Braga, Maud Fragoço Perruci, Nadja Maria Lins da Silva, Pedro Lincoln C. L. de Matos.

Capa: Elvira Maria R. de Paula

Revisão: O autor

Impressão: Sistema digital de publicação por demanda da  
Editora Universitária / UFPE.

---

Costa, Mário Duarte

Geometria gráfica tridimensional. Recife, UFPE  
Editora Universitária, 1996.

v.

Conteúdo. - v. 2. Ponto, reta e plano.

1. Geometria descritiva. I. Título.

515

CDU

UFPE

515

CDU

BC-88-681/

---

# Geometria Gráfica

# Tridimensional

## Ponto, Reta e Plano

Mario Duarte Costa  
Alcy P. de A. Vieira Costa

Vol. 2



## PREFÁCIO

Estamos agora com este volume completo.

O primeiro volume da nossa GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL apresentou os sistemas de representação mais usuais, comparando-os em relação ao tipo de projeção utilizado e à posição do paralelepípedo de referência relativamente ao plano do desenho.

Este segundo volume aborda o relacionamento entre pontos, retas e planos. Podem tais elementos significar vértices, arestas e faces de sólidos, em um problema, mas são também considerados independentemente. O ponto pode marcar a posição de um furo, o centro de uma esfera, a posição de um ponto material; a reta pode representar um fio, o eixo de uma viga ou de um cano, uma galeria de mina, o eixo de um cone; o plano pode significar uma placa, uma chapa, o limite de um veio de minério, o plano de simetria de um sólido.

Assim, o tratamento dado aos elementos geométricos neste trabalho permite desenvolver aplicações objetivas que extrapolam o domínio da geometria teórica e aplicada saindo da matemática, da física e da química para o campo profissional dos diversos cursos da área de tecnologia. Evidentemente não pretendemos aprofundar os exemplos com dados técnicos que somente o segundo ciclo dos cursos de graduação propicia. Os problemas aqui considerados apenas revestem as questões geométricas de uma roupagem funcional que motiva o estudante, abrindo-lhe a perspectiva de associação entre a teoria muitas vezes monótona e a atividade prática que deverá exercer na sua vida profissional.

Por outro lado, o nosso estudo não visa com exclusividade o ensino de terceiro grau. Muito pelo contrário, os dois volumes desta Geometria Gráfica Tridimensional têm como suporte teórico a geometria euclideana. Poderiam ser adotados em um curso de segundo grau, onde as aplicações dirigidas aos mais diversos ramos tecnológicos funcionariam como orientação vocacional

para a escolha de um curso universitário. O nível que perseguimos para o ensino de graduação exigiria um embasamento de geometria projetiva, pois somente esta permite a verdadeira compreensão da unidade existente entre os sistemas de representação. Há poucos anos essa geometria ainda estava incluída em todos os programas de geometria descritiva das nossas universidades, mas hoje são poucos os cursos superiores a conseguir tempo para desenvolvê-la adequadamente, tendo em vista a deficiência em geometria euclidiana dos nossos atuais estudantes universitários.

A primeira edição deste 2.<sup>o</sup> volume só abordava os problemas de posição relativa entre pontos, retas e planos, objeto dos três primeiros capítulos. Apesar de algumas medidas fundamentais, como a inclinação, a declividade e o intervalo de retas e planos, e da possibilidade da obtenção de vistas em verdadeira grandeza de segmentos de reta e de figuras planas, estudadas naqueles capítulos, somente no 4.<sup>o</sup>, acrescentado nesta edição, desenvolvemos plenamente os problemas métricos. As medidas de distâncias e ângulos entre pontos, retas e planos são exaustivamente estudadas neste complemento, que quase duplicou a primeira edição, tanto em número de páginas como de figuras.

Apesar da quantidade total de exercícios desenvolvidos no final dos capítulos — 57 resolvidos e 60 propostos — recomendamos insistentemente aos nossos alunos não se limitarem a tal universo. É essencial que procurem novas soluções, modificando os dados em cada um deles, para adquirir uma visão crítica da situação que apresentam. A limitação do estudante em apenas compreender o problema na posição em que definimos os seus dados pode levar a uma simples memorização do traçado, o que está bastante longe do domínio real da questão.

Em razão da redução que sofreram todas as figuras deste livro em relação ao original, as medidas citadas, tanto no texto como nas próprias figuras, devem ser lidas no desenho segundo a escala gráfica que aparece no bordo esquerdo da figura 1, na página seguinte. O leitor deve copiá-la numa tira de papel para acompanhar todas as citações de medidas lineares que aparecem ao longo deste volume.

Os autores

# 1. POSIÇÕES DE PONTOS, RETAS E PLANOS EM RELAÇÃO AOS PLANOS DE PROJEÇÃO

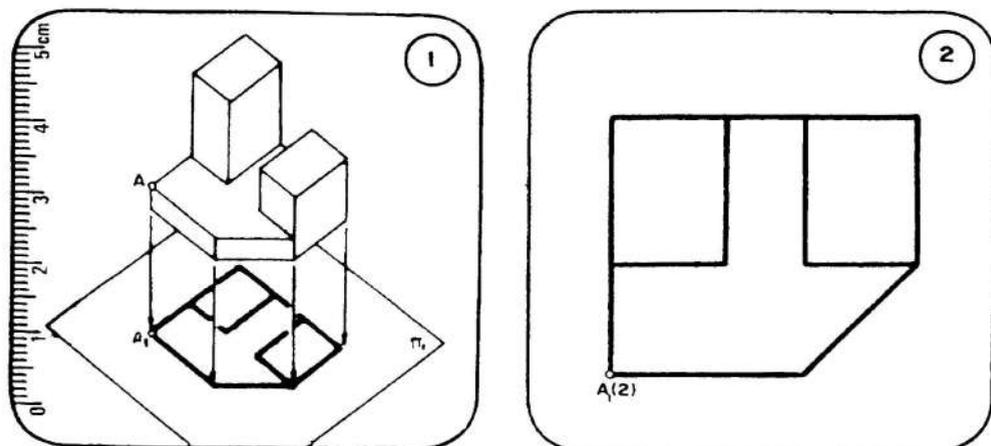
## 1.1. Cota de um Ponto

Tal como fizemos no volume 1, estaremos usando em todo este 2º volume dois tipos de figuras: o primeiro mostrará o problema em discussão como se fosse uma fotografia tirada de fora do plano do desenho, isto é, uma PERSPECTIVA do objeto em estudo; o segundo mostrará os planos de projeção diretamente no plano do desenho, ou seja, em uma ÉPURA mongeana.

Assim a figura 1 mostra a perspectiva da forma-modelo do volume 1 sendo projetada ortogonalmente sobre o plano principal  $\pi_1$ .

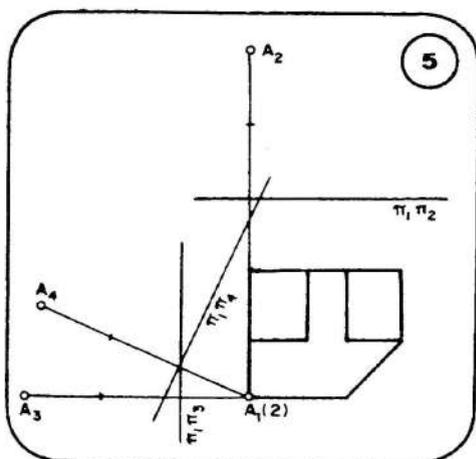
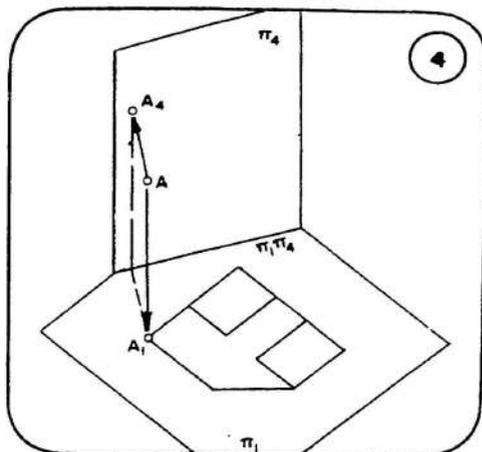
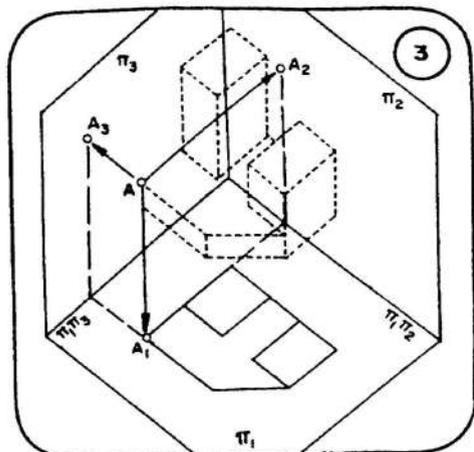
Já destacamos naquele volume que a projeção principal, sozinha, não representa o objeto. Entretanto, fizemos referência a um sistema gráfico-analítico, chamado de PROJEÇÕES COTADAS, o qual utiliza apenas a projeção principal do objeto estudado. Para isso, a projeção de cada ponto do sólido é acompanhada de um número. É a medida da altura desse ponto em relação a  $\pi_1$  em uma unidade de medida pré-estabelecida.

Destacando o vértice A na figura 1, sua altura  $AA_1$  em relação a  $\pi_1$ , denominada COTA do ponto A, medida em centímetros, por exemplo, seria escrita ao lado de  $A_1$  (entre parênteses) na ÉPURA (fig. 2). Estamos supondo que meça 2 cm essa cota.



Vamos mostrar que tal artifício permite obter uma projeção secundária qualquer do ponto A.

Isolando o ponto A na perspectiva (fig. 3), podemos notar que sua projeção secundária  $A_2$  em um plano  $\pi_2$  estará a 2 cm acima da linha de terra  $\pi_1 \pi_2$ . A projeção  $A_3$  em outro plano  $\pi_3$  estará também a 2 cm acima de  $\pi_1 \pi_3$ .



Qualquer que seja a posição da linha de terra, como  $\pi_1 \pi_4$  (fig. 4), a projeção  $A_4$  no plano correspondente estará sempre a 2 cm acima dessa linha de terra.

Passando à ÉPURA mongeana (fig. 5), basta definir a posição da linha de terra da projeção secundária ( $\pi_1 \pi_2$ ,  $\pi_1 \pi_3$  ou  $\pi_1 \pi_4$ ) para termos condições de obter  $A_2$ ,  $A_3$  ou  $A_4$ . De fato, basta lembrar do volume 1 que, no sistema mongeano, cada projeção secundária está ligada à principal por uma LINHA DE CHAMADA, perpendicular à respectiva linha de terra. Então basta tirar  $A_1 A_2$  perpendicular a  $\pi_1 \pi_2$ ,  $A_1 A_3$  perpendicular a  $\pi_1 \pi_3$  ou  $A_1 A_4$  perpendicular a  $\pi_1 \pi_4$ . Nessas linhas, basta marcar 2 cm de cada linha de terra (sempre para fora da projeção principal) e teremos  $A_2$ ,  $A_3$  ou  $A_4$ .

Se todos os vértices do sólido tiverem suas cotas indicadas ao lado da projeção principal é possível obter toda a forma projetada em qualquer plano secundário. É claro que a simples obtenção de todos os vértices em uma projeção secundária não garantiria a determinação correta da visibilidade das fa-

ces e arestas do sólido. Para isso seria exigida uma visualização tridimensional da forma representada.

Por outro lado esse sistema não tem uma aplicação prática na representação de sólidos de muitos vértices, pois os números indicativos das cotas saturam facilmente a figura. Mas é ideal para estudar relações entre pontos, retas e planos isolados, que é o objetivo deste volume da GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL.

Usaremos as projeções cotadas para apresentar todos os problemas que serão discutidos. Prevenimos, no entanto, que este não é um livro sobre o sistema cotado.

De fato, qualquer autor que aborde o sistema de projeções cotadas fica limitado a resolver todos os problemas na projeção principal, seja por operações gráficas ou analíticas. No nosso caso, estaremos freqüentemente usando projeções secundárias, sempre que isso facilitar a solução da questão abordada. Não é a mesma coisa que começar sempre usando já duas projeções mongeanas, como faz qualquer livro de geometria descritiva.

Vamos lembrar que desenvolveremos aqui um estudo de relações geométricas puras. Não estaremos no domínio do desenho técnico.

Assim o plano principal não terá que ser horizontal nem ocupar qualquer outra posição particular. Essa é outra diferença sensível entre nossa obra e outros livros de geometria descritiva, os quais denominam  $\pi_1$  de plano horizontal. Para nós,  $\pi_1$  é simplesmente o primeiro plano de projeção usado, e sempre coincide com o plano do desenho, em é pura. Quando passarmos a desenvolver aplicações tecnológicas dos problemas discutidos em teoria, o plano  $\pi_1$  passará a ter um significado específico, geralmente horizontal. Em tal ocasião haverá necessidade também de utilizar uma escala de redução para poderemos representar no papel dimensões que, na realidade, estão na ordem de grandeza do metro.

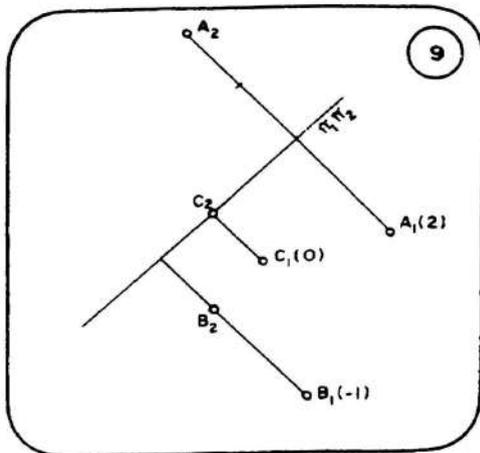
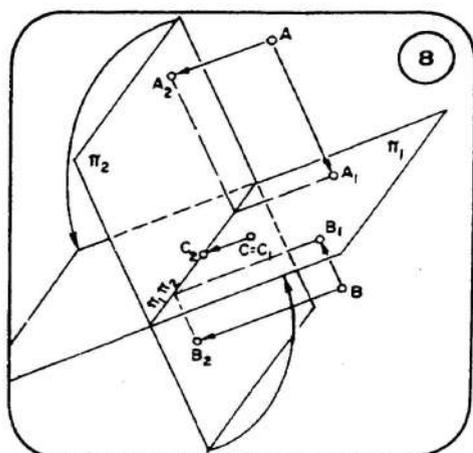
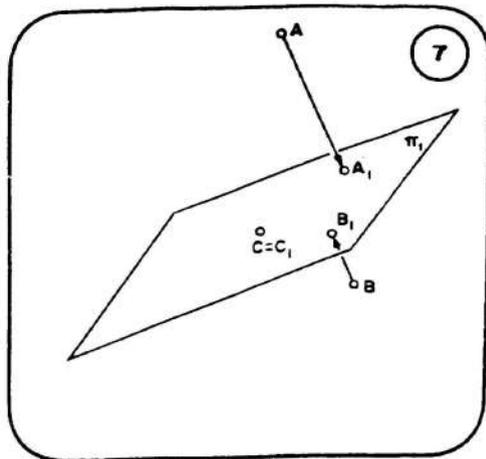
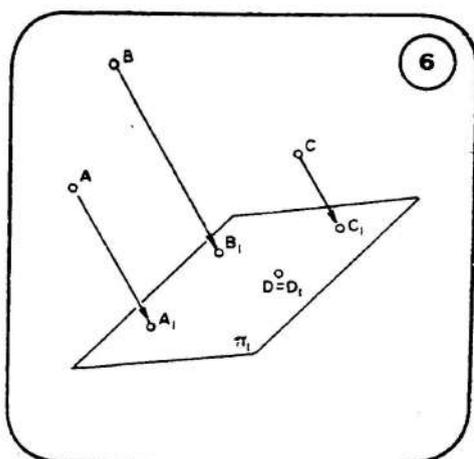
Por enquanto, vamos padronizar que todas as cotas serão medidas em centímetros, unidade compatível com as dimensões do desenho.

## 1.2. Cotas Negativas

Ao estudarmos um conjunto de pontos é evidente que a posição de  $\pi_1$  pode ser escolhida tal que todos eles fiquem do mesmo lado desse plano, ou pelo menos no próprio plano  $\pi_1$  (como D, na fig. 6).

Então parece evidente que basta definir se estaremos usando o sistema Alemão (pontos sempre à frente de  $\pi_1$ ) ou no sistema Norte Americano (pontos sempre atrás de  $\pi_1$ ) para sabermos se deveremos marcar as cotas para um lado ou para o outro lado do plano principal.

Mas aqui cabem duas observações fundamentais: primeiro, a convenção que distingue os dois sistemas é válida apenas no campo do desenho técnico; em segundo lugar, muitas vezes a solução de um problema geométrico conduz à obtenção de pontos do outro lado de  $\pi_1$ , em relação aos dados da questão.

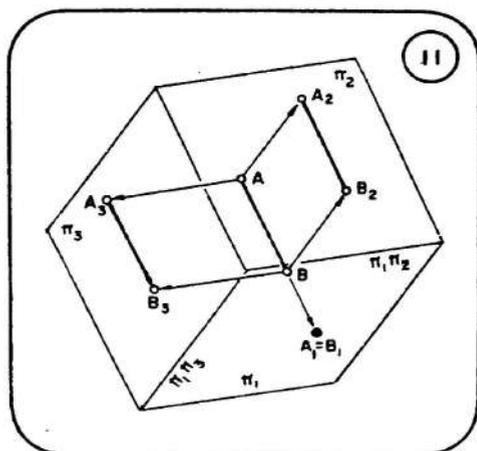
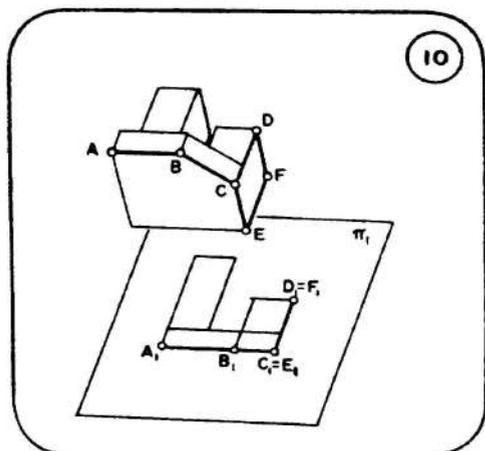


Portanto é essencial usarmos números relativos para as cotas dos diversos pontos estudados. Se tivermos uma cota positiva, fica convençãoado que o ponto estará à frente de  $\pi_1$ ; se negativa, o ponto estará atrás de  $\pi_1$ . Na fig. 7, o ponto A terá cota positiva e o ponto B terá cota negativa. No próprio plano  $\pi_1$  (como C) o ponto terá cota nula.

Para evitar sobrecarga gráfica as cotas positivas dispensam a colocação do sinal +.

Para obter qualquer projeção secundária ( $\pi_2$  sempre perpendicular a  $\pi_1$ , como sabemos), os pontos de cotas positivas como A têm  $A_2$  acima da linha de terra (fig. 8). Os pontos de cota negativa como B têm  $B_2$  abaixo da linha de terra. Os pontos de  $\pi_1$  (como C) se projetam na própria linha de terra.

Para obtenção da écura, como a metade superior de  $\pi_2$  se rebate sempre para fora da linha de terra (em relação a A, B e C), a metade inferior, para não quebrar  $\pi_2$ , vem para a frente de  $\pi_1 \pi_2$ . Assim, na écura, os pontos de cota negativa têm suas cotas marcadas abaixo de  $\pi_1 \pi_2$ . A figura 9 exemplifica



como obter a projeção secundária de cada um dos pontos A, B e C, medindo suas cotas 2, -1 e 0, respectivamente. Uma vez escolhida a posição da linha de terra  $\pi_1 \pi_2$ , é só passar por  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  as linhas de chamada, sobre as quais são marcadas em centímetros as cotas indicadas. Para  $A_2$ , marcaremos 2 cm acima de  $\pi_1 \pi_2$ ; para  $B_2$  marcaremos 1 cm abaixo de  $\pi_1 \pi_2$ ; quanto a  $C_2$ , estará na própria linha de terra.

### 1.3. Posições de Retas

Voltemos à forma-modelo e analisemos as diferentes posições que suas arestas podem ter em relação a  $\pi_1$  (fig. 10).

Algumas como AB e CD são paralelas a  $\pi_1$ . Seus extremos têm a mesma cota (aliás, todos os seus pontos têm cota igual). Chamaremos as arestas em tal posição de **RETAS DE COTA CONSTANTE**.

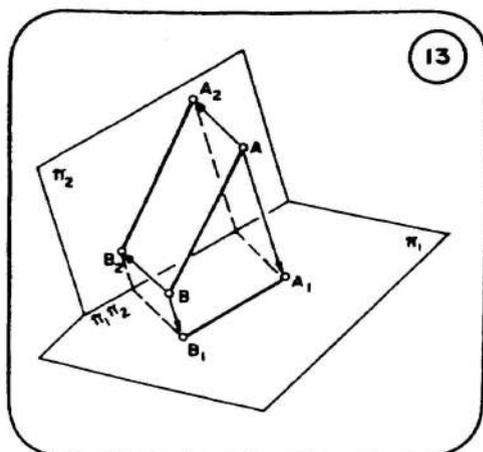
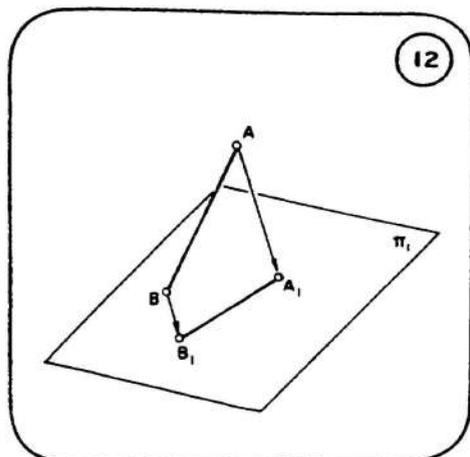
Outras como CE e DF são perpendiculares a  $\pi_1$ . Todos os seus pontos se sobrepõem na projeção principal. Assim há uma redução dimensional, ou seja, a reta (que possui uma dimensão) se reduz em projeção a um ponto (dimensão nula). Chamaremos tal posição de **RETAS VISTAS DE BASE**, ou simplesmente **RETAS BÁSICAS**.

Fora dessas duas posições particulares uma aresta como BC é uma **RETA INCLINADA**. Seus pontos não coincidem na projeção principal nem possuem a mesma cota.

### 1.4. Verdadeira Grandeza de Segmentos de Reta

Uma aresta de cota constante aparece em seu tamanho real na projeção principal. Então qualquer questão que necessite da verdadeira grandeza desse segmento pode ser resolvida apenas em  $\pi_1$ .

Na posição da reta básica (fig. 11) um segmento AB, de qualquer tamanho, desaparece em  $\pi_1$ , pois se reduz a um ponto.



Entretanto qualquer projeção secundária, como  $A_2B_2$  ou  $A_3B_3$ , mostra tal segmento em verdadeira grandeza, que é a própria diferença de cota entre A e B.

Já a reta inclinada, além de também não mostrar seus segmentos em verdadeira grandeza no plano  $\pi_1$  ( $A_1B_1$  é sempre menor que  $AB$  - fig. 12) não é em qualquer plano secundário que projeta seus segmentos em tamanho real.

De fato, somente um plano  $\pi_2$  paralelo a  $AB$  (o que se consegue tomando  $\pi_1 \pi_2$  paralelo a  $A_1B_1$ ) recebe a projeção ortogonal desse segmento em verdadeira grandeza (fig. 13). Qualquer outra direção do plano de projeção terá o segmento projetado com redução.

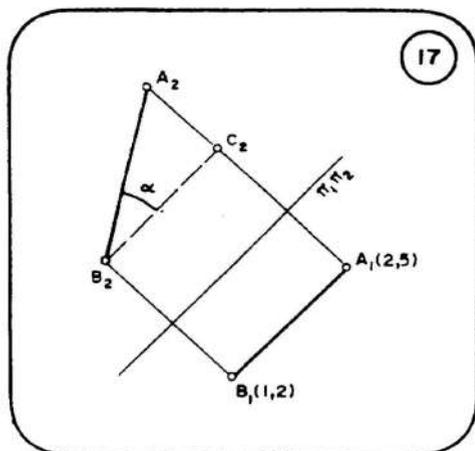
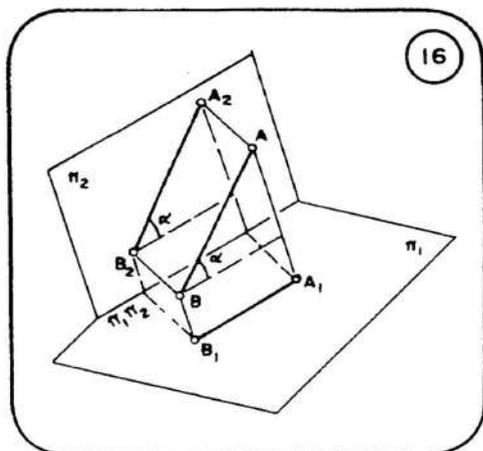
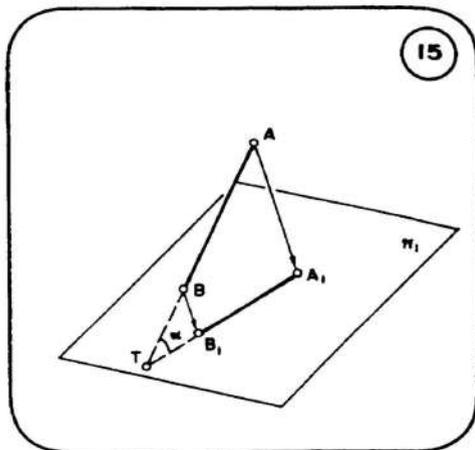
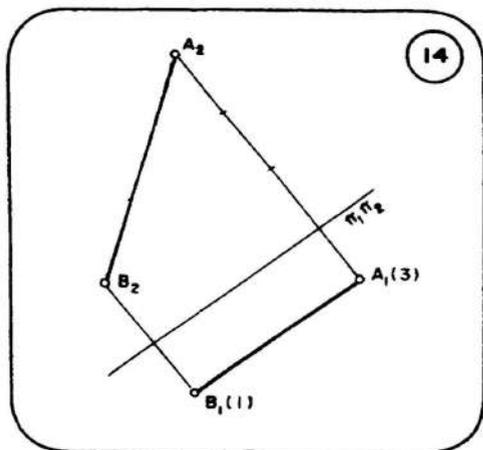
Chamaremos a projeção de um segmento em um plano paralelo de **VISTA EM V. G. DO SEGMENTO**.

Em é pura, suponhamos dado  $A_1B_1$  com as cotas de A e de B assinaladas. O fato das cotas serem diferentes já caracteriza o segmento como inclinado (fig. 14).

Para obter uma vista em V.G. de  $AB$  basta tomarmos  $\pi_1 \pi_2$  paralela a  $A_1B_1$  (a qualquer distância deste). Passando as linhas de chamada por  $A_1$  e  $B_1$  e nelas marcando 3 cm e 1 cm acima da linha de terra, teremos  $A_2B_2$ , cuja medida é a mesma do segmento no espaço.

## 1.5. Inclinação e Declividade de Retas

Uma reta inclinada está numa situação intermediária entre uma de cota constante e uma básica. O ângulo de inclinação, ou simplesmente **INCLINAÇÃO** de uma reta  $AB$  é aquele que ela faz com o plano  $\pi_1$ , ou seja, com sua projeção  $A_1B_1$  (ângulo  $\alpha$  na mesma figura 15). É claro que não necessitamos prolongar  $AB$  e  $A_1B_1$  para medir  $\alpha$ . Se passarmos pelo ponto B uma paralela a  $A_1B_1$  (fig. 16) teremos formado o mesmo ângulo  $\alpha$ .



Numa vista em V.G. do segmento, o ângulo de inclinação aparece entre  $A_2B_2$  e uma paralela a  $\pi_1 \pi_2$ . Em qualquer outra projeção secundária esse ângulo se deforma.

Portanto, em épura, dado  $A_1B_1$  (fig. 17) teremos, para determinar a inclinação de  $AB$ , que obter uma vista em V. G e medir o ângulo formado por  $A_2B_2$  e uma paralela a  $\pi_1 \pi_2$  ( $B_2C_2$ ).

É de se notar que uma reta de cota constante tem inclinação  $0^\circ$ , e uma reta básica inclinação de  $90^\circ$ .

Nas aplicações tecnológicas é usual substituir a medida da inclinação em graus pela tangente trigonométrica desse ângulo, que é denominada DECLIVIDADE da reta.

Vejamos qual a vantagem da declividade sobre a inclinação. Voltando a observar a figura 17, para determinar a tangente de  $\alpha$  basta-nos dividir o cateto  $A_2C_2$  pelo cateto  $C_2B_2$ , no triângulo retângulo  $A_2B_2C_2$ . Mas  $A_2C_2$  é a diferença de cota entre os pontos  $A$  e  $B$ , que poderia ser obtida diretamente

em  $\pi_1$  subtraindo 1,2 de 2,5. Quanto a  $C_2B_2$  tem a mesma medida que  $A_1B_1$ . Desde que usemos a mesma unidade das cotas (no caso, o centímetro) para medir  $A_1B_1$ , poderíamos então determinar a declividade do segmento AB sem precisar da projeção secundária. Bastar-nos-ia aplicar a fórmula:

$$d_{AB} = \frac{\text{cota A} - \text{cota B}}{A_1B_1}$$

## 1.6. Direção de Retas

O conceito de DIREÇÃO de uma reta se refere à posição de sua projeção principal. Se for definida uma direção de referência no plano  $\pi_1$ , a direção de uma reta AB pode ser traduzida quantitativamente pelo ângulo que  $A_1B_1$  forma com esse referencial.

No desenho técnico, quando  $\pi_1$  é o plano horizontal, tal direção referencial pode ser o norte, dos pontos cardeais.

## 1.7. Posições de Planos

Em relação ao plano  $\pi_1$  as faces planas de um sólido, tais como suas arestas retas, podem ocupar duas posições particulares.

Voltando à forma-modelo (fig. 18), algumas faces como  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são paralelas a  $\pi_1$ . Os vértices e arestas de cada uma dessas faces, assim como qualquer outro de seus pontos, têm a mesma cota. Esses planos serão chamados DE COTA CONSTANTE.

Também temos faces em VISTA DE BASE ou BÁSICAS. São aquelas perpendiculares a  $\pi_1$ , como  $\delta$  e  $\epsilon$  na figura 18. Na projeção principal tais planos são reduzidos a retas, perdendo então uma dimensão.

Excluindo tais posições particulares, uma face está num plano INCLINADO, como  $\mu$  na fig. 18. Em tal situação geral, uma face possui pontos de cotas diferentes, mas não se reduz a uma reta na projeção principal.

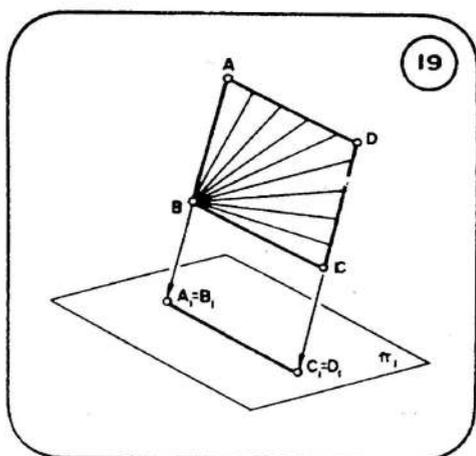
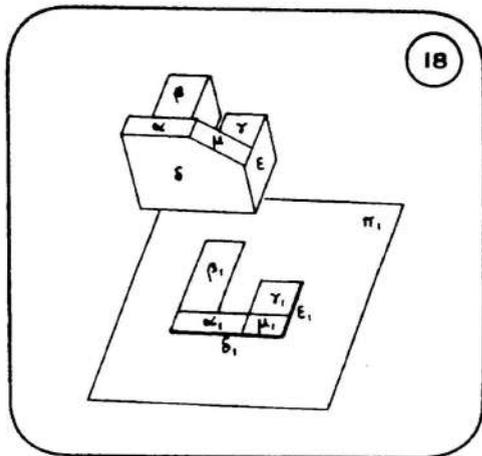
## 1.8. Retas de um Plano

Vamos analisar os tipos de retas que podem estar contidas em cada posição de um plano.

Em uma análise precipitada, pode parecer ao estudante que cada posição de plano só contém retas do mesmo nome.

Isso só é verdade para o plano de cota constante, onde todas as retas evidentemente são de cota constante, a mesma do plano.

Um plano básico (fig. 19) naturalmente contém retas básicas, como AB e CD. Mas também tem retas de cota constante, como AD e BC. Se girarmos uma reta em torno de B, sempre no plano ABCD, ela vai ocupar sucessivamente posições de retas com ângulo variando de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Então um plano básico pode conter retas de qualquer inclinação.



Um plano inclinado possui retas de cota constante (como BC e AD na figura 20). Mas não pode conter retas básicas. Se girarmos uma reta no plano, em torno do ponto E, é fácil perceber que ela começa com uma inclinação de  $0^\circ$  (quando coincide com EB) e vai aumentando de inclinação até atingir um máximo em EF, quando fica perpendicular a BC, já que, passando desse ponto, volta a se aproximar da reta de cota constante em EC, quando volta a ter inclinação de  $0^\circ$ .

As retas como EF, perpendiculares às retas de cota constante do plano, são denominadas de **RETAS DE MÁXIMA INCLINAÇÃO** ou **DE MÁXIMA DECLIVIDADE** do plano. Deve ser observado que  $E_1 F_1$  é também perpendicular a  $B_1 C_1$ , pois quando um ângulo reto tem um de seus lados paralelos ao plano de projeção (como é o caso de BC) sua projeção ortogonal também é um ângulo reto.

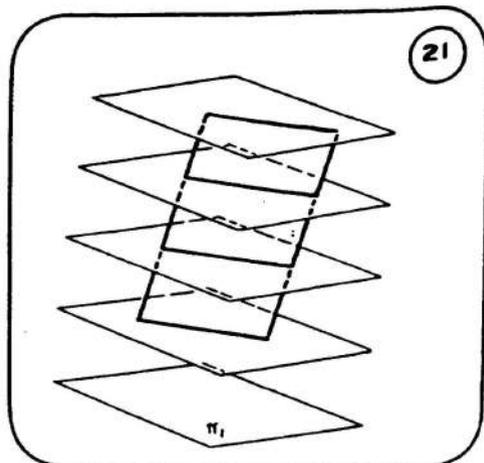
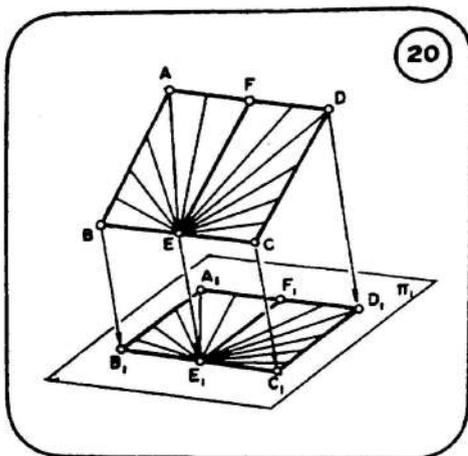
### 1.9. Direção, Inclinação e Declividade de Planos

Em écura, caracteriza-se a **DIREÇÃO** de um plano pelas suas retas de cota constante. Em qualquer plano essas retas podem ser obtidas cortando-o por planos paralelos a  $\pi_1$ . Um feixe de planos paralelos corta um plano segundo retas paralelas (fig. 21). Assim, todas as retas de cota constante de um plano têm direções iguais, que é a **DIREÇÃO DESSE PLANO**.

Devemos ressaltar que um plano de cota constante tem direção indeterminada, pois possui retas de cota constante em todas as direções.

Quanto à inclinação, devemos lembrar o item anterior, onde mostramos que um plano inclinado contém retas de inclinação variando de  $0^\circ$  ao ângulo de sua reta de máxima declividade, que é perpendicular às retas de cota constante do plano.

Suponhamos em écura uma face triangular ABC de um sólido (fig. 22), onde o lado BC tem cota constante de 2 cm. Baixando a altura de A teríamos uma reta de máxima inclinação dessa face (AD).



Tomando uma vista em v.g. dessa reta AD determinaríamos seu ângulo de inclinação  $\alpha$  em  $\pi_2$ .

A inclinação de sua reta de máxima declividade mede a **INCLINAÇÃO DO PLANO**. Notem que a vista em v.g. dessa reta mostra uma **VISTA BÁSICA** da reta de cota constante do plano (BC) e também uma **VISTA BÁSICA DO PRÓPRIO PLANO ABC**, que se reduz a uma reta em  $\pi_2$ .

A **DECLIVIDADE** do plano também é a declividade da sua reta de máxima inclinação, ou seja, a tangente do seu ângulo de inclinação.

Destaquemos ainda que o plano de cota constante tem inclinação de  $0^\circ$  e o básico tem inclinação de  $90^\circ$ .

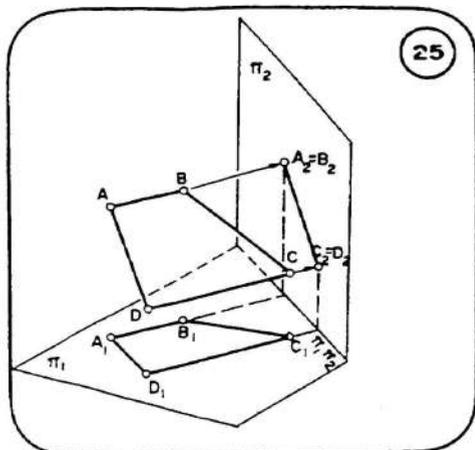
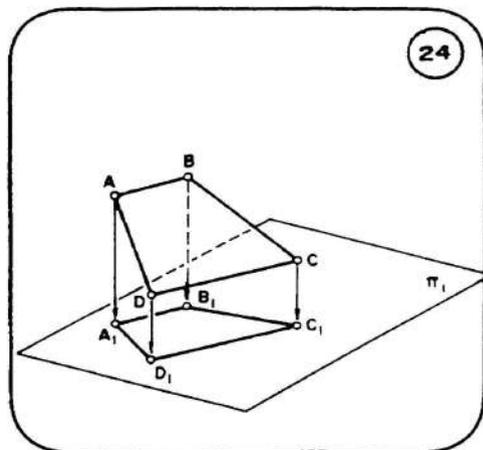
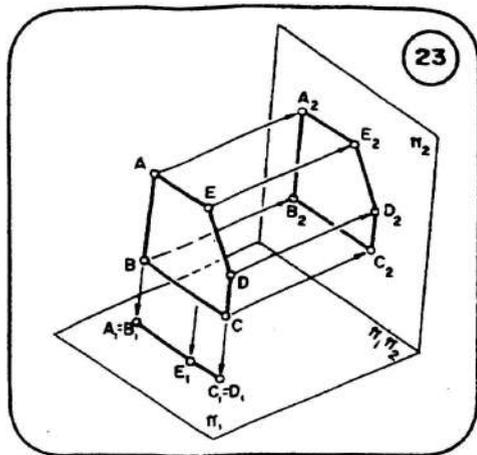
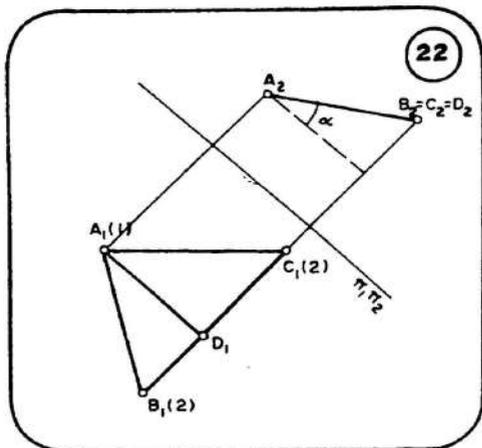
### 1.10. Verdadeira Grandeza de Figuras Planas

Em um plano de cota constante todas as figuras se projetam em  $\pi_1$  em v.g. Todos os seus lados e ângulos podem ser medidos diretamente na projeção principal.

Se o plano está perpendicular a  $\pi_1$  (em vista básica) já sabemos que todos os pontos e retas desse plano se projetam em uma única reta (fig. 23). Para obter uma cópia exata da figura teremos de obter uma projeção secundária em um plano  $\pi_2$  paralelo ao plano da figura. Basta que a linha de terra ( $\pi_1 \pi_2$ ) seja paralela à projeção principal do plano. Devemos insistir na observação de que, se  $\pi_1 \pi_2$  não for paralela a  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ , a projeção em  $\pi_2$  deformará os lados e ângulos do polígono ABCDE.

No caso geral de um plano inclinado, o problema se complica. A figura ABCD, sendo um plano inclinado, não é projetada com todos os seus lados e ângulos em verdadeira grandeza, em  $\pi_1$  (fig. 24). Pior ainda: não há nenhuma direção de linha de terra que consiga um plano de projeção secundário paralelo ao plano da figura.

Para obter a verdadeira grandeza de uma figura plana assim teremos que fazer duas novas projeções.

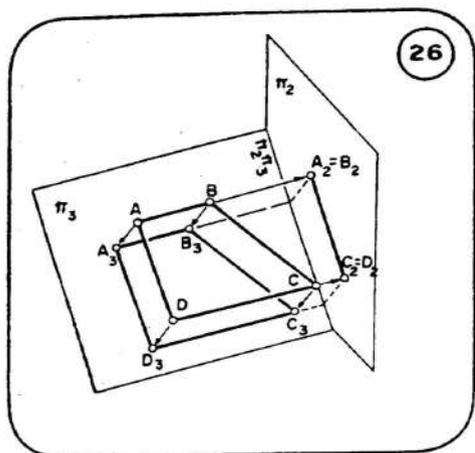


Primeiro, teremos que conseguir uma vista básica do plano inclinado, isto é, uma projeção secundária em que toda a figura se projete em uma só reta. Para conseguir isso é necessário tomar  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular às retas de cota constante da figura. No caso (fig. 25), AB e CD têm cota constante. Tomando  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $A_1B_1$  e  $C_1D_1$ , garantiremos que AB e CD se projetam em vista básica. Toda a figura se projetará na reta  $A_2B_2C_2D_2$ .

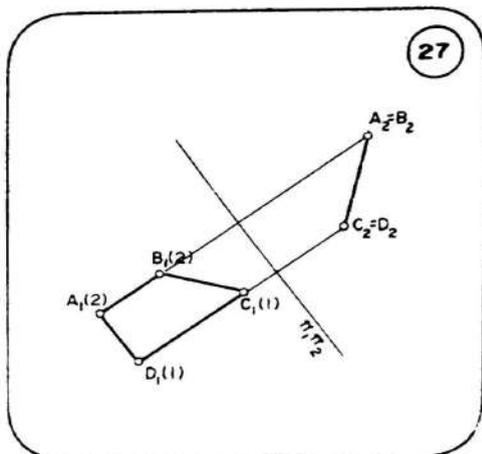
Em seguida desprezamos  $\pi_1$  e passamos a considerar  $\pi_2$  como projeção principal. As cotas dos pontos passarão a ser suas distâncias a  $\pi_2$  (fig. 26). Bastará tomarmos  $\pi_2 \pi_3$  paralela a  $A_2B_2C_2D_2$  e projetarmos a figura em  $\pi_3$ , o qual, sendo paralelo ao plano da figura, mostrará esta em verdadeira grandeza, ou seja, será uma VISTA EM V.G. do plano.

Vejamos como proceder em é pura.

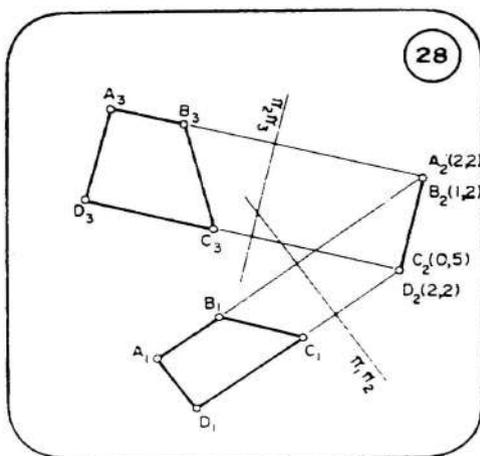
Partindo de  $A_1B_1C_1D_1$  com suas respectivas cotas (fig. 27), para chegarmos à vista básica do seu plano tomamos  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $A_1B_1$  e  $C_1D_1$  de cotas constantes. Passando as linhas de chamada e marcando as



26



27



28

cotas acima da linha de terra, obtemos  $A_2B_2C_2D_2$ .

Agora vamos inverter a situação, passando a considerar  $\pi_2$  como o plano principal e  $\pi_1$  como secundário. Então as cotas dos pontos passarão a ser medidas pelas distâncias respectivas de  $A_1, B_1, C_1$  e  $D_1$  à linha de terra. A figura 28 mostra essas medidas em centímetros colocadas ao lado de  $A_2, B_2, C_2$  e  $D_2$ . Passamos então  $\pi_2 \pi_3$  paralela a  $A_2B_2C_2D_2$  e tiramos desses pontos as novas linhas de chamada, marcando nelas  $A_3, B_3, C_3$  e  $D_3$  com as novas cotas medidas a partir de  $\pi_2 \pi_3$ . Temos então a vista em v.g. da figura dada.

Chamamos a atenção para a notação das linhas de terra. A primeira foi chamada  $\pi_1 \pi_2$  porque o plano  $\pi_2$  foi introduzido a partir de  $\pi_1$ . A segunda foi denominada  $\pi_2 \pi_3$  porque  $\pi_3$  formou diedro com  $\pi_2$ , e não com  $\pi_1$ .

Na prática não precisamos escrever as novas cotas em  $\pi_2$ . Após passarmos  $\pi_2 \pi_3$ , podemos transportar a compasso a distância de  $A_1$  a  $\pi_1 \pi_2$  diretamente para  $A_3$  a partir  $\pi_2 \pi_3$ , fazendo o mesmo para os outros pontos da figura.

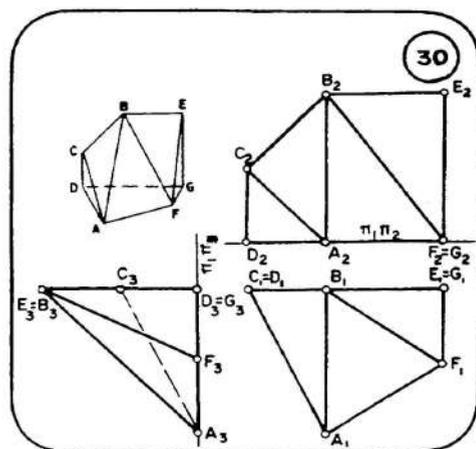
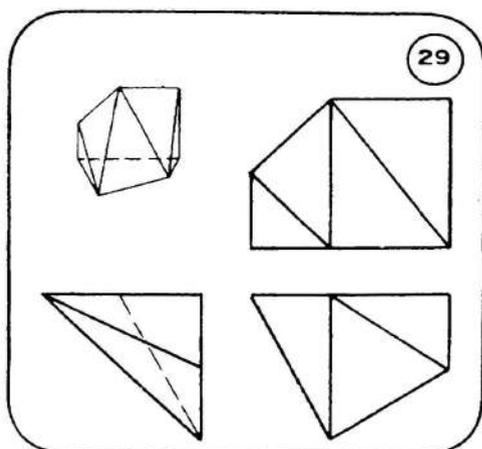
## 1.11. Exercícios Resolvidos

1.11.1 — Representar o sólido dado no sistema mongeano (fig. 29) através de uma única projeção cotada.

### RESOLUÇÃO

A primeira preocupação é identificar cada vértice nas três vistas dadas. É o que mostra a figura 30, onde cada vértice do sólido recebe uma letra distinta.

O passo seguinte é definir a linha de terra  $\pi_1 \pi_2$ , que poderia ser tomada entre as duas vistas a qualquer distância de cada uma delas. A figura 30 mostra a mais simples posição, encostada na vista em  $\pi_2$ . Assim, como as cotas dos vértices vão ser medidas a partir de  $\pi_1 \pi_2$ , os pontos A, D, F e G já terão cota nula. Como a outra vista secundária  $\pi_3$  também permite medir as cotas, se preferirmos trabalhar nela teremos de tomar  $\pi_1 \pi_3$  também passando por  $A_3, D_3, F_3$  e  $G_3$ , para não entrar em choque com  $\pi_2$ .



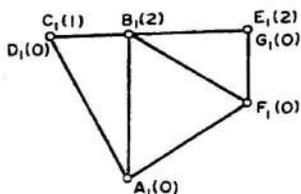
Podemos logo escrever a cota 0 ao lado de  $A_1, D_1, F_1$ , e  $G_1$  (fig. 31) Quanto às cotas de B, de C e de E basta-nos medir as distâncias de  $B_2, C_2$  e  $E_2$  a  $\pi_1 \pi_2$ , em centímetros, e escrevê-las ao lado de  $B_1, C_1$  e  $E_1$ , completando a representação cotada.

1.11.2 — Determinar as cotas dos vértices do sólido da figura 30 se a linha de terra for tomada passando em  $C_2$ .

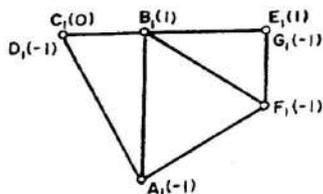
### RESOLUÇÃO

Em tal situação de  $\pi_1 \pi_2$  os pontos A, D, F e G ficam com cotas negativas (-1 cm), C com cota nula e E e B com cota positiva (fig. 32).

31



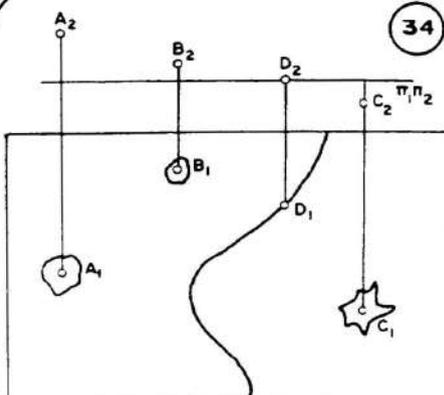
32



33



34



Comparando essa figura com a 31, observamos que todos os pontos tiveram suas cotas diminuídas 1 cm, distância que subiu a linha de terra.

Observemos que o objeto em estudo não se modifica quando todos os seus pontos têm sua cota aumentada ou diminuída em um mesmo número de centímetros, pois tal operação apenas significa seu afastamento ou aproximação de  $\pi_1$  ..

1.11.3 – Na planta da figura 33  $\pi_1$  é a superfície livre do mar e as cotas estão medidas em metros. Determinar:

- Uma projeção secundária dos pontos A, B, C e D.
- As cotas desses pontos na preamar e na baixamar, se for de 5 m a variação total da maré local.

### RESOLUÇÃO

Pela conformação do mapa, A e B são os pontos mais altos de uma ilha e C é o ponto mais profundo de um lago. O ponto D não teve sua cota indica-

da, mas esta deverá ser nula por estar esse ponto na linha do litoral, e portanto ao nível médio do mar.

A escala indicada abaixo do mapa significa que todas as medidas reais estão no desenho reduzidas 10.000 vezes. Cada milímetro na planta representa 10.000 mm na região representada, ou seja, 10 m.

Para o item a, poderíamos tomar qualquer linha de terra  $\pi_1 \pi_2$  (fig. 34) e tirar de cada ponto da planta a linha de chamada perpendicular a  $\pi_1 \pi_2$ . As cotas devem então ser marcadas a partir da linha de terra, lembrando que cada milímetro significa 10 metros. Portanto  $A_2$  ficará 6,5 mm acima de  $\pi_1 \pi_2$ .  $B_2$  a 2 mm,  $D_2$  na própria linha e  $C_2$  3 mm abaixo, por ter cota negativa.

Para o item b devemos raciocinar que o nível do mar subirá 2,5 m na preamar (maré alta) e descerá 2,5 m na baixamar (maré baixa), já que a variação total é de 5 m. Então, se  $\pi_1$  sobe 2,5 m na preamar, todas as cotas ficarão diminuídas nessa medida. O ponto A ficará com cota 62,5 m, B com 17,5 m, D com -2,5 m e C com -32,5 m. Na baixamar é o inverso: todas as cotas aumentarão 2,5 m. As cotas passarão a ser 67,5 m, 22,5 m, 2,5 m, e -27,5 m, respectivamente.

1.11.4 — No sólido da figura 31 (repetido na figura 35), identificar a posição de cada uma de suas arestas, determinando sua verdadeira grandeza e inclinação.

## RESOLUÇÃO

a) Retas de cota constante: DG, GF, FA, AD e BE. Todas essas estão em v.g. no  $\pi_1$ , e medidas diretamente no desenho conduzem aos seguintes comprimentos:  $\overline{DG} = 2,5$  cm,  $\overline{GF} = 1,0$  cm,  $\overline{FA} = 1,8$  cm,  $\overline{AD} = 2,2$  cm e  $\overline{BE} = 1,5$  cm. A inclinação de todas é  $0^\circ$ .

b) Retas básicas: EG e CD.

Para determinar sua v.g. poderíamos obter qualquer projeção secundária, mas é mais rápido obter essas medidas pela diferença de cota entre seus extremos. Assim,  $\overline{EG} = 2$  cm e  $\overline{CD} = 1$  cm. A inclinação de qualquer reta básica é  $90^\circ$ .

c) Retas inclinadas: BC, EF, BF, BA e CA.

BC aparece em v.g. no  $\pi_2$ , tomando-se  $\pi_1 \pi_2$  paralela a  $B_1 C_1$ .  $B_2 C_2$  fornece a v.g. ( $\overline{BC} = 1,4$  cm) e a inclinação  $\alpha = 45^\circ$ . (fig. 36).

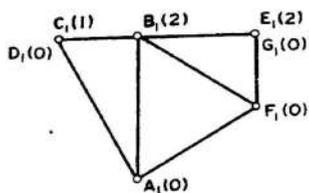
Uma mesma linha de terra  $\pi_1 \pi_3$  é paralela a  $E_1 F_1$  e a  $B_1 A_1$ . Então em  $\pi_3$  teremos  $E_3 F_3$  e  $B_3 A_3$  em v.g. Logo  $\overline{EF} = 2,2$  cm e  $\overline{BA} = 2,8$  cm, sendo suas inclinações  $\beta = 64^\circ$  e  $\gamma = 45^\circ$ .

BF e CA exigem linhas de terra distintas:  $\pi_1 \pi_4$  paralela a  $B_1 F_1$  e  $\pi_1 \pi_5$  paralela a  $C_1 A_1$  (fig. 37), as quais determinam  $B_4 F_4$  e  $C_5 A_5$  em v.g.

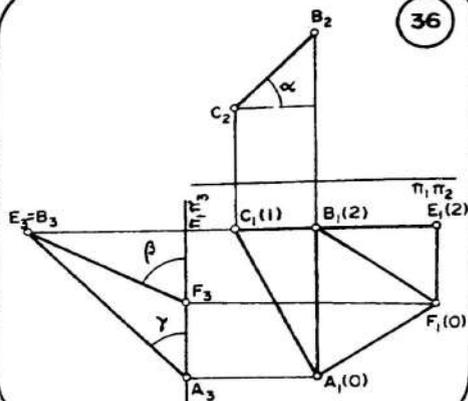
Medindo no desenho teremos  $\overline{BF} = 2,7$  cm e  $\overline{CA} = 2,5$  cm, com inclinações respectivas  $\delta = 49^\circ$  e  $\epsilon = 24^\circ$ .

1.11.5 — Em uma cidade temos os pontos assinalados (fig. 38). A plan-

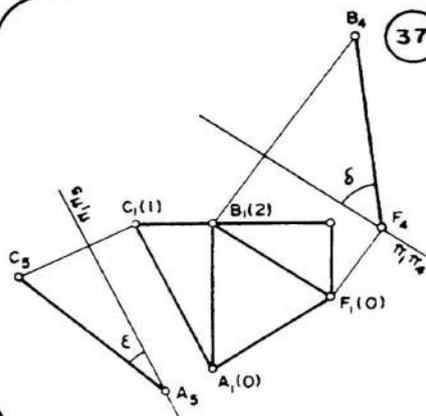
35



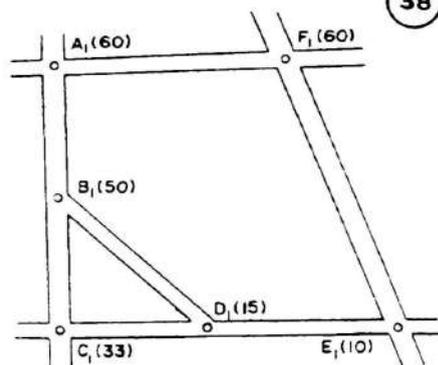
36



37



38



ta está na escala 1/5.000, com as cotas em metros. Um veículo está no ponto E e precisa ir ao ponto A, mas não pode vencer uma declividade superior a 20%.

Determinar:

- Se ele pode chegar ao seu destino e, em caso positivo, quais os seus possíveis trajetos.
- Quais as diferenças em metros entre os trajetos de E a A.

## RESOLUÇÃO

Os caminhos possíveis de E a A são EFA, EDDBA e EDCBA. No primeiro, o trecho FA tem cota constante (logo, declividade nula). É preciso ver se EF tem declividade acessível ao veículo. Segundo a fórmula da declividade (item 1.5) teremos para EF:

$$d_{EF} = \frac{\text{cota F} - \text{cota E}}{E_1 F_1} = \frac{60 - 10}{E_1 F_1} = \frac{50}{195} = 0,26$$

**OBSERVAÇÃO:** Lembrar que  $E_1 F_1$  deve ser medido na própria rua, e em metros, que é a unidade de medida das cotas. Sendo a escala da planta de 1/5.000, cada milímetro nela medido corresponde a 5.000 mm = 5 m. O denominador da fórmula acima foi obtido medindo  $E_1 F_1$  na planta, em milímetros, e multiplicando por 5, para obter essa distância real em metros.

A declividade obtida pode ser expressa em porcentagem, multiplicando-se o valor obtido por 100. Teremos assim 26% para a declividade do trecho EF, o que não permitirá o acesso do veículo.

Pela mesma fórmula calcularemos as declividades de cada segmento dos outros percursos, obtendo:

$$d_{ED} = 4\% \quad d_{DB} = 27\% \quad d_{BA} = 11\% \quad d_{DC} = 20\% \quad d_{CB} = 19\%.$$

Como o trecho DB é inacessível ao veículo, restará o trajeto EDCBA, em que todos os segmentos estão com declividade até 20%.

Para responder ao ítem b teremos que obter a vista em v.g. de cada segmento dos três percursos e medí-los em milímetros. Convertidos a metros pela multiplicação por 5, serão adicionados para obter o total de cada trajeto, em metros. Os resultados serão:

$$EFA = 345 \text{ m}; \quad EDBA = 342 \text{ m}; \quad EDCBA = 393 \text{ m}.$$

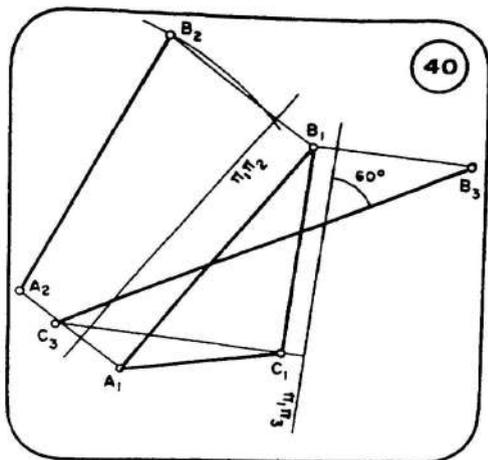
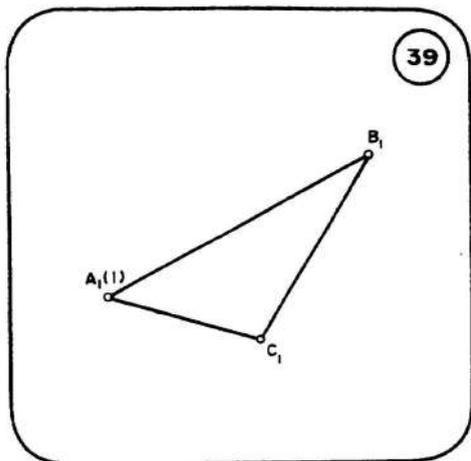
Portanto do 1º trajeto para o 2º há uma diferença de 3 m e do 2º para o 3º uma diferença de 51 m.

1.11.6 — Na figura 39, determinar as cotas de B e C, sabendo-se que  $AB = 4 \text{ cm}$  e que a inclinação de BC é de  $60^\circ$ . A cota de B deve ser maior que a de A e a de C menor que a de B.

## RESOLUÇÃO

Passando  $\pi_1 \pi_2$  paralela a  $A_1 B_1$  (fig. 40) sabemos que  $A_2 B_2$  deverá medir 4 cm, pois é uma vista em v.g. de AB. Centrando o compasso em  $A_2$  e com o raio de 4 cm cortamos a linha de chamada tirada de  $B_1$  em dois pontos que serviriam para  $B_2$ . Como somente o mais alto tem cota maior do que A fica definida uma só posição para  $B_2$ , que já fornece a cota de B (1,7 cm).

Com essa cota de B podemos tomar uma vista em v.g. de BC, passando  $\pi_1 \pi_3$  paralela a  $B_1 C_1$ . Marcando  $B_3$  por meio da cota e tirando desse ponto uma reta que forme  $60^\circ$  com a linha de terra, estamos com  $B_3 C_3$  definida.  $C_3$  está na linha de chamada de  $C_1$  e abaixo de  $\pi_1 \pi_3$ , o que dá uma cota negativa para C (-3,2 cm). Observem que o ângulo de  $60^\circ$  marcado para o outro lado de  $B_1 B_3$  acarretaria para C uma cota maior que a de B, contrariando uma condição do enunciado.



1.11.7' – Do ponto A no fundo de um depósito cilíndrico a 6 m de altura desce um cano de descarga de 6 m de comprimento para um outro depósito de altura 3 m.

Determinar o ponto em que tal cano atinge a tampa do depósito inferior e a inclinação do mesmo.

### RESOLUÇÃO

Na escala dada (1/200) cada centímetro na figura representa 200 cm = 2 m na realidade.

Tomando uma vista em v. g. do cano (fig. 42), do ponto  $A_2$  de cota 6 m basta traçar um arco de circunferência de 6 m de raio (3 cm no desenho) que definirá na cota de 3 m (tampa do tanque menor) o ponto  $B_2$ . A linha de chamada de  $B_2$  definirá o ponto B na planta ( $B_1$ ). A inclinação do cano é a medida do ângulo  $\alpha$ .

1.11.8 – No triângulo ABC (fig. 43).

Determinar a direção das seguintes cevianas do vértice A:

- A altura
- De declividade de 60%
- De comprimento 3,5 cm.

### RESOLUÇÃO

a) A altura é a perpendicular de A ao lado BC. Sendo este de cota constante, é paralelo a  $\pi_1$ . Sua perpendicular forma ângulo reto também em projeção. Então AD é a solução (fig. 44).

b) A ceviana de declividade 60% (ou 0,6), se chamarmos seu extremo de E, conduzirá à aplicação da fórmula da declividade:

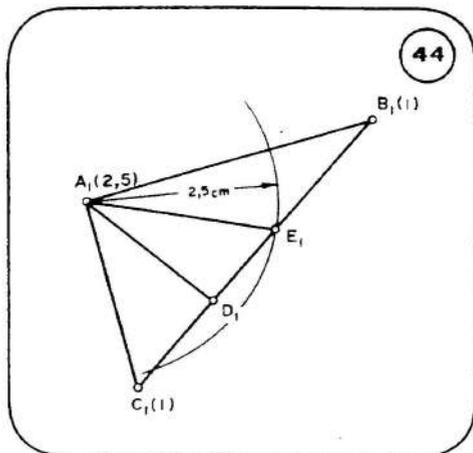
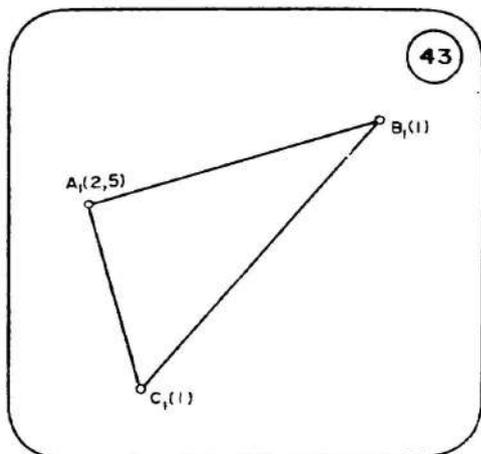
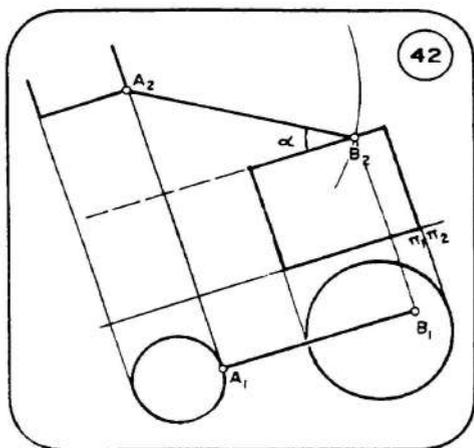
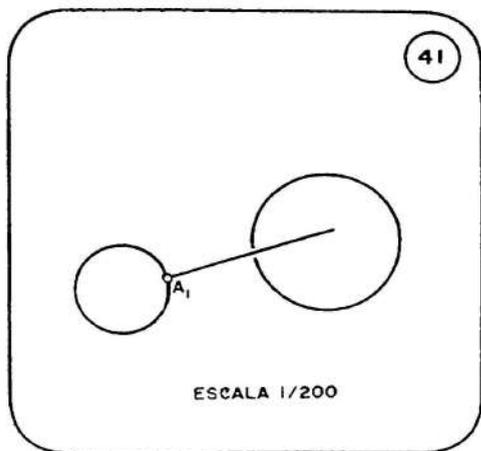
$$d_{AE} = \frac{\text{cota A} - \text{cota E}}{A_1 E_1} = 0,6$$

Como E está no lado BC sua cota é também 1 cm.

Então:

$$\frac{2,5 - 1}{A_1 E_1} = 0,6 \quad \text{donde} \quad A_1 E_1 = \frac{1,5}{0,6} = 2,5 \text{ cm}$$

Graficamente, basta-nos centrar o compasso em  $A_1$  e com raio de 2,5 cm cortar o lado  $B_1 C_1$ . Haveria uma segunda solução no outro ponto em que o raio interceptasse  $B_1 C_1$ . A direção da ceviana pedida é  $A_1 E_1$ .



c) A verdadeira grandeza da ceviana não permite usar uma vista em v.g., uma vez que não sabemos sua direção.

Sabemos, entretanto, que na vista em v.g. teríamos um triângulo retângulo do qual conhecemos um cateto (diferença de cota, 1,5 cm) e a hipotenusa (verdadeira grandeza 3,5 cm). Podemos construir um triângulo igual à parte da projeção (fig. 45) e determinar o tamanho do outro cateto. Chamando de AF a ceviana pedida, tal cateto é o comprimento de  $A_1 F_1$ . Centrando o compasso em  $A_1$ , determinamos com raio  $A_1 F_1$  o ponto  $F_1$  em  $B_1 C_1$ . A direção da ceviana pedida é  $A_1 F_1$ .

1.11.9 – No sólido da figura 31 (repetido na 46), identificar a posição de cada uma de suas faces planas, determinando sua direção e inclinação.

### RESOLUÇÃO

a) Face de cota constante.

Só existe uma no sólido: sua base no plano  $\pi_1$ , cujos vértices são aqueles de cota 0 (DGFA). Já sabemos que não tem direção definida e a inclinação é nula.

b) Faces em vista básica.

Temos três: ADC, EFG e BEGDC. Como se reduzem a uma reta em  $\pi_1$ , suas direções respectivas são  $A_1 D_1$ ,  $F_1 G_1$  e  $G_1 D_1$ . A inclinação é de  $90^\circ$ .

c) Faces em plano inclinado.

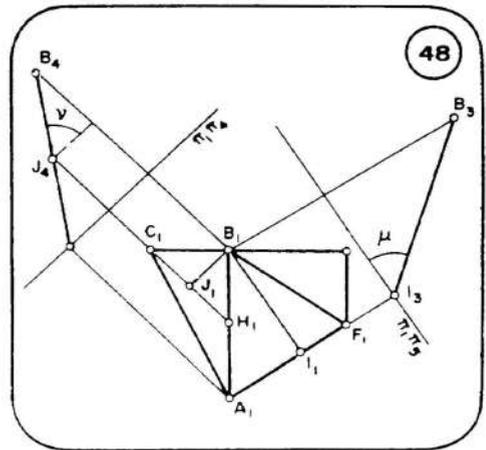
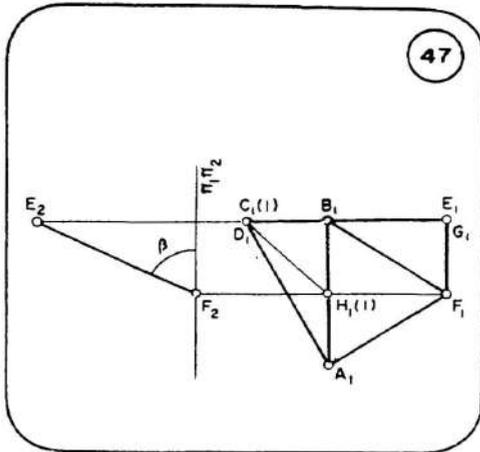
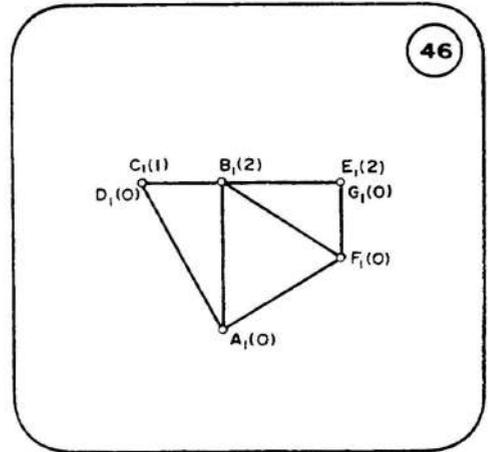
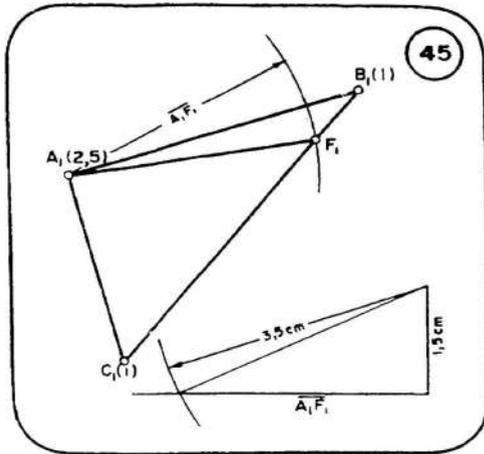
Temos também três: ABC, ABF e BEF. As direções são as de suas retas de cota constante. Então a direção de ABF é  $A_1 F_1$  (AF tem cota constante 0) e a direção de BEF é  $B_1 E_1$  (BE tem cota constante 2 cm). Mas ABC não tem nenhum de seus lados de cota constante: Entretanto, quem percorre a aresta AB encontra, a meio caminho entre A (cota 0) e B (cota 2 cm), o ponto H de cota 1 cm (fig. 47). Unindo C a H obtemos uma reta de cota constante (1 cm) na face ABC. Então  $C_1 H_1$  é a direção de ABC.

Para determinar a inclinação temos de achar uma reta de máxima inclinação de cada face. Sabemos que é sempre perpendicular à reta de cota constante da face. Para BEF o próprio lado EF é reta de máxima inclinação, já que é perpendicular a BE (de cota constante). Tomando uma vista em v.g. de EF (fig. 47 — página seguinte) sua inclinação será a medida do ângulo  $\beta$ , que é a própria inclinação da face BEF.

Na face ABF, BI é uma reta de máxima inclinação — (fig. 48). A sua vista em v.g. determina a inclinação  $\mu$  da face. Em ABC tiramos a reta BJ de máxima declividade e determinamos a inclinação  $\nu$  dessa face na projeção em  $\pi_4$ , vista em v.g. de BJ.

1.11.10 – A figura 49 é a planta do telhado de uma casa (cotas em metros). A declividade da face que desce para o bordo AB é 60%.

Determinar:



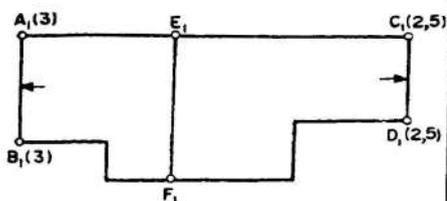
- A cota da cumeeira,  $EF$ , em metros.
- A declividade da face que desce para o bordo  $CD$
- A área real de cada uma das faces.

## RESOLUÇÃO

a) A reta  $AE$  é de máxima declividade da face do telhado, pois é perpendicular a  $AB$ , de cota constante.

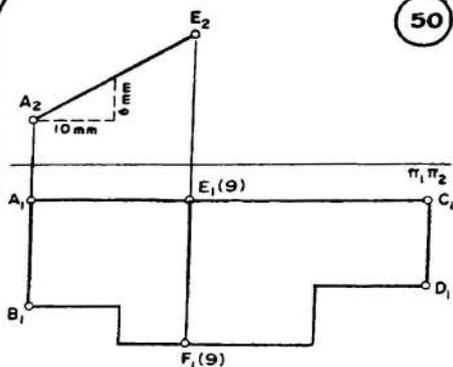
Tomemos uma vista em v.g. de  $AE$ , passando  $\pi_1\pi_2$  paralela a  $A_1E_1$  (fig. 50). Após marcar  $A_2$  pela cota (cada mm representa 500 mm = 0,5 m) podemos construir um triângulo retângulo de cateto horizontal medindo 10 mm e o vertical 6 mm (com isso a tangente de seu ângulo será 0,6, valor dado para a declividade). A hipotenusa será a direção de  $A_2E_2$ , e nela o ponto  $E_2$  estará determinado na linha de chamada de  $E_1$ . Medindo sua altura acima

49



ESCALA 1/500

50



de  $\pi_1 \pi_2$  em mm e multiplicando essa medida por 0,5 teremos a cota de E (e de F) em metros (9 m).

b) Com a cota da cumeeira podemos aplicar a EC, reta de máxima declividade da outra face do telhado, a fórmula da declividade:

$$d_{EC} = \frac{\text{cota E} - \text{cota C}}{E_1 C_1}$$

$$d_{EC} = \frac{9 - 2,5}{15} = \frac{6,5}{15} = 0,43 = 43\%$$

Também poderíamos achar essa declividade através do ângulo de inclinação medido em  $\pi_2$  (fig. 51).

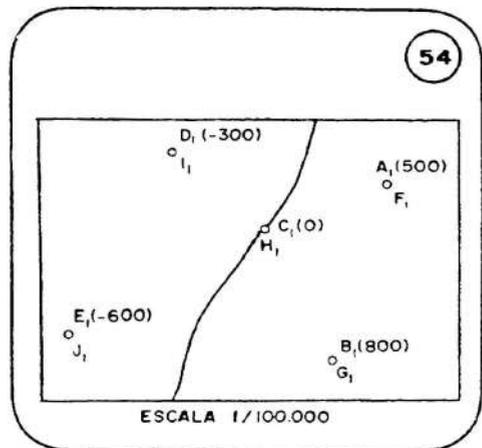
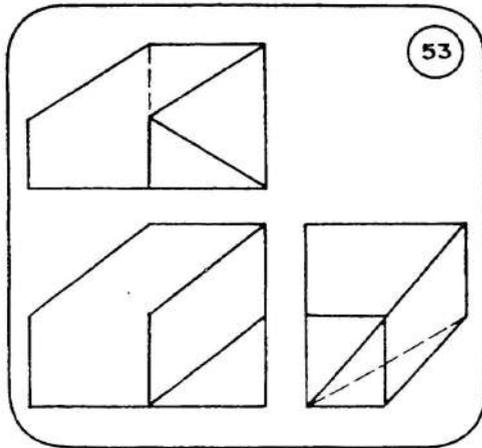
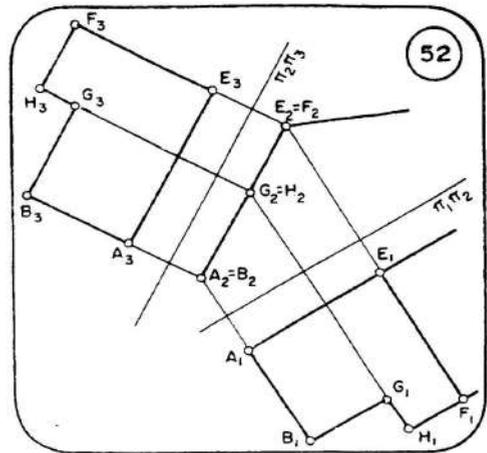
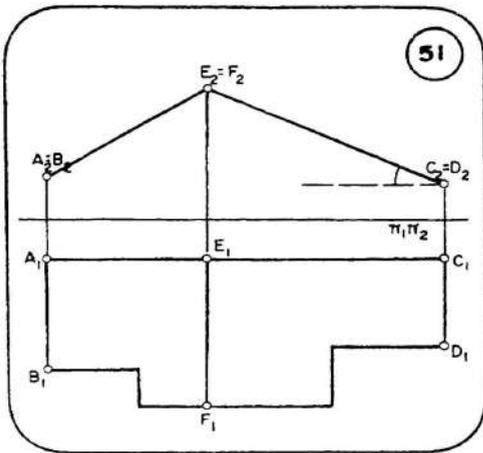
c) Para a área das faces poderíamos tomar uma vista em v.g. do plano. Na figura 51 já temos as faces em vista básica. Isolando a primeira face (fig. 52), poderíamos projetar em  $\pi_2$  os vértices G e H, que logicamente estarão situados na reta única ( $A_2 E_2$ ) a que se reduziu a face em  $\pi_2$ . Passando a considerar  $\pi_2$  como projeção principal, tomamos  $\pi_2 \pi_3$  paralela a  $A_2 E_2$  e conseguimos  $A_3$  tal que de  $A_3$  a  $\pi_2 \pi_3$  haja a mesma distância que de  $A_1$  a  $\pi_1 \pi_2$ . Da mesma forma achamos os demais pontos em  $\pi_3$ , obtendo a verdadeira grandeza da face.

Resta lembrar que a área obtida deve ser multiplicada por 250.000, pois os lados estando reduzidos 500 vezes na figura, a área o estará 500 x 500.

Com o mesmo procedimento acharíamos a área da outra face.

## 1.12. EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.12.1. Representar o sólido dado no sistema mongeano (fig. 53) através de uma única projeção cotada.



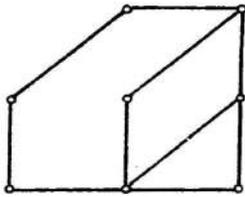
### RECOMENDAÇÃO

Praticar o mesmo tipo de exercício com as diversas peças representadas nos vários sistemas de representação do volume 1 da GEOMETRIA GRÁFICA TRIDIMENSIONAL.

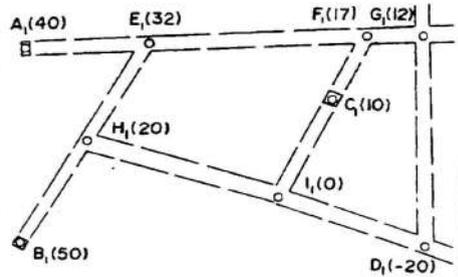
1.12.2. — Em um campo petrolífero representado na planta (fig. 54) as cotas estão em metros. Cinco poços foram abertos nos pontos A, B, C, D e E. As profundidades respectivas desses poços são 1.200 m, 600 m, 500 m, 200 m e 150 m. Determinar as cotas dos fundos desses poços (pontos F, G, H, I e J) e uma projeção secundária de todos os pontos da planta.

1.12.3. — No sólido da figura 53, repetido na figura 55, identificar a posição de cada uma de suas arestas, determinando sua verdadeira grandeza e inclinação.

55



56



ESCALA 1/2000

## RECOMENDAÇÃO

Praticar este mesmo exercício em outros sólidos.

1.12.4. — Numa mina temos a rede de galerias mostrada na planta (fig. 56), com as cotas em metros. Os pontos A e B são entradas da mina e C é o fundo de um poço de 80 m de profundidade. Para extrair minério no ponto D, determinar o comprimento total de cada percurso possível, incluindo a extração pelo poço vertical em C. Determinar ainda a declividade do segmento de galeria de maior ângulo de inclinação.

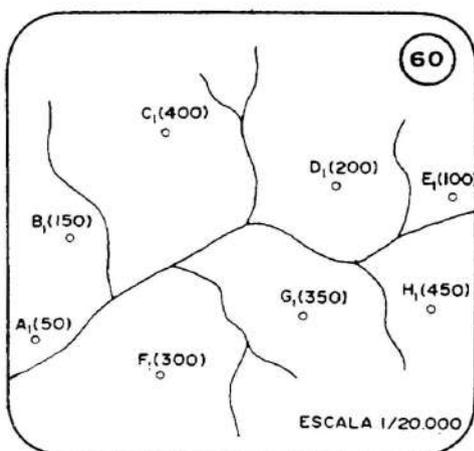
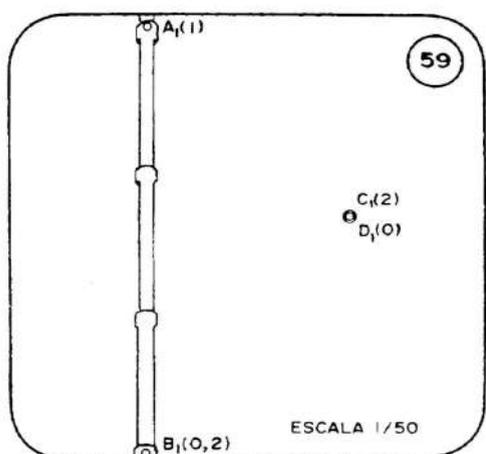
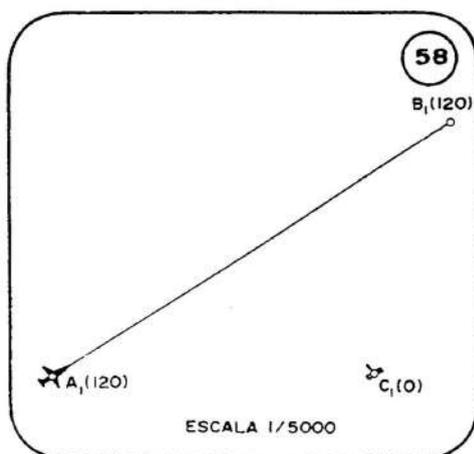
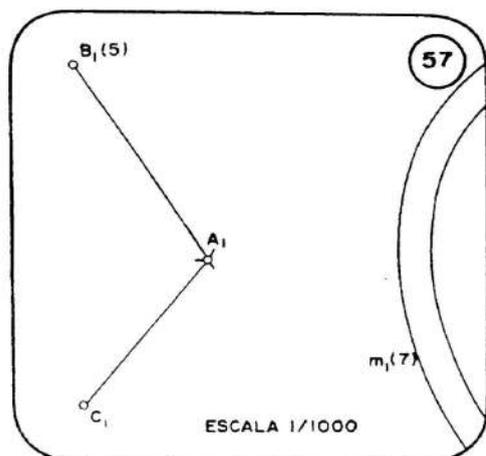
1.12.5. — Uma antena vertical em A, na figura 57 (cota em metros) deve ser equilibrada por três cabos, partindo para B, C e D (este último a determinar).

Sabe-se que os três cabos partem da antena no mesmo ponto e têm a mesma inclinação. O comprimento de AB é 50m.

Determinar a cota de C e a projeção  $D_1$ , sabendo-se que deve estar na margem da estrada m, de cota constante.

1.12.6. — Uma bateria anti-aérea em C (fig. 58) dispara contra um avião que se desloca de A para B. Sabendo-se que atira com inclinação de  $40^\circ$ , em que direções pode atingir o avião e em que pontos da sua trajetória este pode ser acertado?

1.12.7. — Na planta da figura 59 as cotas estão em metros: Um cano de descarga vertical CD precisa ser desviado usando um joelho de  $45^\circ$  e um cano de 2 m de comprimento para a tubulação de esgoto AB. Determinar a projeção desse cano.



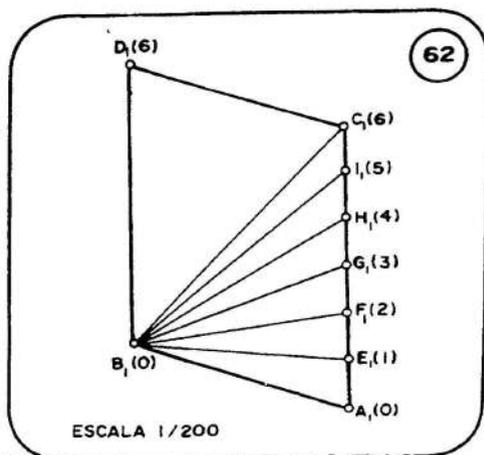
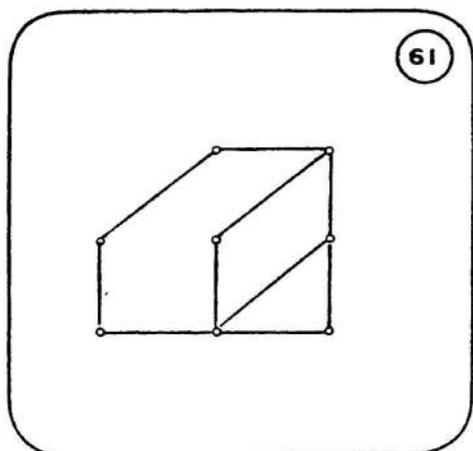
1.12.8. — Na planta da figura 60 as cotas estão em metros. Uma rede elétrica deve ser estendida do ponto A ao ponto E. Os outros pontos são elevações onde podem ser localizadas torres.

Desprezando as curvaturas dos fios, determinar os comprimentos das diferentes redes elétricas possíveis.

1.12.9. — No sólido da figura 53, repetido na figura 61, identificar a posição de cada uma de suas faces planas, determinando sua direção, inclinação e verdadeira grandeza.

## RECOMENDAÇÃO

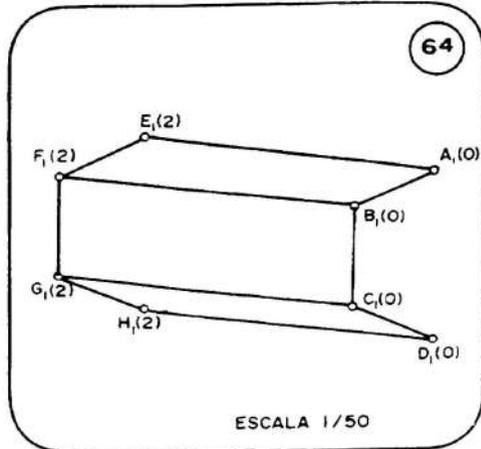
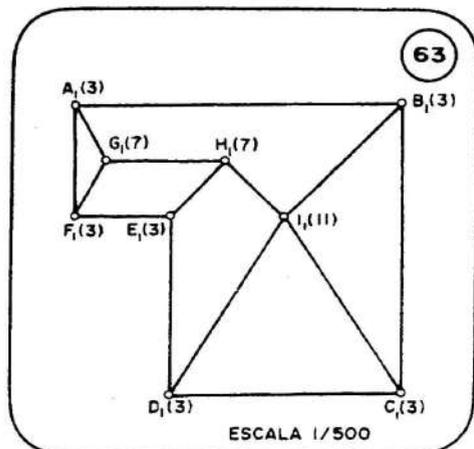
Praticar esse exercício em outros sólidos representados no volume 1.



1.12.10. — O paralelogramo ABCD da figura 62 está em planta, representando uma rampa.

Determinar:

- A declividade dessa rampa.
- Qual o menor caminho em zigue-zague, de declividade constante, entre aqueles que partem de B nas direções de E, F, H e I, capaz de subir a rampa arrastando um objeto, se a força propulsora não aguenta uma declividade superior a 20%



1.12.11. — A figura 63 é a planta do telhado de uma casa (cotas em metros). Determinar a declividade de cada face e o número de telhas que foram necessárias para completá-lo, sabendo-se que cada metro quadrado exige 26 telhas.

1.12.12. — A figura 64 é a planta de uma calha prismática (cotas em metros).

Determinar quantos  $m^2$  de chapa metálica foram necessários para sua confecção.

## 2. PERTINÊNCIA

### 2.1. Ponto Pertencente a Reta

Para reconhecer se um ponto dado pertence a uma reta definida em  $\pi_1$  podemos usar apenas  $\pi_1$ .

Nos casos de retas de cota constante e de retas básicas, como AB e CD (fig. 65) o reconhecimento é imediato. Em AB qualquer de seus pontos só poderá ter cota de 3 cm. Então E e F pertencem a AB, mas G não pertence. Para CD o reconhecimento da pertinência é ainda mais fácil, pois somente pontos superpostos a  $C_1$  e  $D_1$ , na projeção, podem pertence a essa reta.

Para uma reta inclinada teremos de fazer uma verificação gráfica para estabelecer-lhe a pertinência de um ponto dado.

Suponhamos a reta AB da figura 66.

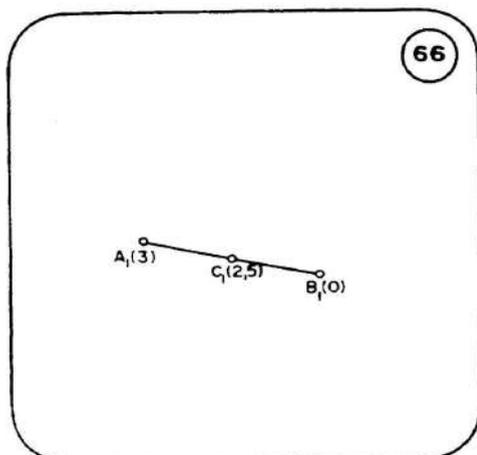
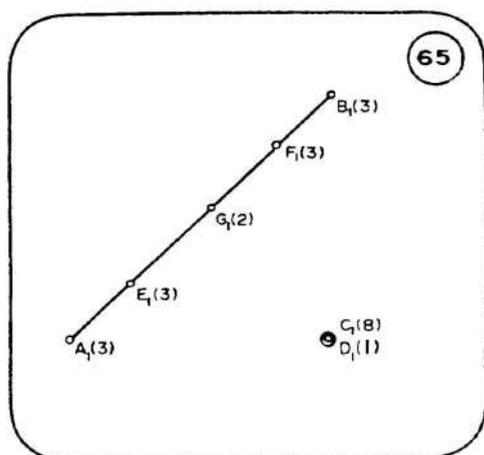
O ponto C pertence a AB?

Se a cota de C estivesse fora do intervalo entre as cotas de A e B poderíamos imediatamente negar a pertinência. De fato, quem percorre AB no sentido de B para A deve subir da cota 0 para a cota 3. Então há possibilidade de passar em C com a cota 2,5 cm.

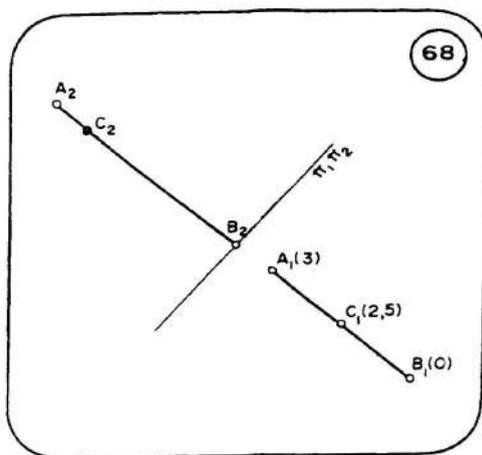
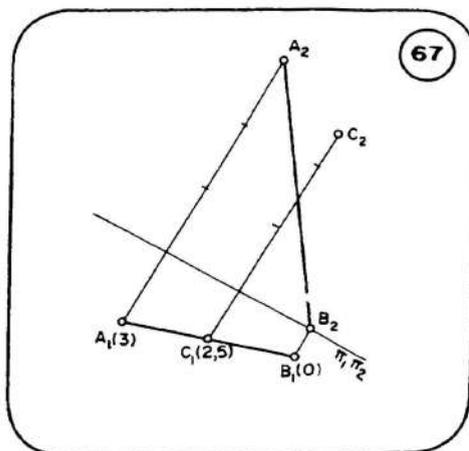
Utilizando qualquer vista secundária (não precisa ser a vista em v.g. de AB) notaríamos logo que  $C_2$  não pertence a  $A_2B_2$  (fig. 67), o que nega a pertinência de C a AB. Em nenhuma projeção um ponto de uma reta pode cair fora dela.

E se  $C_2$  pertencesse a  $A_2B_2$ ? Poderíamos garantir que C pertenceria a AB?

Há uma posição de  $\pi_1 \pi_2$  que não daria essa garantia. Vejam a figura



68, onde tomamos  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $A_1 B_1$ , mesma reta das figuras anteriores. Nessa posição da linha de terra  $C_2$  pertence a  $A_2 B_2$ , mas isso decorre de que A, B e C têm a mesma linha de chamada. Já sabemos que C não pertence a AB. Por conseguinte, nunca deveremos tomar  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $A_1 B_1$  para teste de pertinência.



## 2.2. Graduação de uma Reta – Intervalo

Dizíamos, na primeira frase do ítem 2.1, que só precisamos de  $\pi_1$  para reconhecer se um ponto pertence a uma reta.

Vamos mostrar agora como isso pode ser conseguido para uma reta inclinada. Voltando à reta AB (fig. 69) tomemos sua vista em v.g. ( $A_2 B_2$ ). Querendo determinar sobre ela os pontos de cota 2 cm e 1 cm, bastar-nos-ia passar paralelas a  $\pi_1 \pi_2$  com essas distâncias e determinar  $D_2$  e  $E_2$ . Linhas de chamadas estabeleceriam  $D_1$  e  $E_1$  em  $\pi_1$ .

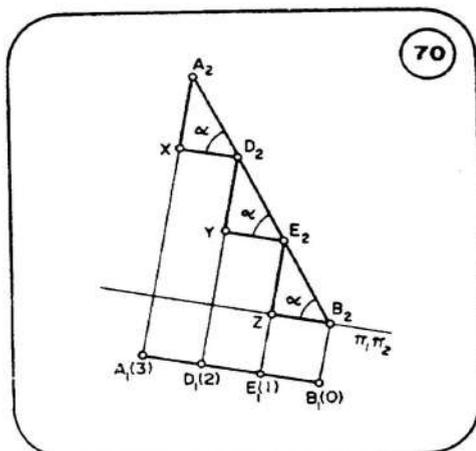
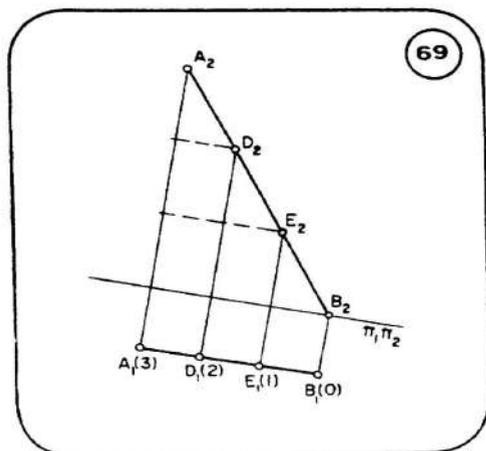
O que vocês observam comparando  $A_1 D_1$  com  $D_1 E_1$  e  $E_1 B_1$ ? Não acham iguais esses segmentos?

Na figura 70 destacamos os triângulos retângulos  $A_2 D_2 X$ ,  $D_2 E_2 Y$  e  $E_2 B_2 Z$ . Notaram que são congruentes? Todos têm um ângulo agudo igual ( $\alpha$ ) e o cateto oposto igual (1 cm). Então os seus catetos paralelos a  $\pi_1 \pi_2$  também são iguais ( $\overline{XD_2} = \overline{YE_2} = \overline{ZB_2}$ ). Como  $\overline{XD_2} = \overline{A_1 D_1}$ ,  $\overline{YE_2} = \overline{D_1 E_1}$  e  $\overline{ZB_2} = \overline{E_1 B_1}$ , está demonstrada a igualdade dos segmentos na projeção principal.

Essa distância constante, em  $\pi_1$ , entre os pontos de cotas inteiras consecutivas é denominada INTERVALO da reta.

Em cada triângulo retângulo destacado na figura 70 temos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = d_{AB} = \frac{1 \text{ cm}}{\text{INTERVALO}_{AB}}$$



Assim, desde que o intervalo seja medido na mesma unidade das cotas, a declividade de uma reta é o inverso do seu intervalo. Quanto maior o ângulo de inclinação, menor o intervalo de uma reta. Uma reta básica tem intervalo nulo e uma reta constante é de intervalo infinito. É possível conseguir uma reta qualquer que seja o intervalo dado.

Marcar sobre a projeção principal os pontos de cota inteira consecutivos é a operação chamada de GRADUAR UMA RETA.

Normalmente, nos livros do sistema de projeção cotada, as retas são dadas já graduadas, ou, como também se usa dizer, COM SUA ESCALA DE DECLIVE DADA.

Conhecidos os pontos de cota inteira consecutivos da reta, fica fácil localizar qualquer um de seus pontos só com o plano  $\pi_1$ .

Vamos supor o ponto C da figura 66, repetido na figura 71.

Como está no intervalo entre D e E, podemos interpolar a sua cota, subdividir o tal segmento em 10 partes, para leitura dos décimos de centímetro. Como  $C_1$  fica a 6 décimos de  $E_1$ , sua cota deveria ser 1,6 cm, se pertencesse a AB.

Teríamos descoberto a não pertinência de C à reta AB sem precisar de projeção secundária, pois a cota dada para esse ponto foi 2,5 cm.

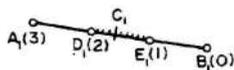
Com a reta graduada, podemos extrapolar pontos fora do segmento AB, prolongando-o nos dois sentidos para obter qualquer ponto da sua reta suporte.

### 2.3. Traço de uma Reta

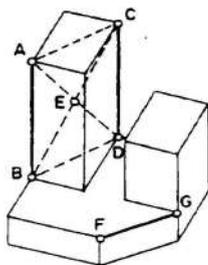
O ponto em que uma reta atravessa um plano é denominado "traço" dessa reta no plano.

Quando não é citado o plano, fica convencionado que o TRAÇO DE UMA RETA diz respeito ao plano  $\pi_1$ . Como todos os pontos de  $\pi_1$  têm cota

71



72



nula, podemos dizer que o **TRAÇO DE UMA RETA** é o seu ponto de cota zero.

Observemos que uma reta de cota constante não tem traço, ou, considerada outra forma de dizer, tem traço infinitamente afastado. Já uma reta básica tem como traço sua própria projeção.

#### 2.4. Retas Concorrentes, Paralelas e Reversas

Quando duas retas têm um ponto em comum são chamadas **CONCORRENTES**.

Tomando-se qualquer face plana do sólido, dois dos seus lados adjacentes são sempre retas concorrentes no vértice comum aos dois. Mesmo dois lados não adjacentes dessa face, se não forem paralelos, poderão ter suas retas suportes prolongadas até o encontro em um mesmo ponto. Duas diagonais dessa face também serão concorrentes (ressalvando sempre a hipótese do paralelismo). Generalizando, todas as retas de um mesmo plano são concorrentes ou paralelas.

No caso de retas em faces distintas, ainda pode ocorrer concorrência ou paralelismo entre elas.

Na figura 72, as arestas AB e CD são paralelas mas não estão na mesma face. Sempre que for possível passar um plano contendo as duas retas (como é o caso do plano ABDC) teremos retas, até mesmo fora das faces do sólido, mas concorrentes ou paralelas. É o caso das diagonais AD e BC do sólido, que concorrem no ponto E.

Um par de arestas como AB e FG nunca poderá ficar contido em um mesmo plano. Por mais que tais arestas sejam prolongadas, jamais se encontrarão. São retas **REVERSAS**. Não são paralelas mas não têm ponto em comum.

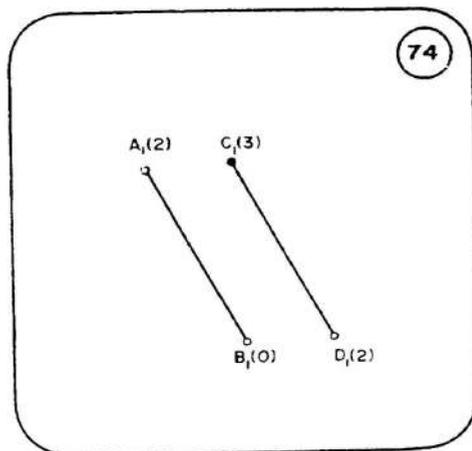
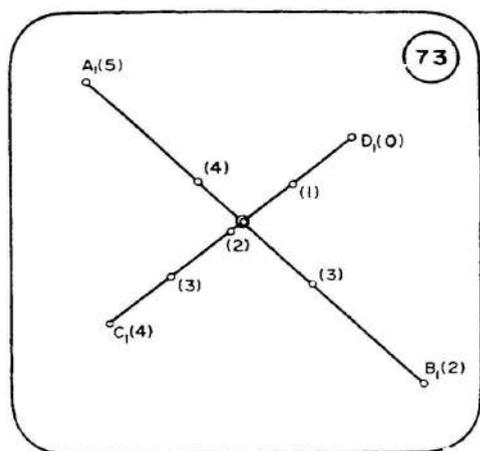
Em épura, como reconhecer se duas retas, independentes de faces, são concorrentes, paralelas ou reversas?

Se suas projeções não são paralelas, como AB e CD na figura 73, fica logo afastada a hipótese do paralelismo entre elas.

Para verificar a concorrência basta-nos graduar as duas retas. Como a diferença de cota entre A e B é 3 cm, há três intervalos nesse segmento. Dividindo-o em três partes iguais podemos notar que o cruzamento das duas retas, em AB, tem cota aproximada de 3,6 cm. Para CD, há quatro intervalos entre C e D. Dividido em 4 partes iguais, permite a localização do cruzamento com AB a uma cota aproximada de 1,8 cm. Não é possível haver concorrência entre AB e CD, uma vez que o único ponto que poderia pertencer às duas retas tem cota 3,6 cm numa delas e 1,8 cm na outra.

Assim, as retas da figura 73 são reversas.

Se preferíssemos usar uma projeção secundária para essa mesma constatação poderíamos tomar qualquer linha de terra (desde que não perpendicular a  $A_1B_1$  nem a  $C_1D_1$ ) e conseguir a nova vista das duas retas. Levantando a linha de chamada do ponto de cruzamento de  $A_1B_1$  com  $C_1D_1$ , veríamos que cada uma das duas retas estaria em altura diferente da linha de terra.



Por qualquer dos dois procedimentos, se ocorresse mesma cota para as duas retas no ponto de cruzamento das projeções elas seriam fatalmente concorrentes.

E se as projeções são paralelas?

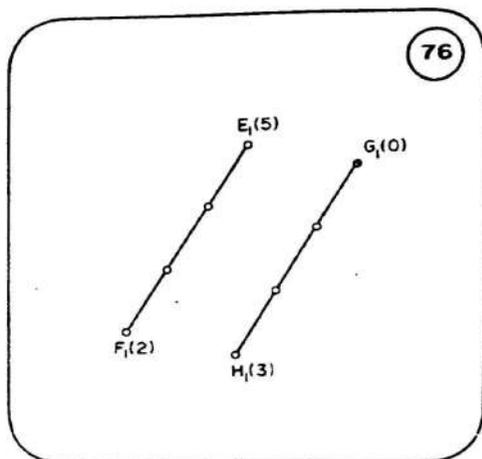
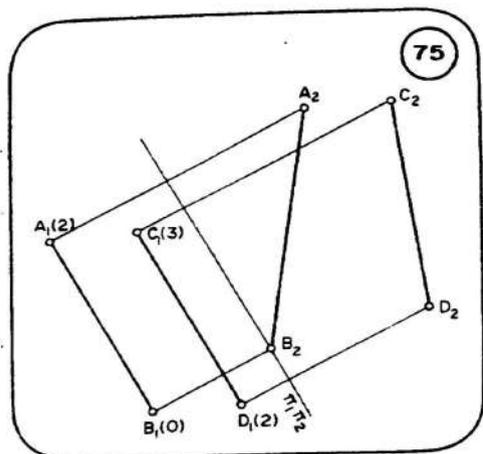
A figura 74 mostra  $A_1B_1$  paralela a  $C_1D_1$ . Tais retas nunca poderão ser concorrentes, mas podem ser paralelas ou reversas.

Se forem paralelas, em qualquer projeção ortogonal serão paralelas.

Tomando uma vista em v.g. das duas retas (fig. 75) notamos que  $A_2B_2$  não é paralela a  $C_2D_2$ . Então as retas são reversas.

Não é indispensável usar projeção secundária.

Retas paralelas devem ter a mesma inclinação, declividade e intervalo. Na projeção principal teríamos determinados os intervalos de AB e CD, comprovando sua desigualdade e conseqüente falta de paralelismo entre as retas.



Atentem para um detalhe importante: não é só o paralelismo em  $\pi_1$  e a igualdade dos intervalos que garante serem as retas paralelas. Se assim fosse, as retas EF e GH seriam paralelas (fig. 76). Apesar de terem o mesmo intervalo ELAS DESCEM EM SENTIDOS CONTRÁRIOS: a primeira desce de E para F e a segunda de H para G. Experimentem tomar a vista em v.g. dessas retas e notarão que as mesmas não são paralelas.

## 2.5. Retas Coplanares

As retas concorrentes e paralelas são reunidas em um só grupo, denominado de RETAS COPLANARES, uma vez que sempre será possível passar um plano que as contenha. Retas REVERSAS não podem estar em um mesmo plano, como já fizemos notar no ítem anterior.

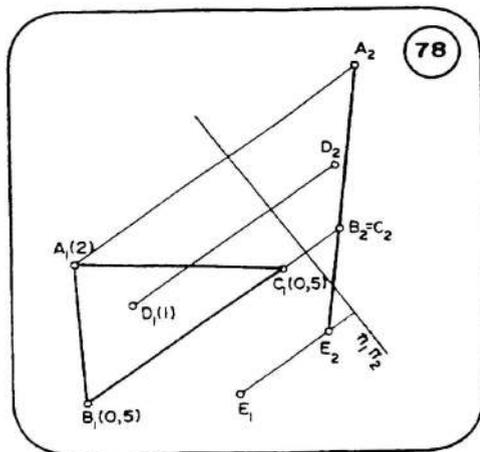
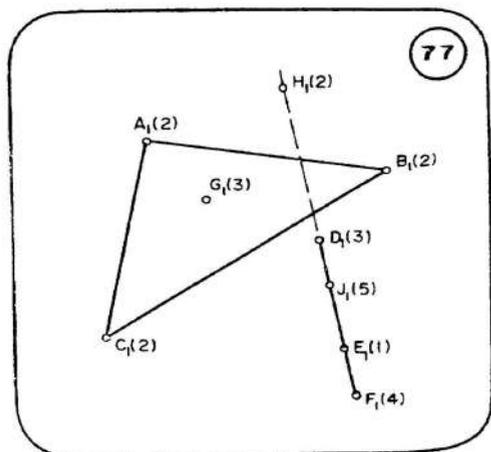
## 2.6. Ponto Pertencente a Plano

Reconhecer se um ponto em é pura pertence a um plano dado é imediato quando esse plano é de cota constante ou está em vista básica.

Na figura 77, o triângulo ABC tem cota constante e DEF está em vista básica. O ponto G não está no plano ABC, pois todos os seus pontos têm cota 2 cm. Já o ponto H pertence a esse plano, mesmo que não esteja no interior do triângulo ABC, desde que, geometricamente, o plano se estende indefinidamente em todas as direções. Para pertencer ao plano DEF qualquer ponto tem que se projetar na reta  $D_1E_1F_1$ , como J. Até o ponto H pertence a DEF, pois está no prolongamento de  $D_1E_1F_1$ .

No caso de um plano inclinado, sempre podemos tomar uma vista básica do mesmo. Qualquer ponto que se projete pertencendo a essa projeção (que se reduz a uma reta como sabemos) é um ponto pertencente a esse plano.

Na figura 78, podemos concluir que o ponto D não pertence ao plano



ABC, após termos tomado  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $B_1 C_1$  (lado de cota constante de ABC) e obtido  $A_2 B_2 C_2$ , reta essa que não contém  $D_2$ . Na mesma épura podemos determinar a cota de qualquer ponto para pertencer a ABC. Assim, para E pertencer ao plano ABC sua cota será negativa, porque a linha de chamada de  $E_1$  encontra o prolongamento de  $A_2 B_2$  em  $E_2$ , abaixo de  $\pi_1 \pi_2$ . A distância de  $E_2$  à linha de terra dá a sua medida.

A pertinência de ponto a plano pode ser mais demorada de se verificar se a direção do plano não for logo reconhecida. Se precisamos da vista básica e a obtenção desta é conseguida através de uma reta de cota constante do plano, como fazer se não forem dados dois pontos de mesma cota (figura 79)?

Já sabemos obter em uma reta pontos de qualquer cota. Se acharmos em BC o ponto de mesma cota de A, teríamos a direção de ABC.

Entre B e C há 2,5 intervalos. Como dividir um segmento em 2,5 partes iguais? Basta dividí-lo em 5 partes iguais para ter cada uma com meio intervalo.

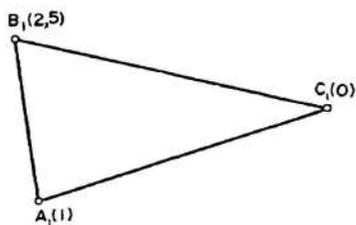
É o que mostramos na figura 80, obtendo os pontos D e E que graduem a reta BC. Ligando A e D, temos direção do plano ABC. A partir dessa reta, poderemos tomar a vista básica do plano.

## 2.7. Graduação de um Plano – Intervalo

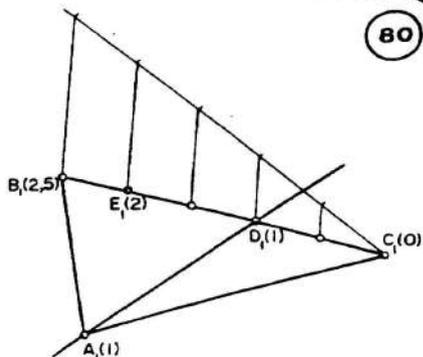
A graduação de uma reta consiste em determinar sobre ela seus pontos de cota inteira consecutivos. GRADUAR UM PLANO significa determinar suas retas de cota constante e inteira, também consecutivas.

Voltando a ABC da figura 80, como já mostramos que são paralelas as retas de cota constante de um plano, se passarmos paralelas a  $A_1 D_1$  pelos pontos  $E_1$  e  $C_1$ , teremos GRADUADO o plano ABC, com a obtenção das retas de cota 2 cm e 0 cm (figura 81).

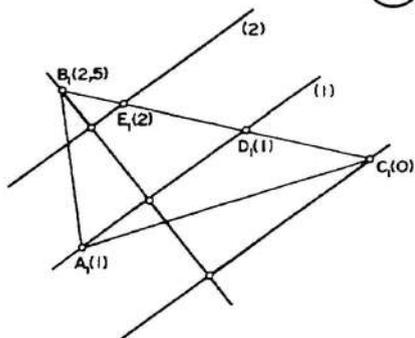
79



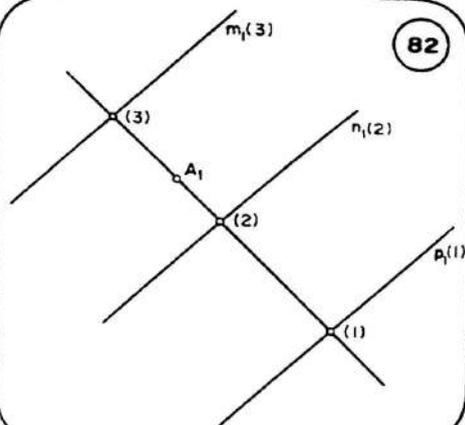
80



81



82



A distância (constante) entre essas retas no plano  $\pi_1$  é chamada de INTERVALO DO PLANO. Observemos que o intervalo de um plano é o mesmo intervalo de suas retas de máxima inclinação, pois estas são perpendiculares às retas de cota constante e o seu intervalo mede exatamente a distância entre tais retas.

Portanto, também para o plano é válida a propriedade de que a medida do intervalo, na mesma unidade das cotas, é o inverso da declividade. Então, comparando dois planos inclinados, o de menor intervalo é o que mais se aproxima do plano básico, que tem intervalo nulo. Um plano de cota constante tem intervalo infinito.

A graduação do plano permite a opção de resolver a pertinência de qualquer ponto por interpolação em uma reta de máxima declividade.

A figura 82 exemplifica um plano já graduado pelas retas de cota constante  $m$ ,  $n$  e  $p$ . Para saber a cota de um ponto  $A$  desse plano basta passar por

$A_1$  uma reta perpendicular à direção do plano. Para ser uma reta de máxima inclinação do plano seus pontos de cruzamento com  $m$ ,  $n$  e  $p$  devem ter as cotas dessas retas. O ponto  $A$  tem então uma cota entre 2 cm e 3 cm. Dividindo o segmento em 10 partes, obteríamos a cota de 2,4 cm para  $A$ .

A reta de máxima declividade, graduada, determina o plano em *épura*, pois permite obter a graduação desse plano simplesmente tirando perpendiculares por seus pontos de cota inteira.

Os livros no SISTEMA COTADO usam a representação da reta de máxima declividade por dois traços paralelos próximos, como na figura 83. Numa de suas extremidades é colocada uma letra grega que dá a notação ao plano. O plano  $\alpha$  está dado em *épura* pela sua ESCALA DE DECLIVE, expressão utilizada para essa forma de determinação do plano.

## 2.8. Traço de um Plano

A interseção de um plano  $\alpha$  com um outro plano  $\beta$  é denominada de TRAÇO de  $\alpha$  em  $\beta$ .

Quando falamos simplesmente em **traço** de um plano estamos nos referindo ao seu traço em  $\pi_1$ . É apenas sua reta de cota nula. Para um plano  $\alpha$  seu traço será designado  $\pi_1$ .

O traço de um plano básico contém a projeção de qualquer ponto desse plano. Para um plano de cota constante o traço estará indefinidamente afastado; para todos os efeitos práticos não haverá traço para tal plano.

## 2.9. Reta Pertencente a Plano

Se uma reta possuir dois pontos pertencentes a um plano, toda ela pertencerá a esse plano.

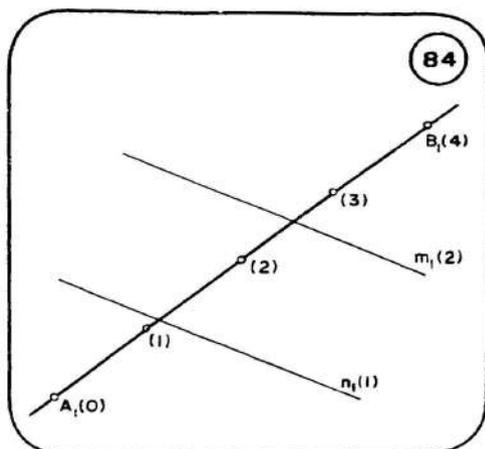
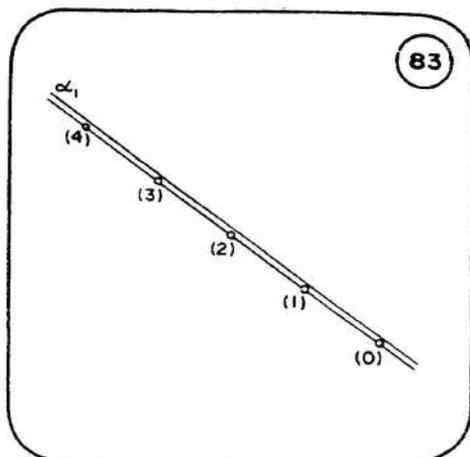
De fato, se uma reta estiver fora de um plano só poderá atravessá-lo em um único ponto. Para ter dois pontos no plano terá de ter os demais pertencentes ao plano.

Então a pertinência de reta a plano se reduz a uma verificação dupla de pertinência de ponto a plano.

Mas há uma forma mais rápida de testar se uma reta pertence a um plano. Como este é definido geralmente por retas, e como todas as retas de um plano são concorrentes ou paralelas entre si, é-nos suficiente verificar se a reta dada concorre com duas das retas já determinadas no plano.

Se o plano já está graduado, por exemplo (figura 84), podemos verificar logo se a reta  $AB$  pertence ao plano  $mn$ . Para isso o seu cruzamento com  $m$  deverá ter cota 2 cm e com  $n$  cota 1 cm. Como  $AB$  tem quatro intervalos, dividindo-o em quatro partes iguais teremos sua escala de declive, que mostra não haver pertinência entre a reta e o plano dados.

Não sendo dado já graduado, é sempre possível e rápido obter a graduação do plano e proceder da mesma maneira.



## 2.10. Exercícios Resolvidos

2.10.1. Na figura 85, determinar:

- A cota de C para pertencer à reta AB;
- A projeção de um ponto D da reta AB com cota 2,5 cm.

### RESOLUÇÃO

Poderíamos graduar AB para resolver o problema só com  $\pi_1$ . Particularmente nesse caso, as cotas fracionadas de A e B dificultam essa graduação. É bem mais fácil usar uma projeção secundária (fig. 86).

Embora não seja imprescindível ao problema, tomamos  $\pi_1\pi_2$  paralela a  $A_1B_1$ . A projeção em  $\pi_2$  resolverá os dois itens:

- A linha de chamada de  $C_1$  determina  $C_2$  em  $A_2B_2$ . A distância de  $C_2$  a  $\pi_1\pi_2$ , em centímetros, será a cota de C.
- Passando uma paralela a  $\pi_1\pi_2$  distante desta 2,5 cm, achamos  $D_2$  em  $A_2B_2$ . Baixando de  $D_2$  a linha de chamada, estará determinado  $D_1$  em  $A_1B_1$ .

2.10.2 — Duas galerias de mina são abertas em A e B (fig. 87). A primeira encontra um lençol d'água subterrânea no ponto C, quando estava com 100m de comprimento. A segunda desce com declividade de 50%. Determinar:

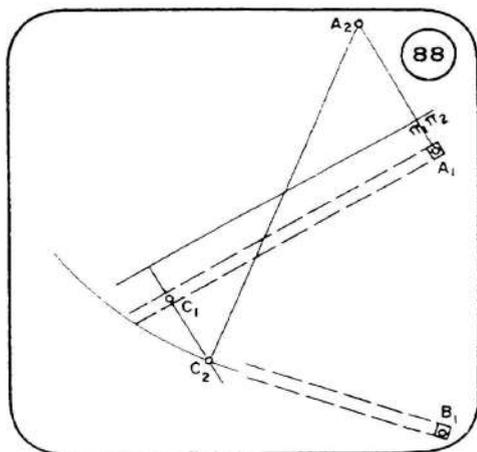
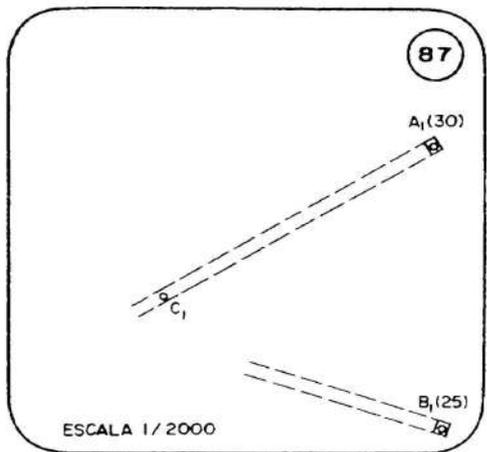
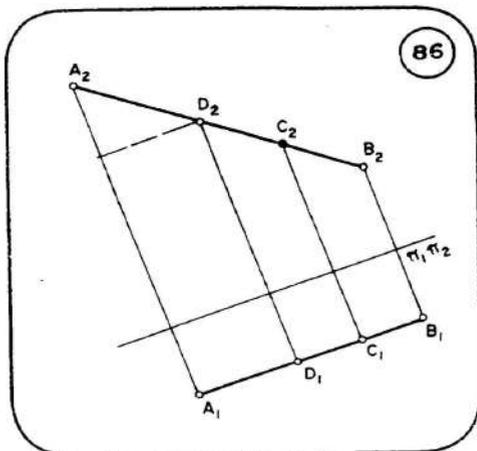
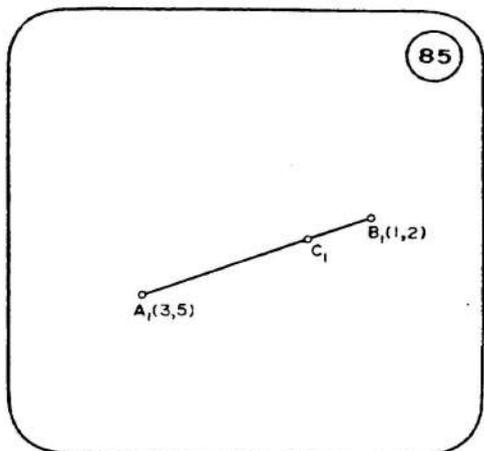
- Qual a cota do lençol d'água.
- Em que ponto D a galeria B encontra água.
- Se o lençol for rebaixado e as galerias continuarem, se ocorrerá um encontro entre elas.

### RESOLUÇÃO

- Uma vista em v.g. de AC (fig. 88) deverá encaixar os 100m da galeria (50mm) entre  $A_2$  e a linha de chamada de  $C_1$ .

Centrando compasso em  $A_2$  e com raio de 50mm determinamos  $C_2$  nessa linha de chamada. A cota de C será de 15mm negativos, que corresponde a 30m na realidade.

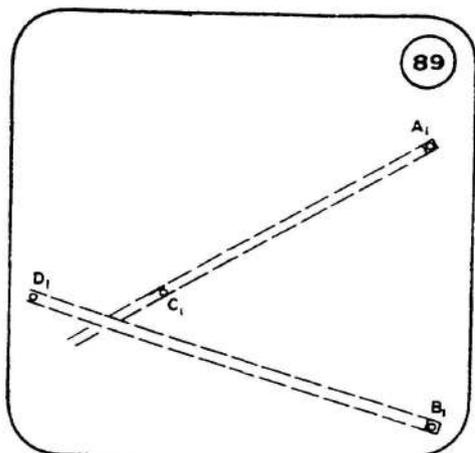
b) O intervalo da galeria BD é o inverso da declividade, se medido em metros. Sendo esta de 50%, ou 50/100, o intervalo será  $100/50 = 2$  m.



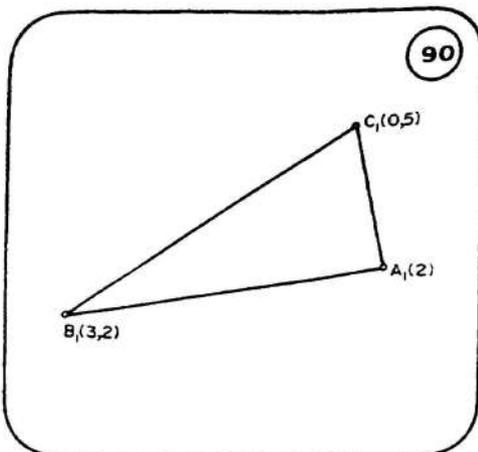
A cota de D é a mesma de C (-30m). Entre B e D a diferença de cota será 55m, o que significa que haverá 55 intervalos entre  $B_1$  e  $D_1$ . Logo,  $\overline{B_1 D_1} = 55 \times 2 = 110$  m.

No desenho tal distância equivale a 55mm, que permite localizar D (fig. 89).

c) Prolongando AC até cruzar com BD é fácil perceber, mesmo sem qualquer operação, que BD passa por cima de AC. Observando que no ponto C a galeria de A já atingiu uma cota a que a outra só chega em D, é claro que descendo mais ainda no seu prolongamento além de C, vai atravessar a proje-



89



90

ção de BD em um ponto ainda mais baixo, quando essa reta nem sequer desceu à cota de D.

2.10.3. — Graduar os três lados do triângulo ABC e determinar: (fig. 90)

- Em AB, o ponto de cota 2,8 cm;
- Na reta AC, o ponto de cota 2,5 cm;
- Em BC, a cota do ponto que está a 2cm de B;
- O traço do plano ABC.

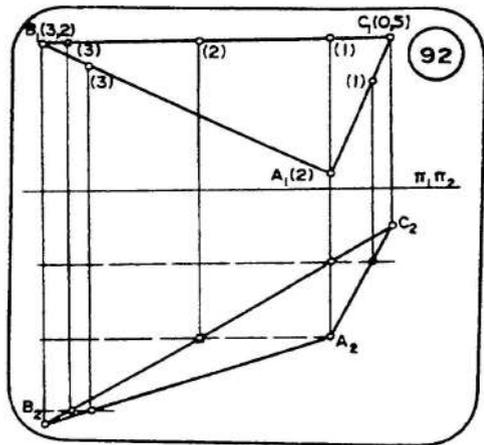
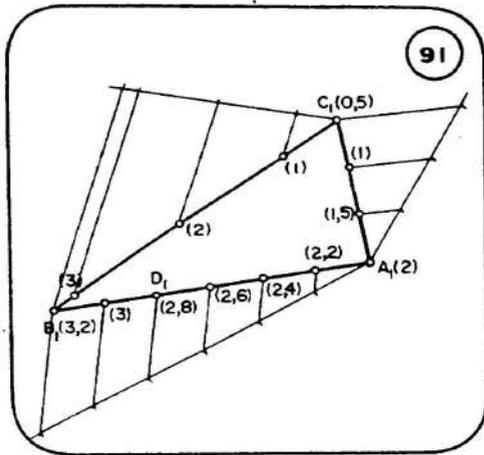
### RESOLUÇÃO

Os pontos de cota inteira podem ser determinados sempre através de uma vista secundária, o que é particularmente indicado quando as cotas dos pontos dados são números fracionários. Mas vamos mostrar que a operação é sempre possível por divisão de segmento.

Entre A e C há 1,5 intervalos, já que é essa a diferença de cota. Podemos dividir  $A_1C_1$  em meios intervalos, efetuando sua divisão gráfica em 3 partes iguais (fig. 91).

Entre A e B há 1,2 intervalos. Se o segmento  $A_1B_1$  for dividido em 6 partes iguais teremos os pontos de AB de 2 em 2 décimos de centímetro, o que localiza, entre outros, o ponto de cota 3, consecutivo de A (que tem cota 2) na escala de declive de AB.

Para BC há 2,7 cm de diferença de cota entre B e C. Esse número é múltiplo de 0,3, mas não adiantará achar os pontos de uma reta de três em três décimos de cota, pois não teríamos os pontos de cota inteira consecutivos. Por outro lado, dividir  $B_1C_1$  em 27 partes iguais para acharmos os décimos de intervalo levaria a uma imprecisão acentuada, pelo reduzido comprimento de cada parte. A figura 91 mostra uma operação mais prática: dividir  $B_1C_1$  em partes proporcionais. Marcando numa reta auxiliar, tirada de  $C_1$ , um segmen-



to de 2,7 cm, ligamos seu extremo a  $B_1$ , tirando paralelas pelos pontos desta reta distantes 0,5 cm, 1,5 cm e 2,5 cm de  $C_1$  (essas são as diferenças de cota em relação a C dos pontos de cota 1, 2 e 3). Fica então graduada a reta BC.

Notem que os artifícios matemáticos para proceder a divisão sistemática da projeção de um segmento, como operação para graduá-lo, termina acarretando um desgaste mental que poderia ser evitado com a opção de uso da projeção secundária. Separando reta por reta numa épura que envolve várias delas para graduar é claro que há uma grande sobrecarga gráfica do desenho ao serem usadas projeções secundárias, mas devemos lembrar que é possível usar uma única linha de terra para graduar todas elas.

É o que mostra a figura 92, onde usamos  $\pi_1 \pi_2$  (cuidado para não tomar essa linha perpendicular a um dos lados de  $A_1 B_1 C_1$ ) para determinar apenas os pontos de cota inteira dos três lados de ABC.

Vejamos então cada ítem proposto. (fig. 93).

a) O ponto de cota 2,8 já foi determinado na graduação de AB (ponto D); (fig. 91)

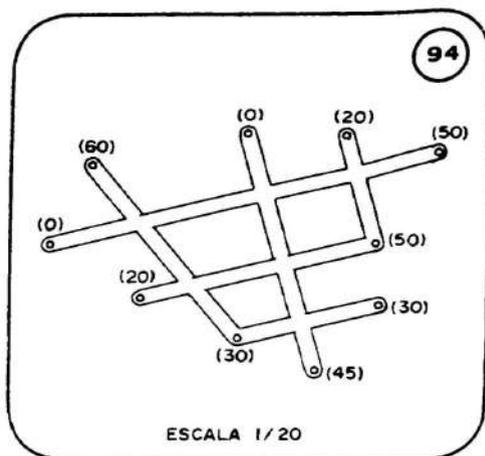
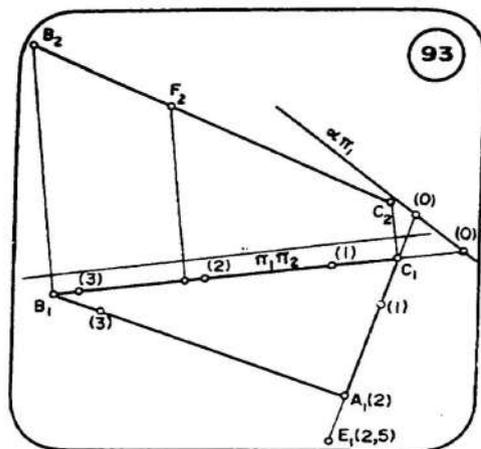
b) Acrescentando meio intervalo no prolongamento de AC, achamos o ponto E, de cota 2,5 cm;

c) Como este ítem cita um comprimento real, deve ser resolvido numa vista em v.g. de BC. Tomando  $F_2$  a 2 cm de  $B_2$ , baixamos desse ponto a linha de chamada que determinou  $F_1$  e a cota que foi medida de  $F_2$  a  $\pi_1 \pi_2$ .

Se a graduação das retas tivesse sido feita através de projeção secundária (como mostra a figura 92), poderíamos ter logo escolhido a mesma linha de terra para as duas operações;

d) O traço do plano ABC é a sua reta de cota 0 cm.

Achando em duas das retas o ponto de cota nula teremos tal traço determinado. O traço de AC será conseguido se marcarmos meio intervalo no prolongamento além de  $C_1$ . O mesmo faremos para achar o traço de BC. Unindo os dois traços de reta obteremos  $\alpha \pi_1$  (chamamos de  $\alpha$  o plano ABC)



2.10.4. — Em cada cruzamento do conjunto de tubulações da figura 94, estabelecer qual a que passa por cima da outra, completando os seus contornos.

As cotas estão em centímetros.

Verificar ainda se há algum par de tubulações paralelas.

### RESOLUÇÃO

A graduação de cada segmento de tubulação levaria a uma saturação gráfica da planta. Outra vantagem de usarmos projeção secundária é exatamente esta: podemos desviar de uma planta, normalmente já sobrecarregada de linhas convencionais no desenho técnico, as operações gráficas exigidas para a solução de um problema como este que está proposto.

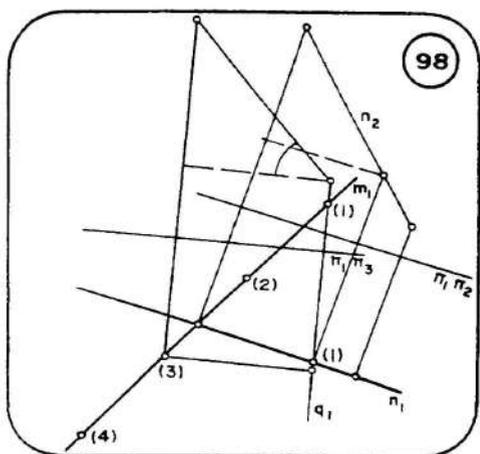
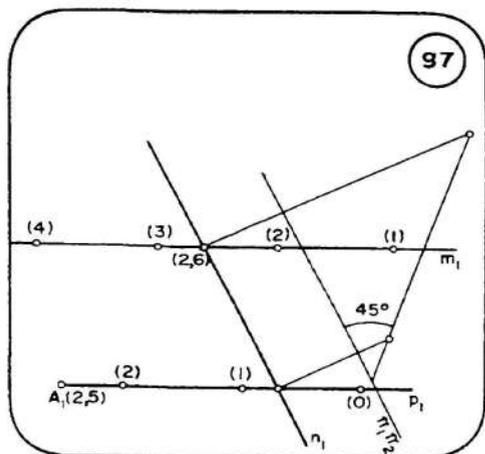
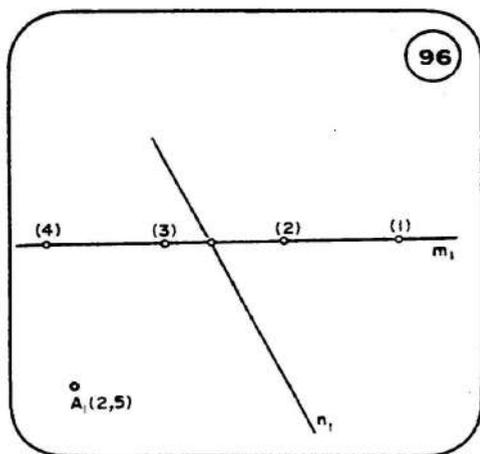
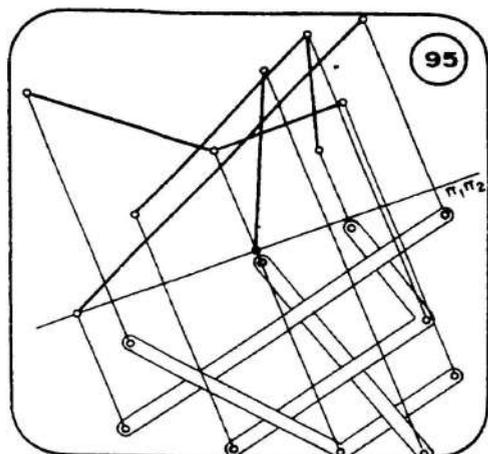
Tomando uma linha de terra que não seja perpendicular a nenhuma tubulação, em planta, podemos projetar em  $\pi_2$  apenas o eixo de cada cano. De cada ponto de cruzamento, a linha de chamada determina na projeção secundária qual das tubulações possui maior cota nesse ponto (figura 95) o que nos permite completar na planta o contorno dessa tubulação. Também em  $\pi_2$  reconhecemos duas tubulações que são paralelas, por terem seus eixos paralelos nas duas projeções.

2.10.5. — As retas  $m$  e  $n$  (fig. 96) são coplanares e a inclinação de  $n$  mede  $45^\circ$ , com suas cotas decrescendo da esquerda para a direita. Determinar:

- Se uma reta passando por  $A$ , paralela a  $m$ , é concorrente com  $n$ ;
- A direção e a inclinação do plano  $\alpha$  determinado pelas retas  $m$  e  $n$ .

### RESOLUÇÃO

A reta  $m$ , já graduada, tem cota 2,6 cm na interseção com  $n$  (fig. 97).



Vejamos cada um dos seus dois ítems:

a) A reta  $p$  paralela a  $m$  tem projeção  $p_1$  paralela a  $m_1$  e o mesmo intervalo, decrescendo suas cotas no mesmo sentido.

Como a cota de  $A$  é fracionária, devemos marcar meio intervalo de  $A_1$  para obter o ponto de cota 2 cm, e daí em diante graduar  $p$  com intervalos inteiros.

No cruzamento com  $n$  essa reta  $p$  tem cota 0,7 cm.

Para saber a cota de  $n$  nesse ponto, o mais rápido é tomar sua vista em v.g., que mostra sua inclinação dada, descendo do ponto de cota 2,6 cm onde concorre com  $m$ . A linha de chamada do ponto de cruzamento com  $p$  estabelece a cota de  $n$  nesse ponto, que é diferente de 0,7. Então  $p$  e  $n$  são retas reversas.

b) A projeção de  $n$  em  $\pi_2$  permite achar qualquer de seus pontos de cota inteira, como o de cota 1, por exemplo (fig. 98). Se passarmos a reta  $q$  pe-

los pontos de cota 1 em m e n, essa reta pertencerá ao plano  $\alpha$  por ser concorrente com duas retas desse plano. Mas será uma reta de cota constante, e assim  $q_1$  dará a direção de  $\alpha$ .

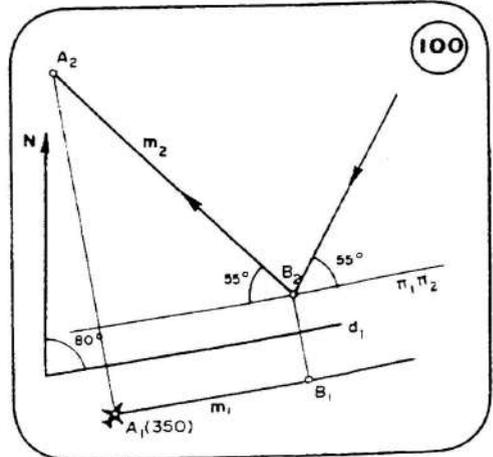
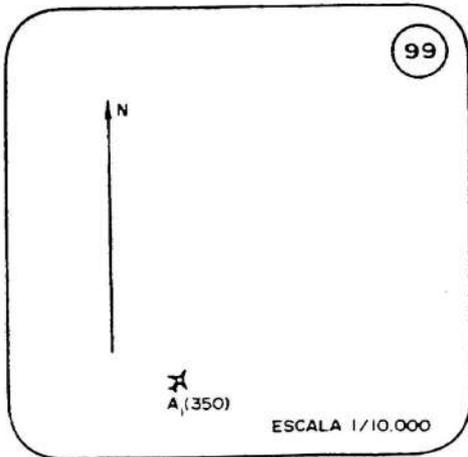
Quanto à inclinação desse plano, qualquer reta de máxima declividade pode ser projetada em v.g. (plano  $\pi_3$ ) e fornecer a medida desse ângulo.

2.10.6. — O piloto de um avião no ponto A da planta (fig. 99) vê o sol a  $80^\circ$  NE e sob inclinação de  $55^\circ$ . No mesmo instante avista um navio superposto ao reflexo do sol na superfície do mar.

Determinar em planta a posição desse navio.

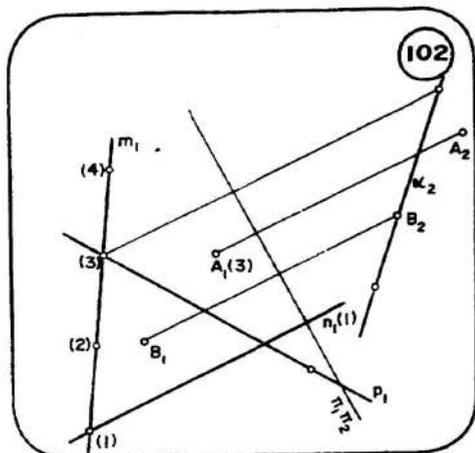
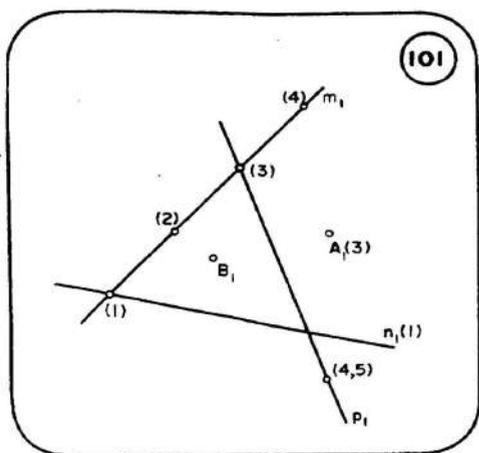
### RESOLUÇÃO

Da ótica física, sabemos que um raio luminoso incidente numa superfície se reflete formando o mesmo ângulo com o plano refletor. Para todos os efeitos práticos, os raios solares chegam paralelos à superfície da terra. Sua direção  $d_1$  forma  $80^\circ$  com o norte, para o lado do leste (figura 100). Então o raio refletido que atinge o avião vem segundo a direção  $m_1$  e com a mesma inclinação de  $55^\circ$ . Uma vista em v.g. de m permite traçar  $m_2$  partindo de  $A_2$  e formando  $55^\circ$  com  $\pi_1 \pi_2$ . O traço de m (supondo  $\pi_1$  o plano do mar) será  $B$ , onde deve estar se refletindo o sol para o piloto do avião. É em  $B_1$  que deve estar o navio, na planta.



2.10.7. — As retas m e n são coplanares, o que também acontece com m e p. (figura 101). Chamando mn de  $\alpha$  e mp de  $\beta$ , determinar:

- A posição do ponto A em relação a  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- Que cotas deveria ter o ponto B para pertencer a  $\alpha$  e a  $\beta$ .



## RESOLUÇÃO

a) O plano  $\alpha$  já tem como direção  $n$ , desde que  $n$  é uma reta de cota constante (1 cm). Tomando uma vista básica de  $\alpha$  (fig. 102) e projetando nela o ponto  $A$ , constatamos que  $A_2$  não está em  $\alpha_2$ . Vemos então que  $A$  está mais afastado de  $\pi_1$  que o plano  $\alpha$ .

Com relação a  $\beta$ , temos primeiro que achar dois pontos de mesma cota em  $m$  e  $p$ . Graduando  $p$  (fig. 103), determinamos seu ponto de cota 4 cm, que fornece a direção  $q_1$  do plano  $\beta$ . A vista básica de  $\beta$  permite concluir que o ponto  $A$  está fora desse plano.

b) Na figura 102, a linha de chamada de  $B_1$  determina  $B_2$  sobre  $\alpha_2$ , e conseqüentemente a cota de  $B$  para pertencer a  $\alpha$ . Na figura 103, o mesmo é feito em relação a  $\beta$ .

2.10.8. Um volume no ponto  $A$  da planta (fig. 104) é arrastado em uma rampa plana por dois trabalhadores que o puxam por meio das cordas  $AB$  e  $AC$ , exercendo forças respectivas de 50kg e 70 kg. Determinar:

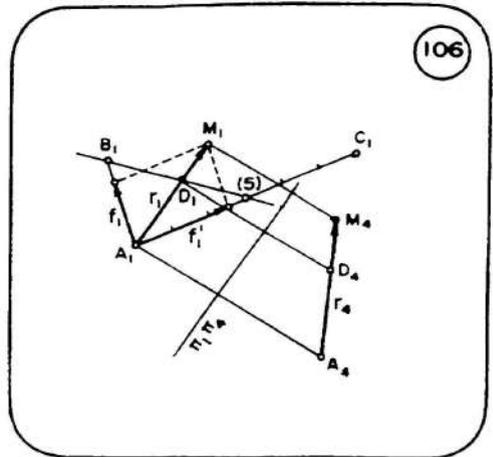
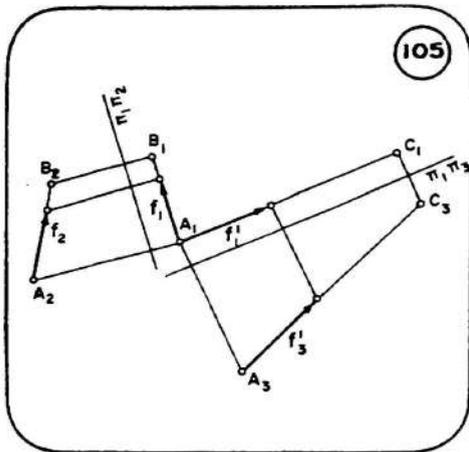
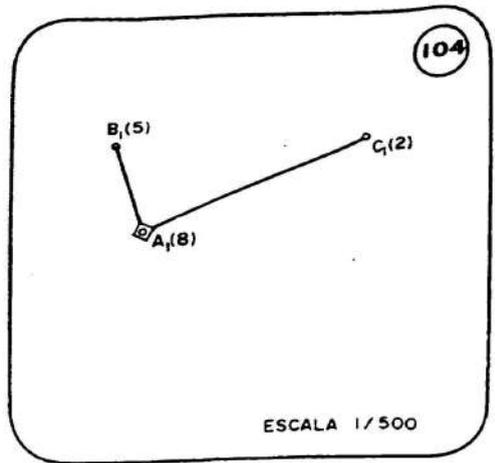
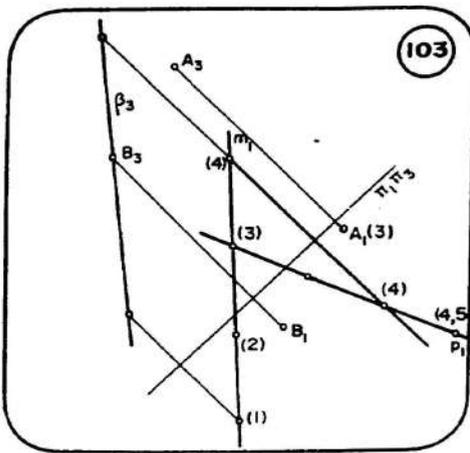
a) Em que direção o objeto se deslocará e qual o seu peso, se a força de atrito é de 150 Kg.

b) Se o trabalhador em  $B$  mantiver sua direção e força, para que posição o outro deve se deslocar para obter um máximo rendimento do seu esforço?

c) Para os dois trabalhadores arrastarem o objeto rampa abaixo com igual esforço, em que direção precisarão exercer uma força mínima e qual a medida desse força.

## RESOLUÇÃO

a) Supondo as cordas  $AB$  e  $AC$  no plano inclinado, deveremos inicialmente escolher uma escala para traduzir os vetores das forças. Para cada 50 kg tomaremos 1 cm.

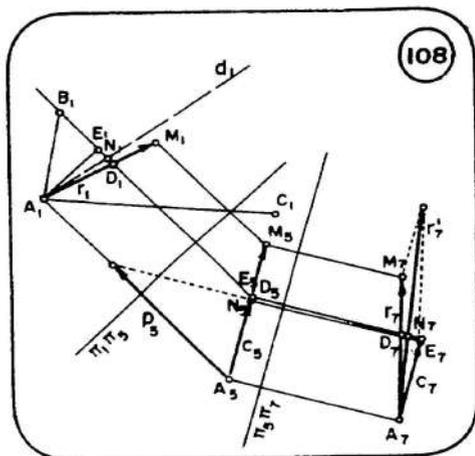
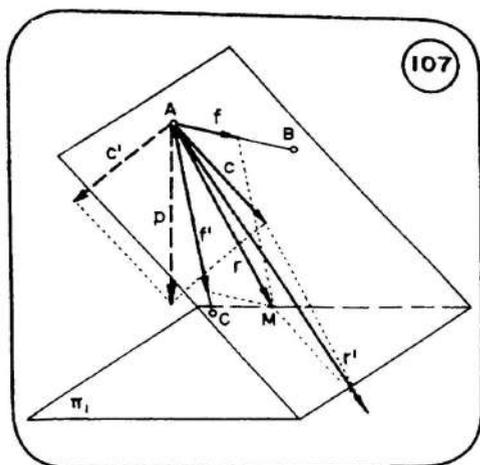


Esses vetores não estão projetados em verdadeira grandeza, já que seus suportes são retas inclinadas AB e AC. Tomando vistas em v.g. dessas retas (fig. 105), marcaremos em  $A_2B_2$  um vetor  $f_2$  de módulo 1 cm (50kg) e em  $A_3C_3$  um vetor  $f'_3$  de 1,4 cm (70 kg). Linhas de chamada determinarão  $f_1$  e  $f'_1$ .

Dá física, sabemos encontrar a resultante de duas forças concorrentes, construindo o paralelogramo cuja diagonal é a composição dos dois esforços exercidos pelos trabalhadores ( $r$ , na figura 106).

Devemos lembrar que tal paralelogramo está no plano inclinado, e assim a resultante não está em v.g. na projeção principal. Graduando AC, determinamos seu ponto que tem cota 5, o qual, ligado a  $B_1$ , dá a direção do plano ABC. Onde essa reta de cota constante atravessa a resultante obtemos seu ponto de cota 5 (ponto D).

Com A e D podemos obter a vista em v.g. da resultante  $r$ , no plano  $\pi_4$ .



Medindo esse vetor na escala das torças (1 cm = 50Kg) obtemos 95Kg. É menor que a força de atrito especificada (150Kg), e os homens não tirarão o volume do lugar se não tiverem uma ajuda extra. Como o objeto vai descer a rampa, o seu próprio peso ajudará os trabalhadores.

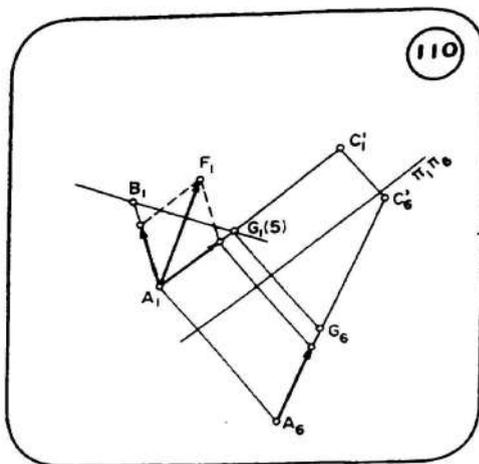
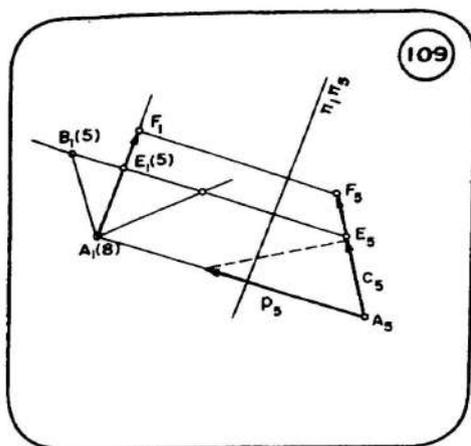
A fig. 107 mostra em perspectiva que o peso  $p$  do objeto pode ser decomposto nas componentes  $c$  e  $c'$ , nas direções de máximo declive de ABC e perpendicular a esse plano, respectivamente. Somente  $c$  ajuda a deslocar o volume no plano ABC. Achando a resultante  $r'$  da composição de  $c$  e  $r$ , deveremos chegar aos 150Kg da força de atrito, e será na direção de  $r'$  que o objeto será deslocado.

A fig. 108 volta à épura. Tomando a reta AE de máximo declive, obtemos através de  $\pi_5$  e  $\pi_7$  a vista em v.g. do plano ABC, onde só traçamos  $r_7$  e a reta  $A_7E_7$ . Construímos em  $\pi_7$  o paralelogramo cuja diagonal  $r'_7$  mede 3 cm (150Kg) sendo um dos lados  $r_7$  e tendo o outro lado a direção  $A_7E_7$ , onde determinamos  $c_7$ . Na vista básica localizamos  $c_5$ , que fornece a medida de  $p_5$ , pois o peso é vertical e está em v.g. no plano  $\pi_5$ . Achamos então 110Kg para valor desse peso. O ponto N de  $r'$ , voltado a  $\pi_1$ , determina a direção  $d_1$ , na planta, em que o objeto se desloca.

Cabe apenas uma observação final. Embora não tenha sido dito explicitamente no enunciado, fica evidente a condição de velocidade constante no deslocamento do objeto pelos trabalhadores, pois se houvesse aceleração o peso poderia ter qualquer valor acima de 110Kg.

b) Se a direção de  $r$  coincidir com a de  $c$  haverá um máximo rendimento para a resultante. A fig. 109 mostra, no plano  $\pi_5$  (vista em v.g. de  $c$ ), que  $A_5F_5$  seria a diferença de  $c$  para a força de atrito. Como  $c_5$  mede 55Kg, a nova resultante praticamente não mudou de valor, continuando com cerca de 95Kg. Mas sua nova direção será  $A_1F_1$ , superposta a  $A_1E_1$ .

Vejamos então quais seriam as novas componentes e quais as suas direções.



Como o vetor força em AB não variou de módulo, uma vez que o trabalhador em B não mudou seu esforço, podemos construir novo paralelogramo de forças com um lado e a diagonal (fig. 110), determinando assim a nova direção que deve ter a corda AC. Para localizar o ponto C e medir a força exercida nessa corda, precisamos de mais uma vista secundária (em  $\pi_6$ ). Obtida a projeção nesse plano pelo ponto A e pelo ponto G de cota 5m, o novo vetor poderá ser medido em v.g., e  $A_6C'_6$  (com o mesmo comprimento de  $A_3C_3$  na figura 105) permitirá localizar em planta a nova posição de C (ponto  $C'_1$ ).

Então se o 2º trabalhador estiver em  $C'$  a força que precisará exercer na corda AC será a menor possível, medindo 55 Kg.

c) É claro que, se o trabalhador em B também mudar de lugar, será possível reduzir mais ainda o esforço do 2º trabalhador, bem como o dele próprio.

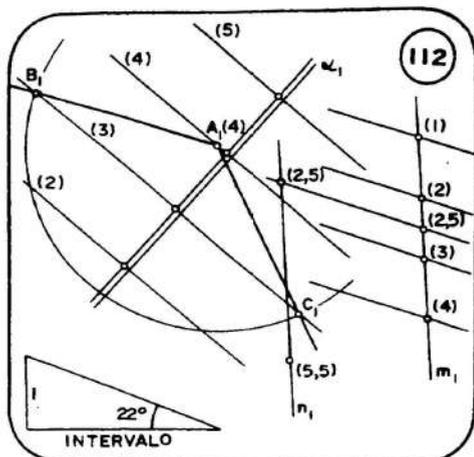
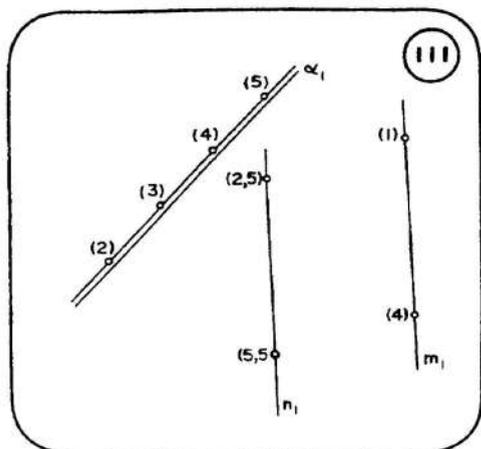
Como  $\vec{AF}$  é o menor vetor para a resultante, os menores vetores iguais em que pode ser decomposto têm metade do módulo de AF e serão obtidos se forem colineares com ele. Em outras palavras, se as duas cordas tiverem a direção da reta de máxima inclinação da rampa, os dois trabalhadores poderão puxar com a mesma força de 47 Kg, que é o menor esforço possível com que podem fazer o volume descer o plano inclinado.

2.10.9 – Determinar, no plano  $\alpha$  e no plano mn, as direções de suas retas de 22º de inclinação. (fig. 111).

## RESOLUÇÃO

Construindo, à parte da projeção, um triângulo retângulo com um ângulo de 22º e o cateto oposto medindo 1 cm (fig. 112), o outro cateto dará a medida do intervalo de uma reta dessa inclinação.

Para o plano  $\alpha$  a graduação é imediata, pois as retas de cota constante



são perpendiculares à reta de máximo declive. Tomando um ponto A qualquer em uma dessas retas e com abertura do compasso igual ao intervalo, traçamos um arco que intercepta a reta de cota 1 cm mais baixa nos pontos B e C. Tanto na direção  $A_1 B_1$  como na direção  $A_1 C_1$  qualquer reta do plano  $\alpha$  terá a inclinação pedida.

Para o plano mn a operação de graduação exige um pouco mais de trabalho. Teremos que graduar uma das retas paralelas dadas. Na fig. 112 gradua-mos m e achamos o ponto de cota 2,5 cm, que ligado ao de mesma cota em n fornece a direção do plano. Daí em diante o procedimento é o mesmo adotado para o plano  $\alpha$ .

2.10.10. — Um poço no ponto A deve abastecer uma rede de irrigação em que o canal alimentador BC é uma reta (fig. 113) Se os limites de declividade para o canal reto de ligação de A a BC são 12% e 15%, determinar em que faixa pode variar a direção do mesmo. Cotas em metros.

### RESOLUÇÃO

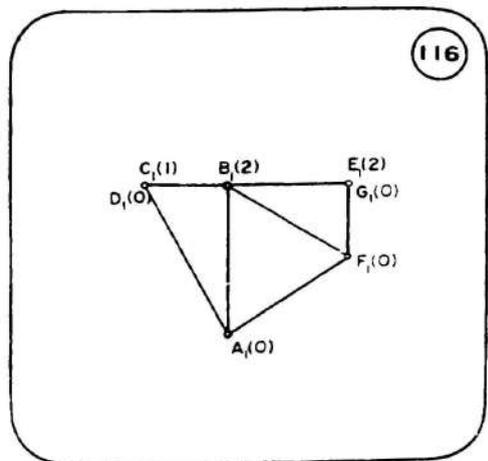
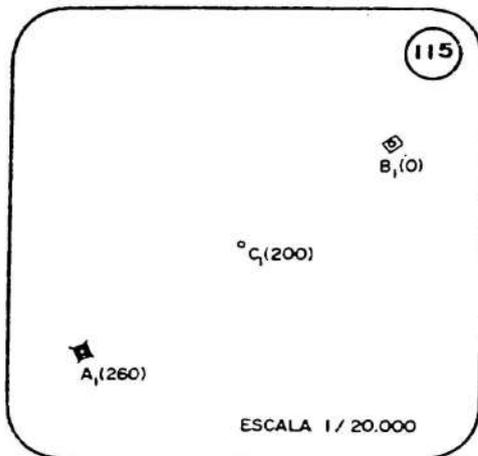
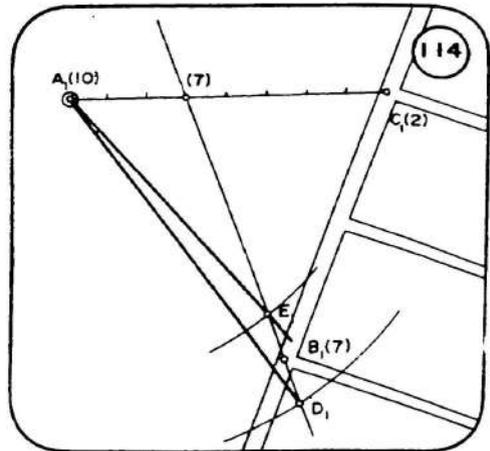
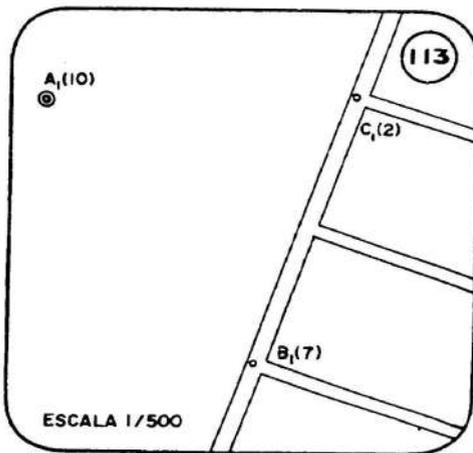
No limite mínimo (12%) o intervalo do canal deverá ser, em metros, de  $100/12 = 8,3$ m. No limite máximo (15%) esse intervalo será de  $100/15 = 6,6$  m. Já que 8,3 m é igual a 830 cm e 6,6 m = 660 cm, dividindo essas medidas pelo denominador (500) da escala da planta, teremos os intervalos de 1,7 cm e 1,3 cm aproximadamente.

Qualquer reta que passe em A e seja concorrente com a reta BC deve pertencer ao plano definido pelos pontos ABC (plano  $\alpha$ ). Vamos graduar esse plano  $\alpha$  (fig. 114).

No segmento AC há 8 intervalos. Dividindo-o em partes iguais temos a graduação da reta AC. Unindo seu ponto de cota 7m ao ponto B, fica definida a direção do plano  $\alpha$ .

Qualquer reta do plano, partindo de A, deverá atravessar a reta de cota 7 com 3 intervalos. A solução de menor declividade permitida no problema (12%) deverá no desenho intercalar um segmento de  $3 \times 1,7 = 5,1\text{cm}$  entre  $A_1$  e  $m_1$ , enquanto a de 15% terá essa distância com  $3 \times 1,3 = 3,9\text{cm}$ . Com a ajuda do compasso, centrado em  $A_1$ , determinamos os pontos  $D_1$  e  $E_1$ .

O ângulo DAE delimita a faixa em que pode variar a direção do canal de A a BC para satisfazer as condições do enunciado.



## 2.11. Exercícios Propostos

2.11.1. — Na planta da figura 115 as cotas estão em metros. No ponto A existe uma antena transmissora de televisão de 120m de altura. Para uma perfeita recepção o sinal deve ser recebido em linha reta, em uma casa situada no ponto B. Sendo C o topo de um morro, determinar a altura da antena externa do prédio em B, e qual o ponto D de cota 0 na direção  $A_1 B_1$  que pode receber bem o sinal sem necessidade de antena.

2.11.2. — No sólido da figura 116, identificar se é concorrente, paralelo ou reverso cada par de arestas.

### RECOMENDAÇÃO:

Praticar esse mesmo exercício para os sólidos representados nos diversos sistemas, no volume 1.

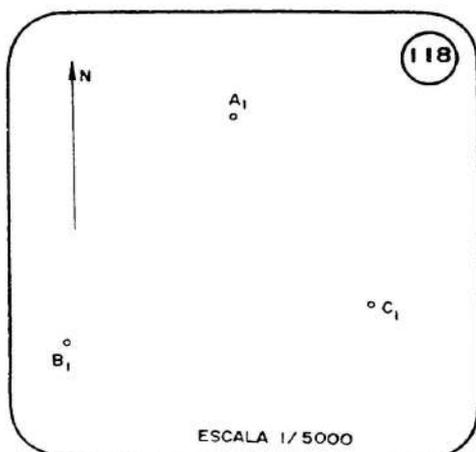
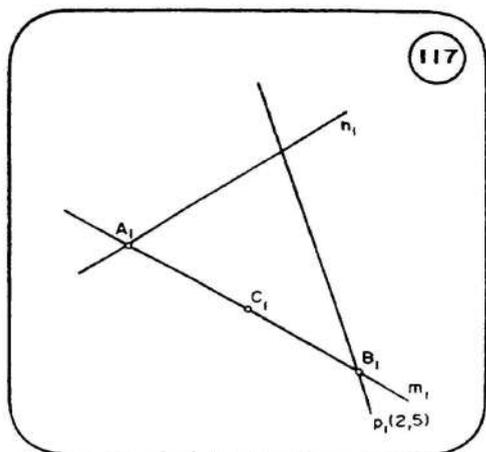
2.11.3. — A reta  $m$  é concorrente com  $n$  e  $p$ . Sabendo-se que o ponto  $A$  está a 5 cm de  $B$  e tem cota menor que 2,5 cm, e que  $n$  tem inclinação de  $32^\circ$  aumentando suas cotas da esquerda para a direita, sendo  $p$  uma reta de cota constante, determinar na figura 117):

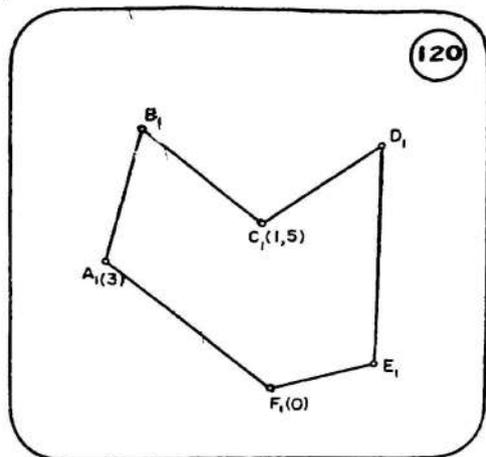
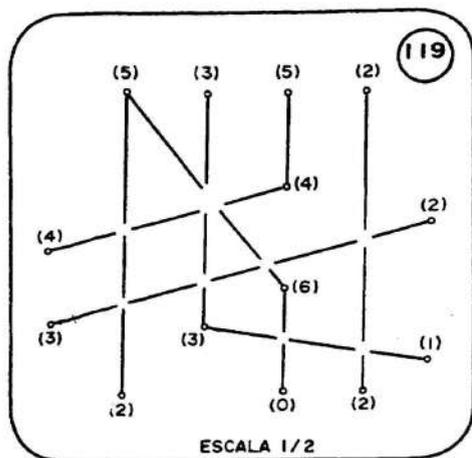
- A cota do ponto  $C$  de  $m$ ;
- O traço de  $n$ ;
- Se  $n$  é concorrente com  $p$ .

2.11.4. — Na planta da figura 118 os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão em uma planície de cota constante 50m. Na prospecção de um veio plano de minério, este aflorou (apareceu na superfície do solo) no ponto  $A$  e foi encontrado em sondagens verticais nos pontos  $B$  e  $C$  com profundidades respectivas de 70m e 90m.

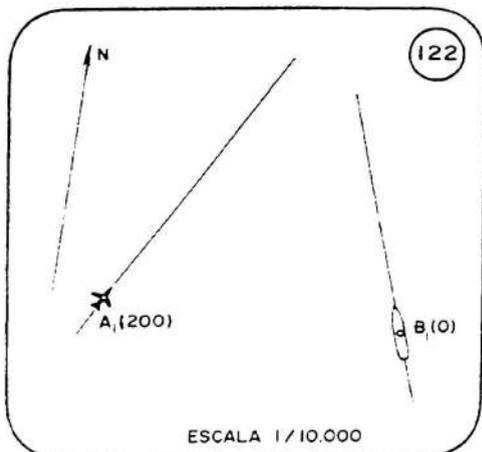
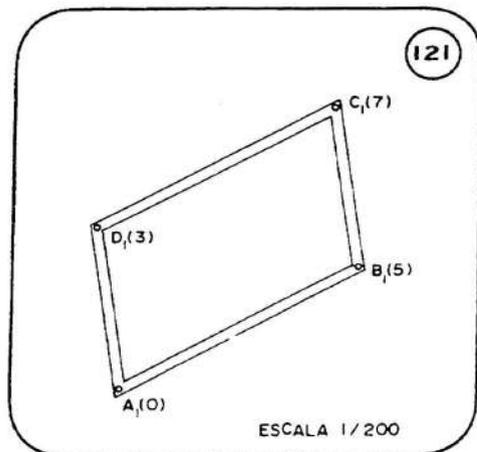
Determinar o ângulo que a direção desse plano forma com o norte e o mergulho (ângulo de inclinação) além da linha de afloramento (traço do plano na superfície do solo)

2.11.5. — A figura 119 é a planta da fiação elétrica em uma máquina, supondo reto cada segmento de fio. Em cada cruzamento, completar na planta o fio que passa por cima do outro, verificando ainda se há pares de fios paralelos.





2.11.6. – O polígono ABCDEF (fig. 120) é uma figura plana.  
 Determinar as cotas dos pontos B, D e E. Após achar essas cotas, afastar  $\pi_1$  da figura até que todas as cotas fiquem positivas.



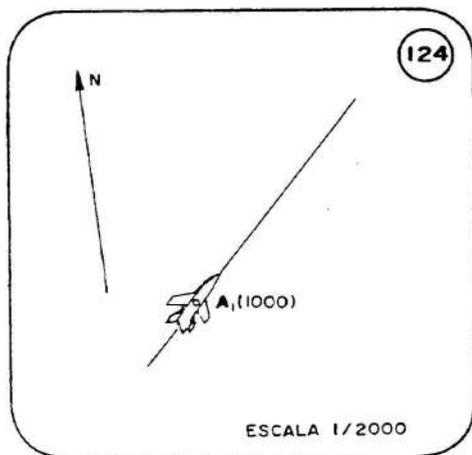
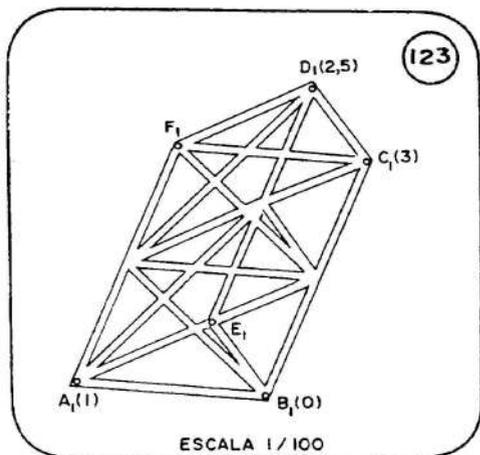
2.11.7. – Na figura 121 as cotas estão em metros. AB, BC, CD e DA são quatro travessas de uma estrutura. Verificar se formam uma figura plana.

2.11.8. – Na planta de figura 122 as cotas estão em metros.

O avião que está no ponto A segue em altura e direção constantes, sendo alvejado por um navio B. Sabemos que disparou na direção oeste e com inclinação de  $30^\circ$ .

De que ponto da sua trajetória ele acertou o avião A?

2.11.9. – A planta da figura 123 (cotas em metros) mostra uma treliça metálica em formato de prisma triangular.



Determinar a cota de seus vértices E e F e estabelecer a visibilidade nos cruzamentos de suas peças.

2.11.10. — Na planta da figura 124 (cotas em metros) um avião em A voa a uma cota constante e com velocidade de 600 Km/h, sob um vento ascendente na direção norte com inclinação de  $30^\circ$ .

Determinar em que direção o avião se desloca em relação ao ar e com que velocidade.

A velocidade do ar é de 100km/h.

2.11.11. — Em um solo plano, na planta da fig. 125 — cota em metros — corre um cano AB do qual deve partir uma rede decanais de decantação com declividade de 5% e espaçamento de um metro, até desaguardem no canal CD.

Traçar essa rede na planta.

2.11.12. — As paralelas da planta, na fig. 126 — cotas em metros — são as retas de cota constante da superfície do solo (evidentemente não é um plano, pois o intervalo não é constante).

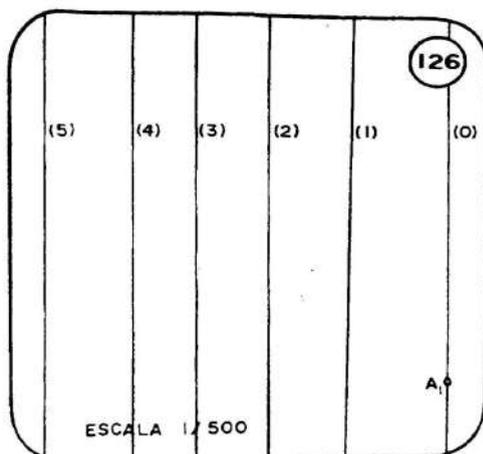
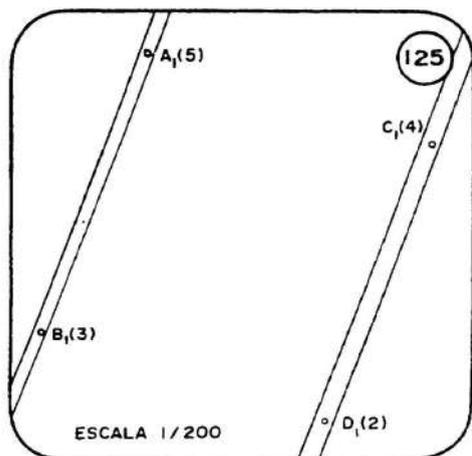
Traçar um caminho subindo do ponto A até à reta de cota 5m, com declividade constante de 15%.

### 3. INTERSEÇÃO

#### 3.1. — Interseção de Reta com Reta

Já vimos no capítulo anterior que duas retas não paralelas só se interceptam se pertencerem a um mesmo plano. Se forem reversas nunca poderão ter ponto em comum.

Na épura, já sabemos que o ponto de interseção de uma reta com outra reta só poderá estar no cruzamento das projeções dessas retas.



### 3.2. Interseção de Reta com Plano

O traço de uma reta em um plano é o ponto em que ela é interceptada por esse plano. Isso também dissemos no capítulo 2.

Quando a reta é paralela ao plano não podemos contar com seu traço nesse plano. Mesmo na geometria projetiva, que considera tal traço infinitamente afastado, não tem a mesma importância na prática, já que é inacessível.

Excetuando o paralelismo, há sempre um único ponto de interseção entre uma reta e um plano. Não há reta reversa em relação a um plano.

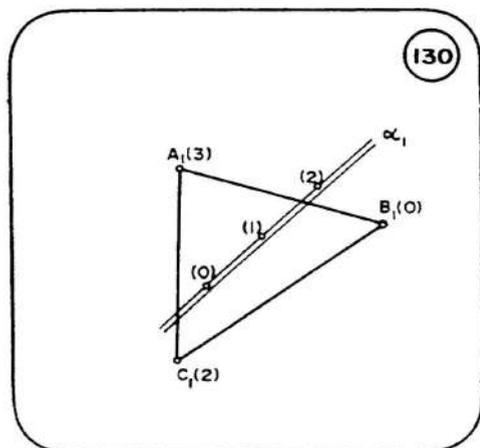
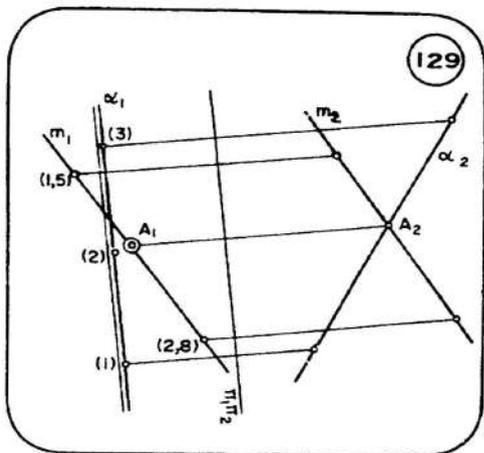
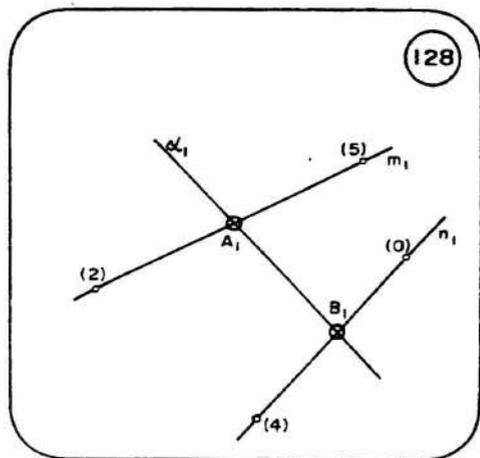
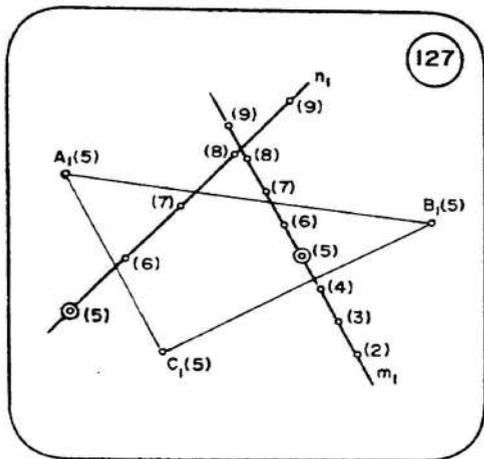
Vejamos o procedimento em é pura para determinar o traço de uma reta em um plano.

Se o plano for de cota constante, como ABC na figura 127, basta-nos ter a reta graduada e localizar nela o ponto que tem a mesma cota do plano. A reta  $m$  atravessa o plano ABC no ponto de cota 5, o mesmo acontecendo com a reta  $n$ , mesmo que tal ponto esteja fora do triângulo ABC. Estaremos sempre considerando o plano ilimitado em todas as direções, nos problemas teóricos. Dessa mesma forma já tínhamos mostrado a determinação do traço de uma reta no plano  $\pi_1$ , que é o seu ponto de cota nula.

Quando o plano estiver em vista básica, como na fig. 128, será ainda mais fácil achar o traço de qualquer reta nesse plano. Notem que as retas  $m$  e  $n$  atravessam  $\alpha$  nos pontos A e B, respectivamente, pois são eles os seus pontos que se projetam em  $\alpha_1$ .

Se há tal imediatismo na determinação do traço de qualquer reta quando o plano está em vista básica, o caminho mais rápido para achar a interseção de uma reta com um plano inclinado é partir para uma vista básica secundária desse plano.

Suponhamos o plano  $\alpha$  dado em é pura por sua escala de declive (fig. 129). Desejamos achar o traço em  $\alpha$  da reta  $m$ . Passando  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular



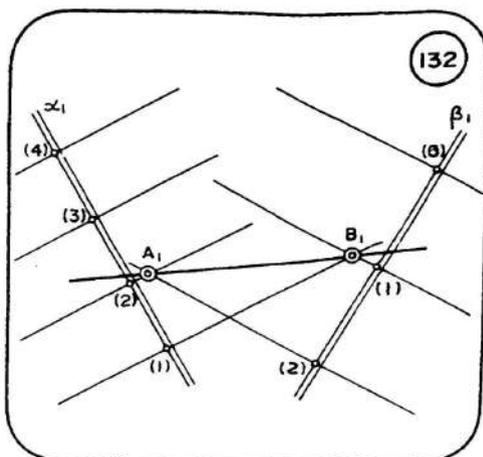
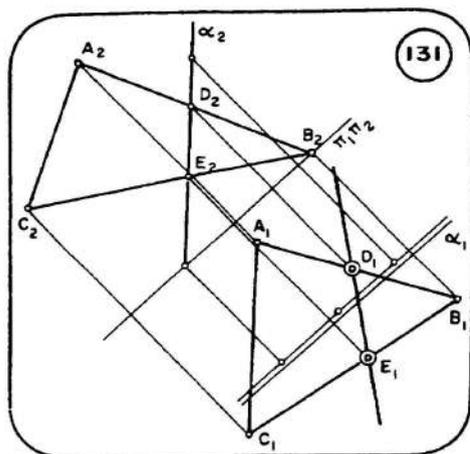
à direção de  $\alpha$ , conseguimos  $\alpha_2$ , vista básica desse plano. A projeção de  $m$  em  $\pi_2$  determina  $A_2$ . Como todos os pontos pertencentes ao plano  $\alpha$  se projetam em  $\alpha_2$ , tal ponto é a projeção secundária do traço da reta  $m$  no plano  $\alpha$ . Uma linha de chamada de  $A_2$  determina  $A_1$  em  $m_1$ .

Não sendo o plano dado já graduado, teríamos o trabalho adicional de determinar sua direção antes de poder obtê-lo em vista básica.

### 3.3. Interseção de Plano com Plano

Dois planos distintos e não paralelos têm como interseção uma reta. Já fizemos referência ao traço de um plano em  $\pi_1$ , que é a reta de interseção desse plano com o plano principal, ou seja, sua reta de cota nula.

Generalizando, a interseção de um plano  $\alpha$  com qualquer plano de cota constante é sempre a reta de  $\alpha$  que tem cota constante e igual à desse plano.



Também é simples achar a interseção de um plano  $\alpha$  com um outro em vista básica, pois essa reta estará na própria projeção do plano básico, que se reduz a uma reta.

E no caso geral de dois planos inclinados? Como achar em épura sua interseção?

Suponhamos que um deles já tenha sido dado graduado, como  $\alpha$  na fig. 130. Queremos determinar seu traço no plano  $\beta$  dado pelo triângulo ABC.

Tomando uma vista básica de  $\alpha$ , no plano  $\pi_2$  podemos obter  $A_2 B_2 C_2$  (fig. 131). Conforme vimos no ítem anterior, achamos o ponto D em que AB atravessa  $\alpha$ , e o ponto E de interseção de BC com esse mesmo plano. Se os pontos D e E pertencem simultaneamente a  $\alpha$  e  $\beta$ , a interseção desses planos é a única reta que passa por D e E, uma vez que dois pontos distintos determinam uma reta.

### 3.4. Interseção de Planos sem a Utilização de Projeção Secundária.

Para determinar a reta comum a dois planos inclinados, pelo processo do ítem anterior, é indispensável ter em épura a direção de um deles. Se nenhum dos dois for dado já graduado, é preciso antes determinar as retas de cota constante de um desses planos.

Se for rápido graduar os dois planos dados, é possível determinar sua reta de interseção somente em  $\pi_1$ .

Supondo os planos  $\alpha$  e  $\beta$  já graduados (fig. 132), as suas retas de mesma cota têm de ser concorrentes. Assim as retas de cota 2 em  $\alpha$  e  $\beta$ , por serem coplanares (já que pertencem ambas ao plano de cota constante 2), têm o ponto A em comum. O mesmo acontece com as retas de cota 1 nos dois planos, que se interceptam em B. Como A e B estão ao mesmo tempo em  $\alpha$  e  $\beta$  a reta AB é a interseção  $\alpha \beta$ . Podemos usar qualquer cota para achar pares de retas concorrentes em  $\alpha$  e  $\beta$ , embora só precisemos de dois pares para determinar a interseção dos planos.

Este é o processo encontrado em qualquer livro sobre o sistema de plano cotados, que não permite o uso de planos secundários.

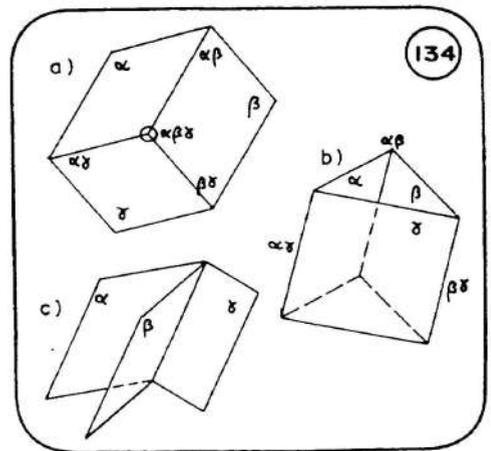
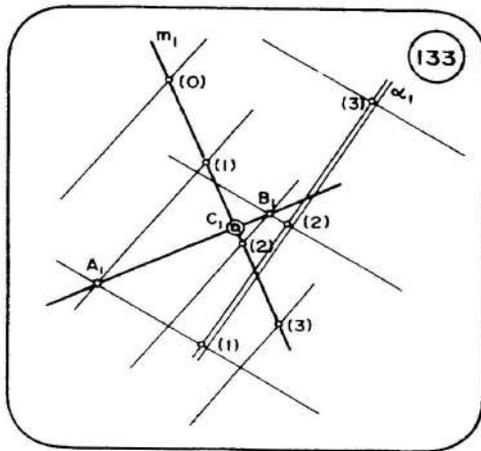
### 3.5. Interseção de Reta com Plano usando somente a Projeção Principal

Também o ponto onde um plano intercepta uma reta pode ser achado sem o auxílio de projeção secundária.

Para tal, precisamos lembrar que todas as retas coplanares são concorrentes entre si, se não forem paralelas.

Dados o plano  $\alpha$  e a reta  $m$ , ambos já graduados (fig. 133) podemos escolher uma direção qualquer e passarmos paralelas pelos pontos de  $m$ . Isso significa passar por  $m$  um plano qualquer  $\beta$ , que intercepta  $\alpha$  segundo a reta  $AB$ , usando o procedimento do ítem anterior. Como as retas  $AB$  e  $m$  são coplanares (pertencem a  $\beta$ ), devem concorrer no ponto  $C$ , que é a interseção de  $m$  com  $\alpha$ . É claro que poderíamos ter tomado a direção de  $\beta$  perpendicular a  $m$ , o que faria esta ser sua reta de máxima declividade. Se generalizarmos tal situação, poderá ser inconveniente determinar, em muitos problemas, a interseção  $\alpha\beta$ .

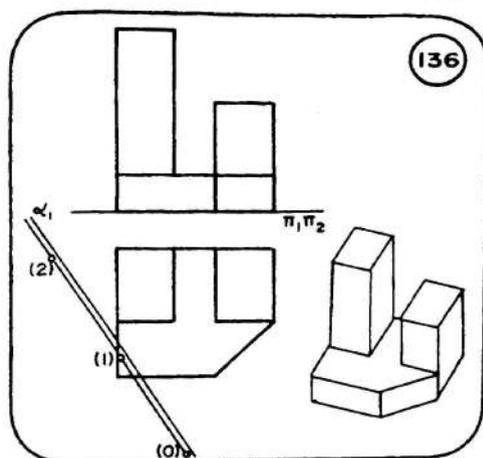
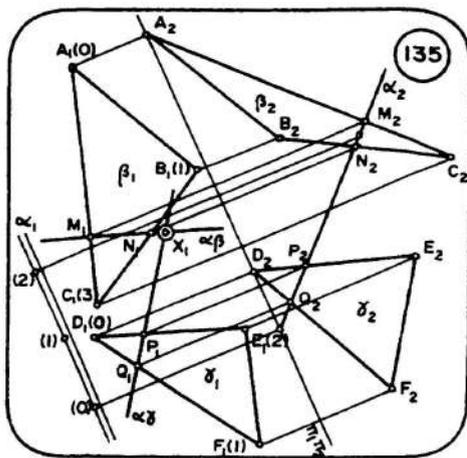
Notem que, para explicar interseção de reta com plano, no sistema cotado, é preciso primeiro estudar como determinar a reta de interseção de dois planos.



### 3.6. Interseção de três planos entre si.

Quando temos três planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  mesmo sem considerarmos dois deles paralelos teremos 3 possibilidades de interseção (fig. 134):

a) As retas de interseção desses planos tomados dois a dois são distintas e concorrentes. Os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  formam um triedro e possuem um ponto em comum ( $\alpha\beta\gamma$ );



b) As retas de interseção são distintas mas paralelas entre si. Os planos formam uma superfície prismática;

c) As retas de interseção se confundem em uma só, que constitui a aresta de um feixe de planos formado por  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Naturalmente o primeiro é o caso mais freqüente. A determinação do ponto de interseção de 3 planos é sempre conseguida resolvendo um duplo problema de interseção de 2 planos. Dados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , podemos achar  $\alpha\beta$  e  $\beta\gamma$ , cuja interseção é o ponto  $\alpha\beta\gamma$  procurado. Mas pode ser mais rápido determinarmos  $\alpha\gamma$  e  $\beta\gamma$ , ou ainda  $\alpha\beta$  e  $\alpha\gamma$ .

Em écura, se um dos planos tiver sido dado graduado, como  $\alpha$  na fig. 135, o mais rápido para determinar seu ponto comum com os planos  $\beta = ABC$  e  $\gamma = DEF$  é achar  $\alpha\beta$  e  $\alpha\gamma$ . De fato, uma vista básica de  $\alpha$  determina as retas  $MN$  e  $PQ$  em que esse plano intercepta os outros dois. Se  $MN = \alpha\beta$  e  $PQ = \alpha\gamma$ , então o ponto  $X$  de interseção de  $MN$  com  $PQ$  é o ponto  $\alpha\beta\gamma$ .

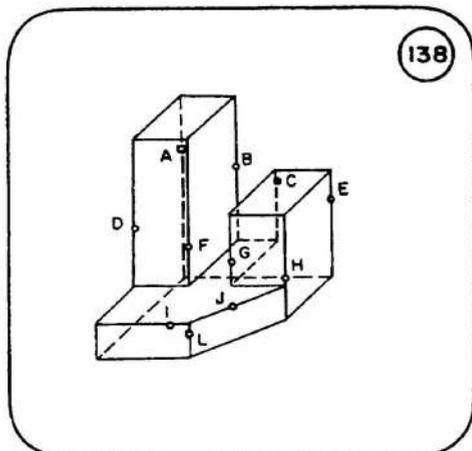
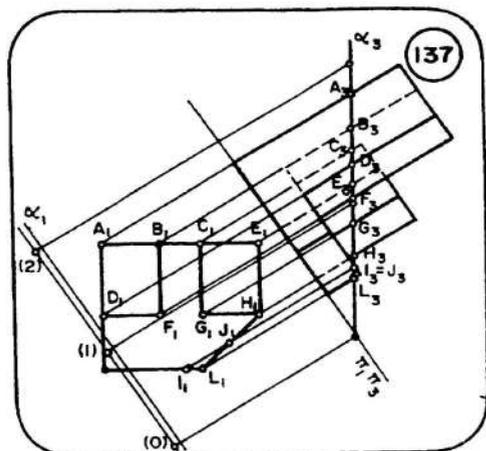
Se preferíssemos operar apenas em  $\pi_1$ , poderíamos achar as direções de  $\beta$  e  $\gamma$ , determinando as interseções  $\alpha\beta$  e  $\alpha\gamma$  pelas retas de cota constante dos 3 planos.

### 3.7. Seção Plana de um Sólido

Em desenho técnico, freqüentemente estamos precisando seccionar um sólido por um plano, ora para mostrar a constituição interna de objetos ocultos, ora para indicar o material de que são formados.

Em écura, achar a seção de um sólido por um plano qualquer fornecido implica em uma sucessão de interseções desse plano com as arestas e faces de tal sólido.

Vamos dar um exemplo da forma-modelo, dada com suas arestas pela metade do tamanho real (fig. 136). Mostremos como obter a sua seção pelo plano  $\alpha$ , já graduado.



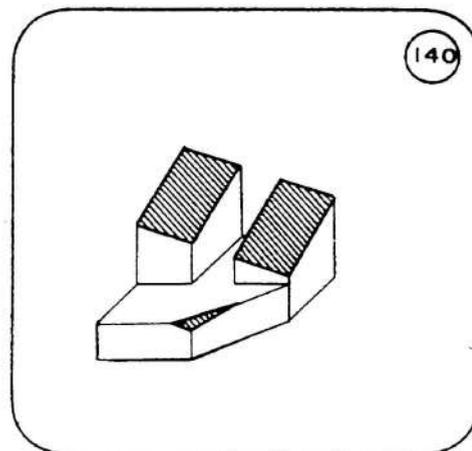
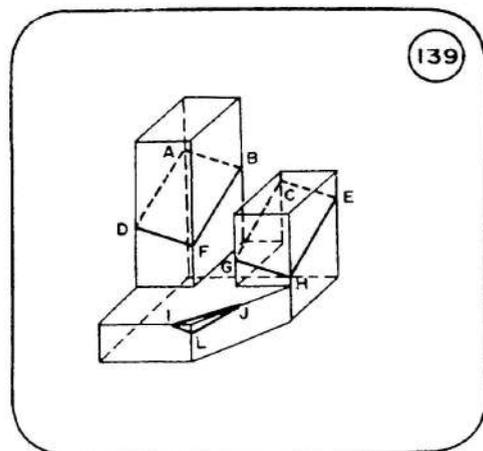
Tomando uma vista básica do plano  $\alpha$  em  $\pi_3$  (figura 137) podemos projetar todo o sólido, obtendo sua vista auxiliar nesse plano. As arestas do sólido que forem atravessadas por  $\alpha_3$  serão aquelas que são interceptadas pelo plano  $\alpha$ .

Depois disso, a maior dificuldade prática está em visualizar a ordem em que os pontos de interseção devem ser ligados entre si. É aí que entra a ajuda de uma perspectiva.

A figura 138 mostra em cavaleira oblíqua a forma-modelo com a marcação, em cada aresta, do ponto em que foi cortada por  $\alpha$ . Esses pontos são marcados facilmente pela cota obtida na vista auxiliar da figura 137.

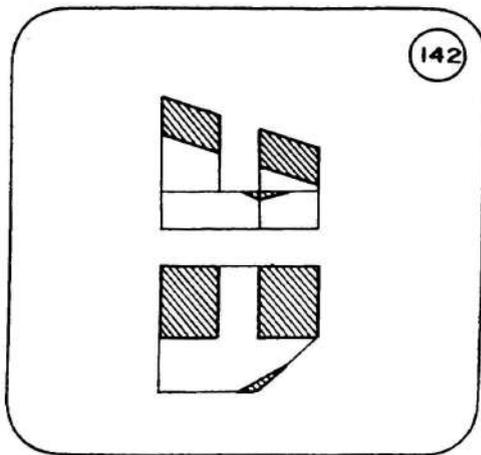
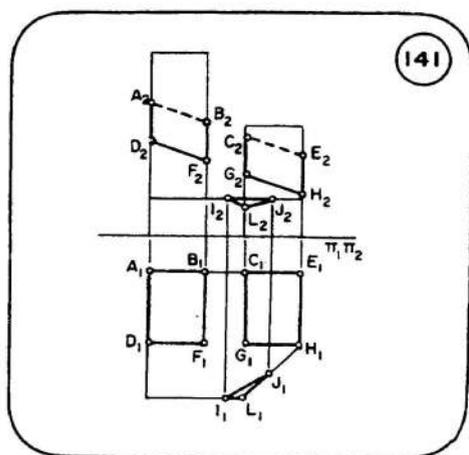
Na perspectiva é mais simples concluir quais são os pontos vizinhos nessa seção do sólido, ligando-os para obter o formato da seção (fig. 139).

A figura 140 mostra como ficará o sólido se forem retiradas suas partes que ficaram acima do plano  $\alpha$ . É usual hachurizar toda a área da seção da peça pelo plano  $\alpha$ .



Com o auxílio da perspectiva, podemos voltar às vistas ortogonais e determinar nelas, através das linhas de chamada, os pontos da seção — figura 141.

A figura 142 mostra o aspecto final da écura do sólido cortado, eliminadas as partes acima de  $\alpha$  e hachuriada a seção.



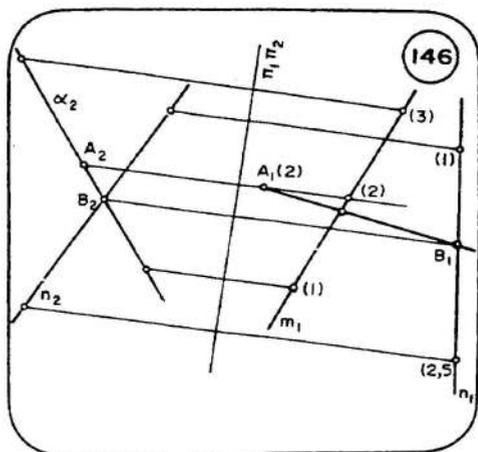
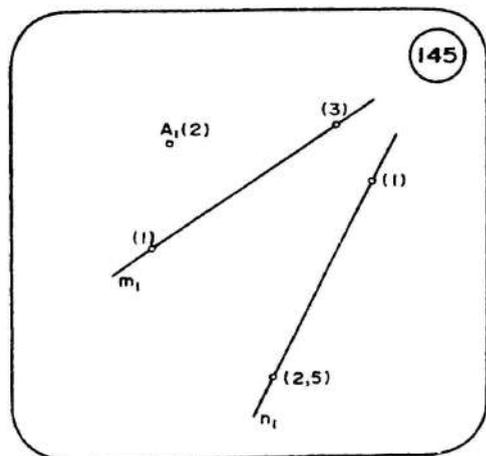
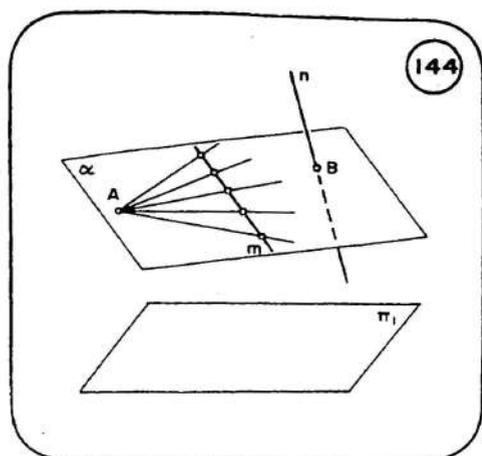
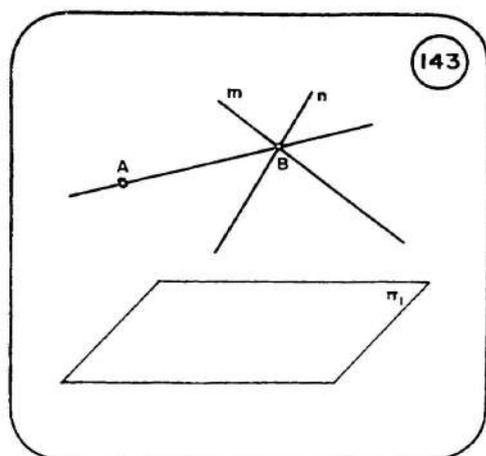
### 3.8. Retas Concorrentes com Duas Outras Reversas

Uma aplicação importante para a interseção de reta com planos é a determinação de retas que concorrem com um par de retas reversas.

Devemos observar que uma reta fica perfeitamente definida quando são dados 2 de seus pontos. Já nos capítulos anteriores vimos que um desses pontos pode ser substituído pela direção e pela declividade, isto é, se soubermos que uma reta deve passar em um ponto e ser paralela a uma reta dada, teremos uma só posição para essa reta. De fato, basta passar por esse ponto a reta paralela àquela que foi dada.

Também a reta será única se tiver que passar em um ponto dado e ser concorrente com duas retas dadas. A figura 143 analisa em perspectiva como passar uma reta por A, concorrendo com as retas m e n. Na hipótese de m e n serem concorrentes entre si, o que admitimos na figura, a reta procurada passa pelo ponto de interseção dessas retas (ponto B).

O mesmo problema, aplicado ao caso de m e n serem retas reversas, é imaginado na perspectiva da fig. 144. Todas as retas que passam por A e concorrem com m são coplanares, definindo um plano  $\alpha$ . Esse plano só atravessa a reta n em um único ponto, que chamamos de B. A reta AB será a solução para o problema pois é a única que encontra m e n ao mesmo tempo. Também poderíamos usar um raciocínio simétrico: todas as retas que passam em A e concorrem com n determinam um plano  $\beta$  que intercepta m em um único ponto C; a reta AC é a solução (que deve coincidir com AB). Essa mesma reta ainda poderia ter surgido da interseção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .



Vejamos essa questão em é pura (fig. 145). Temos dados o ponto A e as retas m e n, cada qual por dois de seus pontos.

Graduando m, seu ponto de cota 2, ligado a A, define uma reta de cota constante do plano  $\alpha = Am$ . (fig. 146). A vista básica de  $\alpha$  permite determinar o ponto B em que esse plano intercepta a reta n. A reta AB fica assim determinada.

A figura 147 mostra a é pura do segundo raciocínio apontado: graduando a reta n e definindo a direção do plano  $\beta = An$ , a vista básica (em  $\pi_3$ ) de  $\beta$  definirá o ponto C em que m atravessa  $\beta$ . A reta AC coincide com AB da é pura anterior.

A figura 148 mostra a mesma solução obtida sem o uso de projeções secundárias. Definindo  $\alpha = Am$  e  $\beta = An$  por suas direções, um par de retas de cota 1 cm em  $\alpha$  e  $\beta$  determina o ponto D comum aos dois planos. A reta AD é a interseção  $\alpha\beta$ , que deve ser a mesma reta ABC das figuras anteriores.

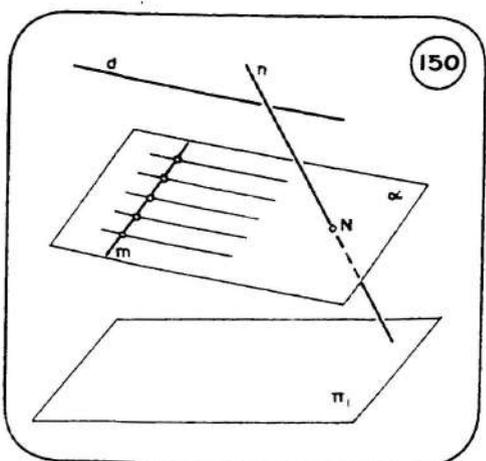
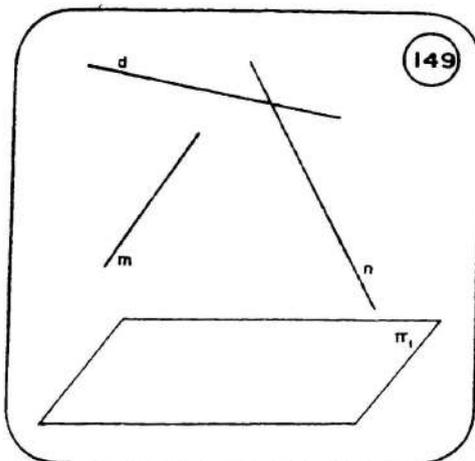
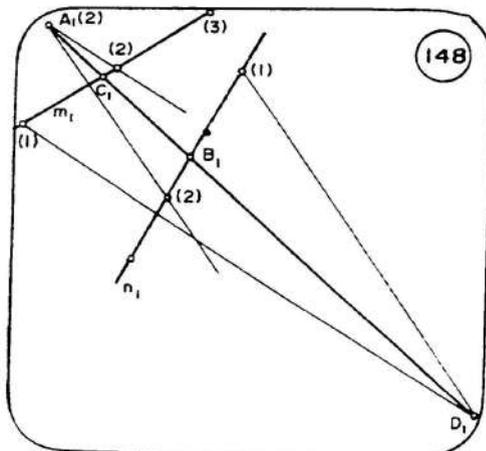
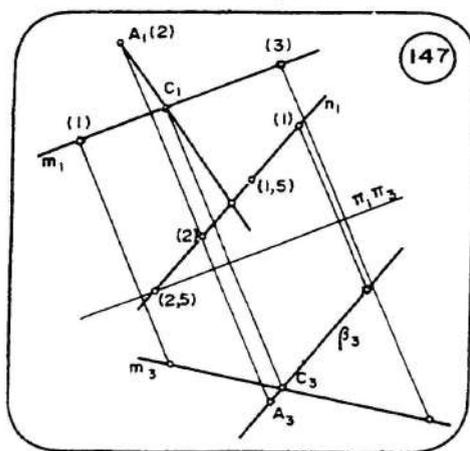
Pode parecer, comparando as figuras 146, 147 e 148, que é sempre mais simples o último procedimento. De fato isso acontece quando é fácil graduar as duas retas dadas, e mais ainda quando  $m$  e  $n$  já são dadas por suas escalas de declive. Mas imaginem se as retas forem dadas por pontos de cotas fracionárias. Será que compensa o trabalho adicional de graduá-las? É verdade que as duas primeiras alternativas exigem também a graduação de uma das retas, mas sempre nos é possível escolher a mais simples de graduar.

Vejamos outro problema envolvendo retas reversas.

Dado o par de retas reversas  $m$  e  $n$  é possível passar uma reta na direção  $d$ , que seja concorrente com  $m$  e  $n$ ? (figura 149).

Mostraremos que tal reta existe e é única.

Todas as retas concorrentes com  $m$  e paralelas a  $d$  são coplanares, definindo um plano  $\alpha$  (fig. 150). Este não pode conter  $n$  que é reversa em relação a  $m$ . Então intercepta  $n$  em um ponto que vamos chamar  $N$ , visualizado na



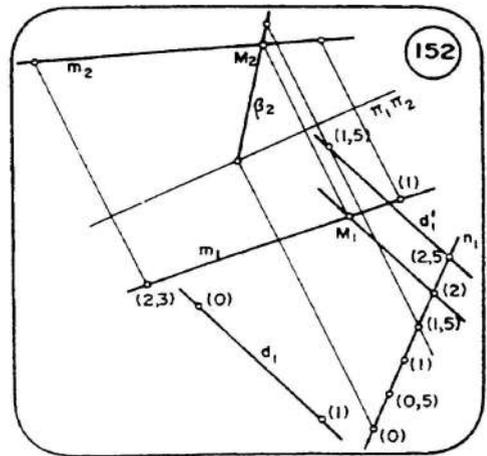
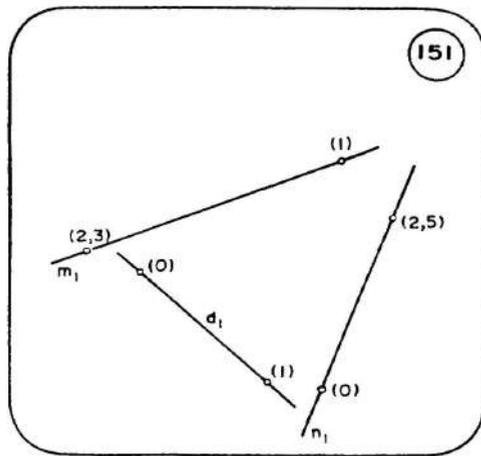
perspectiva. Passando por N uma paralela a d, teríamos a única reta nessa direção que pode concorrer com m e n, pois estaria contida em  $\alpha$ .

Neste caso também é possível o raciocínio simétrico de determinar o plano  $\beta$  formado por n e paralelas a d que são concorrentes com n. Achando o ponto M em que a reta m atravessa  $\beta$ , teríamos também a solução da questão. Igualmente seria achada tal solução pela interseção dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Vamos ver em épura essa questão.

A figura 151 define em  $\pi_1$  as retas m, n e d. Como vamos precisar da graduação, qual das retas m e n é mais fácil graduar? Apesar das cotas fracionárias em ambas, notemos que a divisão de n em 5 partes, entre os dois pontos dados, determina o seu meio intervalo. Será mais simples que graduar m, que necessitaria de uma divisão em 13 partes iguais ou em partes proporcionais.

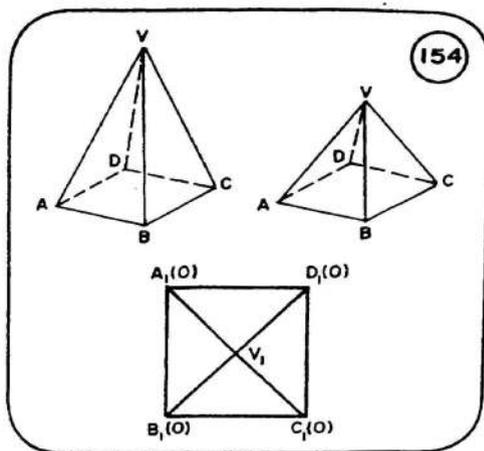
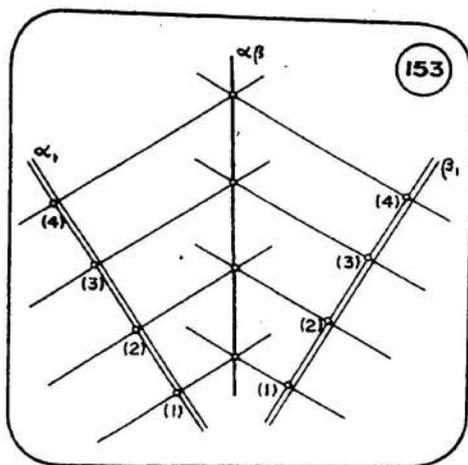
Escolhendo então passar o plano  $\beta$ , que fica definido pela reta n e por uma reta d' paralela a d e concorrente com n no ponto de cota 2,5 (fig. 152), podemos graduar n e obter assim a reta de cota constante 1,5 no plano  $\beta$ . Uma vista básica de  $\beta$  define o ponto M em que a reta m atravessa esse plano e conseqüentemente a reta que passa em M paralela a d, que soluciona a questão.



### 3.9. Interseção de Planos de mesma Declividade

Merece um destaque especial o que ocorre na interseção de planos que possuem a mesma inclinação.

Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  (fig. 153), como apresentam o mesmo intervalo, têm a mesma declividade. Notemos que a reta de interseção  $\alpha\beta$ , obtida pelos pontos de encontro das retas de cota constante dos dois planos, é a bissetriz do ângulo formado pelas direções de  $\alpha$  e  $\beta$ .



Desde que os planos conservem suas direções, o aumento ou diminuição de suas inclinações, desde que ocorram na mesma proporção para os dois planos, não alteram a direção da reta de interseção.

Dessa observação decorre, por exemplo, que uma pirâmide regular de base em  $\pi_1$  (fig. 154), como tem todas as faces laterais com a mesma declividade projetam suas arestas nas bissetrizes dos ângulos de base, independentemente de sua altura, desde que cada aresta da base é a direção da face correspondente.

Na engenharia ocorre com frequência a interseção de planos com a mesma declividade, particularmente no estudo de telhados. Como a declividade de uma face de telhado (denominada ÁGUA DO TELHADO) é dependente do tipo de telha utilizado, o mais comum é termos, numa mesma cobertura, todas as águas com a mesma declividade.

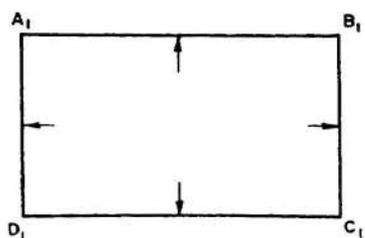
Suponhamos na fig. 155 um telhado em planta, que cobre uma área retangular ABCD. De cada lado deve subir uma face com a mesma declividade.

Sendo  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$ ,  $C_1 D_1$  e  $D_1 A_1$  as direções desses planos, não importa qual seja a declividade, pois a interseção deles terá sempre a direção de cada bissetriz do retângulo (fig. 156). Quando duas bissetrizes se encontram, o que acontece nos pontos  $E_1$  e  $F_1$ , ocorre um ponto comum a três faces. Em E concorrem as faces que partem de AB, de AD e de DC; em F as faces que sobem dos lados AB, BC e CD. A reta EF é horizontal do telhado, interseção das faces que sobem de AB e CD.

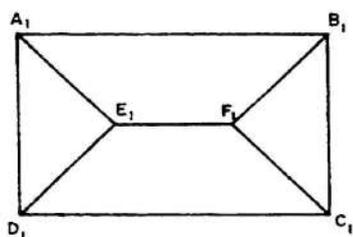
Como as bissetrizes são equidistantes dos lados do ângulo que dividem podemos perceber que  $E_1 F_1$  está a uma mesma distância de  $A_1 B_1$  e  $C_1 D_1$ .

De um modo geral essas linhas de interseção, em planta, resolvem um problema topológico específico: dividir a área de uma figura em suas partes que reúnem os pontos mais próximos de cada lado. Assim, no caso da figura 156, os pontos do triângulo  $A_1 E_1 D_1$  estão mais próximos do lado  $A_1 D_1$  do

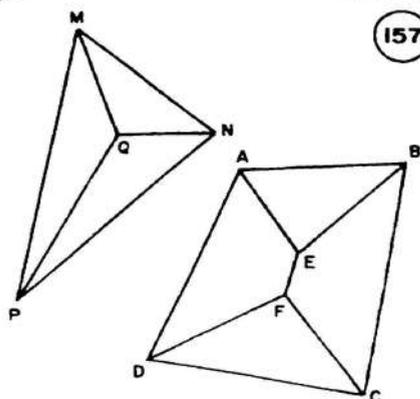
155



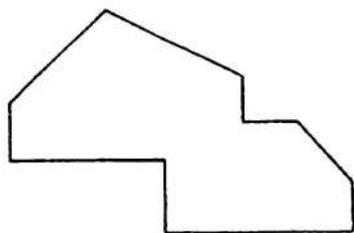
156



157



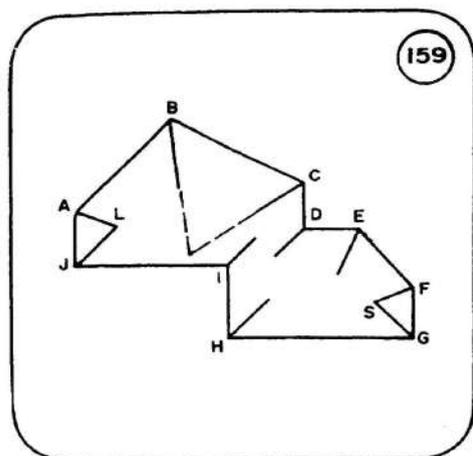
158



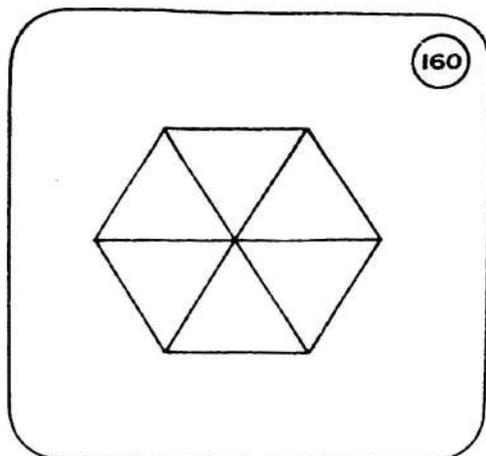
que de qualquer dos outros lados do retângulo. Os pontos do trapézio  $A_1B_1F_1E_1$  são os que mais se aproximam do lado  $A_1B_1$ . Dentro de  $B_1C_1F_1E_1$  os pontos estão mais próximos de  $B_1C_1$ , e dentro de  $C_1D_1E_1F_1$  estão mais próximos de  $C_1D_1$ .

Em um triângulo  $MNP$  (fig. 157) esse tipo de divisão é conseguido pelas três bissetrizes, sendo o incentro  $Q$  o único ponto equidistante dos três lados. Em um quadrilátero qualquer  $ABCD$  é possível ocorrer um encontro das quatro bissetrizes em um só ponto, mas geralmente elas se interceptam duas a duas em pontos distintos. O segmento  $EF$ , nesse caso mais freqüente, é sempre a bissetriz do ângulo formado pelos lados que separa (na figura,  $EF$  é bissetriz do ângulo formado por  $AD$  e  $BC$ ).

Vamos resolver essa questão para um polígono irregular de um número bem maior de lados (fig. 158).



159



160

Comecemos traçando as bissetrizes de todos os vértices e observando os pares que se encontram primeiro (figura 159). Notem que as bissetrizes de A e J se interceptam em L, limitando a área mais próxima ao lado AJ. As bissetrizes de F e G delimitam a área da figura que mais se aproxima de FG. Só esses dois pares se encontram diretamente. Se tentássemos o encontro das bissetrizes de B e C, por exemplo, esse ponto já estaria mais perto do lado JI que dos demais, e não poderia pertencer à linha equidistante dos lados.

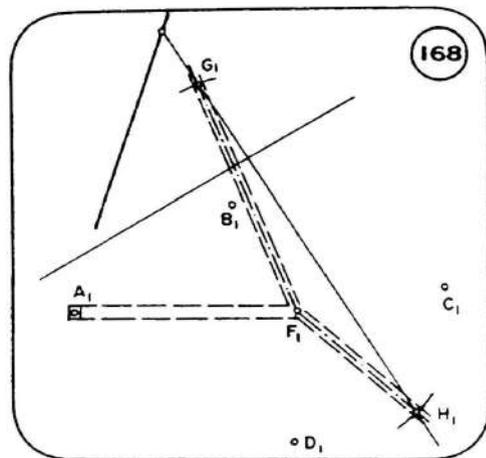
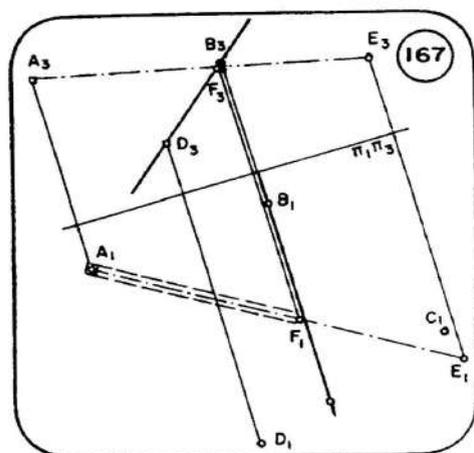
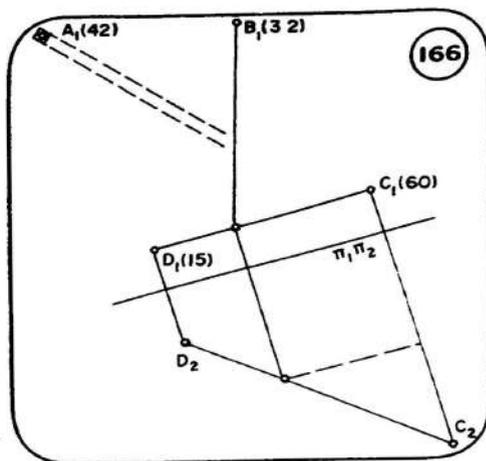
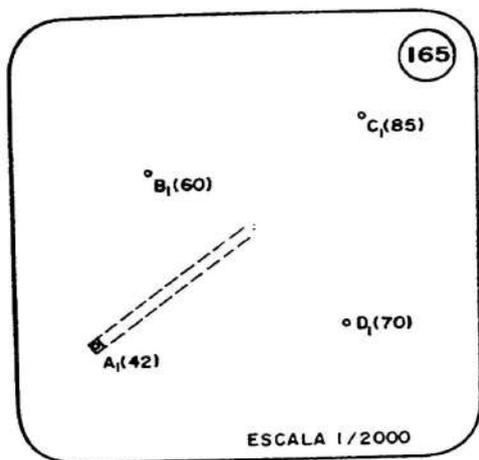
Observemos nas figuras 156 e 157 da página anterior, que em cada ponto temos 3 regiões vizinhas, pelo menos, o que significa haver sempre três linhas partindo de cada um deles. Pode haver mais de três, como acontecerá nos polígonos regulares, nos quais o centro é comum, a todas as regiões (fig. 160).

Voltando à figura 159, qual a terceira linha que sai do ponto L? Nesse ponto estão vizinhas as regiões dos lados AJ, AB e JI. A região correspondente a AJ já está fechada. Falta limitar entre si as regiões de AB e JI. A linha equidistante desses dois lados é a bissetriz de ângulo formado por eles (fig. 161). Nessa mesma figura, vemos que a terceira linha que parte de S é a bissetriz do ângulo formado por EF e GH, cujas regiões limita. Essas duas novas linhas só terminam quando encontram as próximas bissetrizes, em M e R, respectivamente.

Como fecharam as regiões mais próximas de AB e EF, nos pontos M e R restam abertas respectivamente as regiões de BC e IJ (para M) e DE e GH (para R). Portanto, de M parte a linha MN, bissetriz do ângulo de BC com IJ (fig. 162) e de R parte a linha RQ, paralela a DE e GH. Essas linhas fecham em N e Q as regiões correspondentes aos lados BC e GH.

A figura 163 mostra a linha NO, terceira que passa em N e bissetriz do ângulo de CD com IJ. Ela fecha em O a região mais próxima do lado IJ. A linha PQ é bissetriz do ângulo de DE com HI, e fecha em P a região mais próxima de DE.





## RESOLUÇÃO

A primeira tarefa é determinar as cotas do veio nos pontos B, C e D. Subtraindo, das cotas dadas na superfície do solo, as respectivas profundidades, achamos as cotas de 32m (em B) de 60m (em C) e 15m (em D). Com esses três pontos podemos achar a direção do veio. Uma vista auxiliar  $\pi_2$  (fig. 166) permite achar na reta CD o ponto de cota 32, que ligado a B fornece tal direção.

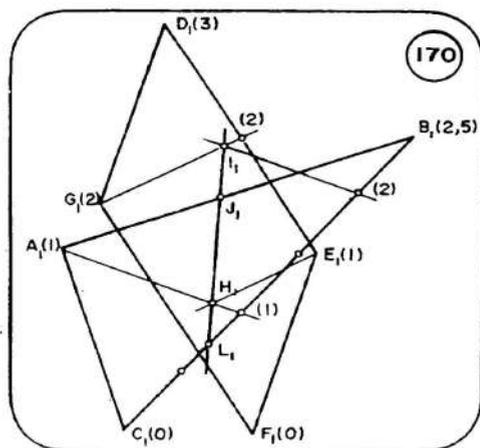
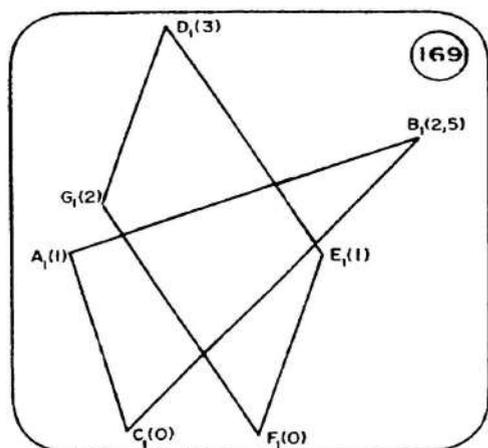
Uma vista básica do veio em  $\pi_3$  permitirá localizar o ponto onde esse plano intercepta a galeria que desce de A. Para localizar a projeção dessa galeria em  $\pi_3$  (fig. 167) deveremos usar sua declividade. Marcando em  $\pi_1$  o ponto  $E_1$  tal que  $A_1E_1 = 100m$ , sabemos que  $E_3$  deverá estar 20m abaixo de  $A_3$  (já que a declividade dada foi de 20%).  $A_3E_3$  atravessa o plano BCD no ponto  $F_3$ , do qual a linha de chamada determina  $F_1$ .

Do ponto F deve partir uma reta do plano BCD com declividade 25% para a direita e outra com declividade 15% para a esquerda. Essas retas estão mostradas na figura 168 sem maiores comentários, pois essa parte do problema é uma repetição de exercício do capítulo anterior (reta pertencente a plano).

3.10.2 – Determinar a interseção da placa triangular ABC com a placa DEFG (fig. 169).

### RESOLUÇÃO

Devido à simplicidade das cotas, é mais rápido graduar os dois planos (fig. 170) do que tomar vista secundária. Dois pares de cota constante (de 1 cm e de 2 cm, na figura) determinam os pontos H e I comuns aos dois planos. A reta HI é a interseção desses planos, mas só nos interessa o seu segmento LJ, que está no interior do triângulo e do paralelogramo.



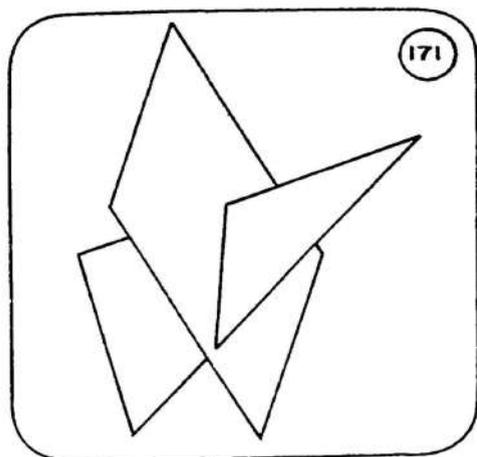
De fato, apresentamos as duas figuras como placas planas, e assim só pode haver interseção se a reta comum estiver no interior de cada área. Se essas placas forem opacas fornecerão o aspecto da figura 171.

3.10.3 – A figura 172 mostra a projeção da base de uma pirâmide triangular cujas faces laterais são planas de declividade 125%.

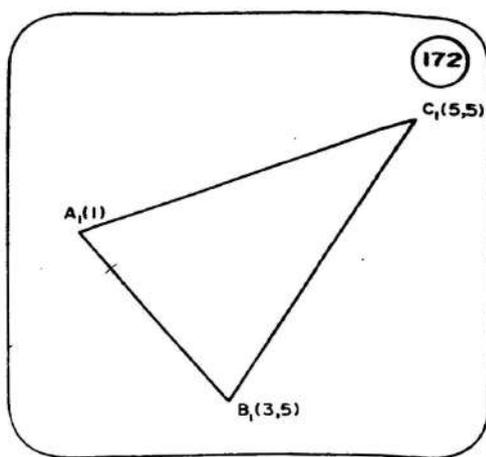
Determinar o vértice dessa pirâmide.

### RESOLUÇÃO

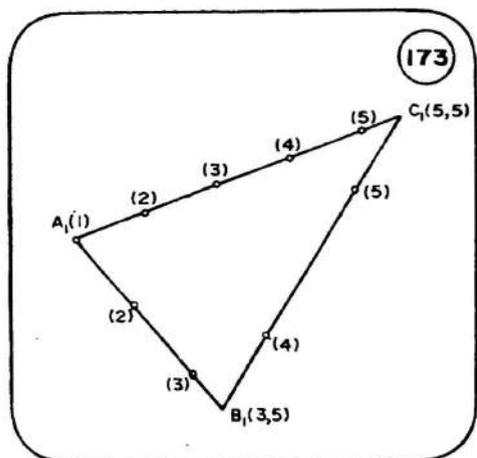
Trata-se de uma questão de interseção de 3 planos. Cada um deles passa em uma das retas AB, BC e CA e tem declividade 125%. Seu intervalo será  $100/125 = 0,8$  cm.



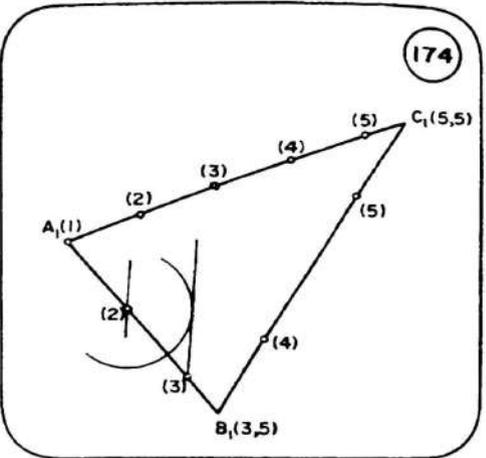
171



172



173

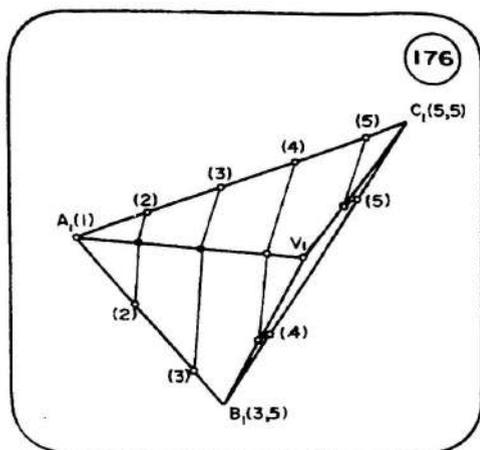
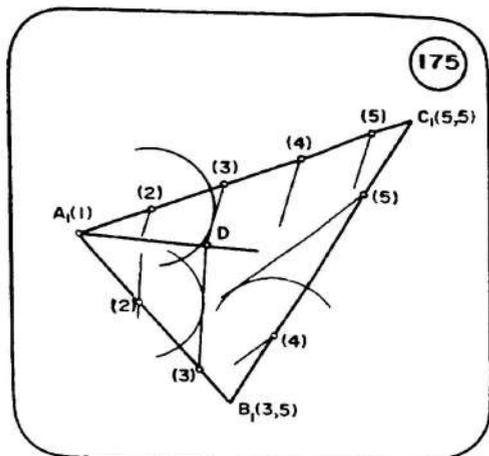


174

Graduando essas retas (fig. 173), vemos que todas têm intervalo maior que 0,8 cm. Então cada uma delas pode pertencer a um plano com esse intervalo. Se uma delas tivesse apresentado intervalo menor que 0,8cm seria impossível passar por ela uma face da pirâmide.

Para passar por AB um plano com o intervalo de 0,8 qual seria a direção desse plano?

Se tomarmos 2 pontos consecutivos da escala de declive de AB, como os de cotas 2cm e 3cm (fig. 174) e do mais baixo traçarmos um arco de circunferência de raio 0,8 cm, a tangente tirada do outro ponto a esse arco será a direção do plano  $\alpha$  procurado. De fato, traçando do ponto de cota 2 cm uma paralela a essa tangente teríamos a distância entre tais paralelas medindo exatamente 0,8cm. Chamemos de  $\alpha$  esse plano. Fazendo o mesmo para os lados AC e BC da base, teríamos as faces  $\beta$  e  $\gamma$  da pirâmide (fig. 175). A interseção  $\alpha \beta$  pode ser obtida através de um par de retas de mesma cota nos dois planos



(ponto D, de cota 3), constituindo-se em uma das arestas laterais da pirâmide. As interseções  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  podem ser obtidas da mesma maneira (fig. 176), achando-se V na interseção das três retas.

Vocês podem observar que ocorrerão outras soluções, pois cada um dos planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  pode ter sua direção para o lado de fora da base, conforme mostra a figura 177.

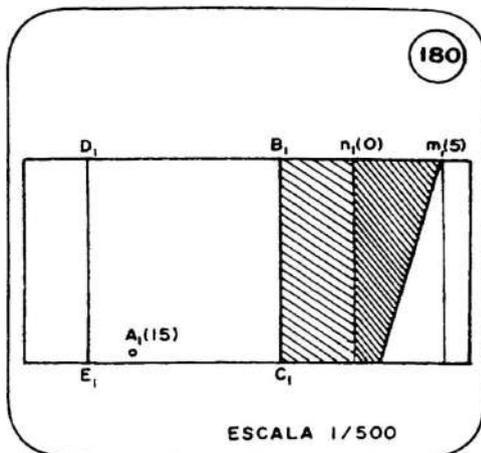
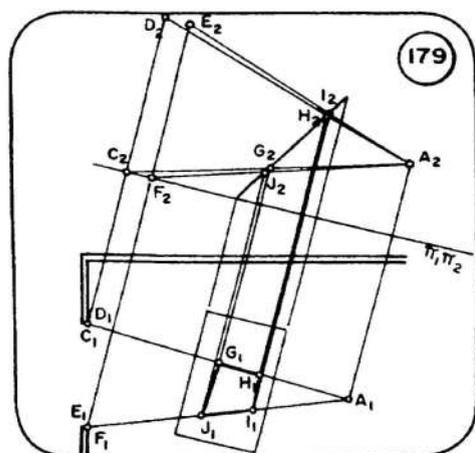
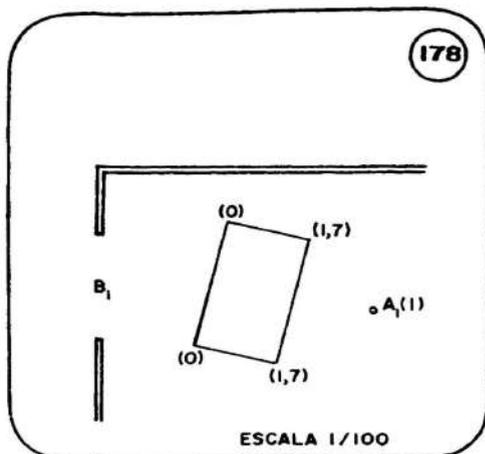
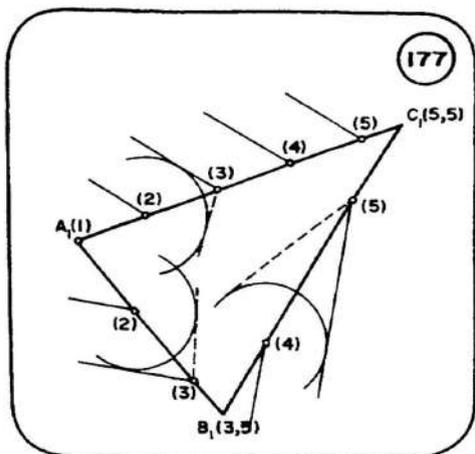
3.10.4 – Na figura 178 as cotas estão em metros. Em planta, temos a porta B de um laboratório em que uma amostra fortemente radioativa no ponto A é protegida por um escudo retangular. Delimitar a área desse escudo que se deve reforçar para garantir contra a radiação toda a área da porta B, que tem 2,2m de altura.

### RESOLUÇÃO

Determinando os raios retos que partem de A para os quatro cantos da porta (C, D, E e F, na fig. 179), precisamos achar onde atravessam o plano do escudo. Uma vista básica do mesmo permite-nos localizar  $G_2, H_2, I_2$  e  $J_2$  no plano  $\pi_2$  e, por linhas de chamada,  $G_1, H_1, I_1$  e  $J_1$ . Esse quadrilátero delimita a área que deve ser reforçada para maior proteção da porta.

3.10.5 – As retas BC e DE são os bordos de um viaduto (fig. 180). A planta tem suas cotas medidas em metros. A lâmpada de um poste, colocada no ponto A, projeta a sombra do viaduto na área hachuriada da figura, que sobe no plano inclinado de uma barreira, definido pelas horizontais m e n.

Determinar a declividade desse trecho de viaduto.

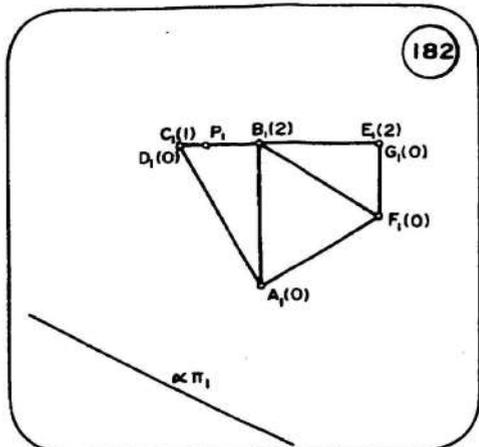
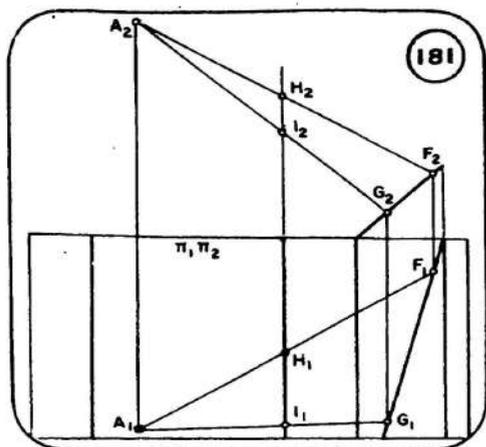


## RESOLUÇÃO

O contorno da sombra projetada é devido à sombra do bordo BC do viaduto. Se passarmos um raio luminoso de A a um ponto de BC, como H, por exemplo (fig. 181), tal reta interceptará o plano mn em F, no contorno da sombra. Outro ponto qualquer I de BC projetará sombra em G.

Este é um problema inverso do que estudamos em interseção de reta com plano mn e queremos determinar os pontos H e I por suas cotas.

Uma vista básica do plano mn permite localizar em  $\pi_2$  os pontos  $F_2$  e  $G_2$ , que determinam  $A_2F_2$  e  $A_2G_2$  e conseqüentemente  $H_2$  e  $I_2$  na linha de chamada de  $H_1$  e  $I_1$ . Medindo as cotas de H e I, podemos tranqüilamente aplicar a fórmula da declividade para o segmento HI e portanto para o trecho do viaduto em planta.



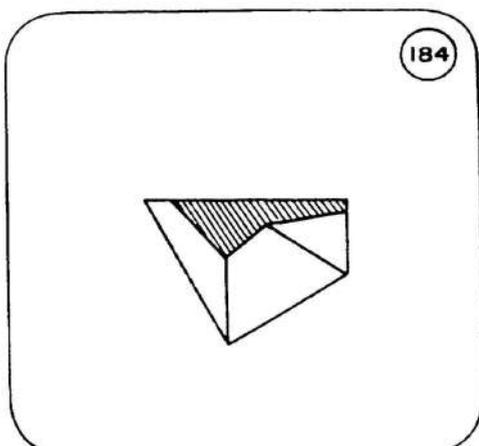
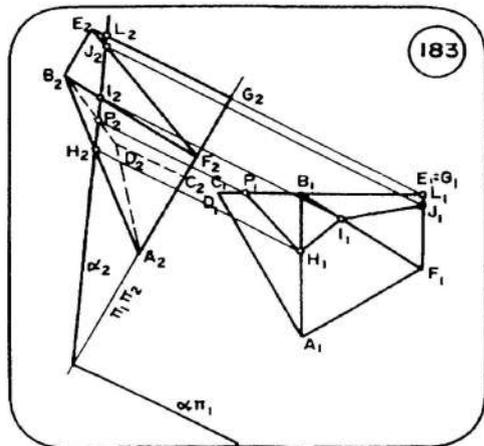
3.10.6 – Determinar a projeção da seção do sólido da fig. 182, já estudado no 1º capítulo, pelo plano  $\alpha$ , dado pelo traço  $\alpha \pi_1$  e pelo ponto P em que intercepta a aresta BC do sólido.

### RESOLUÇÃO

A vista básica de  $\alpha$  (fig. 183) é conseguida com  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular a  $\alpha \pi_1$ . Projetando o sólido em  $\pi_2$  localizamos  $P_2$  na aresta  $B_2 C_2$ , e  $\alpha_2$  fica determinado por conter esse ponto.

Essa reta  $\alpha_2$ , vista básica de  $\alpha$ , intercepta  $A_2 B_2$ ,  $B_2 F_2$ ,  $E_2 F_2$  e  $E_2 G_2$ , nos pontos  $H_2$ ,  $I_2$ ,  $J_2$  e  $L_2$ , respectivamente. Linhas de chamada localizam esses pontos na projeção principal.

Pela simplicidade dessa seção, é fácil perceber os pontos vizinhos, por pertencerem a uma mesma face do sólido. Podemos dispensar a perspectiva e obter logo o contorno da projeção principal da seção (fig. 184).



A visibilidade da figura mostra a eliminação da porção da peça acima do plano  $\alpha$ , hachuriando-se o interior da seção.

3.10.7 – Uma caldeira cilíndrica de eixo horizontal é mostrada na planta da fig. 185 (cotas em metros).

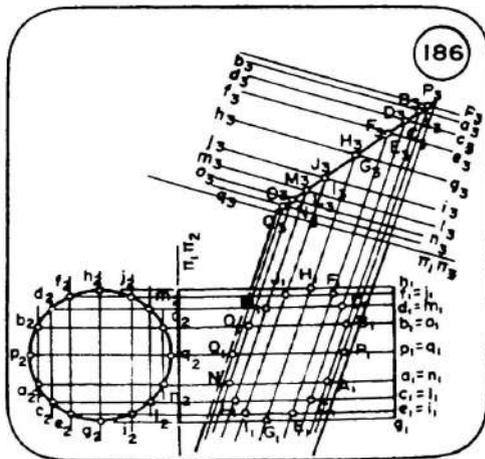
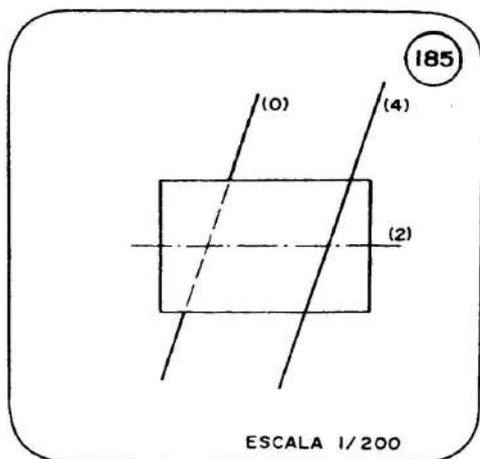
Determinar a projeção da linha de interseção dessa caldeira com a parede inclinada, definida na planta por suas horizontais de cotas 0 e 4.

### RESOLUÇÃO

O cilindro também permite uma vista básica. Tomando-se  $\pi_1 \pi_2$  perpendicular ao seu eixo, será obtido um círculo como projeção do cilindro (fig. 186).

Escolhendo diversas cotas, podemos determinar vários pares de geratrizes do cilindro (ab, cd, ef, etc). Essas geratrizes podem ser projetadas em  $\pi_1$  e em  $\pi_3$ , que dá uma vista básica do plano da parede.

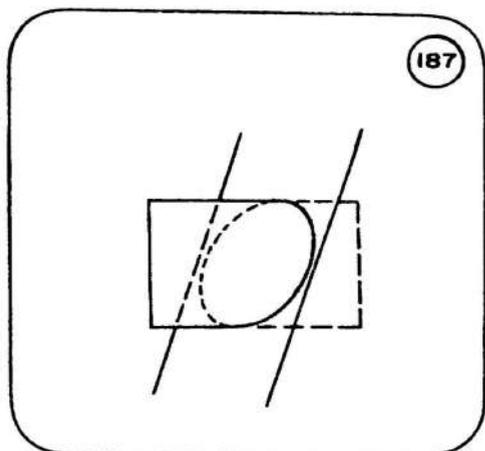
Podemos determinar os pontos em que cada geratriz atravessa o plano (pontos A, B, C, D, E, F, etc), obtendo-os em  $\pi_3$  e depois em  $\pi_1$ .



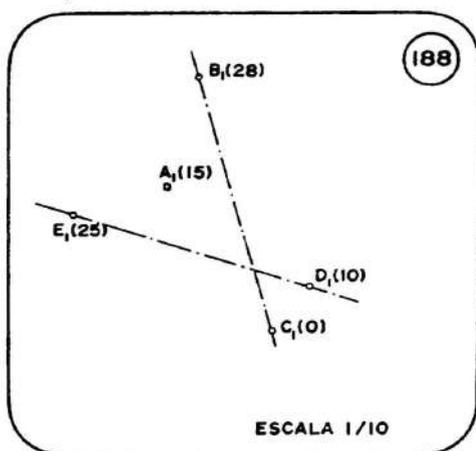
Sabendo-se que a seção resulta em uma elipse, é fácil unir esses pontos para obter essa curva de seção na projeção principal (fig. 187), notando-se que metade é visível por estar na parte superior da caldeira e a outra é invisível, por estar no semi-cilindro inferior.

3.10.8 – Um motor no ponto A deve transmitir rotação aos eixos BC e DE por meio de um único eixo (fig. 188).

Desprezando o raio dos eixos, qual deve ser a direção do eixo transmissor?



187



188

ESCALA 1/10

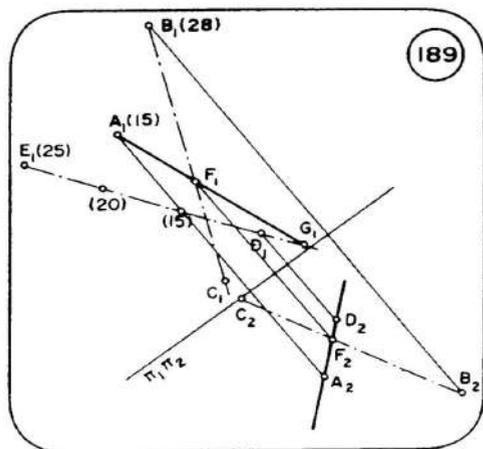
### RESOLUÇÃO

O eixo de transmissão é a reta que passa por A e é concorrente com BC e DE. Essas retas são reversas, e assim estaremos diante da questão discutida no ítem 3.8 deste capítulo.

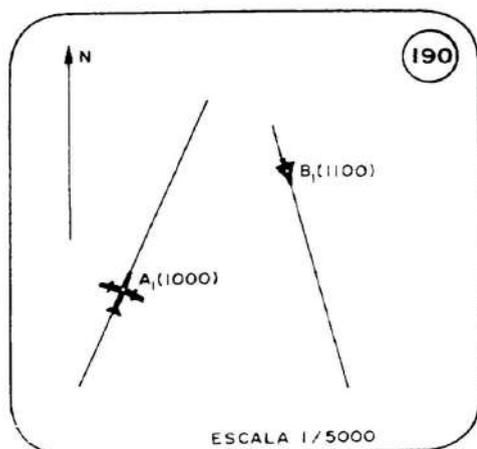
Como BC é de difícil graduação, escolhemos determinar o plano  $\alpha$  definido por A e DE. O segmento DE, dividido em 3 partes iguais, localiza o ponto de cota 15, que determina a direção de  $\alpha$  com o ponto A (figura 189).

Uma vista básica de  $\alpha$  permite determinar em  $\pi_2$  o ponto F em que  $\alpha$  intercepta a reta BC. A reta AF é a solução para a questão.

3.10.9 – Um artilheiro no bombardeiro A dispara para cima na direção N  $60^\circ$  E e com inclinação de  $30^\circ$ . Se esse avião se desloca em uma horizontal, de que ponto o artilheiro disparou para atingir o caça B, que mergulha em um ângulo de  $20^\circ$ ? (figura 190, cotas em metros).



189



190

ESCALA 1/5000

## RESOLUÇÃO

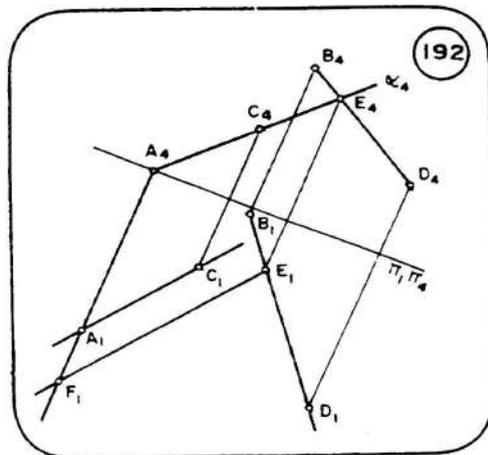
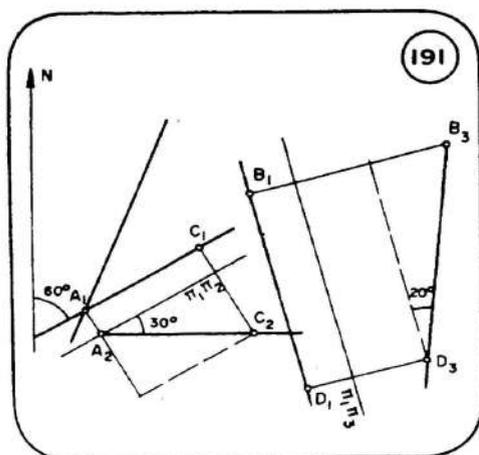
As trajetórias de A e B são retas reversas. O projétil disparado de A deve seguir uma reta concorrente com essas duas retas reversas, para atingir o avião B.

Essa questão recai naquele problema analisado no ítem 3.8: passar uma reta em uma direção dada, concorrente com duas retas reversas dadas.

Aqui é mais simples definir o plano  $\alpha$  determinado pela trajetória de A, que já tem cota constante, e por uma reta AC na direção do tiro. Essa reta forma  $60^\circ$  com o norte (fig. 191) e tem inclinação de  $30^\circ$ . Para achar um outro ponto dessa reta, como C, temos de tomar uma sua vista em v.g. no  $\pi_2$ . Como a cota de A é muito grande, vamos subtrair 1000 metros, ficando ele com cota nula. Marcando o ângulo de  $30^\circ$  em  $\pi_2$ , escolhemos  $C_2$  1 cm acima de  $A_2$ , ou seja, achamos o ponto C de cota 1050m na reta AC.

Também precisamos de um segundo ponto na trajetória do avião B. Tomando sua vista em v.g. no  $\pi_3$ , marcamos  $B_3$  por sua cota acima de 1000, e o ângulo de  $20^\circ$  fornecido no enunciado permite escolher  $D_3$  com 1 cm abaixo de  $B_3$ , e conseqüentemente o ponto D de cota 1050m.

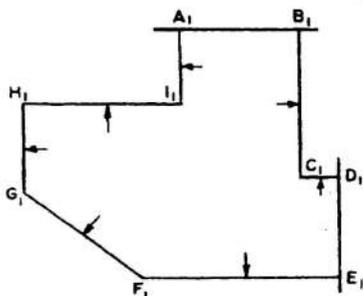
Agora, uma vista básica de  $\alpha$ , do qual já conhecemos a direção, é obtida em  $\pi_4$  (fig. 192). Projetando BD em  $\pi_4$ , a reta  $B_4D_4$  atravessa  $\alpha_4$  em  $E_4$ , do qual a linha de chamada localiza  $E_1$  em  $B_1D_1$ . A reta EF paralela a AC encontra em F a trajetória do bombardeiro. É esse o ponto de disparo pedido no problema.



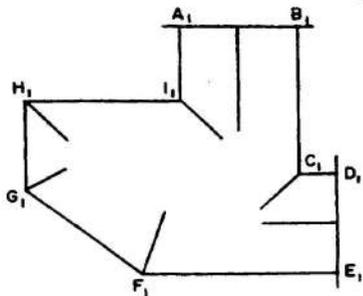
3.10.10 – O polígono da figura é o contorno do beiral de um telhado em planta, no qual deve descer uma água para cada lado assinalado por uma seta (fig. 193).

Para os lados AB e DE não descem águas por estarem sobre o muro divisório do terreno.

193



194



Traçar as linhas de interseção das águas desse telhado, sabendo-se que todas devem ter a mesma declividade.

### RESOLUÇÃO

Conforme foi analisado no ítem 3.9 desse capítulo, a interseção de planos de igual declividade não depende, em direção, do valor dessa declividade, pois está sempre na bissetriz do ângulo formado pelas direções dos planos.

Os lados da figura que estão assinalados por setas devem ser horizontais, por serem bordos de escoamento d'água. Como nada foi observado em contrário, todos eles devem ter a mesma cota.

Com essas considerações, o problema recai em dividir a área do polígono em suas regiões mais próximas dos lados da figura, excluindo  $A_1B_1$  e  $D_1E_1$ .

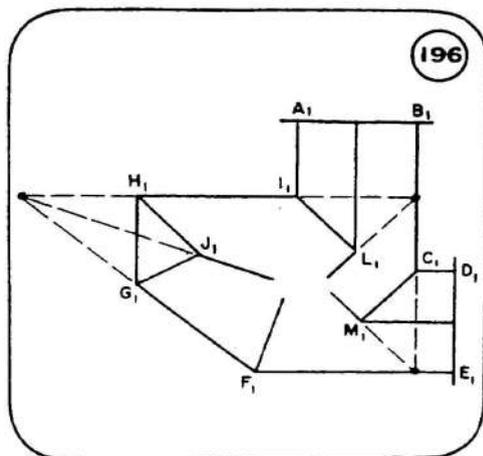
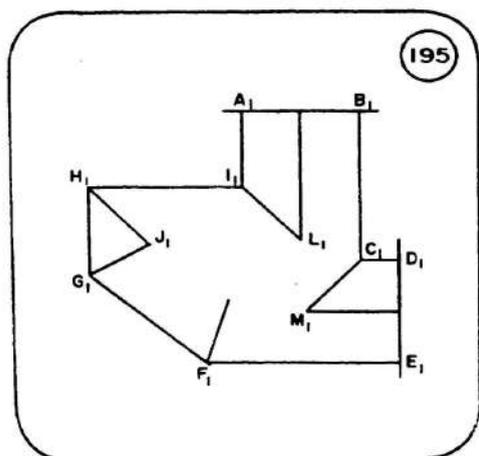
Começemos traçando de  $C_1$ ,  $F_1$ ,  $G_1$ ,  $H_1$  e  $I_1$  as bissetrizes do polígono (fig. 194). De  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D_1$  e  $E_1$  não saem bissetrizes por não haver água do telhado descendo para  $A_1B_1$  nem para  $D_1E_1$ . As retas que saem do meio de  $A_1B_1$  e do meio de  $D_1E_1$  dividem as áreas mais próximas de  $A_1I_1$  e  $B_1C_1$  e de  $C_1D_1$  e  $E_1F_1$ , respectivamente.

É fácil perceber onde cada linha encontra a mais próxima (fig. 195). No ponto  $J_1$  fica limitada a área mais próxima do lado  $G_1H_1$ . Em  $L_1$ , a área dos pontos que se aproximam mais de  $A_1I_1$ . Em  $M_1$ , a área correspondente a  $C_1D_1$ .

Vejamos agora, de cada um desses pontos  $J_1$ ,  $L_1$  e  $M_1$  qual a terceira linha que sai.

De  $J_1$ , falta sair a interseção das áreas mais próximas de  $H_1I_1$  e  $G_1F_1$ , na direção da bissetriz do ângulo formado por esses lados (fig. 196). Em  $L_1$  estão abertas as regiões de  $H_1I_1$  e  $B_1C_1$ ; a bissetriz do seu ângulo determina a interseção dessas áreas. De  $M_1$  falta a bissetriz do ângulo de  $B_1C_1$  com  $E_1F_1$ .

Finalmente, a reta que vem de  $J_1$  encontra em  $N_1$  a bissetriz de  $F_1$ , limitando a região mais próxima de  $F_1G_1$  — figura 197, e a reta de  $L_1$  encontra a de  $M_1$  em  $O_1$ , limitando a região mais próxima de  $B_1C_1$ . A linha  $N_1O_1$  completa a divisão das águas do telhado.



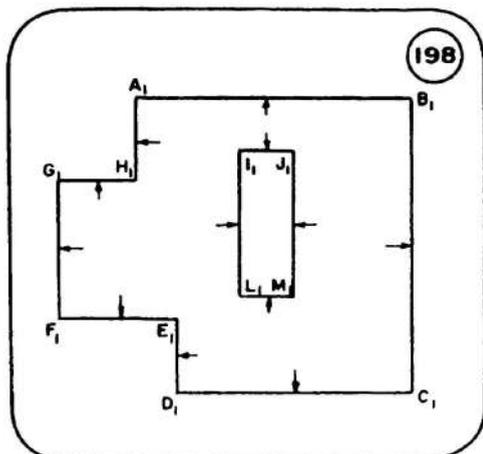
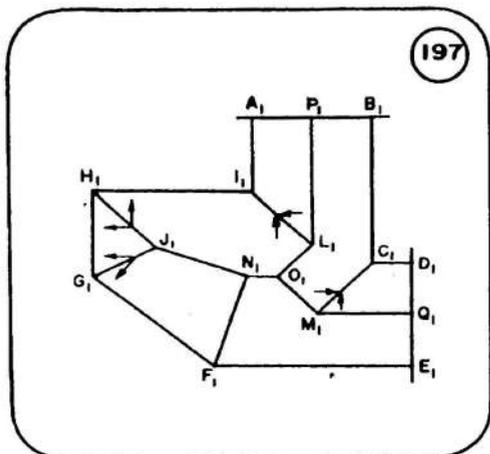
Notem que, dessas linhas, aquelas que são paralelas ao beiral do telhado, como é o caso de  $PL$ ,  $MQ$  e  $NO$ , são retas de cota constante. Essas arestas horizontais são as **CUMEEIRAS** do telhado. As arestas não horizontais mas que separam a água para bordos diferentes são chamadas **ESPIGÕES** do telhado. É o caso de  $HJ$ , que divide a água corrente para  $HÍ$  da água que corre para  $HG$ , de  $GJ$ , que divide a água que desce para  $GH$  e  $GF$ , e assim por diante. As arestas que concentram água que vem descendo em duas faces distintas são denominadas **RINCÕES** do telhado. Temos o exemplo de  $IL$ , para onde vai água que desce nas faces que jogam água pelos bordos  $AI$  e  $HI$ .  $CM$  é outro rincão desse telhado. Podemos observar que todas as bissetrizes que saem dos vértices côncavos do polígono são rincões, enquanto as que saem dos vértices convexos são espigões. As cumeeiras jamais são bissetrizes.

3.10.11 — A figura 198 é o contorno do beiral de um telhado em planta, onde todas as águas têm a mesma declividade e descem para todos os lados do polígono externo e do retângulo interno, que representa um pátio descoberto.

Determinar os espigões, rincões e cumeeiras desse telhado.

### RESOLUÇÃO

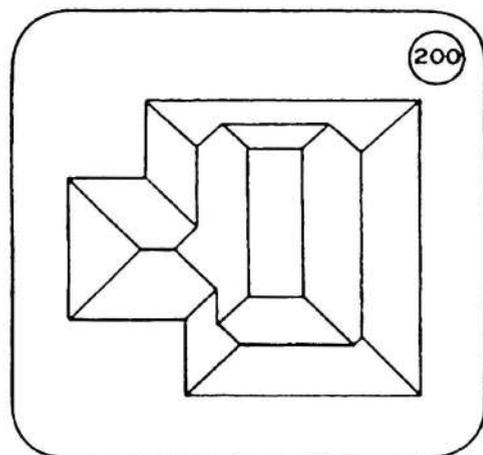
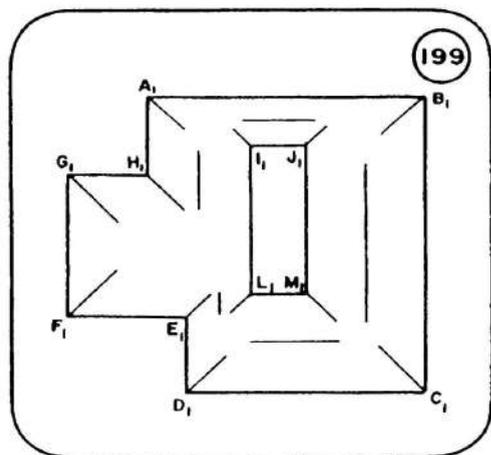
Nessa situação há bissetrizes saindo de todos os vértices, tanto do polígono externo quanto do retângulo interno (fig. 199). Também devem ser lembradas as cumeeiras que correm paralelas e equidistantes dos bordos externos e internos.



Com essas observações e achando a interseção das linhas mais próximas, é fácil chegar ao aspecto final da figura 200.

3.10.12 – Um telhado tem seu beiral indicado na planta da figura 201. As cotas estão em metros e suas águas têm declividade de 50%.

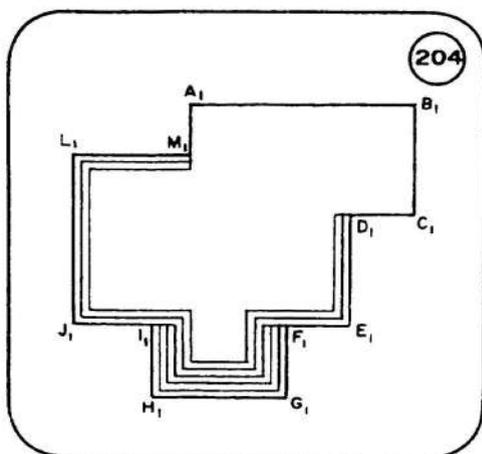
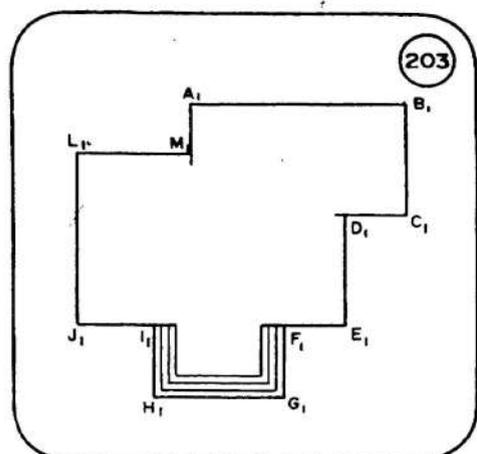
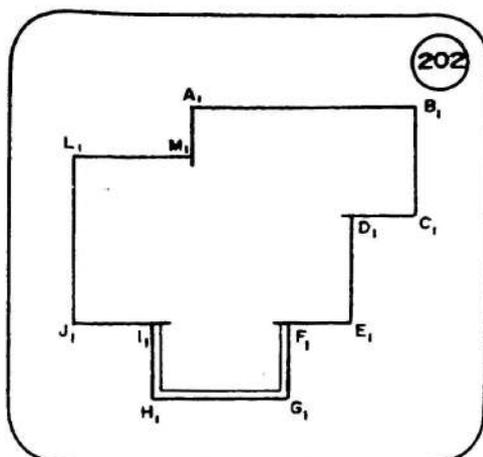
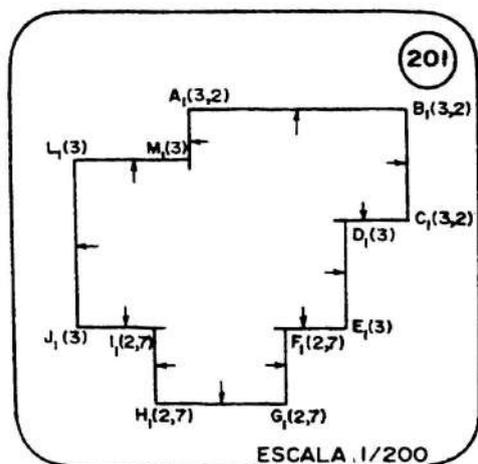
Determinar os espigões, os rincões e as cumeeiras desse telhado.



## RESOLUÇÃO

Precisamos de início achar horizontais de mesma cota em todas as faces do telhado, pois os seus beirais têm níveis diferentes.

O intervalo é igual para todas elas, medindo o inverso da declividade, ou seja,  $100/50 = 2\text{m}$ . Na escala do desenho, teríamos 1 cm para a medida desse intervalo na planta. Em cada mm na planta, a cota do telhado subirá 10 cm.



O beiral de nível mais baixo é FGHI. Passando uma paralela por dentro desse contorno e a 1 mm de distância desse beiral, teremos a horizontal do telhado de cota 2,8 m (fig. 202). Essa cota não é suficiente para encontrar o beiral de nível seguinte (JI e FE, com cota 3m). Somente passando mais duas paralelas por dentro de  $F_1G_1H_1I_1$  chegaremos a essa cota de 3m (fig. 203).

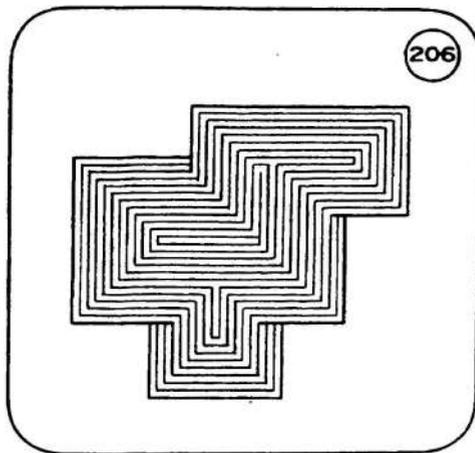
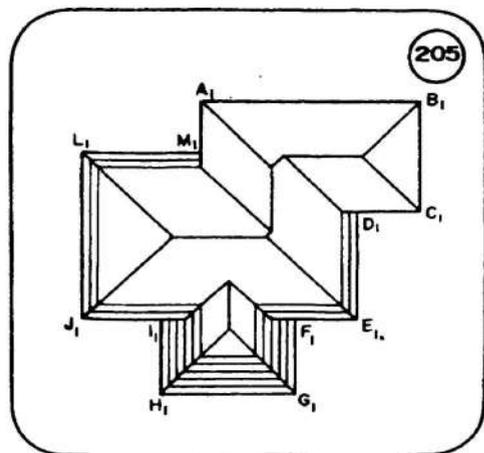
Daí em diante podemos passar, com mais 1 mm de afastamento, uma horizontal de cota 3,1 que contorne todo o beiral de  $D_1$  a  $M_1$ , passando também paralela a  $F_1G_1H_1I_1$  (figura 204). Uma segunda paralela nas mesmas condições atingirá a cota do beiral mais alto (3,2 m, de ABC).

Tendo chegado a uma cota única em todas as águas do telhado, podemos escolher entre aplicar a divisão desse polígono em áreas mais próximas de cada lado, como nos problemas anteriores (figura 205), ou prosseguir traçando horizontais do telhado de 1 em 1 mm até não caber mais nenhuma (fig. 206), o que também resulta no traçado espontâneo das arestas do telhado.

Esse processo das horizontais equidistantes pode ser usado em telhados

de beiral todo na mesma cota. Muitos têm preferência por ele, apesar de ser mais trabalhoso, pois dá uma maior segurança ao operador mais inexperiente.

3.10.13 – O telhado definido pelo contorno do seu beiral, na planta da fig. 207, tem uma água descendo para cada lado. Todo o beiral tem a mesma cota, mas as declividades das águas são diferentes. Para  $A_1 B_1$  e  $E_1 D_1$ , descem



com declividade de 40%. Para  $B_1 C_1$  com declividade de 20%. Para os demais lados, com 25%.

Traçar os espigões, rincões e cumeeiras do telhado.

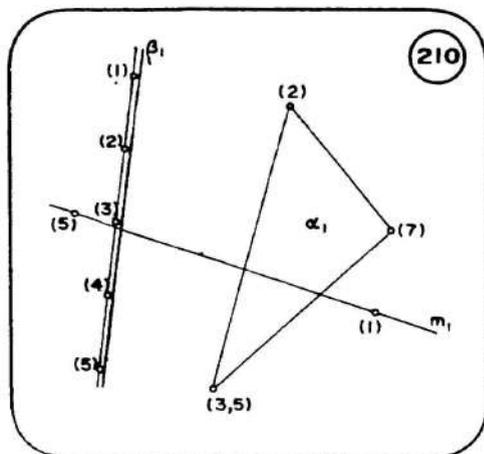
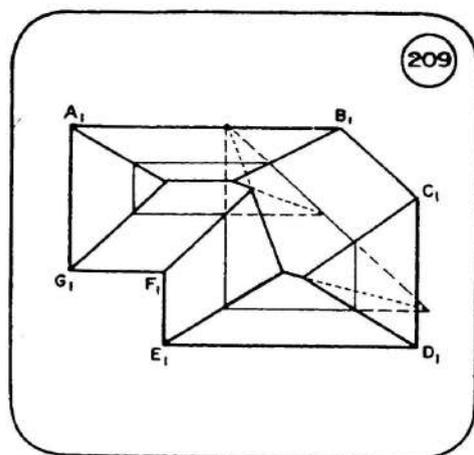
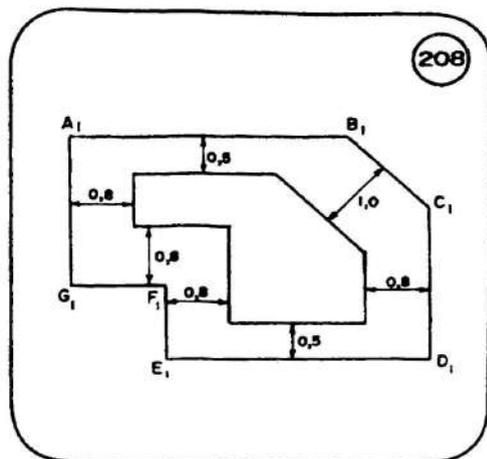
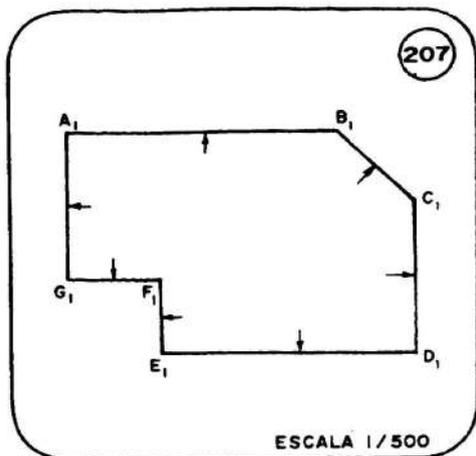
### RESOLUÇÃO

Para declividades diferentes é indispensável o uso de horizontais do telhado, pois as arestas não seguem mais a direção das bissetrizes.

Calculando o intervalo de cada água, temos os valores  $100/40 = 2,5$  m para as águas de 40%,  $100/20 = 5$  m para as águas de 20% e  $100/25 = 4$  m para as demais águas. Na escala da planta, esses intervalos medem respectivamente 0,5, 1,0 e 0,8 centímetros.

Marcando esses intervalos de cada lado, temos horizontais de cota 1 m acima do beiral (fig. 208). Não importa qual seja a cota do beiral, pois se é a mesma ao longo de todo o perímetro da figura, a horizontal obtida internamente é toda de mesma cota. Seus pontos de interseção determinam as direções dos espigões e rincões do telhado (fig. 209).

As interseções dos espigões entre si, na mesma figura, foram obtidas por procedimento análogo àquele usado em telhados de águas com a mesma declividade, isto é, partindo do princípio de que, em cada vértice do telhado, concorrem três linhas, pelo menos.



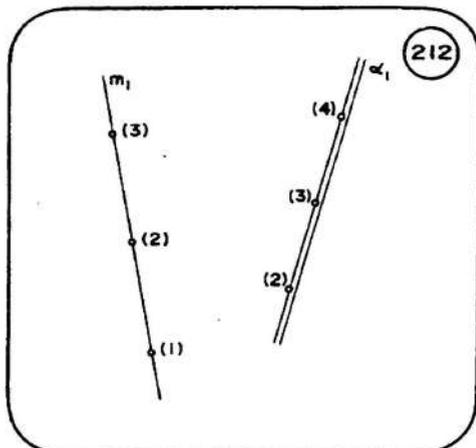
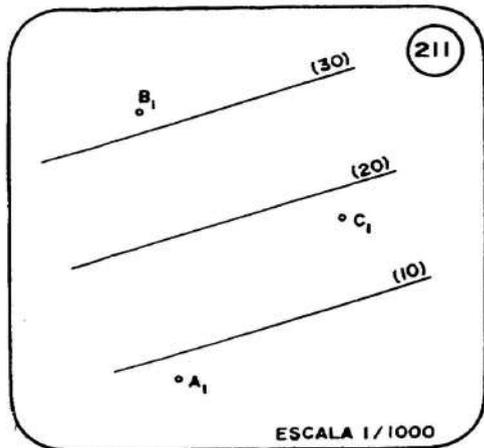
### 3.11. Exercícios Propostos

3.11.1 – Determinar os pontos da reta  $m$  em que ela atravessa os planos  $\alpha$  e  $\beta$  (fig. 210).

3.11.2 – Na planta da figura 211 as cotas estão em metros. As retas dadas são as horizontais da superfície do solo. Um veio plano de minério aflora no ponto  $A$  e é atingido por poços verticais em  $B$  e  $C$  com profundidades respectivas de 25m e 52m.

Determinar a linha de afloramento desse veio.

3.11.3 – Passar pela reta  $m$  os planos  $\beta$  e  $\gamma$  de  $60^\circ$  de inclinação e achar as interseções  $\alpha\beta$  e  $\alpha\gamma$  (fig. 212).

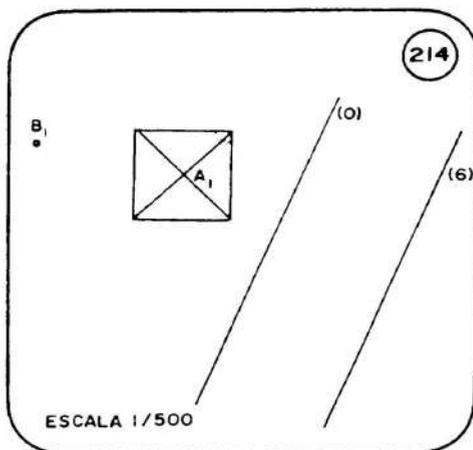
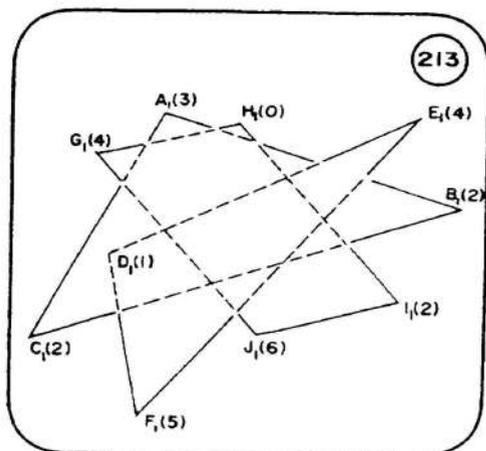


3.11.4 – As placas ABC, DEF e GHIJ são semi-transparentes.

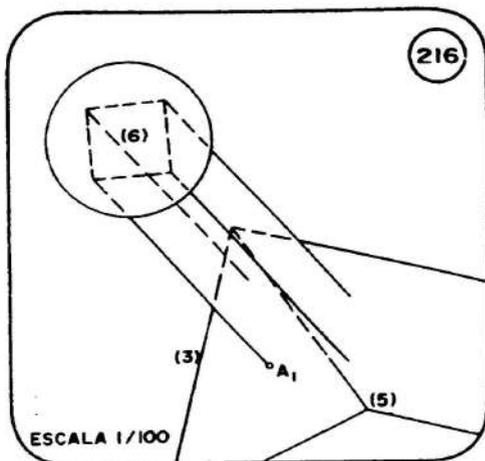
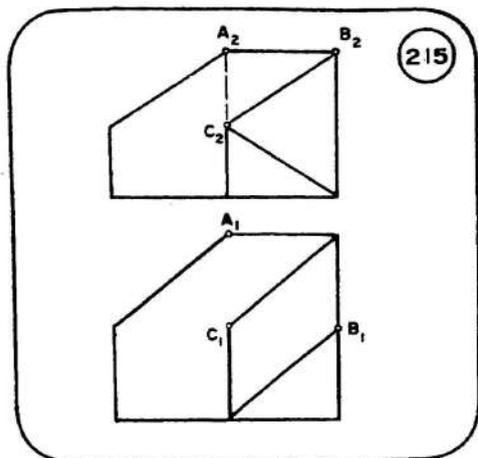
Determinar a interseção dessas placas entre si e a visibilidade do conjunto. (fig. 213).

3.11.5 – Um obelisco em A e um poste em B estão em um terreno horizontal de cota 0, na planta de fig. 214 (cotas em metros). A altura do obelisco, que tem forma de pirâmide, é de 10 m. A sombra que ele projeta, iluminado por uma lâmpada no topo do poste, atinge a horizontal de cota 6 m da barreira definida em planta por duas retas.

Determinar a altura do poste e a sombra projetada pelo obelisco, no solo da barreira.



3.11.6 – Determinar a seção do sólido da fig. 215 (o mesmo dos exercícios propostos do 1º capítulo) pelo plano que passa nos seus vértices A, B e C



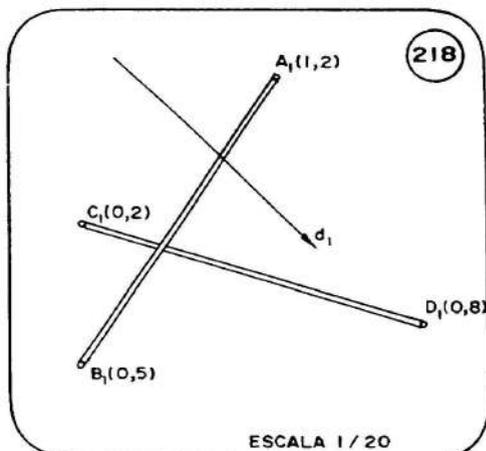
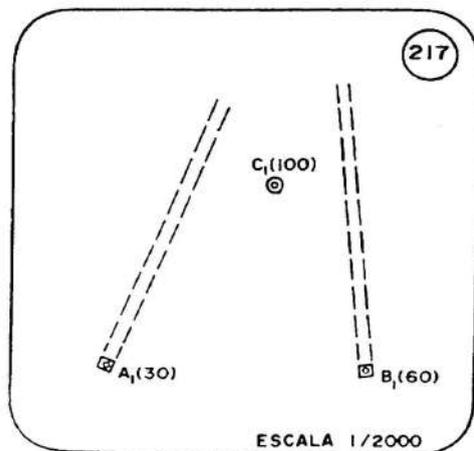
3.11.7 – Na planta da fig. 216 (cotas em metros) um silo cilíndrico descarrega cereal para armazenar ao lado através de um conduto prismático, cuja base superior tem cota 6m.

Determinar a interseção desse conduto com o telhado do armazém, sabendo-se que uma das suas arestas encontra esse telhado no ponto A.

3.11.8 – Em uma mina, na planta da fig. 217 (cotas em metros), a galeria que desce de A tem declividade de 100% e a que desce de B tem declividade de 40%. O poço em C tem profundidade de 65m.

Do fundo desse poço, passar uma galeria reta que encontre as duas outras.

3.11.9 – Na planta da fig. 218 (cotas em metros) os raios solares têm direção  $d$ , com inclinação de  $60^\circ$ .

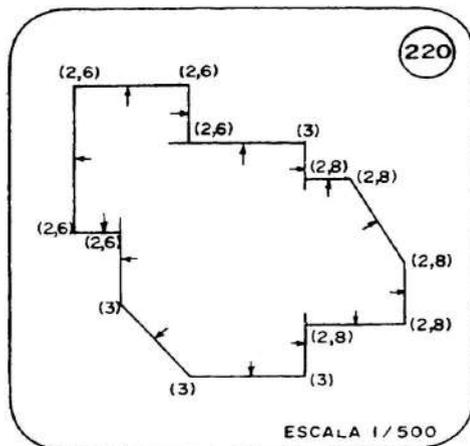
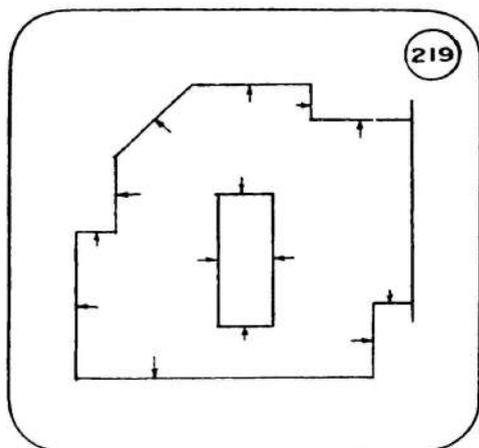


Determinar o ponto em que a sombra projetada pelo cano AB atravessa o cano CD.

3.11.10 – Determinar as arestas do telhado cujo beiral em planta é o polígono da fig. 219. O retângulo central é um pátio interno, e seu beiral tem o mesmo nível do beiral externo. Deve descer uma água para cada lado da figura (assinaladas por setas), com exceção de um deles que está sobre o muro. Todas as águas têm a mesma declividade.

3.11.11 – No telhado cujo beiral está na planta da fig. 220 (cotas em metros) deve descer uma água para cada lado, todas com declividade de 20%. Traçar seus espigões, rincões e cumeeiras.

3.11.12 – No telhado da planta (fig. 221) todos os vértices têm a mesma cota, e deve descer uma água para cada lado da figura, com exceção de  $E_1 F_1$ . As águas têm declividade de 80%, com exceção daquelas que descem para os lados  $A_1 B_1$  e  $C_1 D_1$ , que devem ter declividade de 100%.



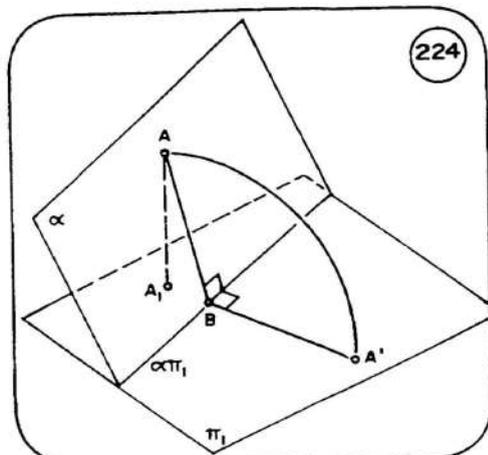
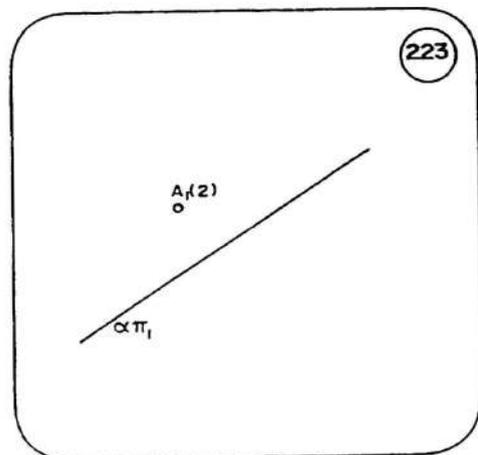
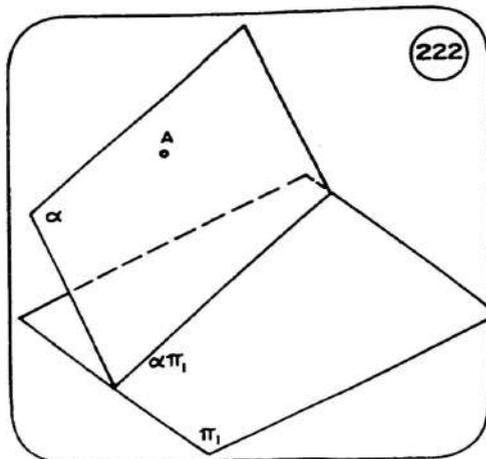
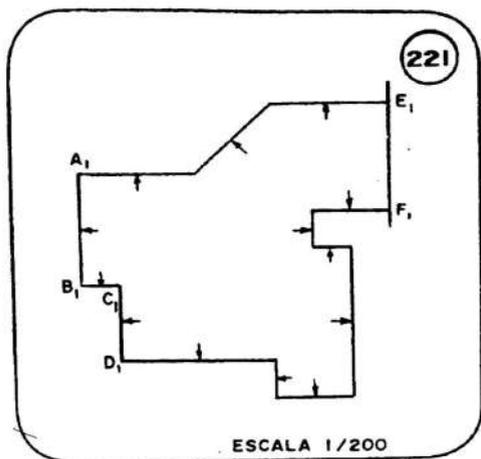
Traçar em planta os espigões, rincões e cumeeiras desse telhado.

## 4. DISTÂNCIAS E ÂNGULOS

### 4.1. Rebatimento de Plano

Para medirmos segmentos e ângulos, necessitaremos com freqüência da v.g. de figuras planas. Desde o 1º capítulo sabemos obter uma vista em v.g., utilizando projeções secundárias sucessivas da figura.

Vamos agora mostrar o procedimento gráfico para rebater um plano inclinado sobre  $\pi_1$ , outro processo muito utilizado para determinar também a verdadeira grandeza de figuras planas.



A operação de rebatimento é já nossa velha conhecida desde o volume 1 deste trabalho. É ela que permite obter qualquer écura mongeana, rebatendo os planos de projeção secundários sobre o principal.

Agora vamos discutir o rebatimento de planos inclinados. Tomemos um plano  $\alpha$  (fig. 222). Para rebatê-lo sobre  $\pi_1$  a charneira desse movimento só poderá ser  $\alpha\pi_1$ , pois será em torno dessa reta que todos os pontos de  $\alpha$  irão girar até cair sobre o plano principal. Se soubermos rebater um ponto A qualquer de  $\alpha$ , saberemos efetuar a operação para qualquer figura desse plano.

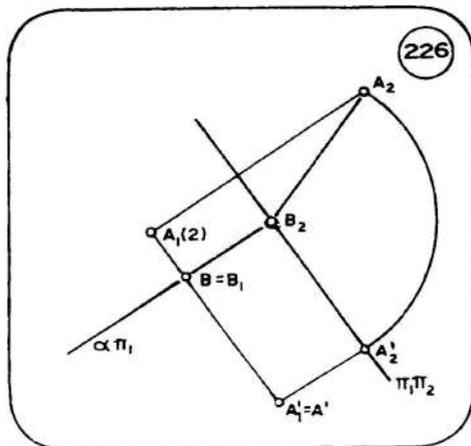
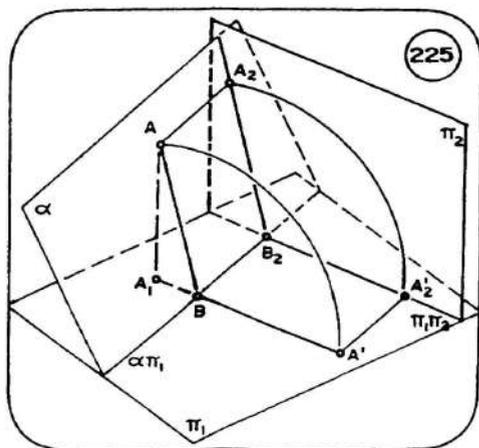
Lembremos que, em écura (fig. 223), só temos a projeção do ponto A. Ao girar em torno de  $\alpha\pi_1$ , o ponto A deverá descrever no espaço um arco de circunferência cujo centro é o ponto B da charneira (fig. 224). Tal ponto é obtido quando se baixa de A uma perpendicular a  $\alpha\pi_1$ , sendo AB o raio desse arco. Após rebatido, A'B continua perpendicular ao traço do plano, pois o ponto A descreveu uma trajetória em um plano perpendicular a  $\alpha\pi_1$ . Obser-

vem ainda na perspectiva que  $AB$  não é igual a  $AA_1$ , que traduz a cota do ponto.

Mas  $AB$  é reta de máximo declive de  $\alpha$ , por ser perpendicular ao seu traço. Logo,  $A_1B$  também é perpendicular a  $\alpha \pi_1$ . O ponto rebatido ( $A'$ ) e sua projeção principal ( $A_1$ ) ficam assim em uma reta de  $\pi_1$  ortogonal a  $\alpha \pi_1$  (fig. 225). Tomando uma vista básica do plano  $\alpha$ ,  $A_2B_2$  é a v.g. do raio de giro  $AB$ , e  $\pi_2$  é paralelo ao plano do arco  $AA'$ , congruente ao arco  $A_2A'_2$  naquele plano.

Portanto, em épora (fig. 226), de  $A_1$  se tira a reta  $A_1B_1 \perp \alpha \pi_1$  e se toma a projeção em v.g. de  $AB$  ( $A_2B_2$ ). Girando  $A_2$  para  $A'_2$  em  $\pi_1\pi_2$ , em torno de  $B_2$ , basta-nos uma linha de chamada para localizar  $A'_1$  que coincide com o próprio  $A'$ , rebatimento do ponto  $A$  sobre  $\pi_1$ .

Após rebatido o primeiro ponto de um plano, podemos fazer operação similar para qualquer outro de seus pontos, como  $C$  (fig. 227). Via  $C_2$  e  $C'_2$

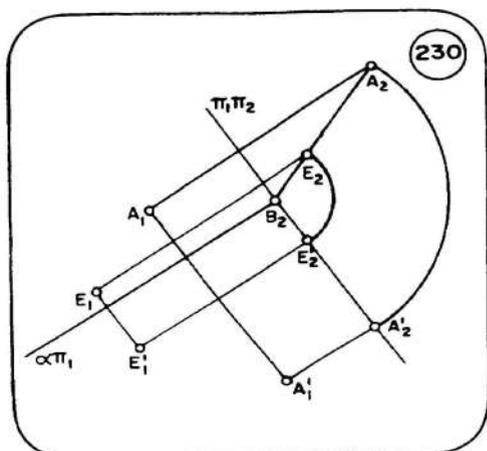
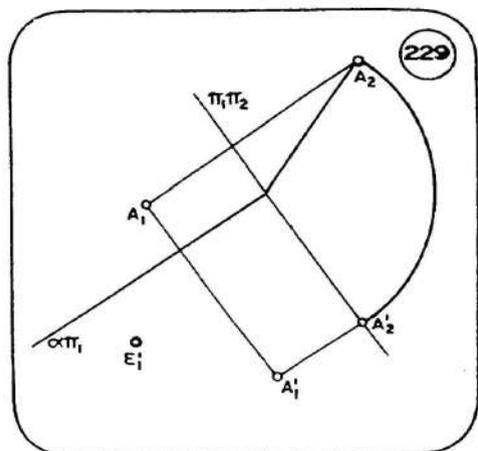
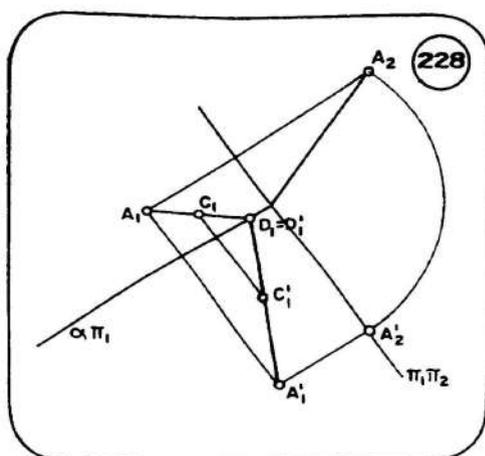
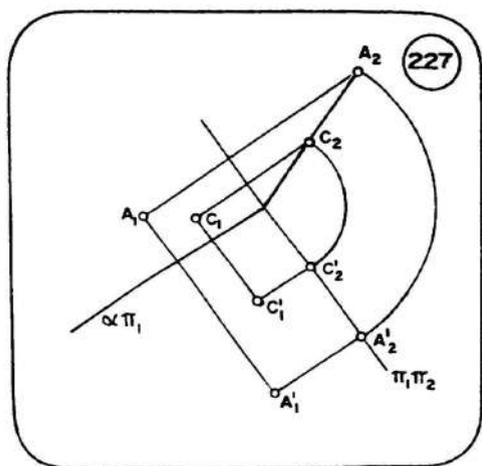


chegamos a  $C'_1$  na reta  $C_1C'_1$ , perpendicular a  $\alpha \pi_1$ . Mas é possível chegar mais rápido a  $C_1$  através da reta  $AC$  (fig. 228). De fato, a reta  $A_1C_1$  determina um ponto  $D_1$  em  $\alpha \pi_1$  que permanece fixo no rebatimento do plano  $\alpha$ , isto é,  $D'_1 = D_1$ . Então a reta  $AC$  rebatida passa por  $A'_1$  e  $D'_1$ , determinando  $C_1$  em seu cruzamento com a reta  $C_1C'_1$  (perpendicular a  $\alpha \pi_1$ ).

A operação inversa do rebatimento é chamada ALÇAMENTO.

Muitas vezes, no transcórre de um problema, precisamos determinar pontos no plano rebatido e trazê-los para a projeção principal. Suponhamos, ainda no plano  $\alpha$  das figuras anteriores, que precisemos determinar em épora o ponto  $E_1$ , projeção do ponto  $E$  de  $\alpha$  que conhecemos rebatido ( $E'_1$ , na figura 229). Através da linha de chamada localizamos  $E'_2$  em  $\pi_1\pi_2$  e alçamos tal ponto para  $E_2$ , girando em torno de  $B_2$ . De  $E_2$  a linha de chamada localiza  $E_1$  na reta  $E'_1E_1$ , perpendicular a  $\alpha \pi_1$  (fig. 230).

Por meio da reta  $AE$  também poderíamos ter chegado ao alçamento do

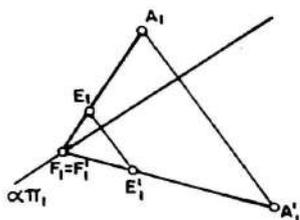


ponto E (fig. 231). Bastaria prolongar  $A'_1E'_1$  até encontrar  $F'_1 = F_1$  no traço  $\alpha \pi_1$ . A reta  $F_1A_1$  determinaria  $E_1$  no cruzamento com  $E'_1E_1$  perpendicular a  $\alpha \pi_1$ .

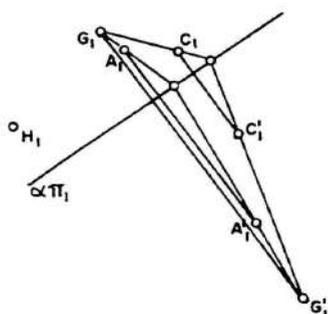
É preciso um certo cuidado ao empregar o segundo processo tanto no rebatimento como no alçamento. Se um ponto como  $G_1$  (fig. 232) estiver muito próximo da reta  $A_1A'_1$ , a determinação de  $G'_1$  através da reta  $A_1G_1$  pode ficar muito imprecisa, pois a interseção de  $A'_1G'_1$  com  $G_1G'_1$  se dará sob um ângulo muito pequeno. É claro que na época já tínhamos pontos tais como  $C_1$  que permitiriam muito melhor precisão na determinação de  $G'_1$ . Por outro lado, pode acontecer também, como no caso do ponto  $H_1$ , que a reta que passa por esse ponto e por  $A_1$  não encontra  $\alpha \pi_1$  nos limites do desenho. Mas igualmente teríamos  $C_1$  ou outro ponto de rebatimento já conhecido que pudesse leva  $H_1$  a  $H'_1$ .

Uma observação final: O rebatimento de uma figura plana normalmente

231



232

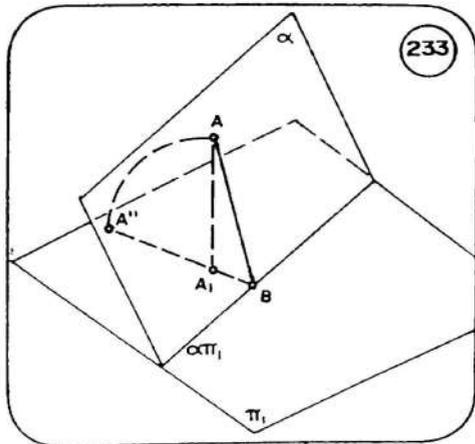


é feito para o lado do traço contrário ao que contém a projeção dos seus pontos. Se  $\alpha$  for rebatido para o mesmo lado (fig. 233), notemos que  $A''$  fica no mesmo semi-plano que  $A_1$ . É impossível que um ponto rebatido coincida com a sua projeção, mas é difícil evitar cruzamentos e superposições entre as linhas do plano projetadas e rebatidas. Voltando à épura (fig. 234), a opção deve ser feita na hora de girar  $A_2$  em torno de  $B_2$ . Girando no sentido anti-horário, levamos  $A_2$  para  $\pi_1\pi_2$  em  $A''_2$ , descrevendo um ângulo agudo. De  $A''_2$  obtemos  $A''_1$ .

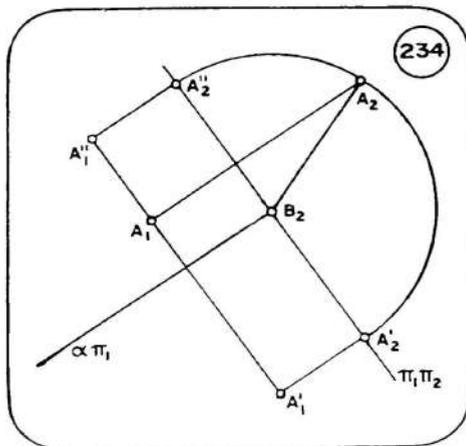
A figura 235 mostra o que aconteceria se tomássemos dois outros pontos  $M$  e  $N$  de  $\alpha$  e os rebatêssemos para os dois lados de  $\alpha\pi_1$ . O triângulo  $AMN$  rebatido para o mesmo lado da projeção cruzaria o lado  $M''_1N''_1$  com os lados  $A_1M_1$  e  $A_1N_1$  da projeção desse triângulo.

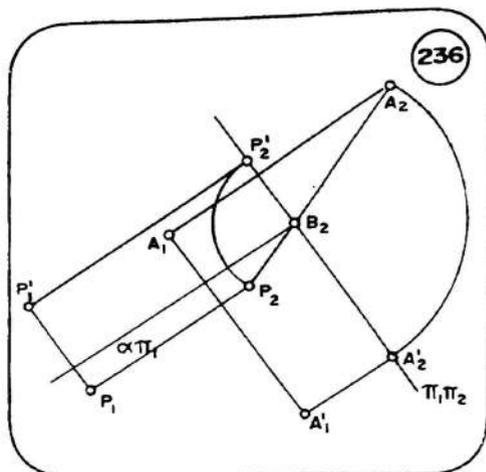
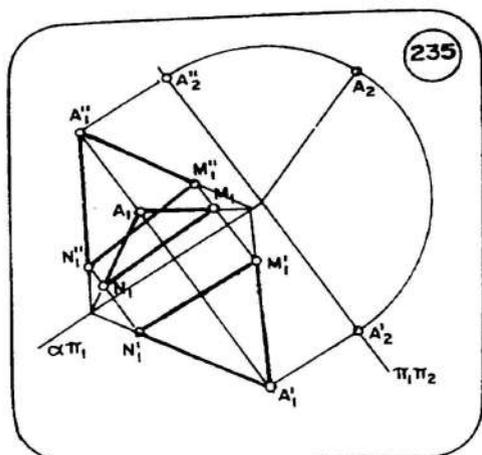
Então, se quisermos ter figuras sempre distintas, na épura, é aconselhável descrevermos sempre o ângulo obtuso, no rebatimento do plano. Mas, se o objetivo do operador for o de economizar espaço no desenho, sua opção deve ser a do ângulo agudo.

233



234





Essa preocupação pode ser inútil se nos lembrarmos dos pontos de  $\alpha$  que têm cota negativa.  $P$ , na figura 236, pertence a  $\alpha$  mas se projeta do lado de  $\alpha\pi_1$  contrário a  $A_1$ . Sua cota é negativa e  $P_2$  pertence ao prolongamento de  $A_2B_2$ . Quando  $A_2$  gira pra  $A'_2$ ,  $P_2$  gira para  $P'_2$ , no mesmo sentido horário, pois o plano não se quebra no rebatimento. De  $P'_2$  obtemos  $P'_1$ , que também trocou de lado do traço em relação a  $A'_1$ . Se experimentarmos ligar os pontos  $A_1$  a  $P_1$  e  $A'_1$  a  $P'_1$ , confirmaremos que essas retas se cruzarão em um ponto de  $\alpha\pi_1$ , propriedade que já salientamos para todas as retas de um plano que se rebate.

No rebatimento de uma figura dada por sua projeção principal e pelas cotas de seus pontos podemos quase sempre evitar o aparecimento de cotas negativas. Basta-nos ADICIONAR a todos eles o módulo da cota do mais baixo, se for negativa. Isso equivale a deslocar o plano  $\pi_1$  por translação até passar por tal ponto, que ficará com a nova cotã nula. Todos os pontos da figura terão uma nova cota positiva. Pode interessar ao operador essa translação de  $\pi_1$  com uma finalidade exatamente oposta: se todos os pontos da figura que ele precisa rebater têm cotas muito altas, a determinação da charneira  $\alpha\pi_1$  pode ser impraticável nos limites do desenho. Se ele SUBTRAIR a todos os pontos a cota do mais baixo, o plano  $\pi_1$  subirá até contê-lo.

Tanto numa situação como na outra das acima citadas a figura rebatida ficará mais comodamente situada na época. Porém tal artifício não elimina a necessidade de ser dominado o rebatimento de pontos de cota negativa, pois eles podem surgir durante a resolução de um problema.

#### 4.2. Distância de Ponto a Reta

Quando se solicita determinar simplesmente a DISTÂNCIA entre dois elementos geométricos dados, sejam pontos, linhas ou superfícies, sem ser imposta qualquer condição, deve ser entendido que é pedida a medida do MENOR segmento de linha que tem seus extremos um em cada dos elementos dados.

No caso de um ponto e de uma reta dados, essa menor distância entre eles é dada pelo segmento de reta perpendicular a essa reta, passando por esse ponto.

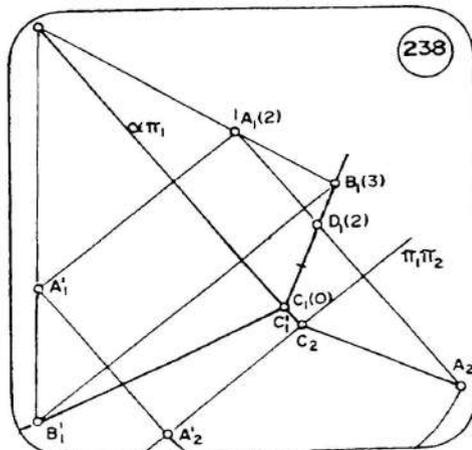
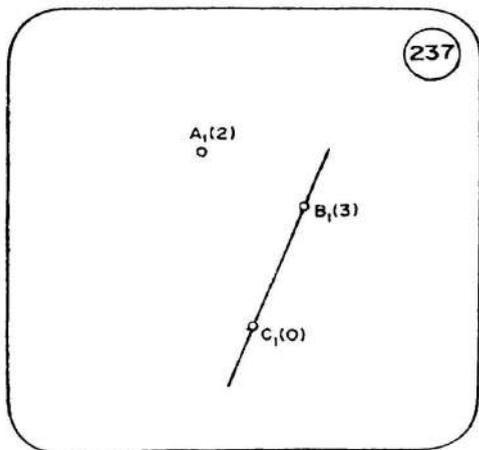
Vamos determinar a distância do ponto A à reta BC (fig. 237). Já sabemos que um ângulo reto não se projeta com  $90^\circ$ , a não ser que um de seus lados seja de cota constante. Mas A e BC determinam um plano. Se for tomada uma vista em v.g. do plano ABC, ou se rebatermos esse plano, a perpendicular de A a BC aparecerá como tal.

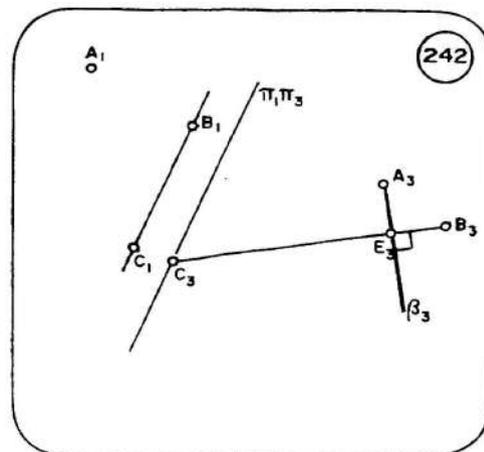
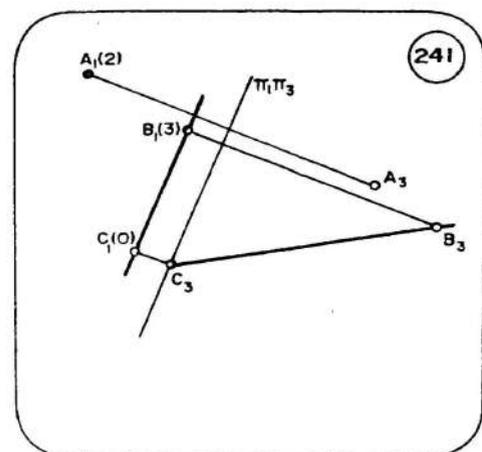
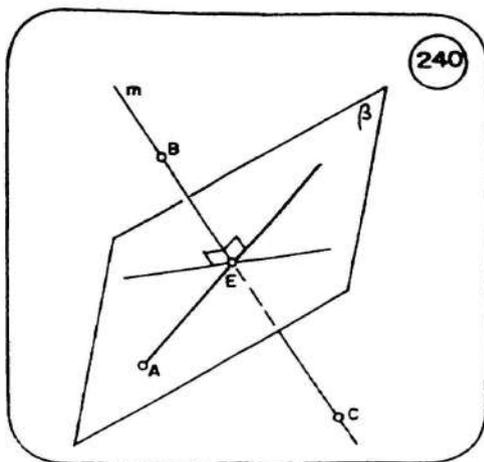
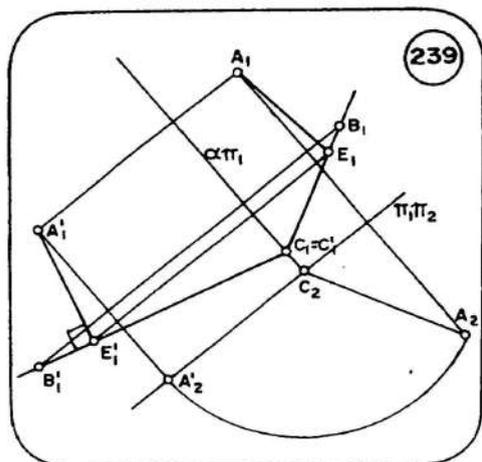
A direção do plano ABC, que chamaremos de  $\alpha$ , é determinada pelo ponto D de cota 2, a mesma de A. Como C tem cota nula,  $\alpha \pi_1$  passa por  $C_1$ , paralela a  $A_1 D_1$  (fig. 238). A vista básica de  $\alpha$  permite achar  $A'_1$ , rebatimento de A, e por meio dele  $B'_1$ , rebatimento de B. Como C está na charneira,  $C'_1$  coincide com  $C_1$  e temos todos os dados rebatidos em  $\pi_1$ . A perpendicular baixada de  $A'_1$  a  $B'_1 C'_1$  (reta  $A'_1 E'_1$ , na fig. 239) é o rebatimento da perpendicular de A a BC, pois todos os ângulos e distâncias em  $\alpha$  aparecem em v.g. no rebatimento. A medida do segmento  $A'_1 E'_1$  é a solução do problema.

Se a questão fosse achar a projeção da perpendicular de A a BC seria fácil alçar o ponto E, pois a perpendicular de  $E'_1$  a  $\alpha \pi_1$  determinaria  $E_1$  sobre  $B_1 C_1$ . Nunca é demais observar que  $A_1 E_1$  não forma ângulo reto com  $B_1 C_1$ .

Quando a projeção da perpendicular é mais importante que a medida da distância, a solução deste mesmo problema pode ser obtida mais rapidamente por outro processo.

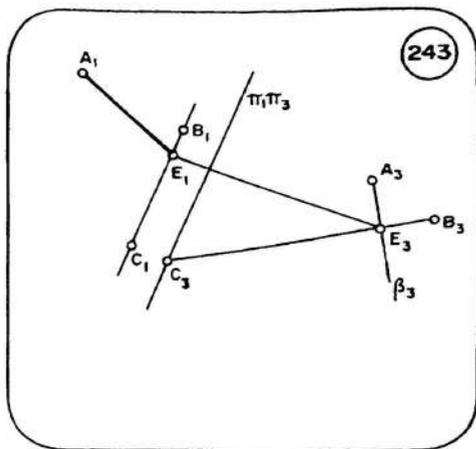
De geometria espacial, lembremos que toda reta de um plano  $\beta$  perpendicular a uma reta m (fig. 240) forma ângulo reto com essa reta. Se m for a reta BC e passarmos  $\beta$  pelo ponto A, a interseção de  $\beta$  com m será o pé da perpendicular de A a BC, ou seja, o ponto E da figura 239.



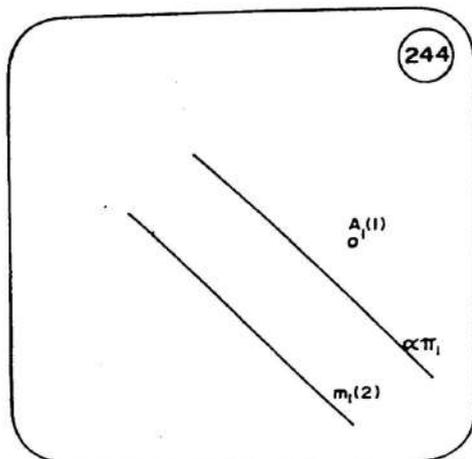


Voltando aos dados da *épura* (fig. 241), vamos tentar determinar E através do plano  $\beta$ . Podemos tomar uma vista em v.g. de BC, através de  $\pi_1 \pi_3 // B_1 C_1$ , projetando também A em  $\pi_3$ . Quando temos uma reta paralela a um plano, todo plano perpendicular à reta será perpendicular ao plano. Logo, o plano  $\beta$  estará em vista básica em  $\pi_3$  e deverá passar em  $A_3$  para conter o ponto A. Como todas as retas de  $\beta$  são ortogonais a BC, sua reta de máximo declive também será perpendicular a BC, e assim o ângulo entre elas deverá se projetar em v.g. em  $\pi_3$ . Então  $\beta_3$  será forçosamente perpendicular a  $B_3 C_3$  (fig. 242), passando em  $A_3$ . Ainda por estar em vista básica,  $\beta$  cortará BC no ponto E que se projeta na interseção de  $\beta_3$  com  $B_3 C_3$ . A linha de chamada de  $E_3$  determina  $E_1$  sobre  $B_1 C_1$  (fig. 243), e  $E_1 A_1$  será a projeção da perpendicular de A a BC. É o mesmo segmento da fig. 239.

Observemos que tal processo não fornece diretamente a distância de A à reta BC. Para obtê-la teríamos que determinar uma vista em v.g. do segmento AE.



243



244

### 4.3. Distância de Ponto a Plano

É de mais fácil determinação a perpendicular baixada de um ponto a um plano do que de ponto a reta.

De fato, pelo teorema de geometria espacial que lembramos no ítem anterior, uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a qualquer reta desse plano. Em é pura, sendo ela perpendicular às retas de cota constante do plano, anotemos a seguinte propriedade:

4.3.1 — A projeção principal da reta perpendicular a um plano é perpendicular à direção do plano, e tal reta estará em v.g. quando o plano estiver em vista básica.

Por outro lado, sendo também perpendicular à reta de máximo declive do plano, o ângulo reto entre elas se copiará em v.g. no plano da vista básica do plano dado. Daí a outra propriedade:

4.3.2 — A vista em v.g. da reta perpendicular a um plano é perpendicular à vista básica desse plano.

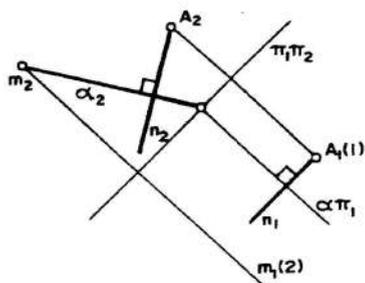
Tendo em mente essas duas propriedades, podemos determinar a menor distância do ponto A ao plano  $\alpha$ , dado por seu traço e pela reta de cota constante m (fig. 244).

Uma vez que já temos a direção de  $\alpha$ , a propriedade 4.3.1. permite traçar  $n_1$  perpendicular a  $\alpha \pi_1$ , que será a projeção principal da perpendicular de A a  $\alpha$  (fig. 245). A vista básica do plano ( $\alpha_2$ ) permite traçar  $n_2$ , perpendicular a ela, em virtude da propriedade 4.3.2. A interseção de n com  $\alpha$  estará projetada em  $B_2$ , no plano  $\pi_2$  (fig. 246).

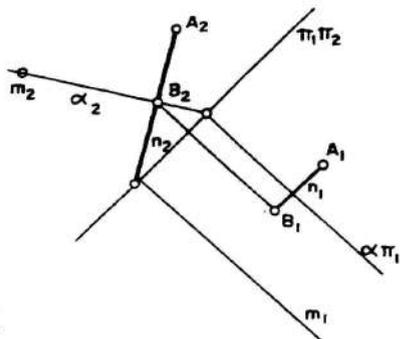
A medida de  $\overline{A_2 B_2}$  já é a distância pedida do ponto A ao plano  $\alpha$ .

Se for necessária a projeção principal do pé da perpendicular, uma simples linha de chamada localizará  $B_1$  sobre  $n_1$ .

245



246



É interessante notar que a inclinação de  $n$  é o complemento da inclinação de  $\alpha$ , pois  $n_2$ ,  $\alpha_2$  e  $\pi_1\pi_2$  formam um triângulo retângulo. Portanto a declividade da reta perpendicular a um plano é o inverso da declividade desse plano. Em conseqüência, o mesmo acontece com seus intervalos.

#### 4.4. Distância de Ponto a Plano, Sujeita a outras Condições

É interessante estudar outras condições que podem ser impostas para medir a distância de um ponto a um plano.

Pode, por exemplo, ser exigido que o segmento seja medido paralelamente a uma reta dada ( $m$ , na fig. 247). Basta então traçar pelo ponto dado ( $A$ ) uma reta paralela a  $m$  (reta  $n$ ) e determinar sua interseção (ponto  $B$ ) com o plano dado ( $\alpha$ ). A medida do segmento dessa paralela do ponto ao plano ( $AB$ ) é a solução do problema. Tal exemplo não permitiu a escolha de nenhum mínimo de distância, uma vez que é único o segmento da paralela à reta dada.

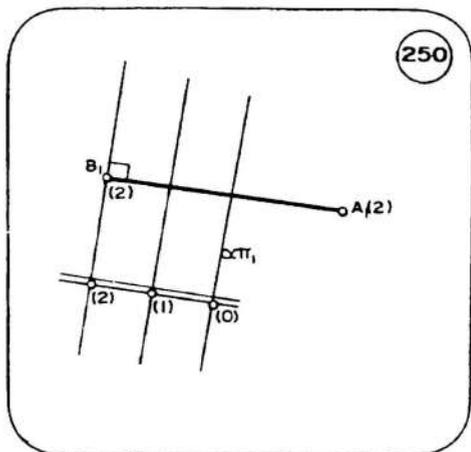
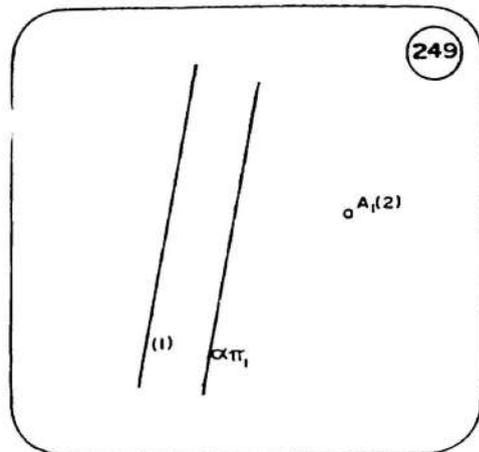
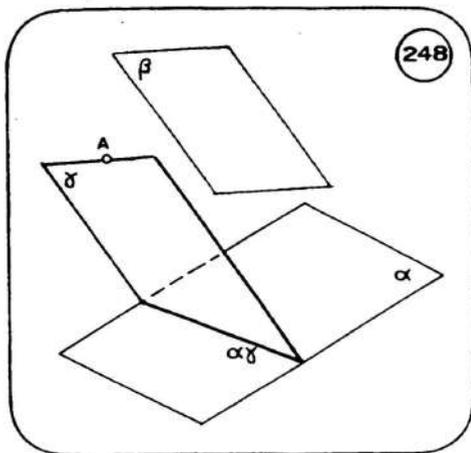
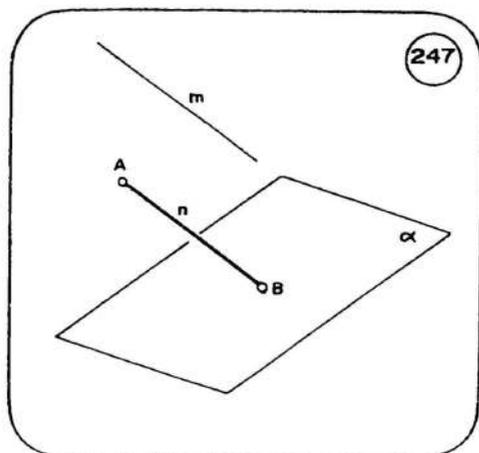
A figura 248 ilustra, também em perspectiva, uma outra condição para a distância do ponto  $A$  ao plano  $\alpha$ : que ela seja medida paralelamente a um plano  $\beta$  dado. Todos os segmentos que partem de  $A$  paralelos a  $\beta$  estão contidos no plano  $\gamma$  que passa em  $A$  e é paralelo a  $\beta$ . Logicamente só poderão tais segmentos encontrar  $\alpha$  na reta  $\alpha\gamma$ . Então podemos escolher o mais curto desses segmentos, que será perpendicular de  $A$  a  $\alpha\gamma$ , recaindo em distância de ponto a reta.

Em épora, vamos mostrar apenas uma aplicação importante dessa última condição. Tomemos um plano  $\alpha$ , dado por duas retas, e um ponto  $A$  (fig. 249). Vamos determinar o menor segmento de cota constante que liga  $A$  a um ponto de  $\alpha$ .

Qual a relação desse problema com a situação da figura 248?

É simples. Todos os segmentos de cota constante são paralelos a  $\pi_1$ . O problema poderia ser enunciado desta forma: "Determinar a distância de  $A$  a

$\alpha$ , medindo tal distância paralelamente ao plano  $\pi_1''$ . Aplicando o que discutimos na fig. 248, o plano  $\gamma$  seria o plano de cota constante que passa por A, isto é, o de cota 2. Sua interseção com  $\alpha$  (reta  $\alpha\gamma$ ) seria a reta de cota 2 desse plano (fig. 250), que se obtém com a graduação de  $\alpha$ . A menor distância de A a essa reta é  $\overline{A_1B_1}$ , que é perpendicular à reta de cota 2 cm de  $\alpha$ , sendo B o ponto de interseção.



Depois de estudarmos ângulos, neste mesmo capítulo, mostraremos outras condições interessantes para medir a distância de ponto a plano.

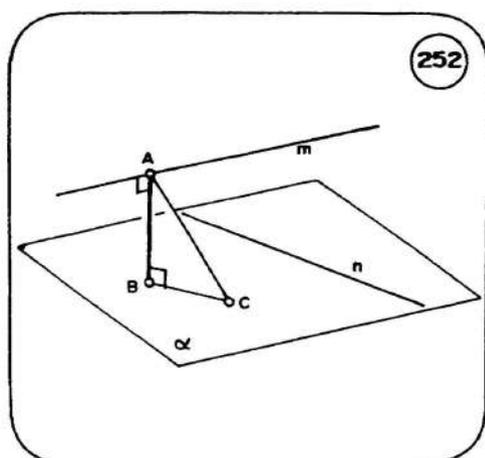
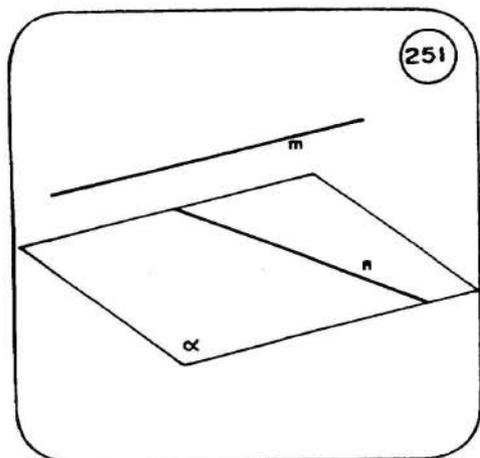
#### 4.5. Distância entre Duas Retas

A menor distância entre duas retas concorrentes é nula, evidentemente.

Entre duas paralelas, o menor segmento que nelas se apoia está na perpendicular comum a ambas. De qualquer ponto de uma delas podemos tirar

uma reta perpendicular à outra, que, devido ao paralelismo, será também perpendicular à primeira. A solução desse problema recai assim na distância de ponto a reta (ítem 4.2).

Resta-nos discutir o caso de duas retas reversas. Imaginemos as retas  $m$  e  $n$  em perspectiva (fig. 251). Podemos sempre passar pela reta  $n$  um plano  $\alpha$  paralelo à reta  $m$ , o qual será único. Tal plano conterá todas as retas que concorrem com  $n$  e são paralelas a  $m$ .

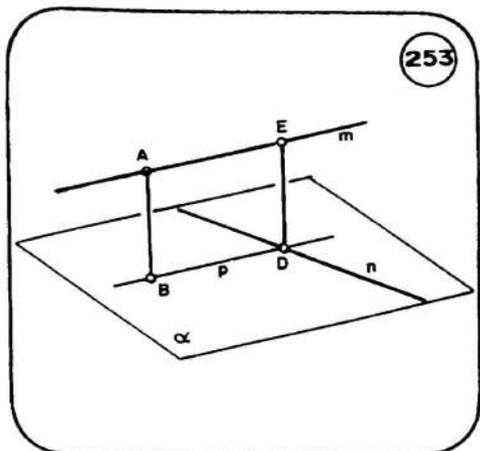


Se baixarmos de um ponto  $A$  qualquer de  $m$  uma perpendicular ao plano  $\alpha$  e imaginarmos o ponto  $B$  como o pé dessa perpendicular em  $\alpha$  (fig. 252),  $\overline{AB}$  será a menor distância entre  $m$  e  $\alpha$ , pois  $\overline{AB}$  também será perpendicular à reta  $m$ . De fato, qualquer outro ponto  $C$  de  $\alpha$ , unido a  $A$  e  $B$ , forma um triângulo retângulo em  $B$ , pois sendo  $\overline{AB}$  perpendicular a  $\alpha$ , por hipótese, forma ângulo reto com qualquer reta desse plano (e  $\overline{BC}$  pertence a  $\alpha$ ). A hipotenusa  $\overline{AC}$  é maior sempre que o cateto  $\overline{AB}$ , o que demonstra a nossa tese, pois também  $A$  será o ponto de  $m$  mais próximo de  $B$  por ser  $\overline{AB} \perp m$ .

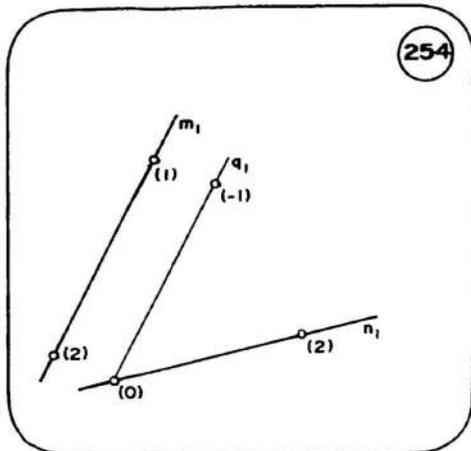
Passando pelo ponto  $B$  uma paralela a  $m$ , obtemos a reta  $p$  (fig. 253). Tal reta pertence ao plano  $\alpha$  e representa a projeção ortogonal de  $m$  sobre  $\alpha$ . É concorrente com  $n$ , no ponto que chamamos  $D$ . Passando por  $D$  uma paralela a  $\overline{AB}$ , determinamos o ponto  $E$  da reta  $m$  que se projeta em  $D$ . O segmento  $\overline{ED}$  é o menor de todos que se apoiam nas retas  $m$  e  $n$ , sendo sua medida a solução do problema. A reta  $\overline{ED}$  é a única perpendicular concorrente com  $m$  e  $n$ , ou seja, a reta perpendicular comum às duas retas dadas.

Vejamus o problema em épura, onde  $m$  e  $n$  são dadas por dois pontos em projeção principal (fig. 254).

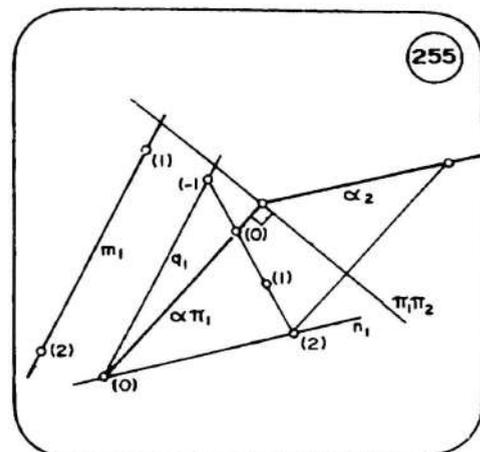
Para definir o plano  $\alpha$  basta passar por um dos pontos de  $n$  a reta  $q$ , paralela a  $m$ . Para baixar a perpendicular de um ponto de  $m$  ao plano  $\alpha = nq$  temos que achar a direção desse plano e obter sua vista básica. Unindo um ponto de  $n$  a outro de  $q$  (fig. 255) a graduação do segmento assim obtido permite-nos chegar a  $\alpha_{\pi_1}$ , e deste a  $\alpha_{\pi_2}$ , vista básica do plano. Projetando  $m$  em



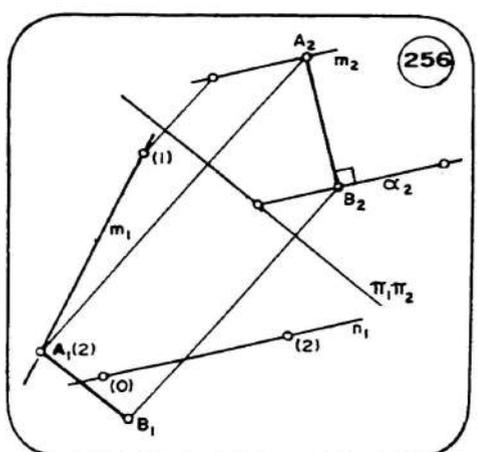
253



254



255

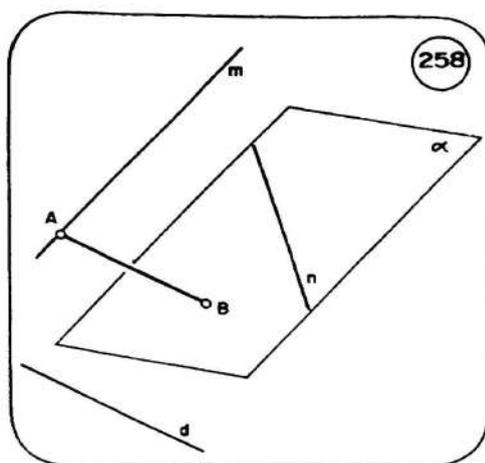
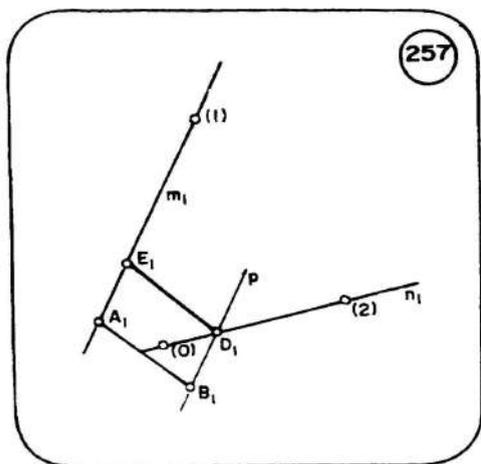


256

$\pi_2$  (fig. 256) não é simples coincidência ser  $m_2$  paralela a  $\alpha_2$ . Isso tem que acontecer pelo fato de  $m$  ser paralela a  $\alpha$ . De um ponto qualquer  $A$  da reta  $m$  tiramos a perpendicular ao plano  $\alpha$  ( $A_2 B_2 \perp \alpha_2$  e  $A_1 B_1 \perp \alpha \pi_1$ ). Se nos interessa APENAS A MEDIDA da distância entre  $m$  e  $n$ , ela será  $A_2 B_2$ , v.g. de  $AB$ , que como vimos na fig. 253, é congruente com  $ED$ .

Se for importante a própria perpendicular comum às retas  $m$  e  $n$  ( $ED$ ), é só passar por  $B_1$  a reta  $p_1 // m_1$ , que determina  $D_1$  em  $n_1$  (fig. 257). De  $D_1$  obtemos  $E_1$  em  $m_1$  passando a paralela a  $A_1 B_1$ . As cotas de  $D$  e  $E$  seriam facilmente obtidas localizando  $D_2$  e  $E_2$  em  $\alpha_2$  e  $m_2$ , respectivamente.

Com aplicação do ítem 4.4. deste mesmo capítulo, podemos procurar a distância entre duas retas reversas sob a condição de ser medida paralelamente a uma reta dada. Na fig. 258, vamos discutir como obter a distância entre  $m$  e  $n$ , paralelamente à reta  $d$ . O plano  $\alpha$  pode ser passado por  $n$  paralelo a  $m$ , como no caso da perpendicular comum. A diferença está ao tomarmos de um



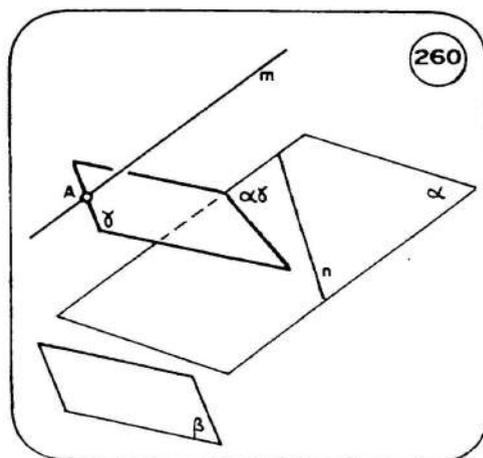
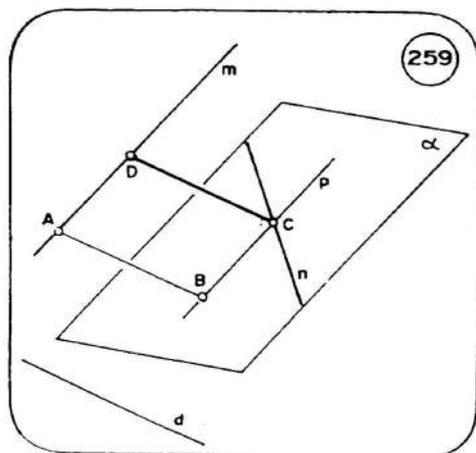
ponto A de  $m$  a distância ao plano  $\alpha$ . Em lugar da perpendicular, o segmento  $AB$  será paralelo à reta  $d$ , como vimos na fig. 247.

A partir de  $B$  o problema se assemelha ao anterior. A reta  $p$  que passa por  $B$ , paralela a  $m$ , determina  $C$  na reta  $n$  (fig. 259).  $CD \parallel AB$  dá a distância entre  $m$  e  $n$ , paralelamente a  $d$ .

Esse problema não nos lembra algo já visto?  $CD$  não é a reta paralela a  $d$  que concorre com as retas reversas  $m$  e  $n$ ? Onde já estudamos essa questão?

Voltemos à página 70, no capítulo 3. Encontraremos o mesmo problema resolvido como aplicação de interseção de retas e planos. Logicamente a solução obtida é a mesma pelos dois procedimentos.

Outra condição do ítem 4.4., discutida na figura 248, também encontra sua aplicação na distância de duas retas reversas. Dados  $m$ ,  $n$  e o plano  $\beta$  (fig. 260), podemos procurar a distância entre  $m$  e  $n$ , medida paralelamente ao plano  $\beta$ . Após determinar o mesmo plano  $\alpha$  que contém  $n$  e é paralelo a  $m$ , passamos por um ponto  $A$  de  $m$  um plano  $\gamma$  paralelo a  $\beta$  que podemos imagi-



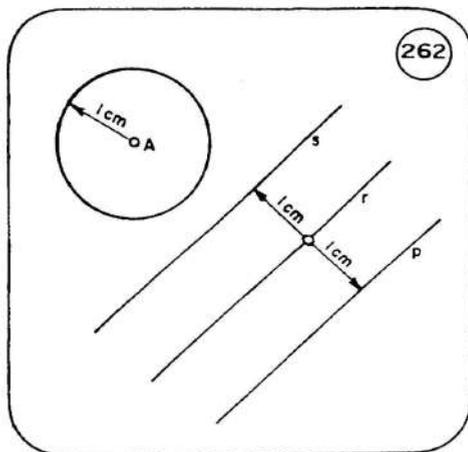
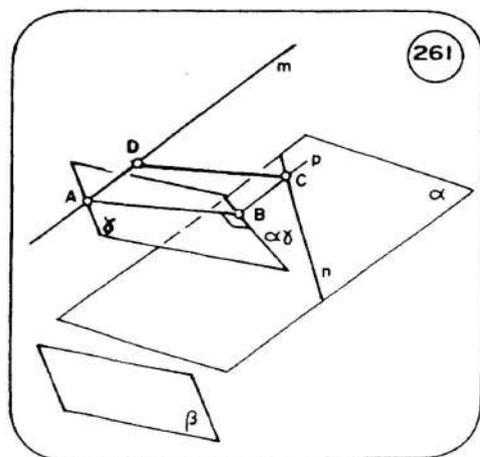
nar encontrando  $\alpha$  na reta  $\alpha\gamma$ . Todos os segmentos de A a  $\alpha$ , paralelos a  $\beta$ , encontram  $\alpha$  na reta  $\alpha\gamma$ , pois têm que pertencer ao plano  $\gamma$ . Nesse problema ainda podemos escolher o menor segmento possível, que é AB ( $AB \perp \alpha\gamma$  — fig. 261). A partir de B o procedimento continua o mesmo, ou seja, passar  $p \parallel m$  e determinar C em n. O segmento  $CD \parallel AB$  dá a menor distância entre m e n, medida paralelamente ao plano  $\beta$ .

#### 4.6. Lugares Geométricos de Equidistância

O problema inverso de medir a distância entre 2 elementos dados é determinar a posição de pontos que estejam a uma distância dada de um elemento dado.

Geralmente todos os pontos que equidistam de um ponto, ou de uma linha, ou de uma superfície dados possuem uma propriedade comum, que caracteriza uma linha ou superfície chamada LUGAR GEOMÉTRICO. Talvez todos nós já estejamos familiarizados com essa expressão, se estudamos desenho geométrico.

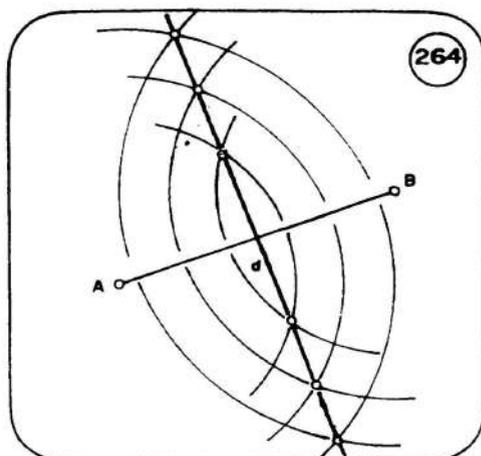
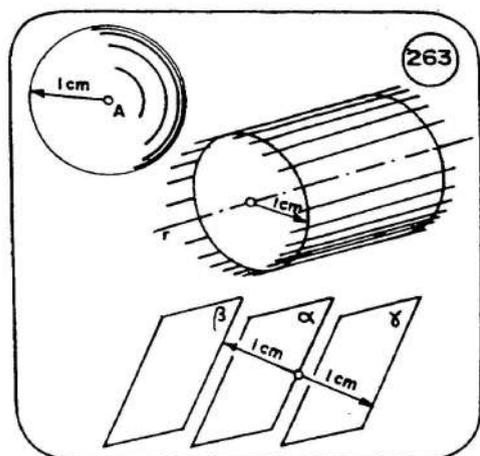
Assim, no plano do desenho, dado um ponto A (fig. 262), todos os pontos que estão a 1 cm de distância desse ponto pertencem a uma circunferência, que é o lugar geométrico (abreviaremos sempre para l.g.) dos pontos do plano que distam de A essa medida dada. No caso de uma reta r, o l.g. dos pontos que distam 1 cm dela é formado pelas paralelas s e p, pois os pontos podem ser marcados a 1 cm para um lado ou para o outro da reta r.



A três dimensões (fig. 263) os dois exemplos têm como l. g. superfícies, em vez de linhas. Assim, o l.g. dos pontos que distam 1 cm do ponto A é toda uma superfície esférica de centro em A e raio 1 cm. O l.g. dos pontos que distam 1 cm da reta r é toda a superfície de um cilindro de eixo nessa reta e raio 1 cm. E agora podemos também definir o l.g. dos pontos que distam 1 cm de

um plano  $\alpha$  dado. São os dois planos  $\beta$  e  $\gamma$  paralelos a  $\alpha$  e dele distantes de 1 cm.

Quando temos dois elementos dados é interessante definir o l.g. dos pontos que estão equidistantes deles dois.

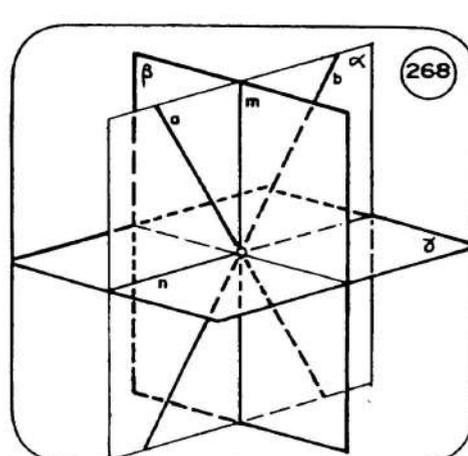
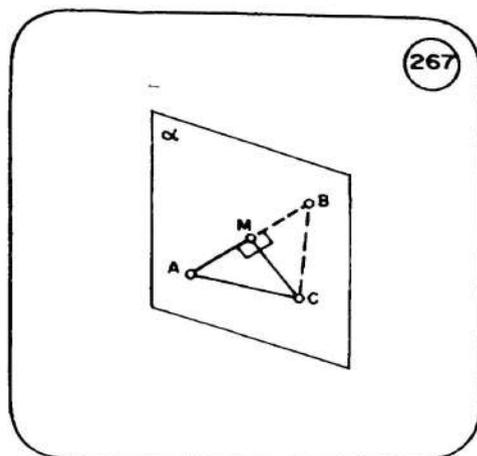
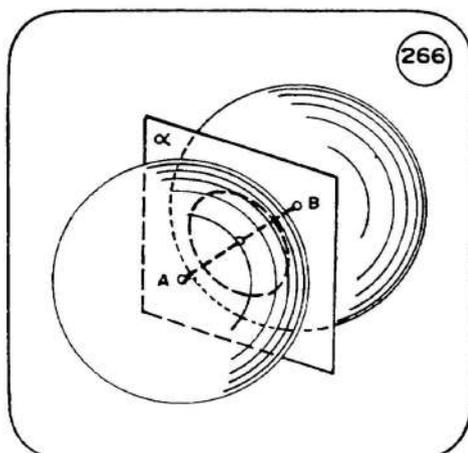
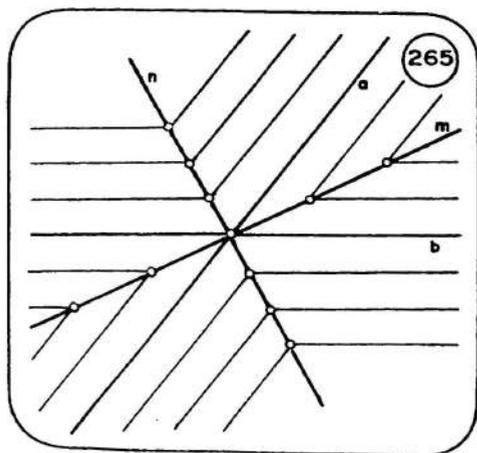


No plano, devemos saber, por exemplo, que dois pontos dados A e B (fig. 264) definem uma reta d que contém todos os pontos que estão a uma mesma distância de A e de B. Essa reta é a MEDIATRIZ do segmento AB e sobre ela se cruzam todos os pares de circunferências centradas em A e B e de mesmo raio. A mediatriz é um l.g. de equidistância, podendo ser determinada pela interseção de lugares geométricos. Ela é perpendicular ao segmento AB e passa no seu ponto médio.

Outro exemplo de l.g. de equidistância no plano são as BISSETRIZES dos ângulos de duas retas a e b (fig. 265), cujos pontos estão na interseção de retas paralelas e equidistantes a a e b. A consequência disso é que m e n dividem ao meio os ângulos que a e b formam entre si.

Já no universo de 3 dimensões, os dois l.g. de equidistância que acabamos de lembrar têm outro significado. Assim, dados 2 pontos A e B, um par de esferas de mesmo raio centradas nesses pontos se interceptam em uma circunferência (fig. 266). Todos os pontos dessa circunferência são equidistantes de A e de B. Qualquer outro par de esferas assim geraria uma circunferência ainda no plano  $\alpha$ , que contém a primeira. Esse plano é denominado MEDIADOR do segmento AB. É fácil demonstrar que ele goza da mesma propriedade da reta mediatriz, ou seja, é perpendicular ao segmento AB e contém seu ponto médio. Que o ponto M, na metade de AB (fig. 267), pertence ao l.g. de equidistância a A e B é óbvio demais. Demonstramos o teorema inverso: sendo  $\alpha$  um plano perpendicular ao meio de AB, qualquer ponto C desse plano é equidistante de A e de B. De fato, ligando C a M obtemos  $CM \perp AB$  (toda reta de um plano perpendicular a uma reta é perpendicular a essa reta).

Então os triângulos retângulos CMA e CMB têm os catetos congruentes ( $AM = MB$ ). Eles são simétricos, caso particular de congruência inversa (pois têm orientações de vértices distintas). Suas hipotenusas são congruentes, o que demonstra que C está à mesma distância de A e B.



No caso de duas retas concorrentes a e b, o l.g. dos pontos equidistantes das duas, a três dimensões, não se limita às bissetrizes m e n (fig. 268). Chamando de  $\alpha$  o plano ab, todos os pontos de  $\beta$  e de  $\gamma$ , planos perpendiculares a  $\alpha$  passando por m e n, respectivamente, são equidistantes de a e b. Seria fácil demonstrar tal propriedade. Deixamos essa tarefa a cargo dos leitores. Os planos  $\beta$  e  $\gamma$ , que podem ser chamados de BISSETORES do ângulo ab, têm a mesma propriedade que o par de bissetrizes m e n: são perpendiculares entre si.

Mas a denominação de BISSETORES é mais apropriada para os l.g. dos

pontos equidistantes de dois planos dados (fig. 269). Quando temos dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  concorrentes, o l.g. dos pontos deles equidistantes é o conjunto dos planos  $\gamma$  e  $\delta$  que dividem ao meio os ângulos diédricos formados por  $\alpha$  e  $\beta$ . Tais como os bissetores de duas retas, os bissetores de dois planos também são perpendiculares entre si.

Notemos ainda que, se duas retas ou dois planos são paralelos, seu l.g. de equidistância se reduz a um único plano.

Quando temos três elementos dados, podemos achar o l.g. dos pontos equidistantes desses três elementos através da interseção dos l.g. de equidistância desses elementos tomados 2 a 2. Por exemplo, dados 3 pontos A, B e C, a interseção do plano mediador de  $\overline{AB}$  com o plano mediador de  $\overline{BC}$  dará uma reta que também estará contida no plano mediador de  $\overline{AC}$ . Essa reta seria l.g. dos pontos equidistantes, no espaço tridimensional, dos três pontos dados. É fácil demonstrar que tal reta passa no circuncentro do triângulo ABC e é perpendicular ao seu plano.

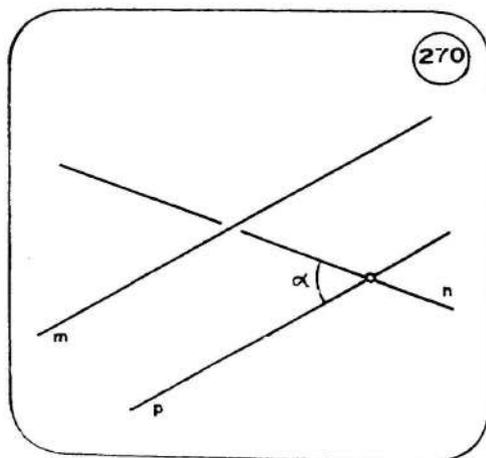
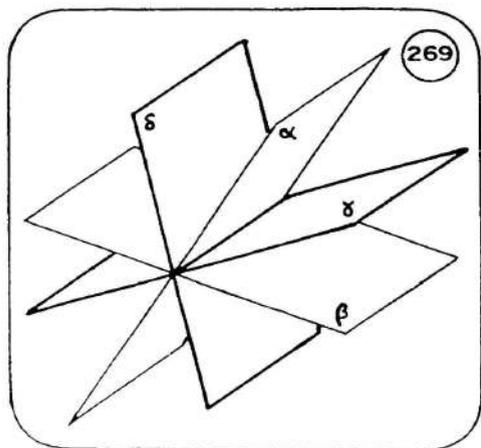
Aplicações em épura de todos esses lugares geométricos serão encontradas nos exercícios finais deste capítulo.

#### 4.7. Ângulo de Duas Retas

A figura geométrica ÂNGULO é essencialmente plana, pois é originada pela interseção de duas retas.

Pedir a medida do ângulo que duas retas formam deveria então pressupor a coplanaridade das mesmas. Mas entendendo-se duas retas como direções distintas no espaço, o ângulo que as retas reversas m e n (fig. 270) formam entre si pode ser medido através de  $\alpha$ , ângulo que uma delas (n) forma com uma paralela a m (reta p) que passa por um de seus pontos.

De qualquer forma a questão recai em medir o ângulo de duas retas coplanares. Tomemos em épura as retas m e n concorrentes e procuremos deter-

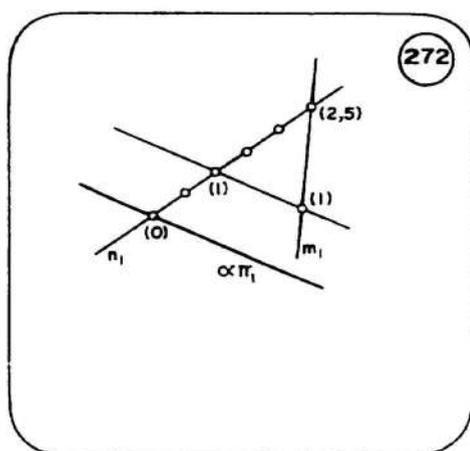
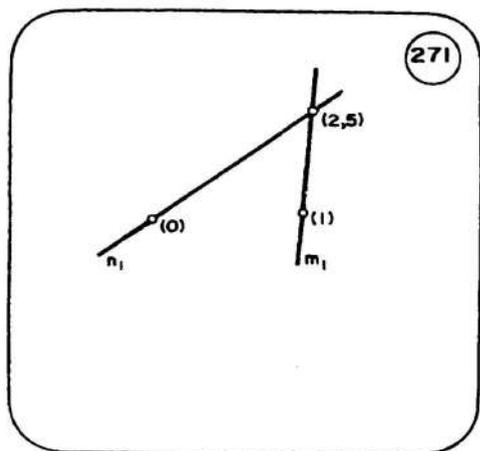


minar em v.g. a medida do ângulo  $mn$  (fig. 271). Já vimos que a projeção principal não mostra um ângulo em sua medida real, a não ser quando seus lados têm cota constante, o que não acontece na figura.

Podemos sempre obter uma vista em v.g. do plano  $mn$  ou rebatê-lo sobre  $\pi_1$ . Os pontos dados sobre  $m$  e  $n$  permitem determinar a direção do plano  $\alpha = mn$  e conseqüentemente seu traço  $\alpha\pi_1$  (fig. 272).

Para rebater  $\alpha$  é suficiente usarmos 3 de seus pontos: A (concorrência de  $m$  com  $n$ ), B e C (pontos de  $m$  e  $n$  sobre  $\alpha\pi_1$  (fig. 273). Como  $B_1$  e  $C_1$  coincidem com  $B'_1$  e  $C'_1$ , basta operarmos o rebatimento de A, obtendo  $A'_1$ . As retas  $m'_1$  e  $n'_1$  nos permitem medir com um transferidor a v.g. do ângulo das retas  $m$  e  $n$ .

Duas retas formam entre si dois ângulos agudos e dois obtusos, suplementares e congruentes dois a dois. Vamos padronizar daqui em diante que, ao pedirmos a medida de um ângulo de duas retas, estaremos sempre procurando o ângulo agudo.

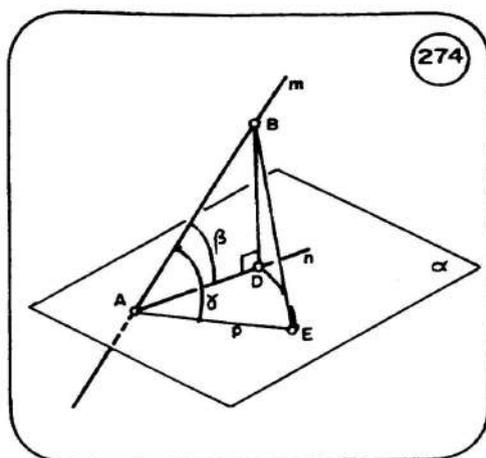
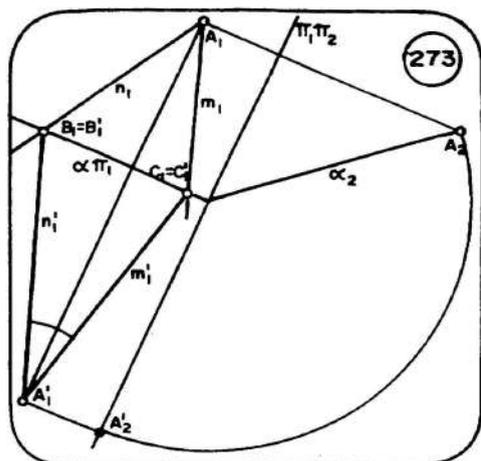


#### 4.8. Ângulo de Reta com Plano

Quando uma reta  $m$  atravessa um plano  $\alpha$  em um ponto A (fig. 274), podemos traçar em  $\alpha$  várias retas passando em A. Na figura, destacamos apenas duas: a reta  $n$ , que passa no ponto D, pé da perpendicular baixada de um ponto B da reta  $m$  sobre  $\alpha$ , e uma outra qualquer  $p$ .

Vamos demonstrar que o ângulo  $\beta$  formado entre  $m$  e  $n$ , é menor que  $\gamma$ , formado entre  $m$  e  $p$ .

Marcando o ponto E em  $p$  tal que  $\overline{AE} = \overline{AD}$ , comparemos os triângulos AEB e ADB. Como eles têm dois lados congruentes, o ângulo que tais lados formam será tanto maior quanto maior for o lado oposto. Se o lado oposto a  $\beta$  em ADB é BD, segmento perpendicular ao plano  $\alpha$  (e portanto a menor distância de  $\beta$  a  $\alpha$ ), o oposto a  $\gamma$  é BE no triângulo AEB, necessariamente maior do que BD. Então  $\beta < \alpha$ .

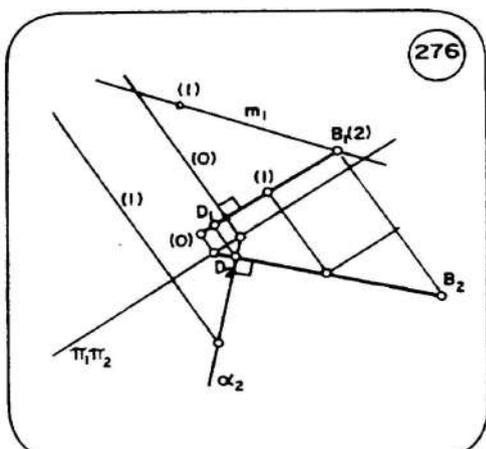
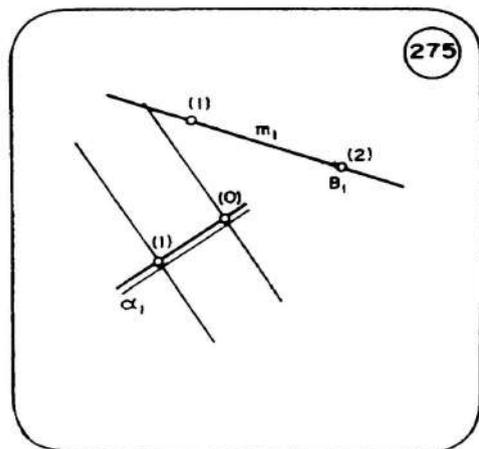


Portanto o menor ângulo que uma reta  $m$  forma com uma reta de um plano  $\alpha$  é aquele que ela forma com a sua projeção ortogonal sobre  $\alpha$  (reta  $n$ ). Tal ângulo define o próprio ângulo da reta  $m$  com o plano  $\alpha$ .

Devemos observar que, como  $ABD$  é um triângulo retângulo,  $\beta$  é o complemento do ângulo que  $m$  forma com  $BD$ . Dados  $\alpha$  e  $m$ , não precisamos obter  $n$  para medir o ângulo de  $m$  com  $\alpha$ . Basta-nos baixar de um ponto  $B$  de  $m$  a perpendicular a  $\alpha$  e medir seu ângulo com  $m$ . Subtraindo de  $90^\circ$  a medida do ângulo obtido entre  $m$  e  $BD$  (problema de ângulo formado por duas retas), temos a medida do ângulo  $m$   $\alpha$ .

Resolvamos tal problema em *épura* (fig. 275).

Tomemos logo  $\alpha$  e  $m$  graduados. Podemos escolher o ponto  $B$  em qualquer posição sobre a reta  $m$ , facilitando o problema se o tomarmos com cota inteira (na fig., foi tomado com cota 2). Uma vista básica de  $\alpha$  (fig. 276) permite baixar a perpendicular  $BD$  a esse plano, conforme vimos no ítem 4.3.

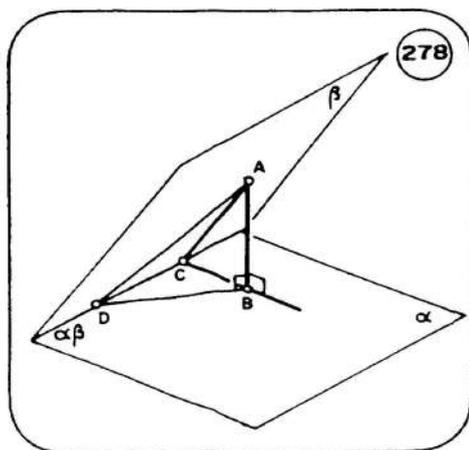
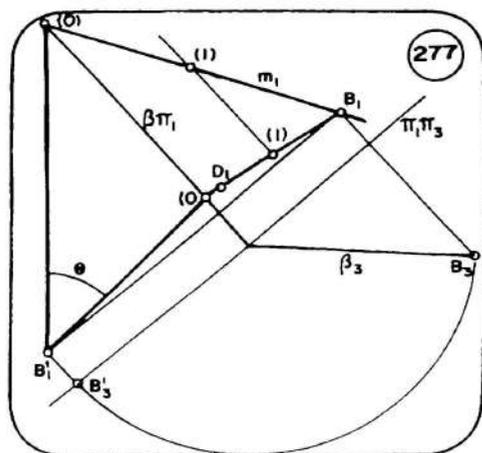


Poderíamos achar facilmente o ponto A onde  $m$  atravessa  $\alpha$  e ligá-lo a D, obtendo a reta  $n$ , para determinar o ângulo  $mn$ . Mas é bem mais rápido achar o ângulo de  $m$  com BD. Basta graduar BD, determinando-lhe os pontos de cota 1 e de cota 0. Os pontos de cota 1 em BD e em  $m$  permitem determinar a direção do plano  $\beta$  formado por  $m$  e BD (fig. 277), e em conseqüência o traço  $\beta\pi_1$ . Usando-o como charneira, podemos tomar a vista básica de  $\beta$  em  $\pi_3$  e rebater as retas BD e  $m$ , cujo ângulo em v.g. será  $\theta$ . Medindo esse ângulo, basta achar seu complemento, que será o ângulo da reta  $m$  com o plano  $\alpha$ .

#### 4.9. Ângulo de Dois Planos

Quando dois planos são concorrentes, formam um ângulo diédrico que pode ser medido através de um ângulo de duas retas.

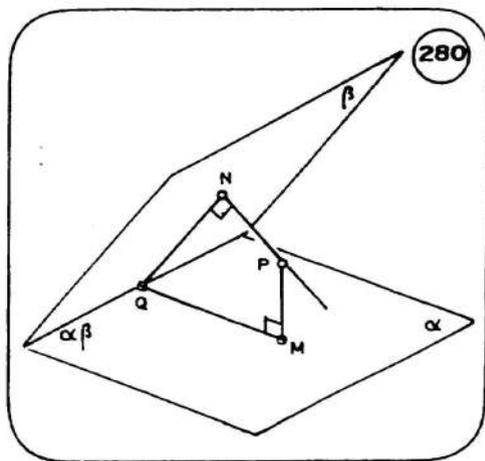
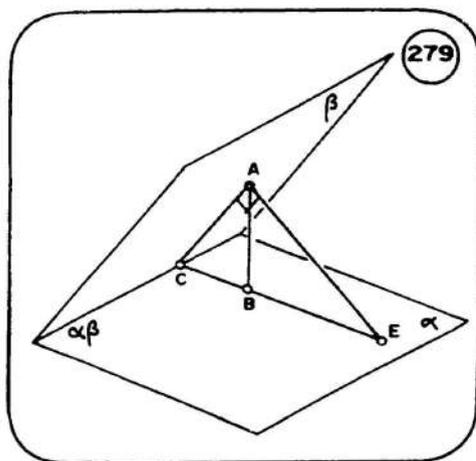
Imaginemos dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  que se interceptam na reta  $\alpha\beta$  (fig. 278). Escolhendo um ponto A qualquer de  $\beta$ , baixamos a perpendicular AB sobre  $\alpha$ . Podemos tirar vários segmentos de B à reta  $\alpha\beta$ , todos eles formando ângulo reto com AB, pois pertencerão sempre ao plano  $\alpha$ . Na figura traçamos apenas dois: BC perpendicular a  $\alpha\beta$  e BD qualquer. Os triângulos ABC e ABD são retângulos em B, possuindo um cateto comum AB. Então, dos dois triângulos, o que possui menor o outro cateto, tem o menor ângulo agudo em A. Sendo  $BC \perp \alpha\beta$  é a menor distância de B a essa reta. Logo  $C\hat{A}B < D\hat{A}B$ . Como os ângulos agudos de triângulos retângulos são complementares,  $A\hat{C}B > A\hat{D}B$ .



Por outro lado, como AB e BC são ortogonais a  $\alpha\beta$ , todo o plano ABC é perpendicular a  $\alpha\beta$  e então  $AC \perp \alpha\beta$ . Por um tratamento simétrico, deduziríamos então que, se passássemos por A uma reta perpendicular a  $\beta$  ela encontraria  $\alpha$  em E, no prolongamento de CB (fig. 279).

Portanto o ângulo  $\widehat{ACB}$  é o maior agudo formado entre uma reta de  $\alpha$  e outra de  $\beta$ , obtido quando seus lados são perpendiculares a  $\alpha\beta$ . Sua medida é a do ÂNGULO DIÉDRICO  $\alpha\beta$ .

Chamamos a atenção para o fato de que o teorema que acabamos de demonstrar generaliza aquela propriedade que já vimos da reta de máximo declive de um plano. Por ser perpendicular ao traço do plano, sua inclinação medeia a própria inclinação do plano.

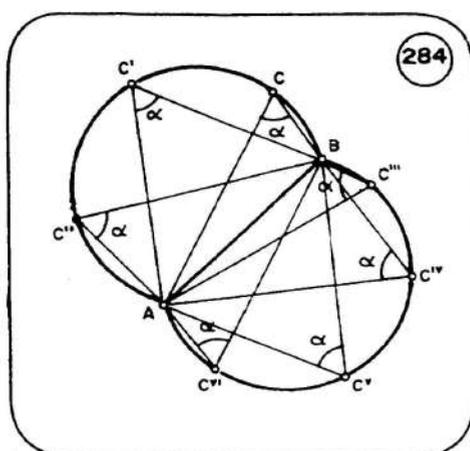
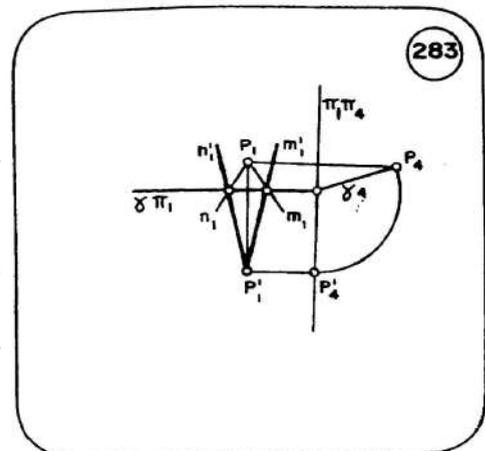
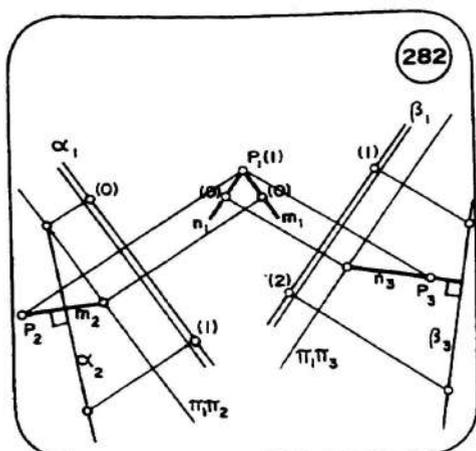
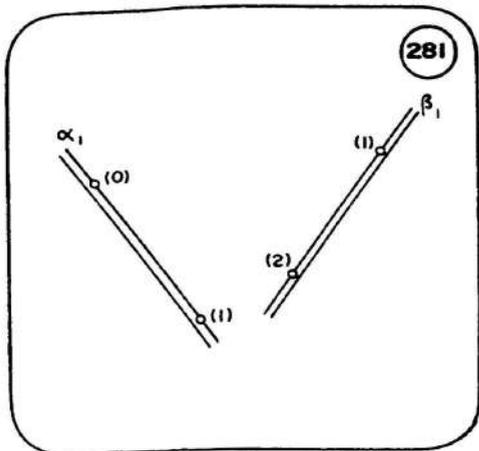


Na determinação de um ângulo diédrico, podemos às vezes chegar mais rapidamente à sua medida tirando de um ponto P, fora dos dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  (fig. 280), uma perpendicular a cada um desses planos. De fato, sendo PM e PN tais perpendiculares, o plano PMN é ortogonal a  $\alpha\beta$ , por ser perpendicular a  $\alpha$  (por conter  $PM \perp \alpha$ ) e a  $\beta$  (por conter  $PN \perp \beta$ ). Então o ponto Q em que tal plano corta  $\alpha\beta$  define QM e QN perpendiculares a  $\alpha\beta$ , e assim NQM é a medida do ângulo  $\alpha\beta$ . Mas o quadrilátero PMQN tem ângulos retos em M e N. A soma de seus ângulos internos é  $360^\circ$ , e assim os ângulos em P e em Q são suplementares. Isso significa que o ângulo agudo formado pelas perpendiculares PM e PN tem a mesma medida do ângulo diédrico  $\alpha\beta$ .

Vamos ver em épura como medir o ângulo diédrico  $\alpha\beta$ , sendo suas faces dadas por suas retas de máximo declive (fig. 281).

Podemos tomar um ponto P em qualquer lugar e com qualquer cota (fig. 282). Escolhemos com a cota 1 por ser mais simples, evidentemente. Tomando uma vista básica de  $\alpha$  em  $\pi_2$ , podemos baixar a reta m perpendicular de P a  $\alpha$ . É a reta PM da figura 280, mas não nos interessa o ponto M em que ela atravessa  $\alpha$ . É mais importante localizar seu ponto de cota 0. Procedendo da mesma forma para  $\beta$  a sua vista básica permite traçar a reta n perpendicular de P a  $\beta$  determinando seu ponto de cota 0.

Chamando agora de  $\gamma$  o plano de m e n, podemos destacá-lo na figura 283 e salientar seu traço  $\gamma\pi_1$ , pelos pontos de cota nula de m e n. O rebati-



mento de  $\gamma$  em  $\pi_1$  determina a v.g. do ângulo  $mn$ , que tem a mesma medida do ângulo diédrico pedido.

#### 4.10. Lugares Geométricos de Ângulos

No espaço bidimensional, ou seja, no estudo do desenho geométrico, deve ter sido visto um l.g. de ângulos, bastante importante por suas aplicações nas construções de figuras planas.

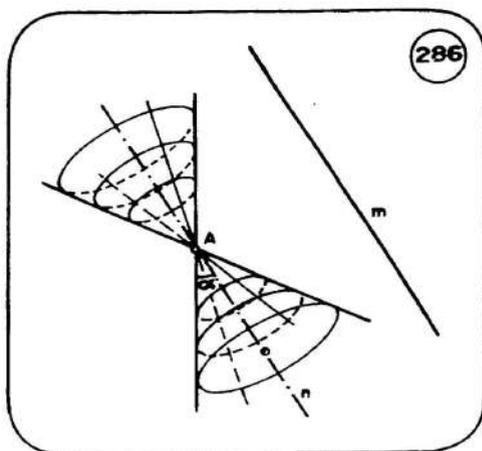
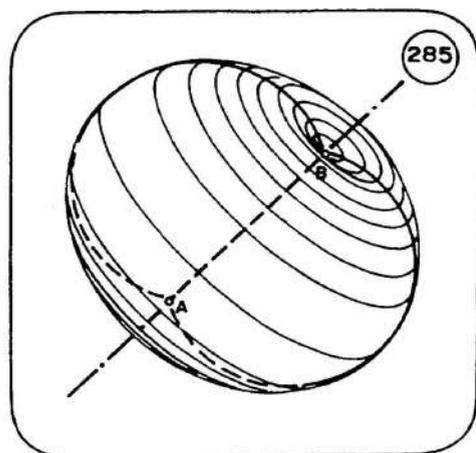
São os ARCOS CAPAZES de um ângulo dado em relação a um segmento dado  $AB$  (fig. 284).

Com base numa propriedade de ângulos inscritos em uma circunferência, lembremos que todos os pontos do plano que, ligados aos pontos  $A$  e  $B$ , formam um mesmo ângulo  $\alpha$  (como  $C, C', C'', C''', C^4, C^5$  e  $C^6$ , na figura) estão situados sobre dois arcos de circunferência simétricos em relação a  $AB$ , que é uma corda comum aos dois.

A três dimensões, esse l.g. seria a superfície gerada pela rotação da figura 284 em torno de AB. É do gênero de superfícies chamado TORO CIRCULAR (fig. 285).

No caso particular do ângulo  $\alpha$  ser reto, os arcos capazes são semicircunferências, completando uma circunferência inteira, para os pontos do plano. No espaço, o l.g. seria a superfície de uma esfera de diâmetro AB.

Mas no espaço tridimensional há um l.g. das retas que passam por um ponto A e formam um ângulo dado  $\alpha$  com uma reta m (fig. 286). Passando a reta  $n \parallel m$  pelo ponto A, todas as retas desse l.g. são geratrizes de um cone de revolução de eixo n. Outra superfície cônica é o l.g. das retas que passam em um ponto A e formam um ângulo dado  $\alpha$  com um plano  $\beta$  (fig. 287). Tirando-se de A a reta  $m \perp \beta$ , já vimos que toda reta que faz ângulo  $\alpha$  com o plano  $\beta$  forma ângulo complementar ( $90^\circ - \alpha$ ) com a perpendicular m, o que equivale ao l.g. da fig. 286.

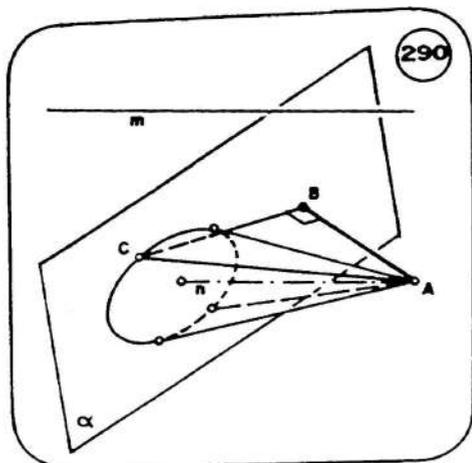
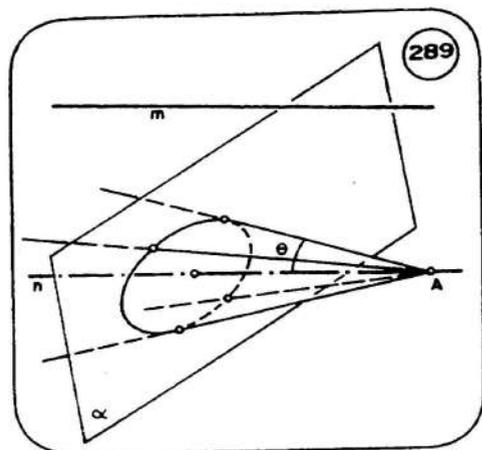
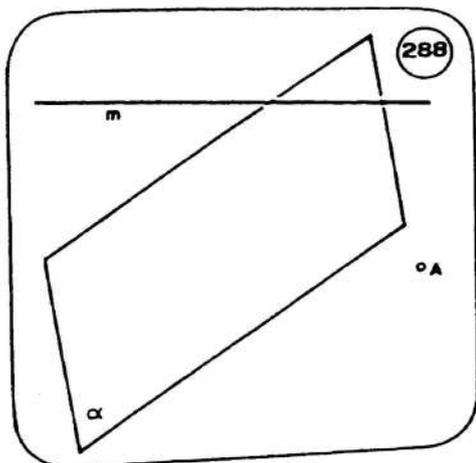
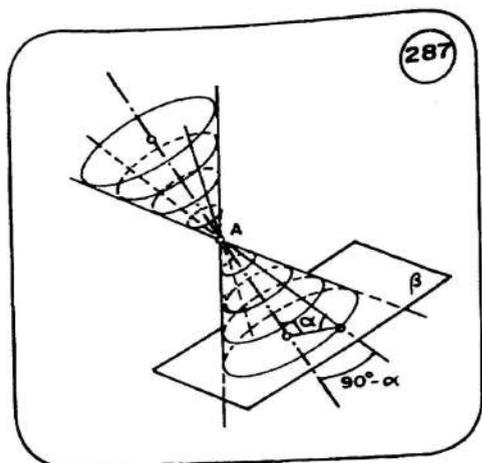


#### 4.11. Distância de Ponto a Plano, Sujeita a Condições Angulares

No ítem 4.4. prometemos outras condições interessantes para medir a distância de um ponto a um plano.

Vejamos o caso em que temos uma reta m e queremos medir a distância de um ponto A a um plano  $\alpha$ , usando um segmento que forme com m um ângulo dado  $\theta$  (fig. 288).

Passando por A a reta n paralela a m, o l.g. de todas as retas que formam ângulo  $\theta$  com m, conforme vimos em 4.10., é a superfície do cone de revolução cujas geratrizes formam ângulo  $\theta$  com o eixo n (fig. 289). A interseção dessa superfície cônica com o plano  $\alpha$  será uma curva cônica (elipse, hipérbole ou parábola), cujos pontos distam de A o comprimento da respectiva geratriz. É fácil imaginar que, se m for dada perpendicular a  $\alpha$ , a curva cônica será uma circunferência, pois  $\alpha$  cortará o cone perpendicular ao seu eixo. Em

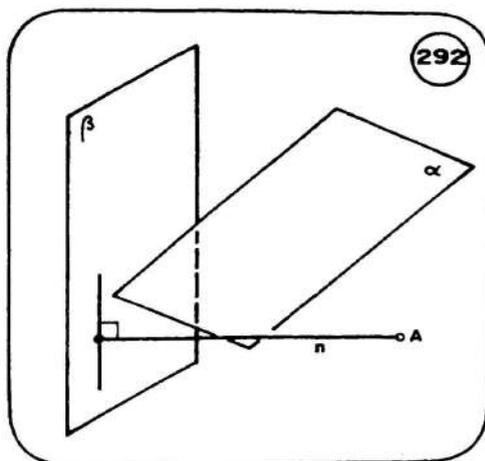
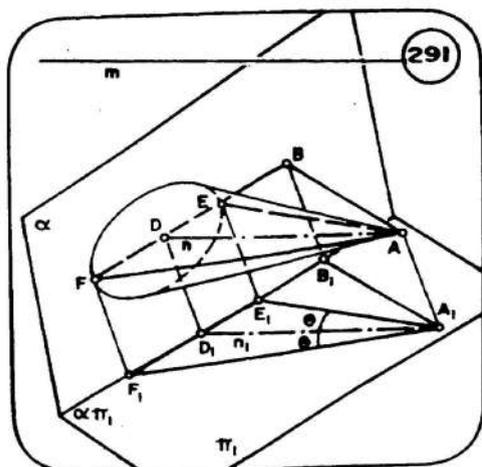


tal situação particular, qualquer geratriz teria o mesmo comprimento, que seria a distância de A a  $\alpha$ , formando ângulo  $\theta$  com m.

Fora desse caso especial, as geratrizes têm comprimentos diferentes. Podemos procurar a mais curta delas, que traduzirá a menor distância de A a  $\alpha$ , sob aquela condição do ângulo  $\theta$  com m.

Vamos baixar de A a perpendicular AB sobre  $\alpha$ . Qualquer geratriz AC (fig. 290) determina com B um triângulo retângulo, do qual o cateto AB não depende da posição de C na curva cônica. Então, quanto maior for BC, maior será a hipotenusa AC, e a mais curta geratriz corresponderá à posição de C mais próxima de B. O nosso problema depende agora de achar o ponto da curva cônica que mais se aproxima de B.

Passando um plano de projeção  $\pi_1$  paralelo a AB e a n, obtemos nele a vista em v.g. do plano ABD, onde D é a interseção de n com  $\alpha$  (fig. 291). O plano  $\pi_1$  é perpendicular a  $\alpha$  por ser paralelo à sua perpendicular AB. Então  $\alpha$  estará em vista básica em  $\pi_1$ , reduzindo a projeção da curva cônica a um



segmento de reta em  $\alpha\pi_1$ . Por ser paralelo ao eixo  $n$  do cone de revolução,  $\pi_1$  mostrará o contorno desse cone como um triângulo, em que  $n_1$  é a bissetriz do ângulo  $2\theta$  no vértice  $A_1$ . Os outros vértices  $E_1$  e  $F_1$  desse triângulo são as projeções de  $E$  e  $F$ , extremos das geratrizes  $AE$  e  $AF$  que estão em um plano paralelo a  $\pi_1$ . Como  $BD$  também é paralelo a  $\pi_1$ , os pontos  $B, D, E$  e  $F$  estão numa mesma reta, sendo portanto os pontos  $E$  e  $F$  respectivamente o mais próximo e o mais afastado de  $B$ , sobre a curva cônica.

A medida de  $AE$ , que está em v.g. no plano  $\pi_1$  ( $A_1E_1$ ), é a menor distância de  $A$  a  $\alpha$ , formando ângulo  $\theta$  com  $m$ .

Outra condição angular para a distância de um ponto a um plano é a de que seja medida por um segmento que forme um ângulo dado com outro plano dado.

Na figura 292, suponhamos que se deseja medir a distância de  $A$  a  $\alpha$ , formando um ângulo  $\theta$  com o plano  $\beta$ . Pelo que vimos em 4.10, passando por  $A$  a reta  $n$  perpendicular a  $\beta$  todas as retas que saírem de  $A$  formando ângulo  $90^\circ - \theta$  com  $n$  satisfazem a condição exigida. O raciocínio seria o mesmo desenvolvido nas figuras anteriores, com a única diferença de tomarmos o complemento de  $\theta$  para ângulo das geratrizes com o eixo do cone de revolução.

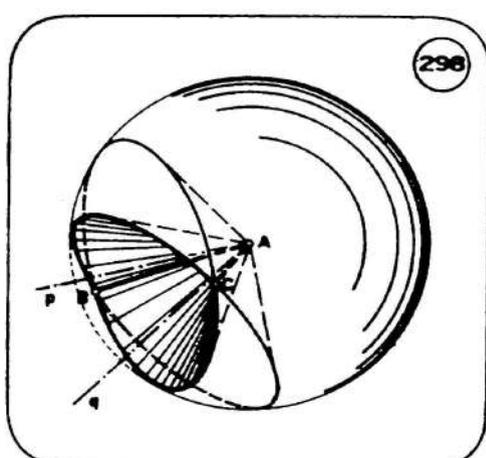
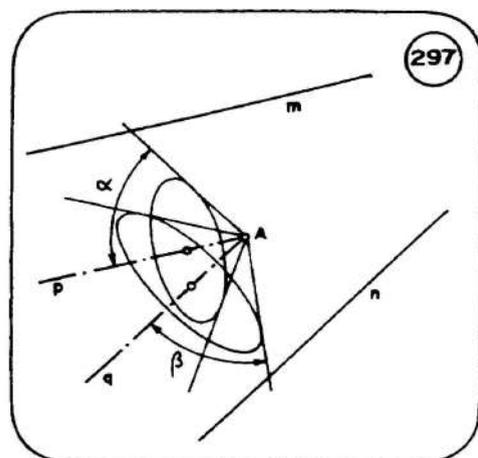
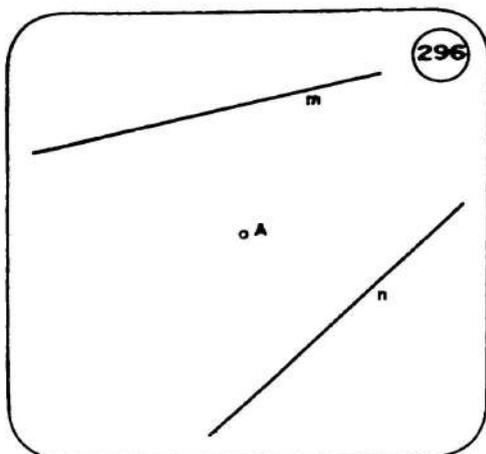
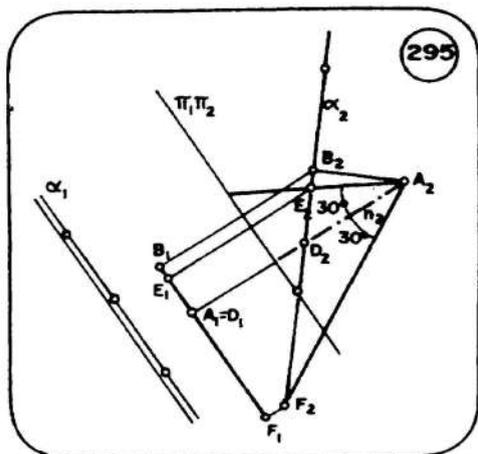
A mais interessante aplicação prática dessa questão ocorre quando  $\beta$  é o plano  $\pi_1$ . O problema equivale então a achar o menor segmento que une um ponto a um plano, com declividade dada.

Vamos analisá-lo em épura.

Dados o ponto  $A$  e o plano  $\alpha$ , determinemos o menor segmento de inclinação  $60^\circ$  que une  $A$  a um ponto de  $\alpha$  (fig. 293).

Acompanhando o raciocínio desenvolvido nas perspectivas, a reta  $n$ , perpendicular a  $\pi_1$ , é uma reta básica (fig. 294). A vista básica de  $\alpha$ , tomada em  $\pi_2$ , também mostra  $n$  em v.g., além da perpendicular  $AB$ . Portanto  $\pi_2$ , também mostra  $n$  em v.g., além da perpendicular  $AB$ . Portanto  $\pi_2$  corresponde ao  $\pi_1$  da fig. 291). O ponto  $D$  é a interseção de  $n$  com  $\alpha$ . O l.g. das retas

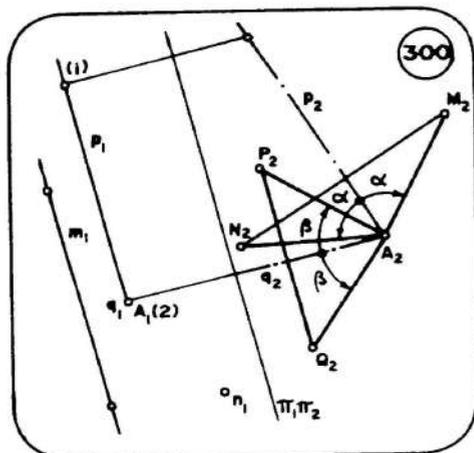
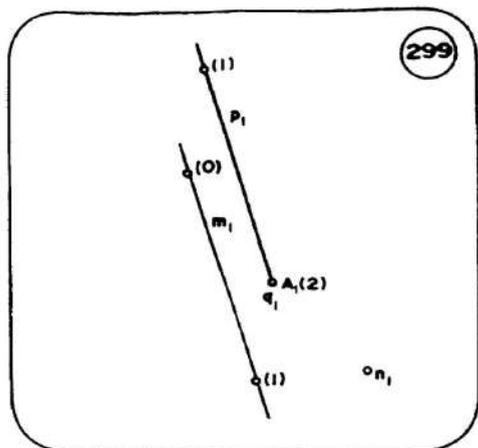




2 l.g. de ângulos e satisfazem, assim, à condição pedida.

Para operar em épura o procedimento é bastante simples quando uma das retas,  $m$  ou  $n$ , se projeta em vista básica (fig. 299). No exemplo,  $n$  é reta básica, o mesmo acontecendo com  $q$ , sua paralela passando em  $A$ . A outra ( $m$ ) é inclinada, e com o mesmo intervalo temos  $p$  passando em  $A$ .

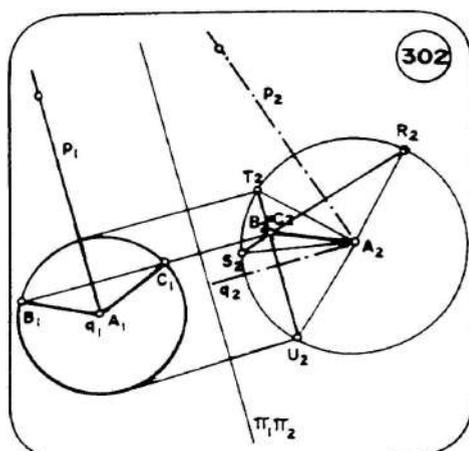
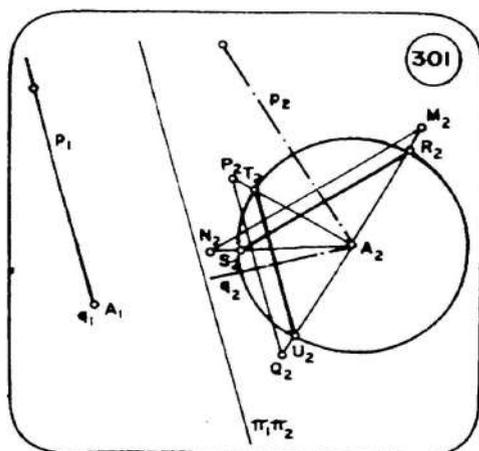
Destacando apenas as retas  $p$  e  $q$  (fig. 300), podemos tomar a vista em v.g. de  $p$ , que também o será para  $q$ . Os cones de eixo em  $p$  e  $q$ , conforme discutimos na fig. 291), tendo tais eixos em v.g., projetarão seus contornos em  $\pi_2$  formando os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, com  $p_2$  e  $q_2$ . Qualquer seção dos dois cones, perpendicular a seus eixos, aparecerá em vista básica em  $\pi_2$ , tais como  $M_2N_2$  no cone de eixo  $p$  e  $P_2Q_2$  no de eixo  $q$ . Para que essas seções circulares estejam situadas em uma mesma esfera de centro em  $A$ , é necessário que as geratrizes que aparecem em v.g. no plano  $\pi_2$ , tais como  $AM$ ,  $AN$ ,  $AP$  e  $AQ$ , tenham o mesmo comprimento.



Portanto, centrado compasso em  $A_2$  e descrevendo uma circunferência de raio qualquer (fig. 301), obtemos seções nos dois cones ( $R_2S_2$  e  $T_2U_2$ ) que podem ter pontos comuns, por estarem na mesma superfície esférica, tal como foi visualizado na figura 298. Os pontos B e C estão superpostos na projeção em  $\pi_2$ , pois ambos pertencem à interseção das duas seções nos cones de eixos p e q, cujos planos estão em vista básica (fig. 302). A seção que se projeta em  $T_2U_2$ , sendo paralela a  $\pi_1$  (cota constante), terá uma vista em v.g. no plano  $\pi_1$ , ou seja, uma circunferência centrada em  $q_1$  com diâmetro  $\overline{T_2U_2}$ . Sobre ela se projetarão B e C, em  $B_1$  e  $C_1$ .

Temos o problema resolvido, com as projeções de AB e AC, as duas retas que passam em A formando ângulo  $\alpha$  com m e  $\beta$  com n.

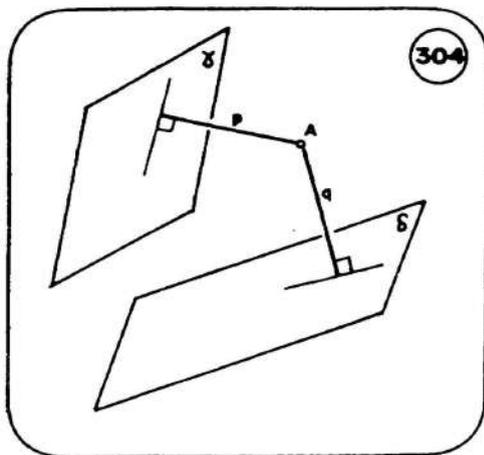
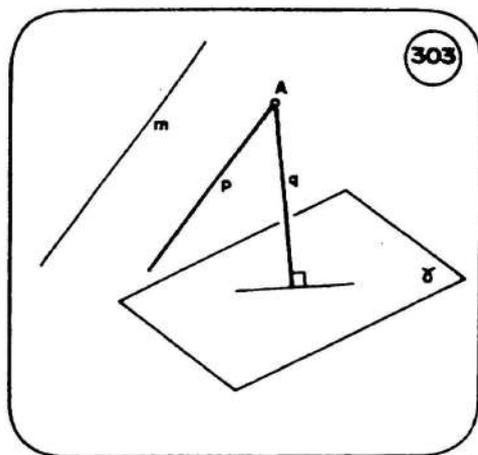
É preciso observar que essa questão pode não ter solução. Basta que os cones não se interceptem. Isso ocorrerá quando  $\alpha + \beta$  for menor que o ângulo formado entre m e n (igual ao ângulo pq).



Quando  $\alpha + \beta$  for igual a  $\widehat{pq}$  os dois cones se tangenciarão e a solução será única.

A operação que acabamos de efetuar é exatamente a mesma para resolver dois outros problemas.

O primeiro é determinar uma reta que passe em A, faça um ângulo dado  $\alpha$  com uma reta m e um outro ângulo dado  $\beta$  com um plano  $\gamma$  (fig. 303). Basta passar p paralela a m e q perpendicular a  $\gamma$ . Os cones terão suas geratrizes formando ângulos respectivos  $\alpha$  com p e  $90^\circ - \beta$  com q.



O outro problema é determinar uma reta que passe em A, forme ângulo  $\alpha$  com o plano  $\gamma$  e ângulo  $\beta$  com o plano  $\delta$  (fig. 304). Os cones têm eixos  $p \perp \gamma$  e  $q \perp \delta$ , e suas geratrizes formarão ângulos de  $90^\circ - \alpha$  com p e  $90^\circ - \beta$  com q, respectivamente.

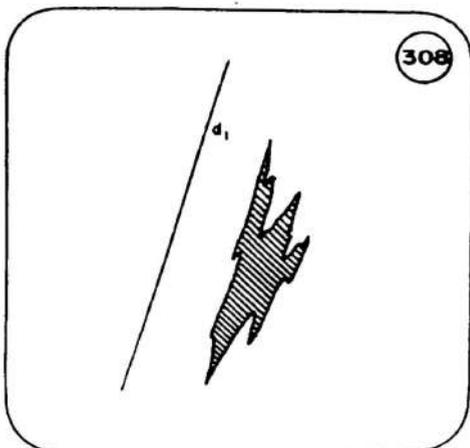
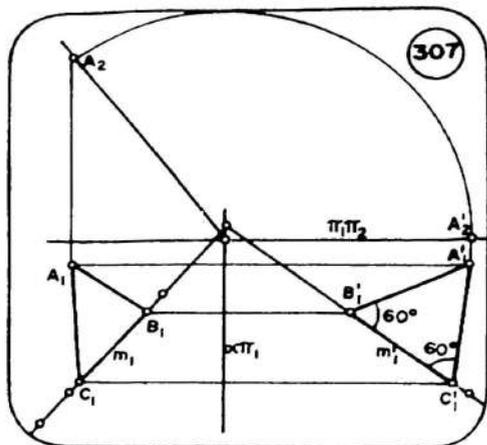
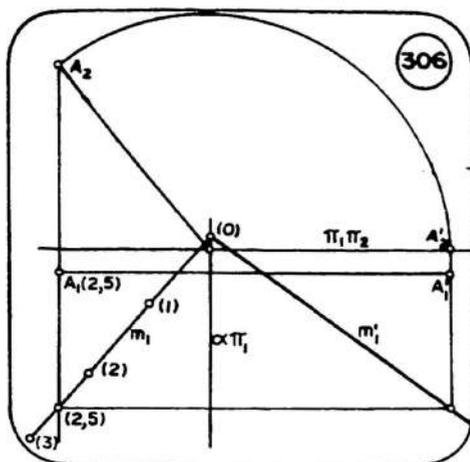
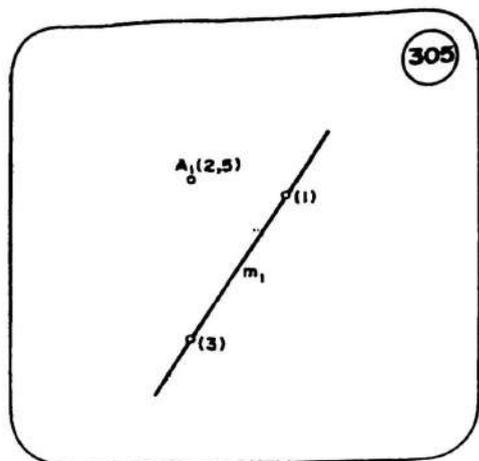
#### 4.13. Exercícios Resolvidos

4.13.1. Determinar a projeção de um triângulo equilátero com um vértice em A e o lado oposto sobre a reta m (fig. 305).

#### RESOLUÇÃO

Como a projeção deforma os lados e ângulos do triângulo equilátero, precisamos rebater o plano  $\alpha$ , definido por m e A, para construir o triângulo em verdadeira grandeza. Graduando m, obtemos a direção de  $\alpha$  e o seu traço  $\alpha \pi_1$  (fig. 306), que permite ter  $m'_1$  e  $A'_1$ .

Na figura rebatida o problema é de desenho geométrico. Assim como foi solicitado um triângulo, poderia ter sido qualquer outra figura plana com dados suficientes para sua construção. Passando por  $A'_1$  as retas que formam ângulo de  $60^\circ$  com  $m'_1$  (fig. 307), localizamos  $B'_1$  e  $C'_1$ , os outros dois vérti-



ces do triângulo pedido. Mas eles estão rebatidos. Para a solução do problema, basta-nos alçá-los para a projeção em  $B_1$  e  $C_1$ , sobre  $m_1$ .  $A_1 B_1 C_1$  é a projeção pedida.

4.13.2. A figura 308 mostra em projeção principal o rasgo ocorrido numa chapa de plástico de direção  $d$  e inclinação de  $60^\circ$ . Para dificultar a expansão do furo, devemos torná-lo circular de diâmetro mínimo. Determinar a projeção de tal círculo.

### RESOLUÇÃO

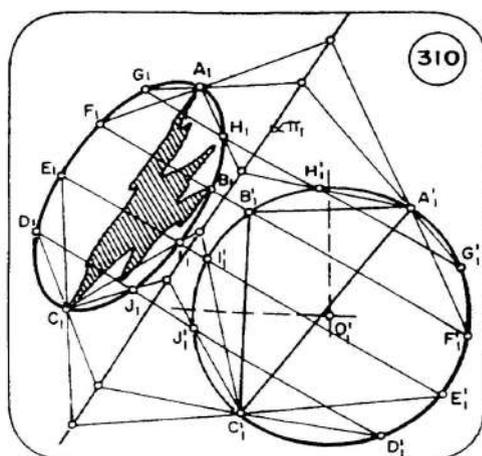
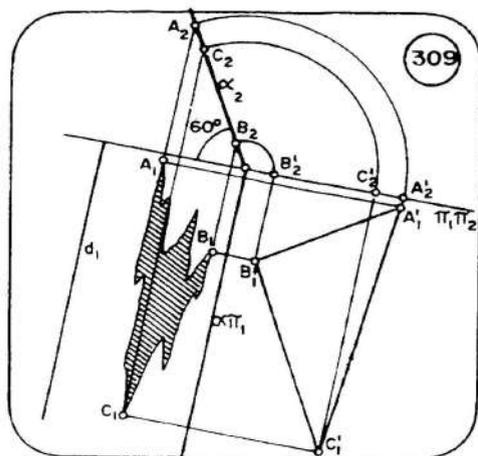
À primeira vista, pode parecer que os dados são insuficientes para resolver o problema, pois não temos nenhuma cota. Mas se tomarmos  $\pi_2$  perpendicular a  $d_1$  garantiremos obter uma vista básica do plano da chapa, e esco-

lhendo  $\alpha\pi_1 // d_1$ , a qualquer distância de  $d_1$ , temos elementos para definir  $\alpha_2$  (fig. 309). Sobre  $\alpha_2$  projetamos os três pontos que nos parecem mais afastados sobre o contorno do rasgo. O rebatimento de A, B e C é suficiente, pois a circunferência que passa nesses 3 pontos deve envolver todo o perímetro da figura irregular dada. No rebatimento (fig. 310), basta determinar o circuncentro  $O'_1$  do triângulo  $A'_1B'_1C'_1$  (interseção das mediatrizes), traçar a circunferência e alçar quantos pontos quisermos dessa curva, de preferência usando a propriedade que mostramos na figura 228 e nas seguintes. Tendo  $D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ , etc., podemos uní-los para ter a projeção do furo circular mínimo que conterà a expansão do rasgo. Facilita muito sabermos que tal curva é uma elipse. É preciso verificar se realmente todos os pontos da figura dada ficaram dentro dessa elipse. Se tal não ocorrer é porque escolhemos mal os pontos extremos A, B e C.

4.13.3. No tronco de prisma da fig. 311, determinar a distância do vértice F à aresta DH e à face ADHE.

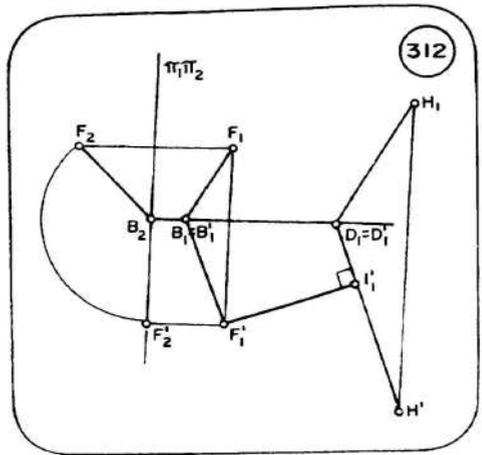
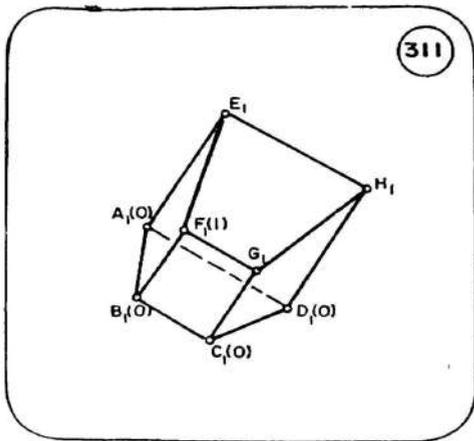
### RESOLUÇÃO

Temos dois problemas distintos. O primeiro pede a menor distância de um ponto a uma reta (ítem 4.2.) e o segundo a menor distância de um ponto



a um plano (ítem 4.3).

A figura 312 isola do prisma as arestas BF e DH para encontrar a distância de F a DH. A cota de H não foi fornecida porque as arestas são paralelas. O seu plano tem como traço  $B_1D_1$ , que pode ser tomado como charneira para rebater F em  $\pi_1$ , obtendo-se  $F'_1$ . A aresta DH continua paralela a BF no rebatimento, o que permite determinar  $D'_1H'_1$ . Tirando-se de  $F'_1$  a perpendicular  $F'_1I'_1$  a  $D'_1H'_1$ , o segmento  $F'_1I'_1$  dá a medida procurada.

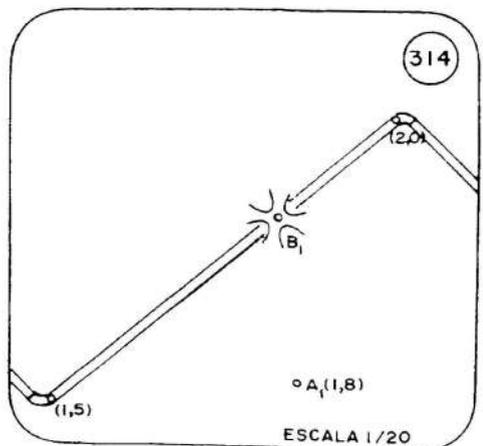
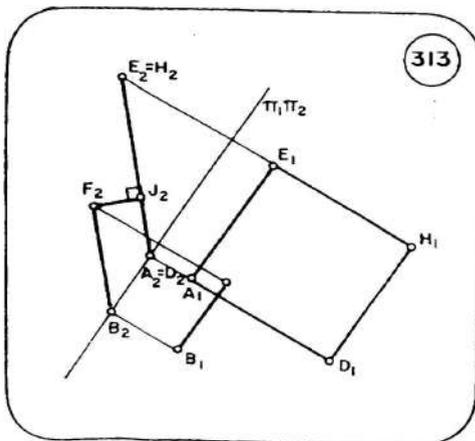


A figura 313 destaca a aresta BF e a face ADHE. Para achar a distância de F a essa face, sabemos que  $A_1D_1$  é o traço do seu plano. Então  $\pi_1\pi_2 \perp A_1D_1$  dá uma vista básica da face ADHE. Não temos a cota de H nem a de E, mas  $B_2F_2$  pode ser traçada e deve ser paralela à vista do plano, uma vez que toda aresta de um prisma é paralela às suas faces laterais. Assim a reta  $B_2F_2$  permite traçar a vista básica da face ( $A_2E_2$ ) e a perpendicular de  $F_2$  a essa reta ( $F_2J_2$ ) determina a v.g. da distância de F a ADHE.

4.13.4. Na figura 314, um observador no ponto A percebe o sol brilhar no ponto B, refletido no cano metálico (cotas em metros). Determinar a direção dos raios solares nesse exato momento.

### RESOLUÇÃO

Pelo que devemos saber de ótica, o raio solar que estiver contido no pla-

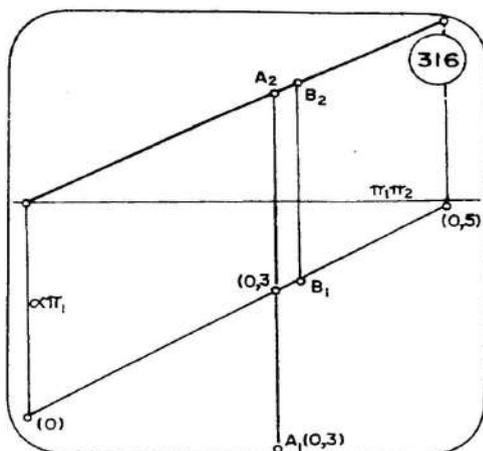
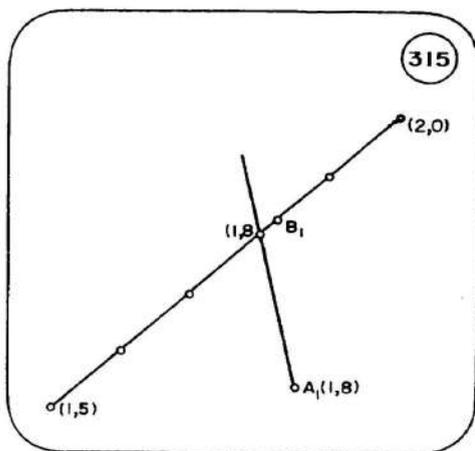


no definido pelo ponto A e pelo eixo do cano (que vamos chamar  $\alpha$ ), e atingir o ponto B formando com o cano o mesmo ângulo que faz AB, será aquele que o observador verá refletido ao olhar para o ponto B.

A figura 315 destaca apenas os pontos e o eixo do cano. Neste, podemos localizar o ponto de mesma cota de A, definindo a direção de  $\alpha$ . Na escala da figura as cotas são muito grandes para o desenho. Podemos subtrair 1,5m de todas elas, ficando com o ponto mais baixo do cano de cota 0, por onde passará então o traço  $\alpha\pi_1$  (fig. 316).

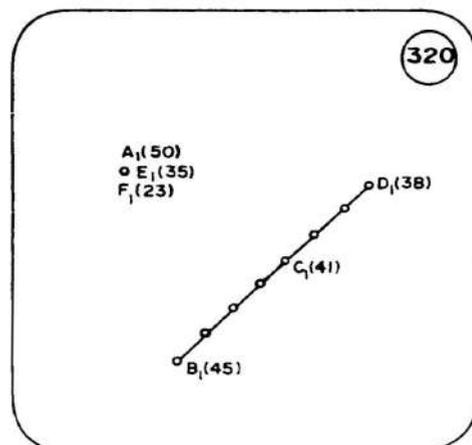
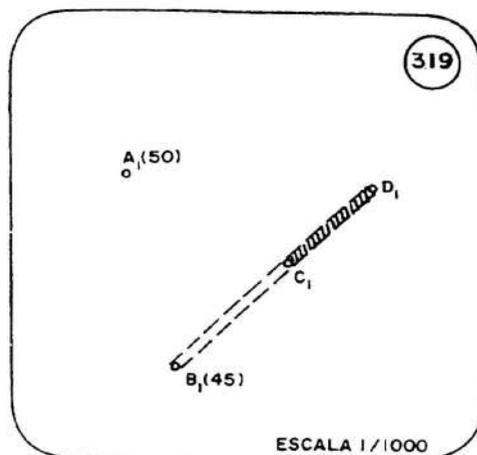
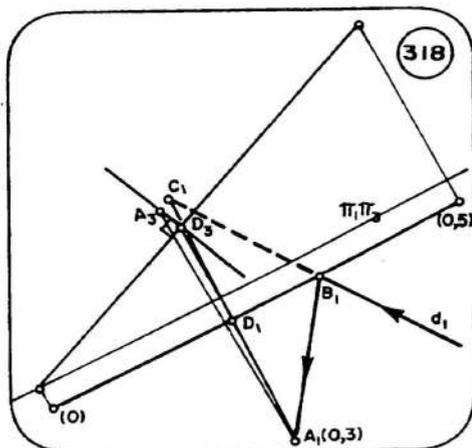
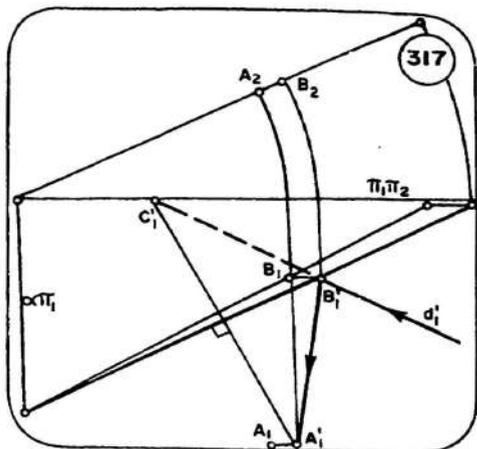
Tomamos então a vista básica de  $\alpha$ , onde se situam  $A_2$  e  $B_2$ , que podem ser rebatidos sobre  $\pi_1$ .

No rebatimento (fig. 317) todos os ângulos sobre o plano  $\alpha$  estão em v.g. Determinando o ponto  $C'_1$  simétrico de  $A'_1$  em relação ao eixo do cano, a reta  $B'_1C'_1$  dará a direção  $d'_1$  do raio solar incidente em  $B'_1$  que se reflete em  $A'_1$ , uma vez que  $A'_1B'_1$  e  $C'_1B'_1$  fazem o mesmo ângulo com o cano. Bastaria alçar essa direção para ter a resposta do problema na projeção principal.



Tivemos neste problema a aplicação de reta perpendicular a reta sem envolver a medida de distância. Conforme comentamos nas figuras 240 a 243, a solução poderia ter sido encontrada através de plano perpendicular a reta. A figura 318 mostra esse caminho. Tomando a vista em v.g. do eixo do cano, passamos por  $A_3$  o plano  $\beta$  que lhe é perpendicular, e que está em vista básica em  $\pi_3$ . Chamando D a interseção de  $\beta$  com o eixo do cano, AD é a perpendicular de A ao cano, que permite localizar o simétrico de A (ponto C) já na projeção principal.  $B_1C_1$  é a direção pedida dos raios solares. Notemos a vantagem deste processo sobre o primeiro, lembrando que, na fig. 317, ainda falta alçar d.

4.13.5. Numa mineração, um veio plano de minério foi atravessado por uma sondagem vertical feita em A entre as profundidades de 15 m e 27 m



(fig. 319). A galeria aberta em B, descendo com a declividade 20%, atravessou o mesmo veio entre os pontos C e D. Determinar a espessura desse veio (cotas em metros).

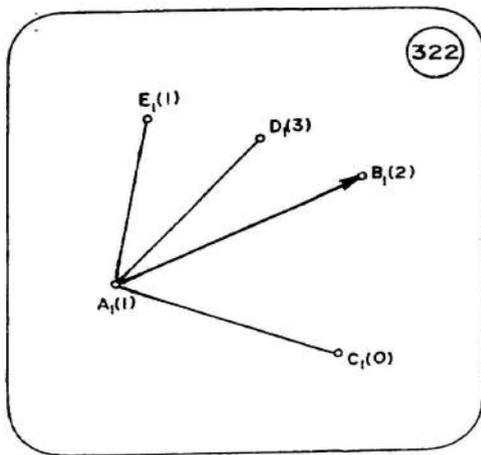
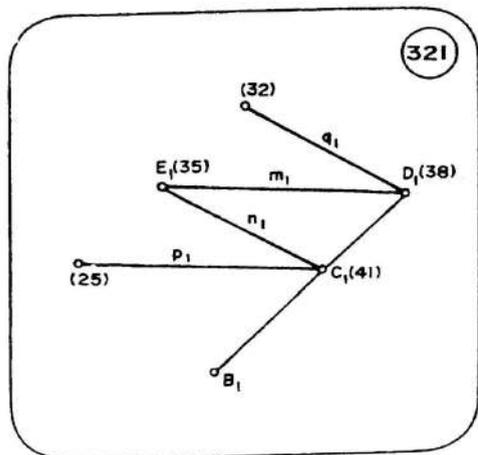
### RESOLUÇÃO

Um veio plano é uma placa de minério limitada entre dois planos paralelos (teto e base do veio). O problema é aplicação do ítem 4.3., pois teremos apenas que medir a menor distância de um ponto do teto ao plano da base, ou vice-versa.

Subtraindo as profundidades do furo vertical em A da cota desse ponto, obtemos os pontos E e F onde o poço atravessou o teto e a base, respectivamente, do veio de minério dado (fig. 320). Na galeria do ponto B, o intervalo será de 5m (5mm no desenho). Havendo 4 intervalos entre B e C nessa reta, a

cota deste ponto será 41m. 3 intervalos entre C e D indicam como 38m a cota deste último.

Estamos então com uma reta no teto do veio (EC) e outra na sua base (FD). São as retas  $m$  e  $n$  da figura 321. Sabemos que planos paralelos contêm retas paralelas. Passando por  $C$  a reta  $p // m$ , ela terá que pertencer ao plano do teto do veio, por ser paralela a uma reta da base. Do mesmo modo, a reta  $q // n$  deverá pertencer ao plano da base por ser paralela a uma reta do teto. Então  $\alpha = pn$  é o teto e  $\beta = qm$  é a base. Determinando a direção de um desses planos, podemos escolher qualquer ponto do outro e estabelecer a distância de tal ponto ao plano, conforme procedimento do ítem 4.3.



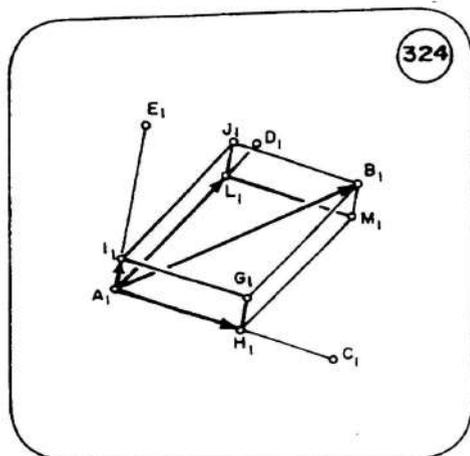
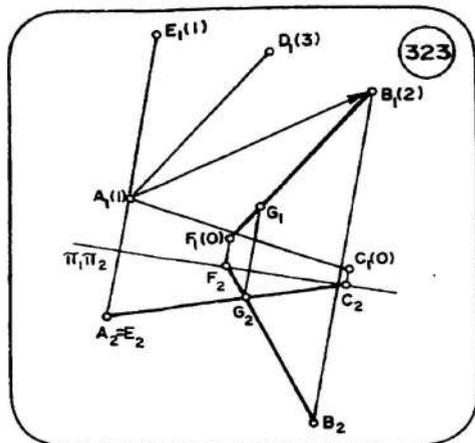
4.13.6. Decompor o vetor  $AB$  segundo as direções  $AC$ ,  $AD$  e  $AE$  (fig. 322).

### RESOLUÇÃO

As componentes do vetor  $AB$  serão as arestas de um paralelepípedo que tem  $AB$  como diagonal, sendo  $AC$ ,  $AD$  e  $AE$  os suportes das suas arestas que concorrem no vértice  $A$ .

Para construí-lo, podemos passar por  $B$  uma paralela a uma das retas dadas até encontrar o plano definido pelas outras duas, o que dará um segundo vértice do sólido. Isso equivale a obter a distância de um ponto a um plano, paralelamente a uma reta dada, o que discutimos na fig. 247.

Sendo  $AE$  de cota constante, no problema, é mais simples tomar o plano que ela forma com  $AD$  ou com  $AC$  e achar a distância de  $B$  a tal plano, paralelamente à terceira reta. Na figura 323 passamos por  $B$  a reta  $BF$  paralela a  $AD$ . A vista básica do plano  $AEC$  permite determinar o ponto  $G$  em que ele corta  $BF$ .



$G$  é o vértice do paralelogramo no plano  $AEC$ . De  $G_1$  paralelas a  $A_1E_1$  e  $A_1C_1$  completam uma face desse sólido na projeção principal (fig. 324). As demais arestas podem ser facilmente traçadas paralelamente às 3 direções dadas. As situadas em  $AC$ ,  $AD$  e  $AE$  são os vetores componentes de  $AB$  naquelas direções.

É preciso notar que somente  $\vec{A\Gamma}$  tem seu módulo em v.g. Se quiséssemos  $\vec{AL}$  e  $\vec{AH}$  em v.g. teríamos de projetá-los em planos paralelos ou rebater o plano  $CAD$ .

Esse problema pode ser aplicado na física para decompor forças, velocidades, acelerações, momentos, e outras grandezas vetoriais.

4.13.7. Um veio plano de minério tem como teto o plano  $\alpha$  e como base o plano  $\beta$ . A figura 325 mostra o seu afloramento no plano  $\pi_1$ , que é a superfície do solo. O terreno local apresenta uma falha segundo o plano  $\gamma$ , que deslocou o veio para  $\alpha'$  e  $\beta'$ . A direção do deslizamento no plano da falha foi  $d$ . Determinar a amplitude desse deslocamento.

## RESOLUÇÃO

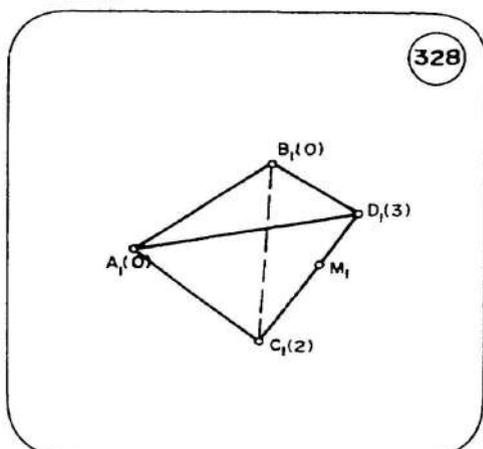
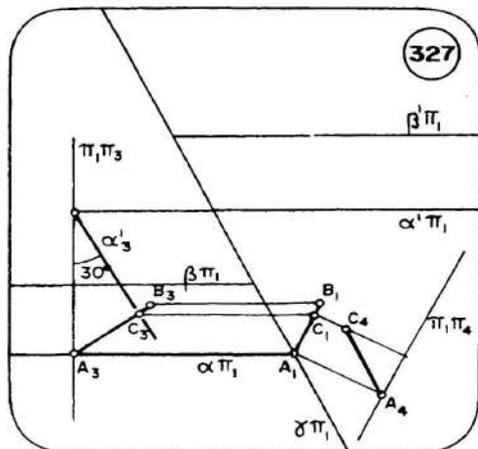
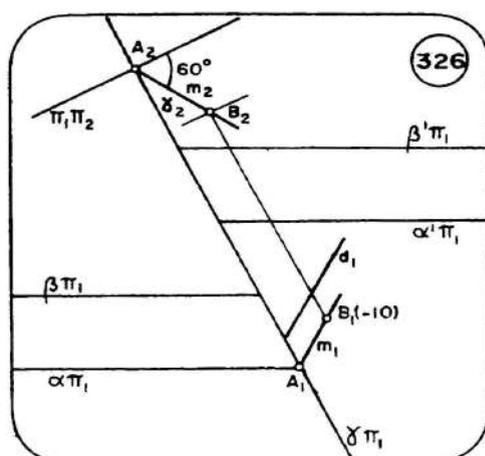
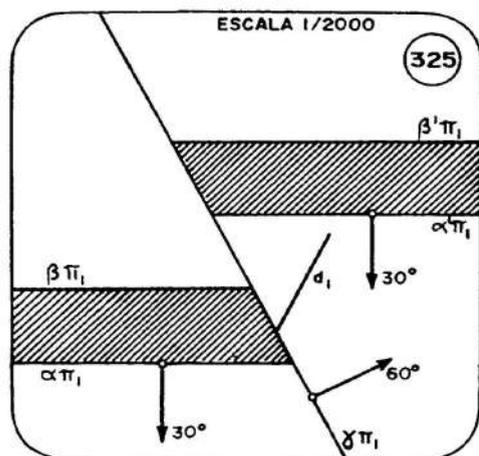
As setas nas retas de máximo declive são usadas para indicar o mergulho de cada plano, isto é, o sentido em que tais planos descem com o ângulo de inclinação especificado a seu lado.

Tomando o ponto  $A$  do plano  $\alpha$  no plano da falha (figura 326), só temos que determinar para onde tal ponto se deslocou em  $\alpha'$ . Como  $d$  é a direção da trajetória, o problema recai em medir a distância de  $A$  a  $\alpha'$  nessa direção, ou seja, é outra aplicação do que vimos na figura 247. Passando por  $A$  a reta  $m // d$ , ela pertence ao plano  $\gamma$ . A vista básica  $\gamma_2$  permite localizar outro ponto de  $m$  (na figura, o ponto  $B$  de cota  $-10m$ ).

A vista básica de  $\alpha'$  determina onde esse plano corta  $m$ , através de  $C_3$

que leva a  $C_1$  (fig. 327). O ponto  $C$  é aquele do teto do veio para onde deslizou o ponto  $A$  com a falha do terreno. Para a medida da amplitude do deslocamento desse ponto, falta-nos apenas tomar  $AC$  em v.g. no plano  $\pi_4$ .  $\overline{A_4 C_4}$ , medido na escala do desenho, resolve o problema.

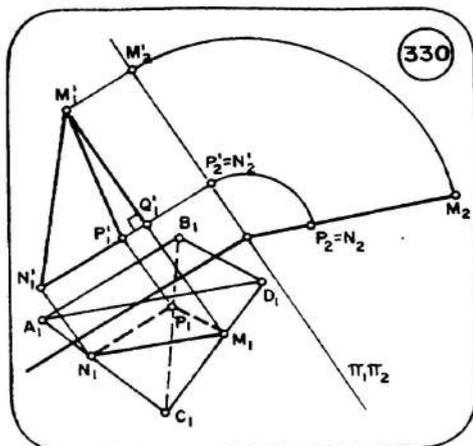
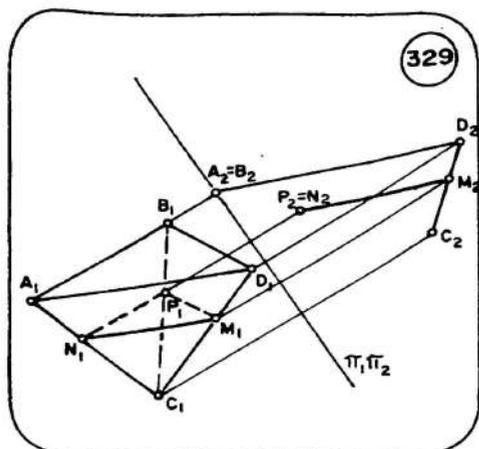
4.13.8. No tetraedro  $ABCD$ , determinar a menor distância do ponto  $M$  de  $CD$  ao plano  $ABC$ , medida paralelamente à face  $ABD$  (fig. 328).



## RESOLUÇÃO

Esta é uma aplicação da teoria mostrada na perspectiva da figura 248.

Passar por  $M$  um plano paralelo à face  $ABD$  é simples no tetraedro, pois sectionará as outras faces segundo o triângulo  $MNP$ , de lados paralelos a  $ABD$  (fig. 329). Todos os segmentos de  $M$  a  $ABC$ , paralelos à face  $ABD$ , serão cevias-



nas do triângulo MNP. A mais curta será a altura desse triângulo, que só poderá ser traçada no rebatimento de MNP. Poderíamos ter achado as cotas de M, N e P, mas o paralelismo de seu plano a ABD permite obtê-los em vista básica através da direção do plano ABD. A figura 330 mostra o final do problema, traçando a altura  $M'_1Q'_1$  no rebatimento de MNP. Não é necessário seu alçamento, pois foi pedida sua medida, que está em v.g. no rebatimento.

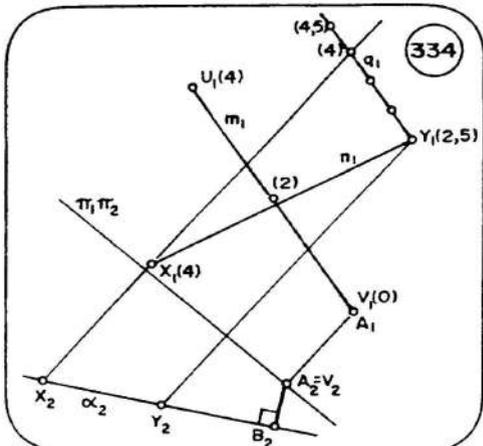
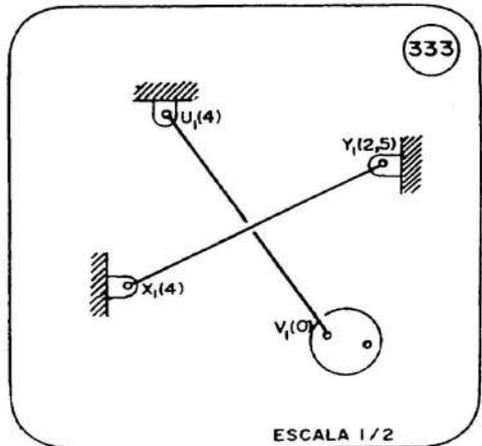
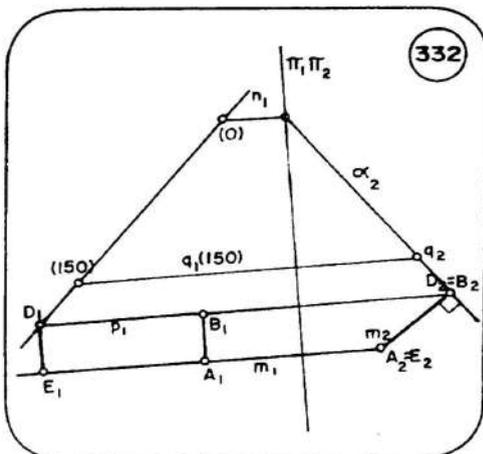
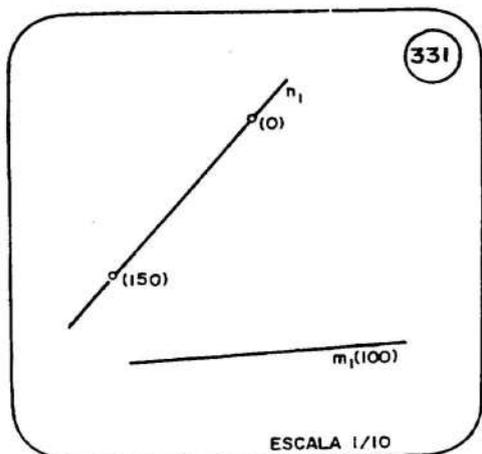
4.13.9. Em uma máquina, m e n são dois eixos que devem ser movimentados por um único parafuso sem fim (fig. 331). Determinar a projeção do eixo desse parafuso, desprezando os raios dos eixos e do parafuso (cota em milímetros).

## RESOLUÇÃO

Um parafuso sem fim é o meio mais simples de transmitir um movimento de rotação de um eixo para outro perpendicular. Como as retas m e n são reversas, o parafuso sem fim deve ter seu eixo perpendicular às duas retas simultaneamente. Portanto é a perpendicular comum, que estudamos no item 4.5.. A disposição dos dados facilita a resolução, pois sendo m de cota constante, a sua paralela q passada por um ponto de n já é a direção do plano  $\alpha$ . A figura 332 mostra a solução DE, obtida através das mesmas etapas das figuras de números 254 a 257.

Podemos observar que a posição particular de m faz com que ela se projete em vista básica em  $\pi_2$ . Não precisaríamos ter escolhido o ponto A qualquer e baixado  $AB \perp \alpha$ . Diretamente de  $m_2$ , baixando a perpendicular a  $\alpha_2$ , já teríamos a projeção  $E_2D_2$  da perpendicular comum (notemos que  $p // m$  coincide com a linha de chamada), que levaria direto a  $E_1D_1$ .

4.13.10. Em uma instalação elétrica, projetada na figura 333, determinar a menor distância a que passa o fio UV do fio XY (cotas em centímetros).



## RESOLUÇÃO

Destacando apenas os fios, o problema recai ainda no ítem 4.5 (fig. 334). Mostramos a resolução usando as mesmas letras ( $UV = m$  e  $XY = n$ ). Tomamos  $V$  como o ponto  $A$  da discussão teórica. A solução do problema é a medida  $\overline{A_2B_2}$ .

Essa aplicação traduz a necessidade que temos de encontrar APENAS A DISTÂNCIA entre duas retas reversas, sem precisar ligá-las pela perpendicular comum. Em eletromagnetismo é importante saber a distância que separa dois condutores, pela influência mútua que suas correntes exercem.

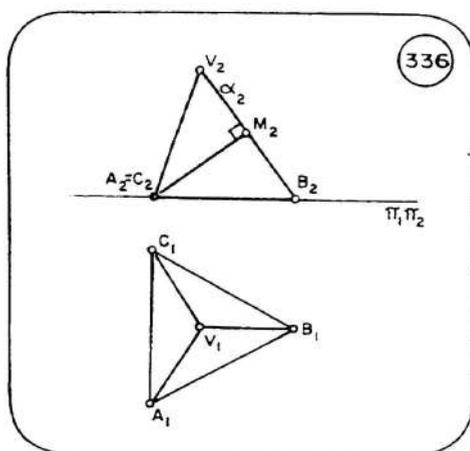
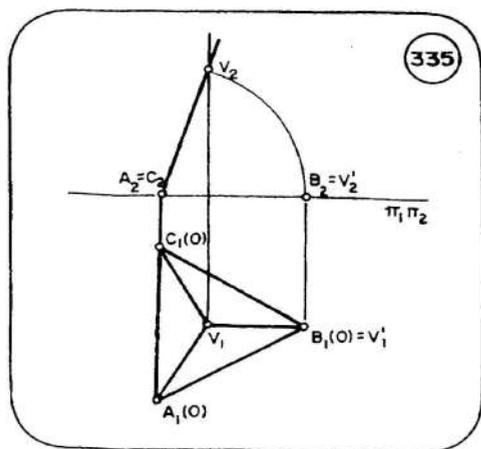
4.13.11. Demonstrar que a perpendicular comum a duas arestas opostas de um tetraedro regular passa pelos seus pontos médios e obter a projeção desse sólido na direção dessa perpendicular.

## RESOLUÇÃO

Tomando uma face no plano  $\pi_1$  (fig. 335), a projeção principal de um tetraedro é a mais simples possível.  $A_1B_1C_1$  é triângulo equilátero e o vértice oposto  $V$  se projeta no seu centro.

Na vista básica da face  $VAC$ , obtida com  $\pi_1\pi_2 \perp A_1C_1$ , a projeção  $V_2$  pode ser encontrada na linha de chamada de  $V_1$  e no alçamento da face  $VAC$ , pois no seu rebatimento em torno de  $AC$  o vértice  $V$  cairia em  $B_1$ , uma vez que todas as faces do sólido são iguais.

Destacando as arestas opostas  $AC$  e  $VB$ , o plano  $\alpha$  que passa por  $VB$  e é paralelo a  $AC$  está em vista básica em  $\pi_2$  (fig. 336). Então a perpendicular baixada de  $A_2 = C_2$  a  $\alpha_2$  determina  $M_2$  tal que  $A_2M_2$  já mede a distância entre as duas arestas consideradas.

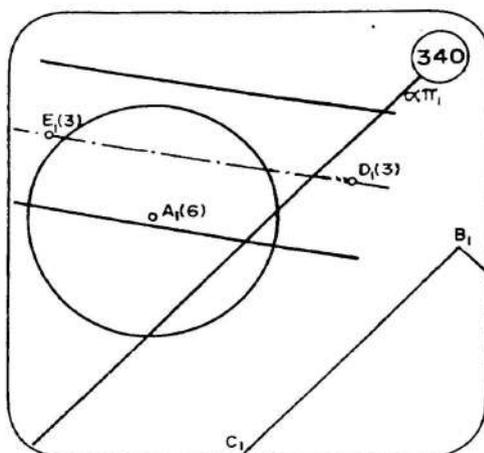
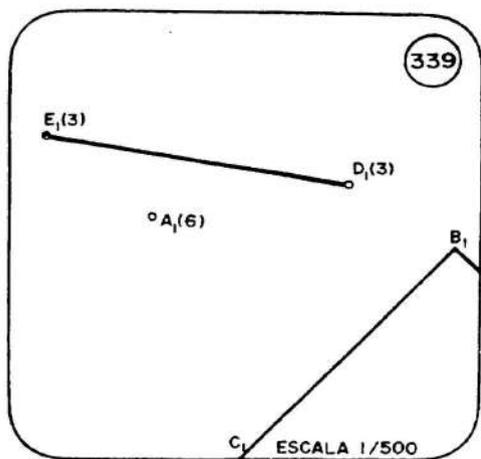
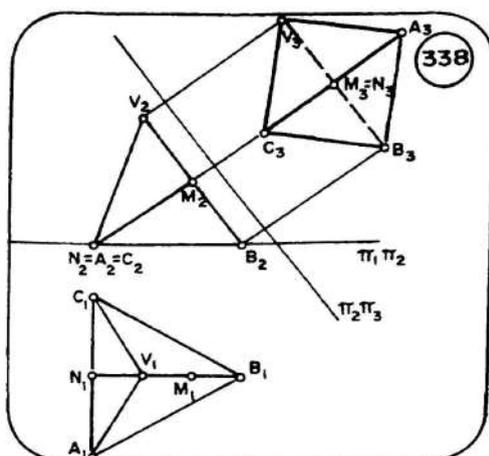
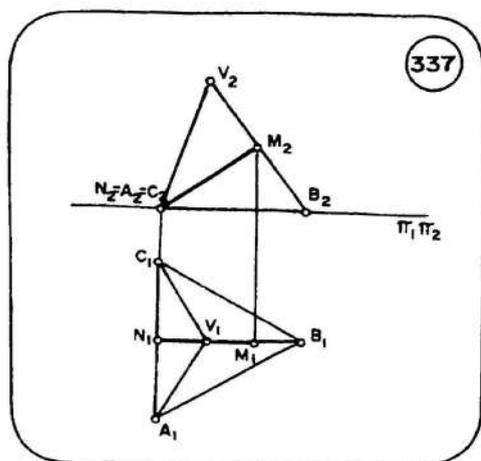


Como  $AC$  está em vista básica, as linhas de chamada permitem logo encaixar  $M_1N_1$  entre as projeções  $A_1C_1$  e  $V_1B_1$  das arestas (fig. 337).

Observando o triângulo  $V_2A_2B_2$ , notemos que é isósceles ( $V_2A_2 = A_2B_2$ ), onde a altura  $N_2M_2$  coincide com a mediana. Está então demonstrado que  $M$  é o ponto médio de  $VB$ , sendo evidente, em  $\pi_1$ , que  $N_1$  é ponto médio de  $A_1C_1$ , já que  $M_1N_1$  é superposta à altura de  $A_1B_1C_1$ , e assim fica também demonstrado que  $N$  está na metade da aresta  $AC$ .

Só resta projetar o tetraedro na direção de  $MN$  (figura 338). Tomando  $\pi_2$  como projeção principal,  $MN$  é reta de cota constante e podemos passar  $\pi_2\pi_3$  perpendicular a  $M_2N_2$ . Em  $\pi_3$  essa perpendicular comum a  $AC$  e  $VB$  se projeta em vista básica ( $M_3 = N_3$ ). Projetando todos os vértices na nova vista, podemos observar que o contorno do sólido ficou um quadrado, do qual  $M_3 = N_3$  é o centro.

4.13.12. Em uma indústria, as normas de segurança para instalação de um equipamento exigem uma distância mínima de 8m de uma válvula em  $A$ ,



5m de tubulação DE e 10m da parede vertical de um galpão em BC, na planta da figura 339 (cotas em metros). Determinar as posições dos pontos mais próximos que satisfazem tais condições.

### RESOLUÇÃO

Trata-se de uma aplicação dos l.g. que comentamos na figura 263.

Todos os pontos que estão a 8m de A, na escala do desenho, pertencem à superfície da esfera de centro em A e raio 1,6cm, cujo contorno na planta é a circunferência da figura 340. Aqueles que distam 5m de DE estão na superfície de um cilindro de eixo nessa reta e raio 1cm, cujo contorno em planta também está mostrado na figura. O terceiro l.g. é o plano básico  $\alpha$ , distante 2cm de  $B_1C_1$ , que contém todos os pontos que estão a 10m da parede.

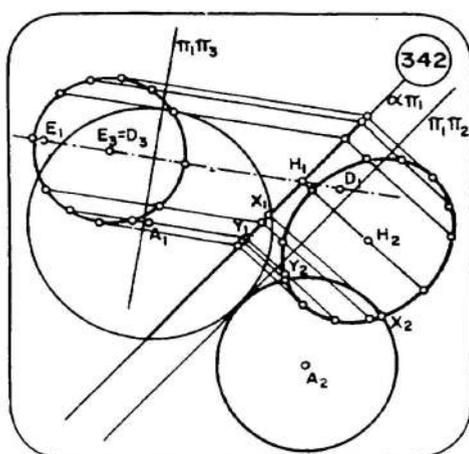
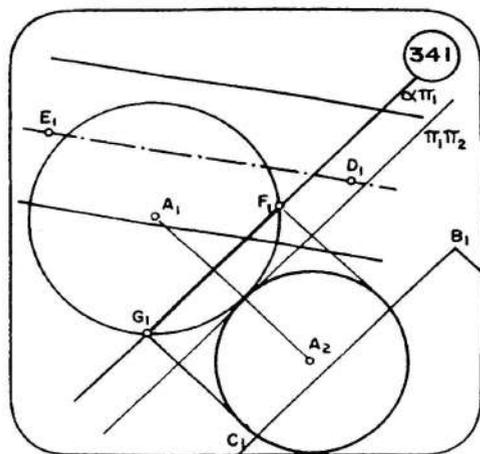
A interseção desses três l.g. dará os pontos que resolvem o problema.

A figura 341 mostra a interseção da esfera com o plano  $\alpha$ . Como este último está em vista básica em  $\pi_1$ , a circunferência que ele corta na esfera se projeta no segmento  $F_1G_1$ . Sua v.g. pode ser obtida com  $\pi_1\pi_2 // \alpha\pi_1$ , bastando projetar A com sua cota e traçar a circunferência de centro  $A_2$  e diâmetro  $F_1G_1$ .

A figura 342 fornece a elipse em que o plano  $\alpha$  corta o cilindro de eixo DE. Para determinar seus pontos, usamos várias geratrizes do cilindro, com cotas obtidas em sua vista básica no plano  $\pi_3$ .

Tendo ocorrido a interseção dessa elipse com a circunferência de centro  $A_2$ , os pontos comuns às duas curvas ( $X_2$  e  $Y_2$ ), que têm a projeção principal em  $\alpha\pi_1$  ( $X_1$  e  $Y_1$ ), determinam os pontos X e Y que resolvem o problema.

A resolução gráfica seria mais trabalhosa se a tubulação DE não tivesse cota constante, pois teríamos de conseguir nova projeção secundária para obter a vista básica do cilindro.



4.13.13. Determinar o centro da esfera cuja superfície contém os pontos A, B, C e D (fig. 343).

### RESOLUÇÃO

O centro da esfera é equidistante de todos os pontos da superfície. Portanto, deverá pertencer aos planos medidores dos 6 segmentos determinados pelos 4 pontos dados. Determinando-se a interseção de 3 desses planos medidores, o problema estará resolvido.

A figura 344 traz a interseção de  $\alpha$ , plano medidor de  $\overline{BC}$ ; com  $\beta$ , plano medidor de  $\overline{CD}$ . Lembremos que a vista em v.g. de cada segmento fornece a vista básica do seu plano medidor, pois esse plano é perpendicular ao segmento passando em seu ponto médio. Então  $\alpha_2 \perp \overline{B_2C_2}$  passa em  $E_2$ , na metade de  $\overline{B_2C_2}$ , e  $\beta_3 \perp \overline{C_3D_3}$  contém  $F_3$ , ponto médio de  $\overline{C_3D_3}$ . A reta



E no segundo caso? O problema poderá ser impossível ou indeterminado. Se  $A, B, C$  e  $D$  estiverem em um único plano, este será forçosamente uma seção da esfera (sempre um círculo). Como 4 pontos coplanares definem um quadrilátero, nem sempre é possível passar uma circunferência pelos 4 vértices. Se o quadrilátero for inscritível numa circunferência, esta será a seção da superfície esférica pedida, mas haverá uma infinidade de soluções para o problema. O centro da esfera poderá ser um ponto qualquer na reta perpendicular ao plano  $ABCD$ , passando pelo centro da circunferência circunscrita a esse quadrilátero. Se não for possível passar uma circunferência pelos 4 pontos dados, o problema não terá solução.

Quanto à escolha dos planos mediadores, na resolução do problema, o que acontecerá se tomarmos 3 segmentos que formam um triângulo, como  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$ , por exemplo?

Tal opção deve ser evitada, pois não determinará o centro da esfera. Deixamos para o raciocínio de cada leitor a dedução dessa afirmação. Como pista, lembramos a observação final do ítem 4.6.

4.13.14. Uma lage triangular  $ABC$  deve ser escorada por um tripé formado por três vigas pré-moldadas iguais, que se apoiem nas estacas cujas cabeças estão em  $D, E$  e  $F$  (figura 347). Determinar o comprimento dessas vigas e o ponto da lage  $ABC$  em que se incrustará o vértice do tripé (cotas em metros).

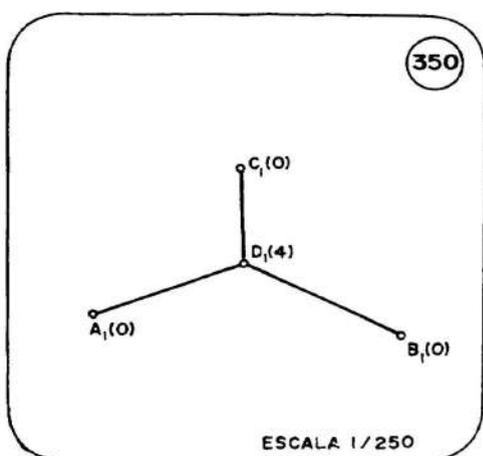
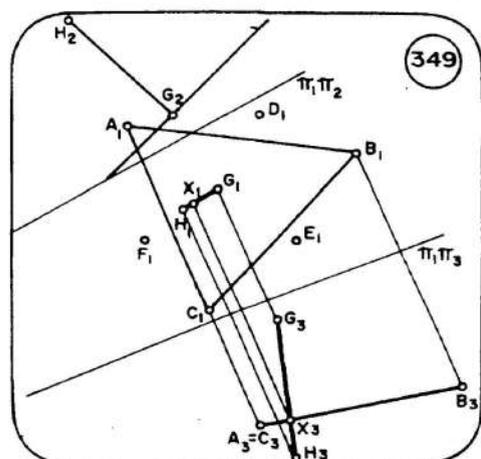
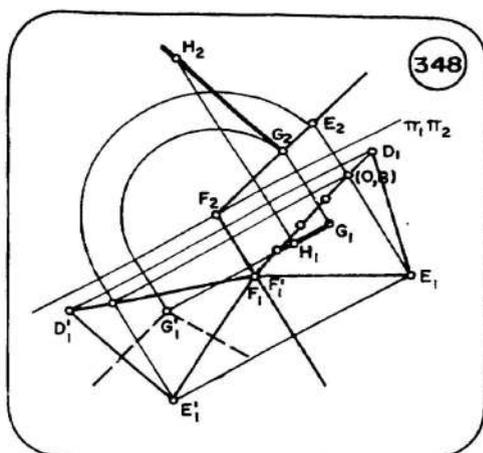
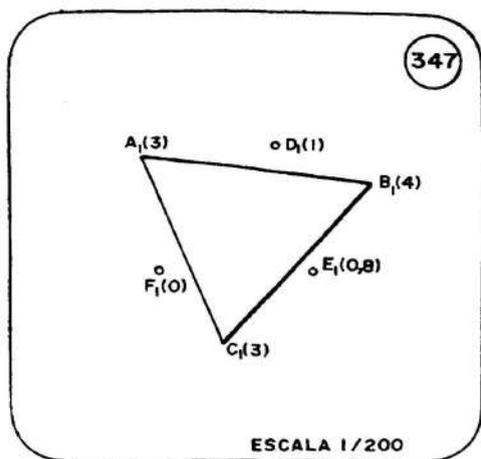
## RESOLUÇÃO

Se o tripé deve ter as pernas iguais, seu vértice será equidistante de  $D, E$  e  $F$ . Temos apenas que achar o ponto do plano  $ABC$  que equidista de  $D, E$  e de  $F$ .

Todos os pontos equidistantes de  $D$  e  $E$  estão no plano mediador de  $\overline{DE}$ ; de  $E$  e  $F$  no plano mediador de  $\overline{EF}$ ; e de  $F$  e  $D$  no plano mediador de  $\overline{FD}$ . Poderíamos então trabalhar em épura com tais planos, como fizemos no problema anterior. Mas já observamos no ítem 4.6. que esses 3 planos mediadores se interceptam segundo uma reta que sai do circuncentro do triângulo  $DEF$  e é perpendicular ao seu plano.

A figura 348 destaca  $DEF$  e rebate seu plano para achar o circuncentro  $G'_1$  no encontro das mediatrizes, alçando-o para  $G_1$ . De  $G_1$  e  $G_2$  traçamos as projeções da perpendicular ao plano  $DEF$ , sobre a qual tomamos um segundo ponto  $H$ .

A figura 349 volta a considerar o plano da lage e determina onde  $GH$  o atravessa (ponto  $X$ ). As pernas do tripé são  $XD, XE$  e  $XF$ . Para terminar o problema precisaríamos medir o comprimento de uma delas numa vista em v.g., o que deixamos a cargo de cada leitor. Se for desejada uma confirmação da equidistância é suficiente ter a paciência de determinar o comprimento das três pernas e compará-las.

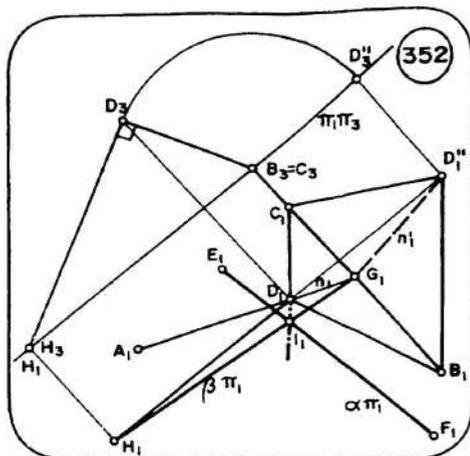
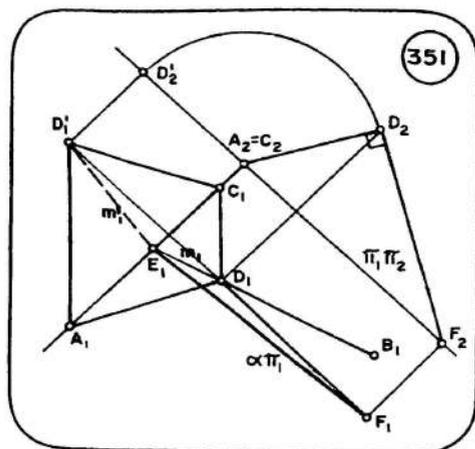


4.13.15. Uma cobertura em forma de cone de revolução está apoiada nas vigas DA, DB e DC (fig. 350). Determinar seu eixo na projeção principal (cotas em metros).

### RESOLUÇÃO

Estamos procurando uma reta cujos pontos equidistam de 3 retas dadas (no cone, DA, DB e DC são geratrizes, das quais o eixo equidista). Na figura 268, vimos que o l.g. dos pontos equidistantes de duas retas dadas é um par de planos que passam nas bissetrizes dos ângulos que elas formam, sendo perpendiculares ao seu plano.

A figura 351 mostra o rebatimento do ângulo ADC, que nos permite traçar a bissetriz rebatida  $m'_1$  e alçá-la. Pela posição dos dados, não nos interessa a outra bissetriz desse ângulo. O plano  $\alpha$  que contém  $m$  tem seu traço



passando em E (ponto de cota 0 de m). Para ser perpendicular ao plano DAC,  $\alpha$  contém a reta DF perpendicular a esse plano, cujo traço F determina com E o traço do plano ( $\alpha \pi_1$ ).

Construção semelhante pode ser feita para o ângulo BDC (fig. 352). O seu rebatimento localiza a bissetriz n, cujo traço G determina, com o ponto H (traço de DH, perpendicular ao plano BDC), o traço de  $\beta$ , um dos planos bissetores do ângulo  $B\hat{D}C$ . A interseção de  $\alpha$  com  $\beta$  passa no ponto I, comum a  $\alpha \pi_1$  e  $\beta \pi_1$ . Então DI é a reta  $\alpha \beta$ . Todos os seus pontos são equidistantes de DA, DB e DC, pois estão na interseção dos l.g. de equidistância dessas retas, tomadas duas a duas.

Naturalmente poderíamos ter trabalhado com o bissetor do ângulo  $A\hat{D}B$ , que também contém a reta DI. Recomendamos uma confirmação gráfica dessa propriedade.

O cone cuja superfície contém as arestas de um triedro é CIRCUNSCRITO a esse triedro, propriedade espacial correspondente a circunferência circunscrita a um triângulo, na geometria bidimensional.

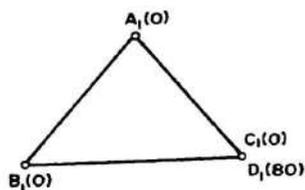
4.13.16. Determinar o eixo do cone de revolução de maior abertura que pode ser torneado de um bloco metálico em forma de pirâmide (ABCD), devendo o vértice de tal cone ser o ponto D (fig. 353 – cotas em milímetros).

### RESOLUÇÃO

Como a operação de torneamento somente CORTA material do bloco, o cone pedido deve estar inteiramente contido no interior da pirâmide. O de maior abertura possível é o que tangencia as três faces concorrentes no vértice D, ou seja, o cone INSCRITO no triedro de arestas DA, DB e DC.

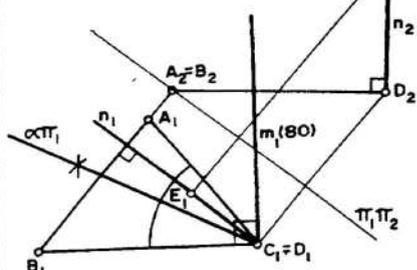
O eixo de tal cone deve ter todos os seus pontos equidistantes das faces DAB, DBC e DCA. Conforme comentamos na figura 269, os pontos equidis-

353



ESCALA 1/5

354



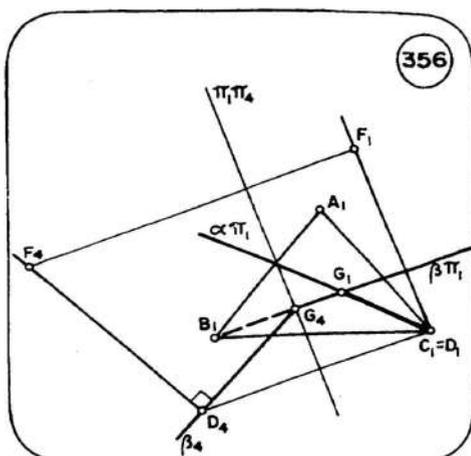
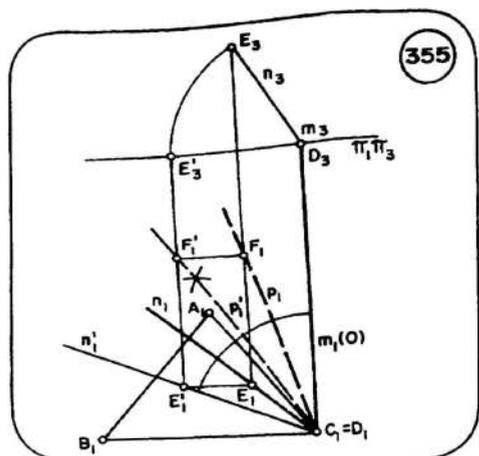
tantes das faces DAB e DBC estão em um dos planos bissetores do ângulo diédrico da aresta DB. Também os equidistantes de DBC e DCA estão em um dos bissetores do diedro de aresta DC. A interseção desses dois planos bissetores será o l.g. dos pontos procurados, isto é, o eixo do cone inscrito na pirâmide.

Vimos no ítem 4.9. que o ângulo de dois planos deve ser medido em uma seção perpendicular à sua interseção. Quando esta é uma reta em vista básica, como já acontece com CD, os planos do diedro estão também em vista básica (fig. 354), e o seu ângulo se projeta em v.g. Como o bissetor divide ao meio o ângulo diédrico, também ele está em vista básica, e assim  $\alpha$  contém a bissetriz do ângulo  $A_1C_1B_1$ , sendo ele o bissetor do diedro da pirâmide de aresta CD.

Para achar o bissetor do ângulo diédrico de aresta DB o trabalho é bem maior. Poderíamos obter uma vista básica dessa aresta, mas preferimos trabalhar com as retas perpendiculares aos planos, conforme a observação da fig. 280. Ainda na figura 354 passamos por D as retas  $m \perp DBC$  e  $n \perp DBA$ . Observemos que  $m$  tem cota constante porque BDC é plano básico. A reta  $n$  necessitou da vista básica do plano DBA para ser traçada, e sobre ela escolhemos um segundo ponto E, de cota 150mm, para trabalhar com ela em outras projeções.

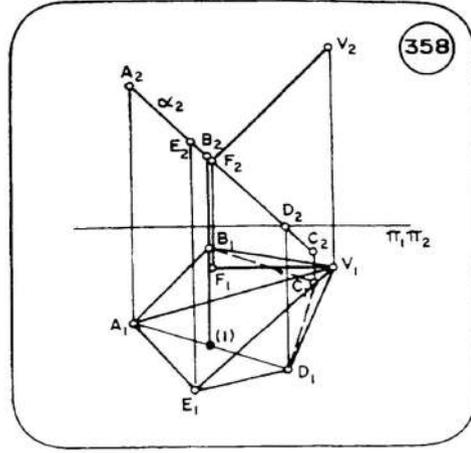
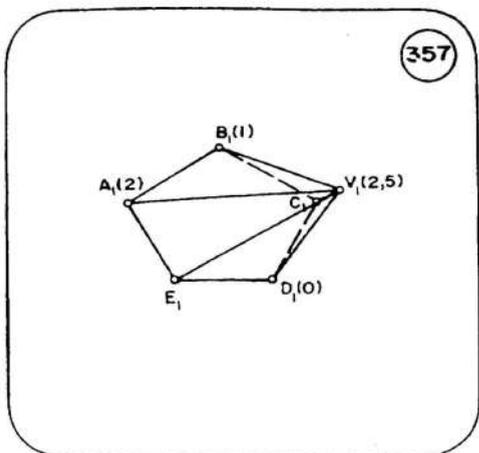
Na figura 355 rebatemos o plano mn (subtraímos a cota de  $m$ , 80mm, de todos os pontos, para que  $m$  seja a charneira) e traçamos  $p'_1$ , bissetriz do ângulo entre  $m$  e  $n$  rebatido. Alçamo-la para  $p_1$  através do seu ponto F de mesma cota de E. É fácil constatar que o plano bissetor procurado deve ser perpendicular à reta  $p$ .

Restaurando as antigas cotas para voltar a trabalhar com o mesmo  $\pi_1$  original (fig. 356), tomamos a vista em v.g. de  $p$ , onde podemos passar  $\beta_4 \perp p_4$  e conseqüentemente  $\beta \pi_1$  que é o traço do plano bissetor do ângulo das faces DBA e DBC. É interessante notar que  $\beta \pi_1$  deve passar em  $B_1$  e ser perpendicular a  $p_1$ , além de encontrar  $\beta_4$  em  $\pi_1 \pi_4$ .



A interseção dos bissetores  $\alpha$  e  $\beta$  é a reta  $DG$ , onde  $G$  é o ponto de interseção de  $\alpha \pi_1$  com  $\beta \pi_1$ . Essa reta é o eixo do cone procurado.

4.13.17. Na pirâmide  $VABCDE$  (fig. 357), determinar o ângulo que cada aresta lateral forma com o plano da base.



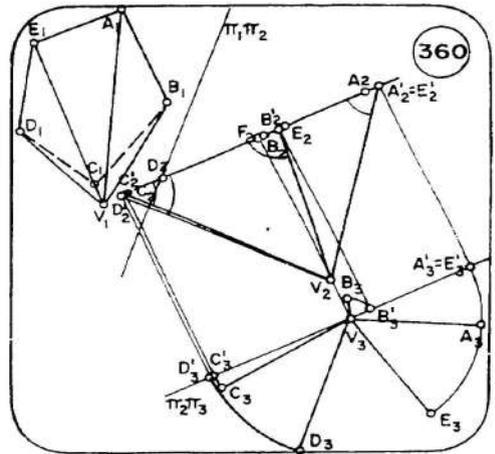
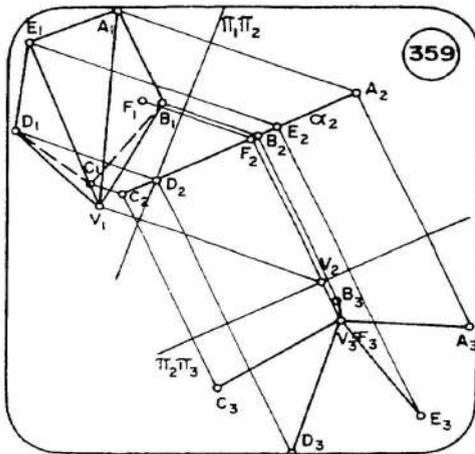
## RESOLUÇÃO

Notemos que o plano da base, que vamos denominar  $\alpha$ , foi determinado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $D$ , cujas cotas foram dadas. Queremos achar os ângulos de  $VA$ ,  $VB$ ,  $VC$ ,  $VD$  e  $VE$  com esse plano  $\alpha$ .

No ítem 4.8, estudamos ângulo de reta com plano. Para projetar as arestas em  $\alpha$ , basta baixar de  $V$  a perpendicular ao plano da base. Determinando em  $AD$  o ponto de cota 1 (fig. 358), temos a direção de  $\alpha$  e sua vista básica em  $\pi_2$ . A altura da pirâmide será então  $VF$ , perpendicular de  $V$  ao plano  $\alpha$ .

Poderíamos agora ligar F a cada vértice da base e resolver 5 problemas distintos de ângulo entre duas retas (cada aresta com a sua projeção em  $\alpha$ ). Mas a figura 359 mostra como obter com uma só charneira os 5 ângulos pedidos. De fato, como VF é uma reta comum aos planos VFA, VFB, VFC, VFD e VFE, podemos tomá-la em vista básica, passando  $\pi_2 \pi_3 \perp V_2 F_2$ , e em  $\pi_3$  todos aqueles planos estão igualmente em vista básica.

Subindo  $\pi_2 \pi_3$  para passar em  $V_3 = F_3$ , essa reta fica com cota nula (fig. 360), e pode ser usada como charneira. Lembramos que o plano principal passou a ser  $\pi_2$ , do qual  $\pi_3$  é projeção secundária. É sobre  $\pi_2$  que rebatemos as arestas VA, VB, VC, VD e VE, e seus ângulos com a base aparecem em v.g. no rebatimento (ângulos  $V_2 \hat{A}'_2 F_2$ ,  $V_2 \hat{B}'_2 F_2$ ,  $V_2 \hat{C}'_2 F_2$ ,  $V_2 \hat{D}'_2 F_2$  e  $V_2 \hat{E}'_2 F_2$ ).

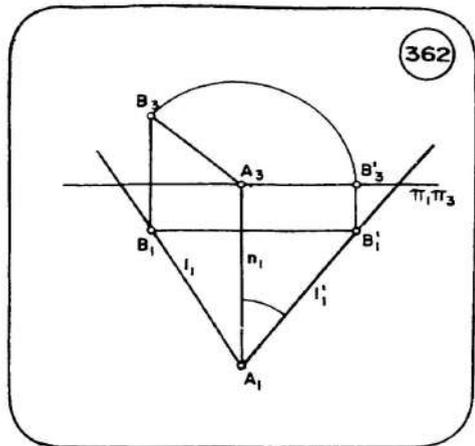
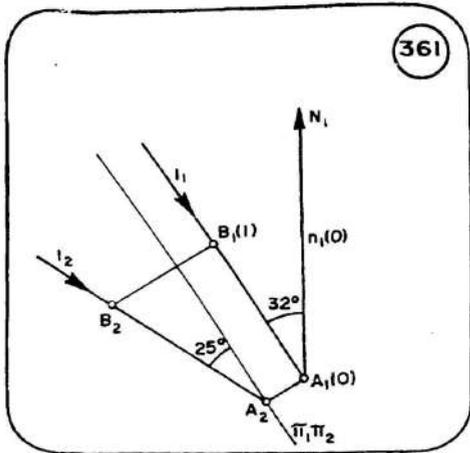


4.13.18. Em um determinado momento, um navegador observa o sol sob inclinação de  $25^\circ$  com o horizonte, enquanto sua bússola acusa  $32^\circ$  NO para a direção de visada. Qual o ângulo real dos raios solares com o norte, naquele exato momento?

### RESOLUÇÃO

É um problema de ângulo entre duas retas: uma horizontal que aponta para o norte e a outra um raio solar.

Podemos tomar um ponto qualquer A de cota 0 (já que o ângulo não depende de cotas nem de escala) como posição do navegador (fig. 361). Passando uma reta em A para ser a direção norte, partimos da primeira reta n com cota constante. A segunda reta do ângulo procurado é  $\ell$ , cuja projeção  $\ell_1$  forma  $32^\circ$  com  $n_1$  (a bússola mede ângulos no plano horizontal). Para determinar um outro ponto de  $\ell$ , passamos  $\pi_1 \pi_2$  para ter sua vista em v.g., fazendo ângulo de  $25^\circ$  com  $\pi_1 \pi_2$ . Em  $\ell_2$  localizamos o ponto  $B_2$  de cota 1 cm, que levou a  $B_1$  na projeção principal.



O plano  $\hat{A}n$  pode ser rebatido em  $\pi_1$  (fig. 362) usando  $n$  como charneira. O ângulo rebatido pode ser medido a transferidor, fornecendo assim a solução do problema, pois é a v.g. do ângulo do raio solar com a direção norte.

4.13.19. Em que direção deve ser disparado um foguete de Paris para atingir Moscou, com um erro menor que 100km?

### RESOLUÇÃO

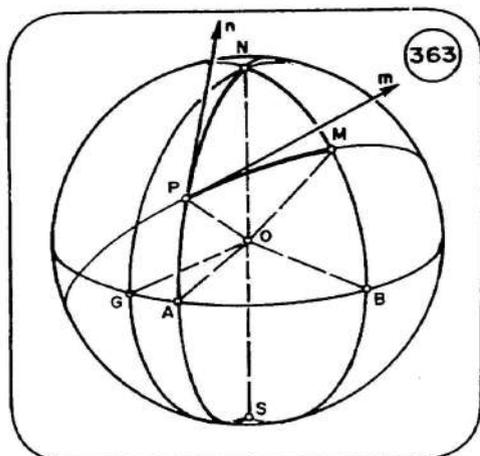
Imaginemos os pontos P e M (fig. 363) como posições de Paris e Moscou respectivamente, na superfície da Terra. O é o centro do planeta, N e S os polos. GAB é a linha do equador, situada em um plano que contém O e é perpendicular ao eixo terrestre NS.

Para localizar um ponto na superfície terrestre são usadas duas coordenadas geográficas: latitude e longitude.

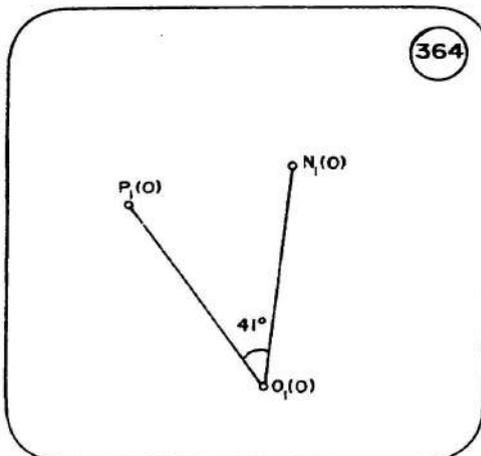
As longitudes permitem situar os meridianos, planos que contêm o eixo NS e demarcam na superfície esférica circunferências de mesmo raio da Terra. O meridiano de referência para as longitudes é o que passa em Londres, no observatório de Greenwich. Na figura, ele está representado pela curva que passa em G, N e S. OG é o raio da Terra segundo o qual se interceptam o plano do equador e o do meridiano de longitude  $0^\circ$ .

Procurando em um atlas, encontramos a longitude de Paris de  $2^\circ$  e um quebrado, no sentido leste. Isso significa que o plano meridiano que passa em P forma ângulo diédrico dessa medida com o meridiano de G. Tal ângulo pode ser medido entre OG e OA, no plano do equador. A longitude de Moscou é quase  $38^\circ$  E, o que significa que o ângulo BOG tem esse valor.

A latitude de P define o ângulo que OP forma com o plano do equador, ou seja, a medida de  $P\hat{O}A$ . Como o atlas fornece para Paris a latitude aproximada de  $49^\circ$  N, devemos ter o raio OP acima de OA. Se a latitude fosse sul,



363



364

OP estaria abaixo de OA. A latitude de Moscou é também norte, em torno de  $56^\circ$ , que será a medida do ângulo  $M\hat{O}B$ .

A menor distância de P a M será obtida pelo arco de circunferência de centro O que passa nesses dois pontos. A sua direção é medida pelo ângulo que a direção norte (reta n tangente ao meridiano) forma com a direção m (tangente ao arco PM). Como as tangentes são perpendiculares ao raio, tal ângulo é a medida do ângulo diédrico entre as faces OPN e OPM do triedro OPNM.

Podemos agora resolver o problema em épura.

Vamos tomar no plano  $\pi_1$  os raios ON e OP (fig. 364). Pouco importa o tamanho que tomamos para o raio da Terra, uma vez que o problema envolve medidas angulares. Apenas devemos ter o cuidado de observar a relação  $\overline{O_1N_1} = \overline{O_1P_1}$ . O ângulo que eles formam é o complemento da latitude de Paris (voltar à figura 363).

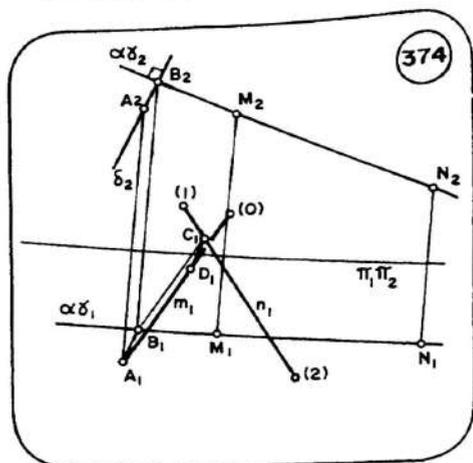
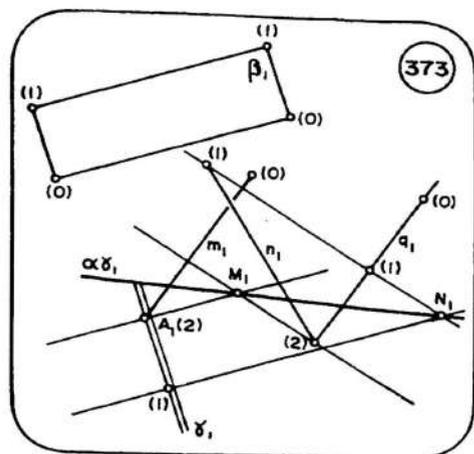
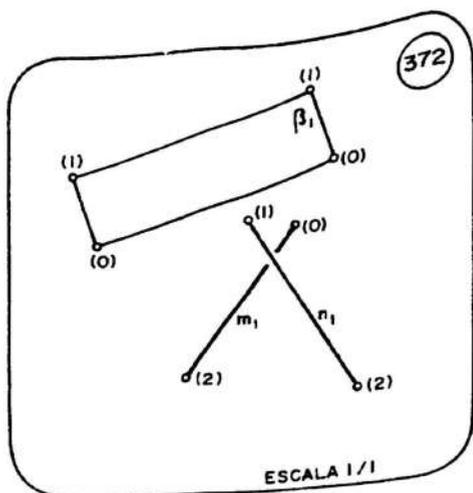
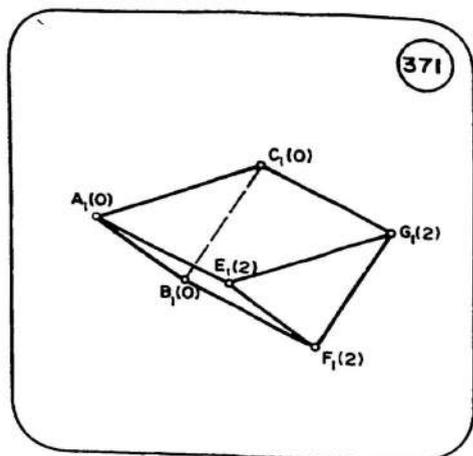
Em seguida, podemos desenhar o raio  $O_1M'_1$ , rebatimento do ângulo  $O\hat{N}M$ , complemento da latitude de Moscou. A charneira é  $O_1N_1$  (fig. 365). Lembrar que  $\overline{O_1M'_1}$  deve ser do mesmo comprimento de  $\overline{O_1N_1}$ . Uma vista básica permite alçar M, que deverá ficar projetado, em  $\pi_2$ , na vista básica do plano ONM (que forma com a face ONP o ângulo diédrico medido pelo ângulo  $A\hat{O}B$  do equador, diferença das longitudes de Moscou e Paris, ou seja,  $38^\circ - 2^\circ = 36^\circ$ ). De  $M_2$  temos  $M_1$  e a projeção em  $\pi_1$  do raio OM.

A vista básica do plano MOP (fig. 366) fornece em  $\pi_3$  o ângulo diédrico de aresta OP no triedro OPNM. Sua medida pode ser obtida com o transferidor entre  $P_3M_3$  e  $\pi_1\pi_3$ . Então o foguete deve ser disparado na direção m, que forma com o norte esse ângulo obtido, para nordeste.

Como observação final, podemos ver, na figura 366, que, se fizéssemos o rebatimento do ângulo  $P\hat{O}M$ , teríamos o comprimento do arco de circunferência PM, que traduz a distância de Paris a Moscou. É fácil medi-la em quilômetros, sabendo que cada grau no ângulo central determina na superfície terrestre um arco de 111km.



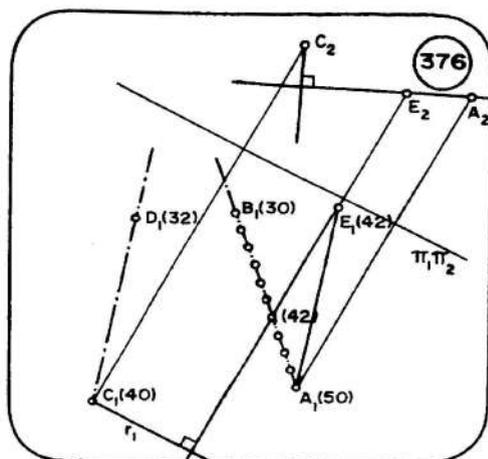
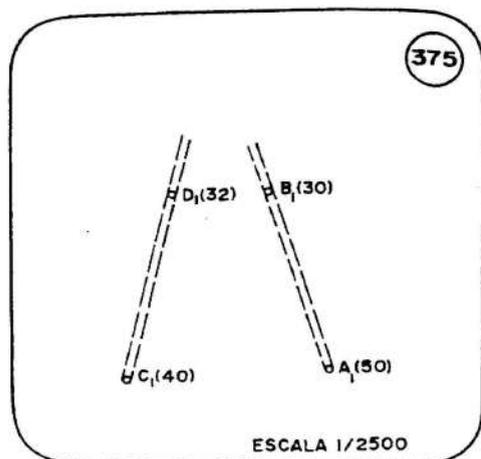




Tomamos o ponto A de cota 2 da reta  $m$  e passamos por ele o plano  $\gamma \parallel \beta$ . A interseção  $\alpha\gamma$  foi determinada pela interseção das retas de cota 2 (ponto M) e das retas de cota 1 (ponto N) de  $\alpha$  e de  $\gamma$ .

Temos agora que passar por A a perpendicular  $AB$  à reta  $\alpha\gamma$ , o que fizemos na figura 374. Como não precisamos de sua verdadeira grandeza, é mais rápido achar  $AB$  através do plano  $\delta$ , perpendicular a  $MN$  passando em A. Uma vista em v.g. de  $MN$  é vista básica de  $\delta$ , e  $\delta_2$  determina  $B_2$  em  $M_2N_2$ . A linha de chamada localiza  $B_1$  em  $M_1N_1$ . Deslizando tal segmento paralelamente a  $m_1$ , encaixamos  $C_1D_1$  entre  $m_1$  e  $n_1$ , segmento que resolve o problema.

4.13.22. Duas galerias de mina são abertas em A e C, na direção de B e D, respectivamente (fig. 375). Sendo de 40% a declividade máxima de uma conexão entre essas galerias, determinar a de menor comprimento possível.



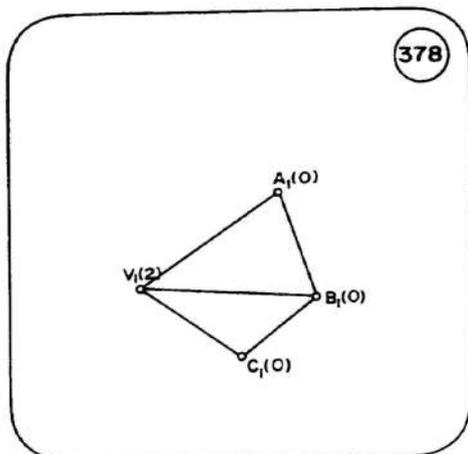
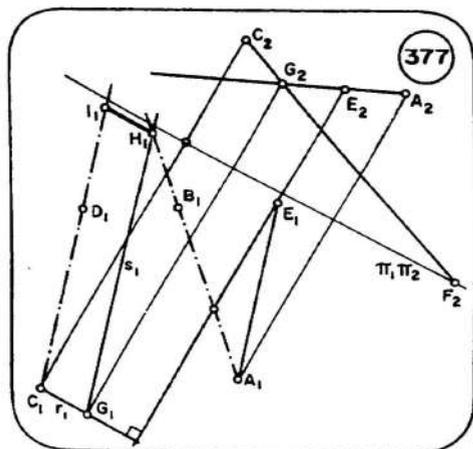
## RESOLUÇÃO

Pode acontecer que a perpendicular comum, que é o mais curto segmento que une as retas AB e CD, tenha declividade menor que 40%, e assim resolveria o problema. Mas se ela ultrapassar tal limite, deveremos procurar o mais curto segmento entre as duas retas com a declividade máxima permitida.

Vamos aplicar a construção da perpendicular (f. 376).

Passando por A a reta  $AE \parallel CD$ , definimos um plano  $\alpha$  que contém AB e é paralelo a CD. Determinamos em AB o ponto de mesma cota de E e temos a direção de  $\alpha$ . A vista básica de  $\alpha$ , em  $\pi_2$ , permite baixar de C a perpendicular ao plano  $\alpha$ , a qual é paralela à perpendicular comum às retas AB e CD (como já sabemos do ítem 4.5). Indiscutivelmente tal perpendicular ultrapassa os 40% de declividade.

Nas figuras de 293 a 295 discutimos como obter a menor distância de um ponto a um plano com inclinação ou declividade dada. Constatamos que sua projeção principal é ortogonal à direção do plano. Então podemos procurar o menor segmento de C a  $\alpha$ , com declividade de 40% (fig. 377), cuja projeção em  $\pi_1$  está em  $r_1$ . Para obter sua projeção em  $\pi_2$ , que está em v.g., sabemos que forma com  $\pi_1\pi_2$  o ângulo de inclinação correspondente à declividade dada. A cota de C, por coincidência, é 40m. Quando se desce 40m, a projeção em  $\pi_1$  corre 100m (na declividade de 40%). Marcando então 100m (4 cm do desenho) em  $\pi_1\pi_2$  a partir da linha de chamada  $C_1C_2$ , determinamos  $F_2$ , contorno daquele cone considerado na fig. 295, l.g. das retas que partem de C com declividade de 40%. Como  $\alpha_2$  corta  $C_2F_2$  em  $G_2$ , que leva a  $G_1$  na projeção  $r_1$ , este segmento CG é o mais curto que une o ponto C ao plano  $\alpha$ , com aquela declividade. Passando por G a reta  $s \parallel CD$ , localizamos H na interseção de  $s$  com AB. O segmento HI  $\parallel$  CG é o eixo da galeria que conecta AB a CD, de comprimento mais curto possível, sem ultrapassar a declividade máxima estabelecida.



4.13.23. Uma pirâmide VABCD tem sua base no plano  $\pi_1$  (figura 378). Determinar o ponto D, sabendo-se que VD faz ângulo de  $30^\circ$  com a face VAB e de  $45^\circ$  com a face VBC.

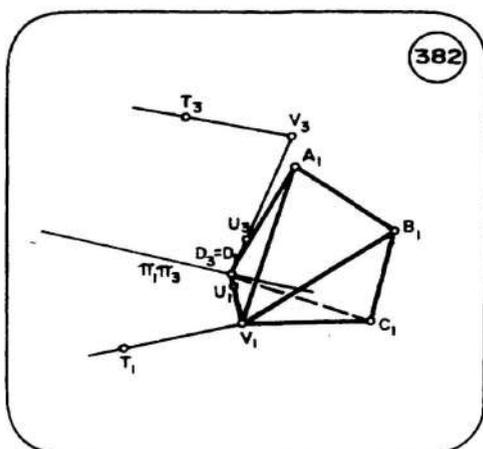
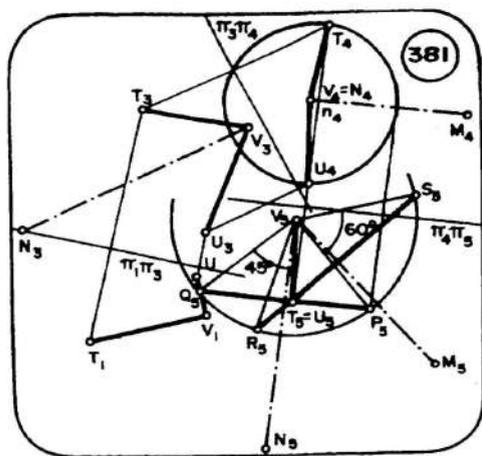
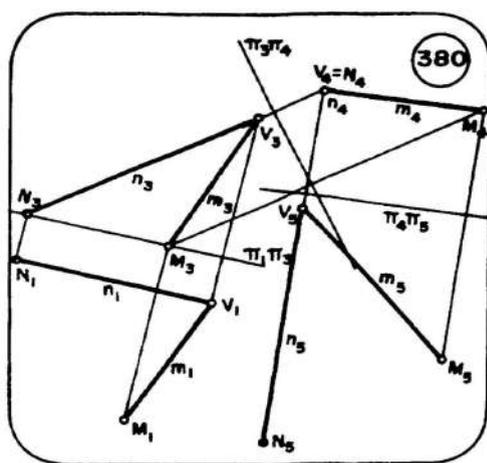
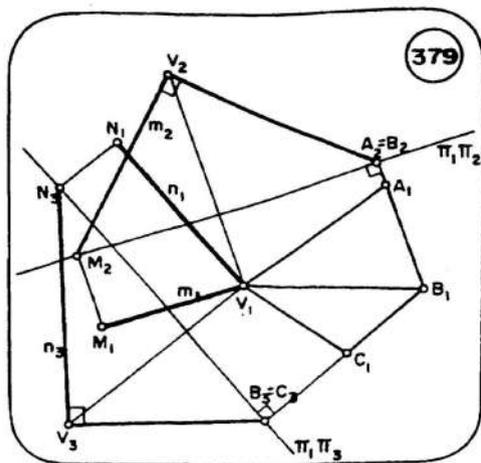
### RESOLUÇÃO

A aresta pedida está na interseção dos  $\ell.g.$  que vimos na figura 304. Passando por V as retas  $m \perp VAB$  e  $n \perp VBC$ , através das vistas básicas das faces, em  $\pi_2$  e  $\pi_3$  (fig. 379), os cones que devem determinar a aresta VD têm tais retas como eixo e suas geratrizes devem formar ângulos de  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$  e  $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$  com m e n, respectivamente. Ainda na mesma figura localizamos os pontos M e N de cota 0 nas duas retas.

Para termos a situação da figura 300, precisamos obter novas projeções, onde uma das retas esteja em vista básica e a outra em v.g. Na figura 380, isolamos apenas as retas m e n, projetamo-las em  $\pi_3$  (onde n está em v.g.), e desta vista em  $\pi_4$  (vista básica de n). Mas em  $\pi_4$  a reta m ainda não está em v.g., e precisamos de  $\pi_5$ , onde finalmente as retas estão na posição analisada na figura 300.

A figura 381 mostra a esfera de raio qualquer centrada em V e interceptando os cones de eixos m e n segundo as circunferências projetadas em  $R_5S_5$  e  $P_5Q_5$ , respectivamente. Esta última está em v.g. no plano  $\pi_4$  e permite localizar os pontos T e U, interseções de RS com PQ. De  $T_4$  e  $U_4$  voltamos esses pontos às projeções em  $\pi_1$ , passando por  $\pi_3$ .

As retas VT e VU são duas soluções para a reta suporte da aresta pedida VD. Como a base da pirâmide está em  $\pi_1$ , D deverá ser o ponto de cota 0 de uma dessas retas. A figura 382 mostra esse ponto na reta VU, uma vez que o traço de VT está muito afastado. Definido D, a projeção principal da pirâmide foi completada.

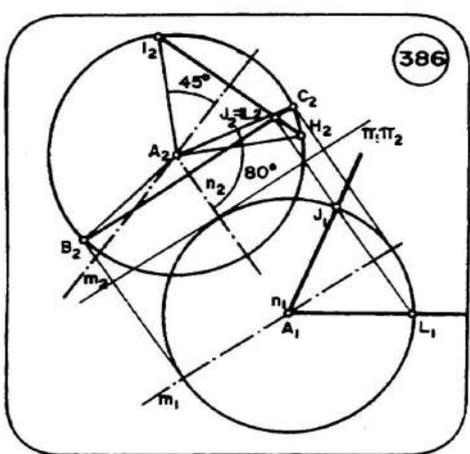
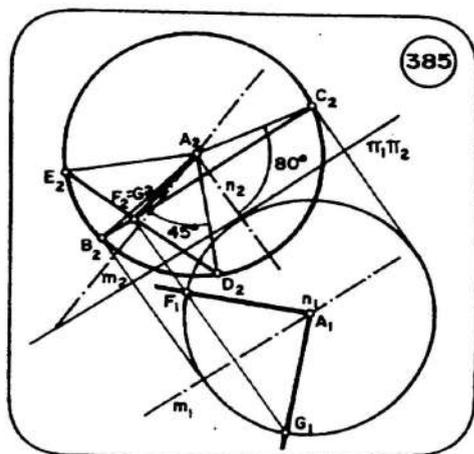
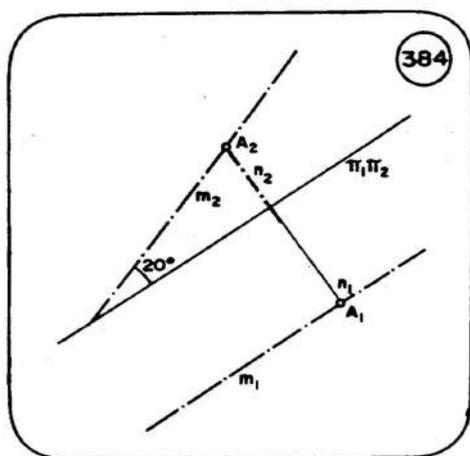
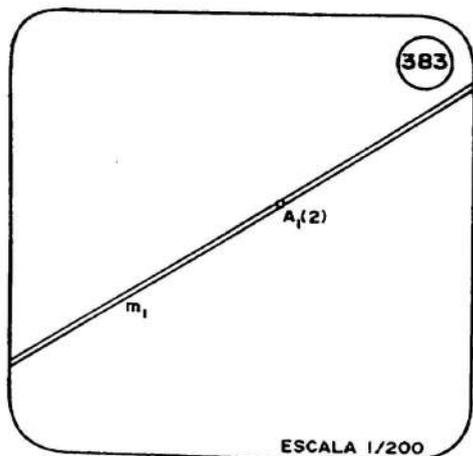


4.13.24. Em um projeto de irrigação, deve ser tirada do cano distribuidor  $m$  (fig. 383) que tem inclinação de  $20^\circ$ , uma tubulação que seja conectada por um "y" de  $45^\circ$  na válvula  $A$  e tenha inclinação de  $10^\circ$ . Determinar sua projeção (cotas em metros).

### RESOLUÇÃO

A conexão dos dois canos exige que formem um ângulo de  $45^\circ$  entre seus eixos. Estamos diante do problema discutido na figura 303, pois procuramos uma reta que passe em  $A$  e faça ângulo de  $45^\circ$  com  $m$  e ângulo de  $10^\circ$  com  $\pi_1$ .

Baixando de  $A$  a reta  $n \perp \pi_1$  (fig. 384), devemos definir a interseção dos cones de eixos em  $m$  e  $n$ , cujas geratrizes têm ângulos respectivos de  $45^\circ$  e  $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$  com os eixos. Na projeção em  $\pi_2$ ,  $m$  mostra a v.g. da sua inclinação, e as duas retas já permitem o procedimento da figura 300.



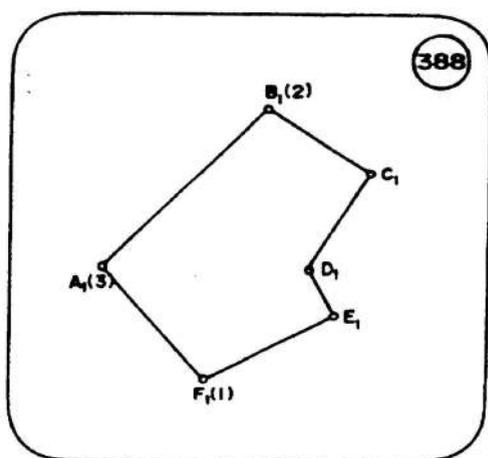
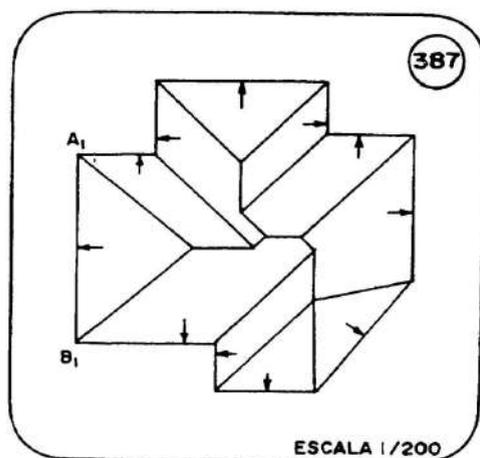
A figura 385 traz a interseção da esfera de centro em A e raio qualquer com os dois l.g. dos ângulos pedidos (projetadas em  $B_2 C_2$  e  $D_2 E_2$ ). Essas circunferências se interceptam em F e G, sendo AF e AG os eixos das tubulações que atendem às condições exigidas.

É preciso lembrar que tais retas não são as únicas que resolvem o problema. Na discussão teórica deixamos de observar que cada cone, como l.g., tem uma segunda folha, obtida quando as geratrizes se prolongam além do vértice. No nosso problema, não interessaria a segunda folha do cone de eixo n, pois a canalização que procuramos tem que DESCER a partir de A. Mas o cone de eixo m pode ser tomado para cima (fig. 386), determinando a circunferência HI na superfície da esfera e as interseções AJ e AL com o cone de eixo n. Essas retas também servem para eixo da canalização pedida.

#### 4.14. Problemas Propostos

4.14.1. No telhado da figura 387, onde a água do bordo AB tem declividade 20%, determinar o número total de telhas necessárias, sabendo-se que cada metro quadrado, em verdadeira grandeza, precisa de 36 telhas. Todo o perímetro do telhado tem a mesma cota.

4.14.2. Aplicando rebatimento e alçamento de plano, determinar a projeção do círculo de maior raio que pode ser recortado da chapa plana ABCDEF (fig. 388).



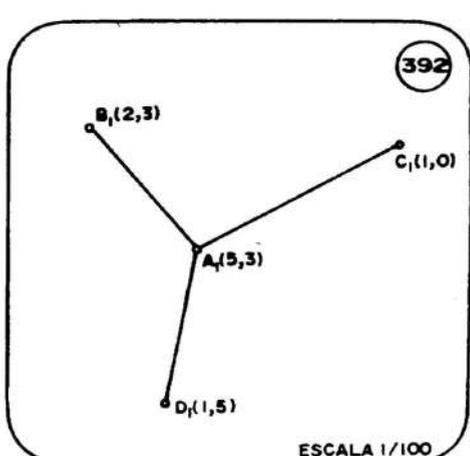
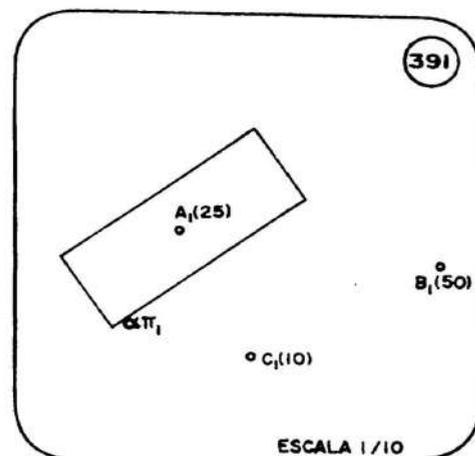
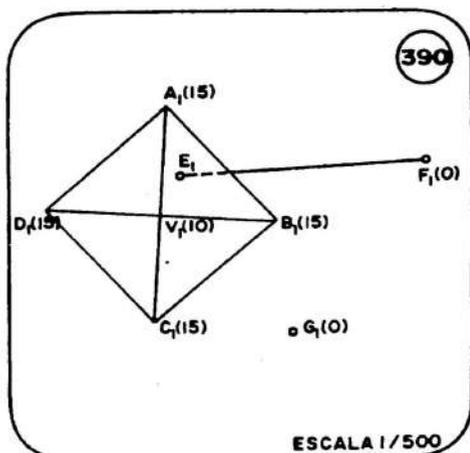
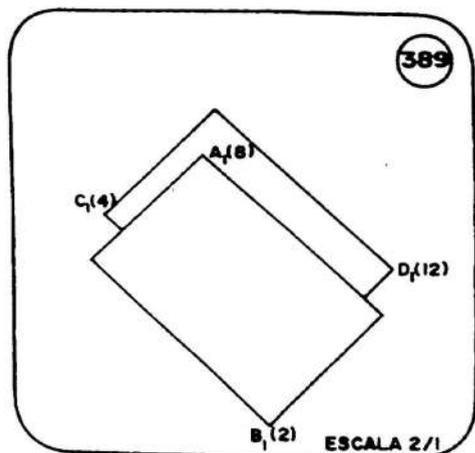
4.14.3. Determinar a menor distância entre as duas placas de um condensador, das quais são conhecidos os pontos A e B na superior e C e D na inferior (fig. 389 – cotas em milímetros).

4.14.4. Um reservatório tem a forma de uma pirâmide invertida VABCD (fig. 390). Precisamos tirar um cano para alimentar o ponto G. Verificar se a mais curta solução é sair com tal cano de uma das faces do reservatório ou ligá-lo, com um "T", ao cano EF, que sai da face VAB no ponto E. (cotas em metros)

4.14.5. Na figura 391, determinar o menor raio de um espelho circular de centro A, no plano  $\alpha$ , para que um observador no ponto C veja a imagem de uma lâmpada no ponto B (cotas em centímetros).

4.14.6. O tripé ABCD sustenta um peso de 250Kg pendurado do seu vértice (fig. 392), sendo  $\pi_1$  horizontal. Determinar as componentes desse peso segundo as 3 pernas do tripé (cotas em metros).

4.14.7. Um ponto material A dá voltas em torno da reta m, ao mesmo

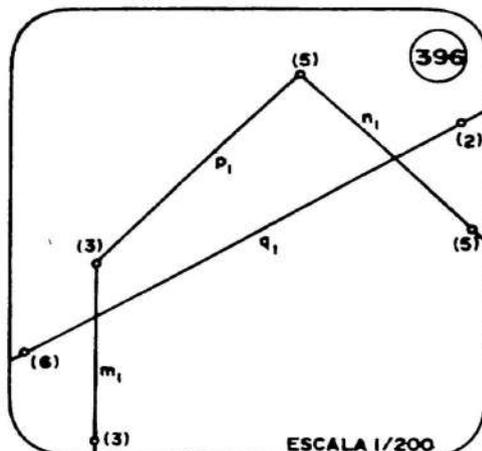
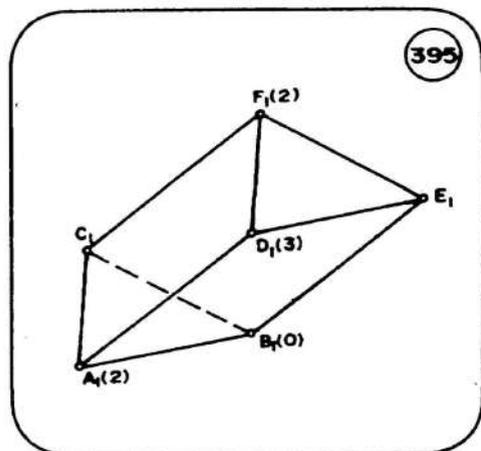
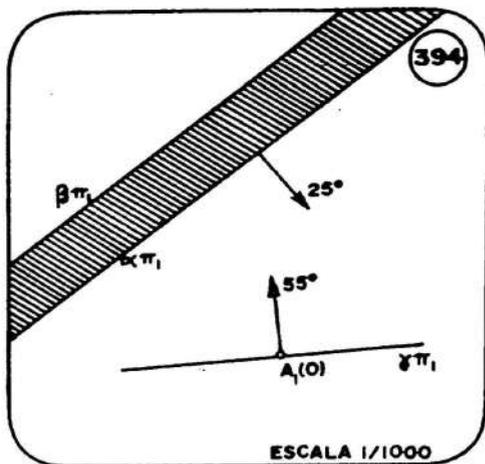
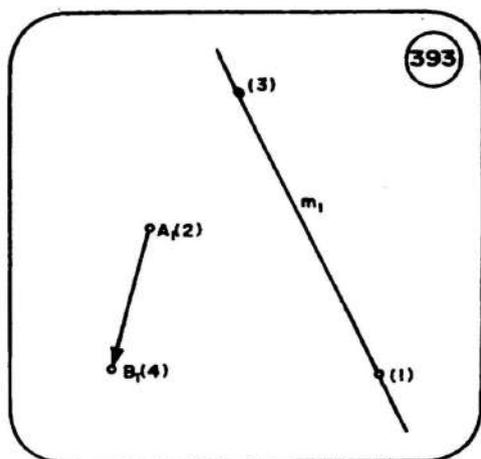


tempo que desliza na direção dessa reta e perpendicularmente à mesma. Se sua velocidade resultante é de 2cm/s na direção  $\overrightarrow{AB}$ , determinar as componentes dessa velocidade na direção de  $m$ , na direção perpendicular a  $m$ , e na direção perpendicular ao plano  $Am$  (fig. 393).

4.14.8. Em uma mineração, determinar a direção em que deve ser aberta a menor galeria do ponto  $A$ , com seu eixo contido no plano da falha  $\gamma$ , para atingir o plano médio do veio de minério de teto  $\alpha$  e base  $\beta$  (fig. 394 – cotas em metros).

4.14.9. No prisma da figura 395, determinar a menor distância entre cada um de seus pares de arestas reversas.

4.14.10. A instalação elétrica constituída pelos fios  $m$   $n$  e  $p$  (fig. 396)

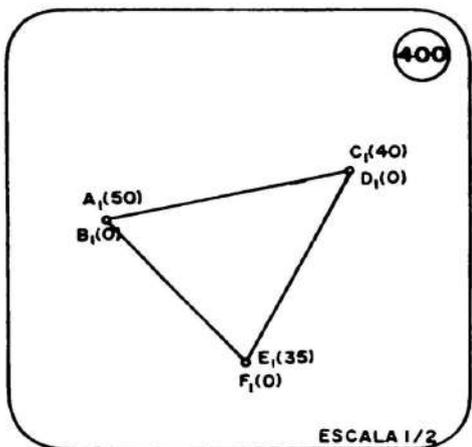
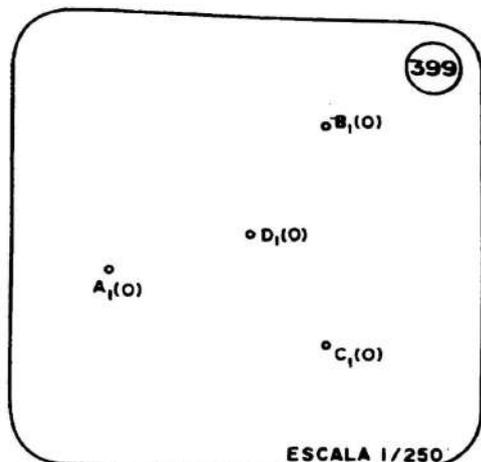
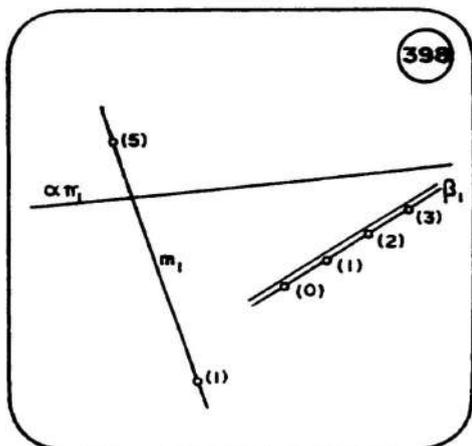
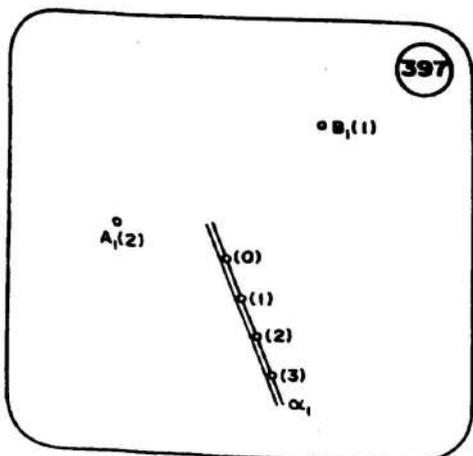


precisa ser ligada ao fio q. Onde deve ser feita tal ligação para ser usado o menor fio possível? (cotas em metros).

4.14.11. Determinar os pontos que estão a 2 cm de distância do plano  $\alpha$ , a 3 cm do ponto A e a 2,5 cm do ponto B (fig. 397).

4.14.12. Localizar os pontos do plano básico  $\alpha$  que estão a 2 cm da reta m e a 3 cm do plano  $\beta$  (fig. 398).

4.14.13. Em uma destilaria, um depósito esférico de 6m de raio deve ser apoiado em 3 colunas verticais, nos pontos A, B e C (fig. 399), com alturas respectivas de 3m, 2m e 1,5m. Determinar a projeção do seu centro. Achar também outra posição para o seu centro, se o depósito estiver apoiado em 3 vigas partindo do ponto D para o topo das colunas em A, B e C.



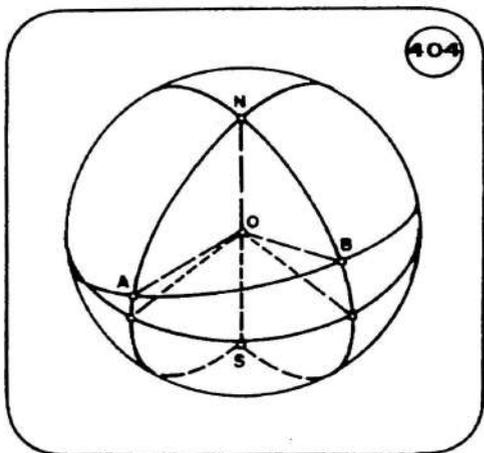
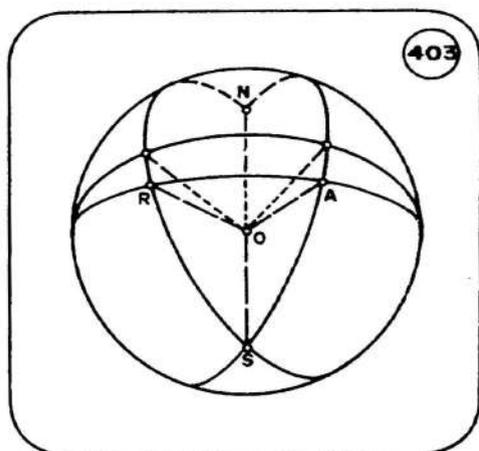
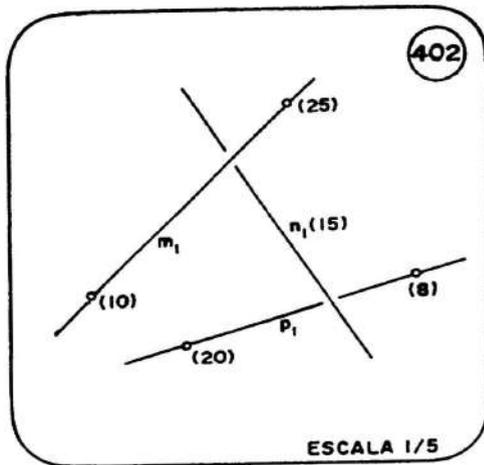
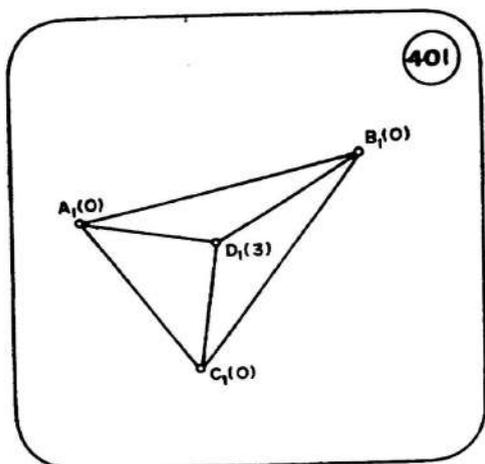
4.14.14. Determinar o raio da maior esfera que podemos tornar de um bloco metálico prismático ABCDEF (fig. 400 – cotas em milímetros).

4.14.15. Na pirâmide ABCD (fig. 401), determinar um ponto que esteja equidistante das faces DAB e ABC, equidistante das arestas CD e BC e equidistante dos vértices A e C.

4.14.16. As retas  $m$ ,  $n$  e  $p$  são eixos de uma máquina (figura 402). Para projetar as engrenagens de transmissão, determinar em v.g. os ângulos que os eixos  $m$  e  $p$  formam com o eixo  $n$  (cotas em milímetros).

4.14.17. As coordenadas de Recife são: latitude  $8^{\circ}S$  e longitude  $35^{\circ}O$ . Determinar:

- A distância de Recife (ponto R na fig. 403) ao ponto A de mesma latitude no meridiano de Greenwich;

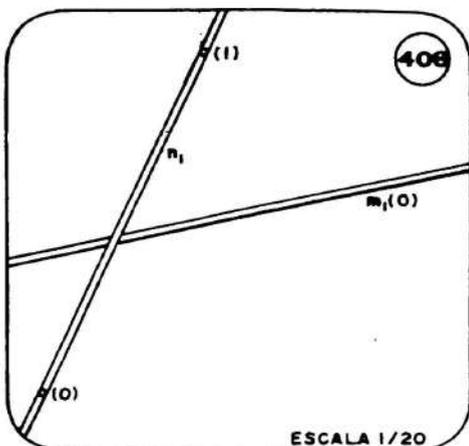
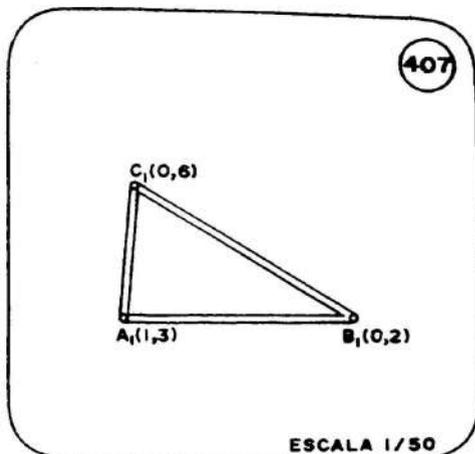
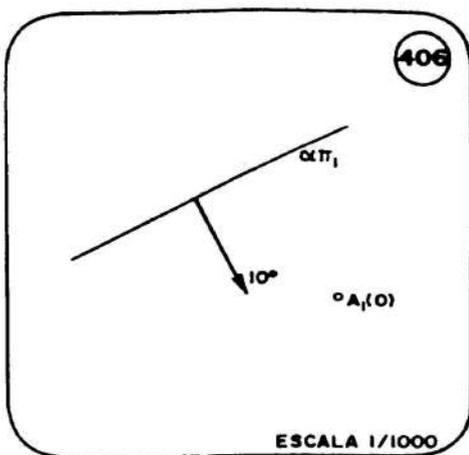
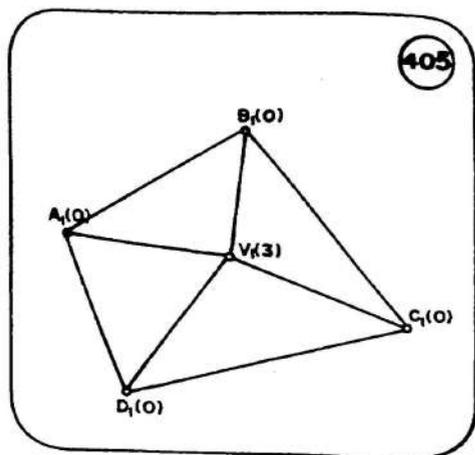


b) O ponto do arco  $RA$  que tem maior latitude (complemento do ângulo que a reta  $OS$  faz com o plano  $ORA$ )

4.14.18. Dois pontos  $A$  e  $B$  na superfície da Terra distam entre si de 5.200km (fig. 404). O ponto  $A$  está a 7.000km do polo norte e  $B$  a 4.500km desse mesmo polo. Determinar as latitudes desses pontos e sua diferença de longitude, além da direção que o arco  $AB$  forma com o norte.

4.14.19. Medir todos os ângulos diédricos que as faces da pirâmide  $VABCD$  formam entre si, nas arestas laterais e nas arestas da base (fig. 405).

4.14.20. Determinar o eixo e o comprimento da menor galeria de mina que pode ser aberta em  $A$ , com declividade de 20%, para atingir o veio de minério  $\alpha$  (fig. 406). Determinar também, com a mesma declividade, a galeria que sai de  $A$  fazendo com  $\alpha$  o menor ângulo possível (cotas em metros).



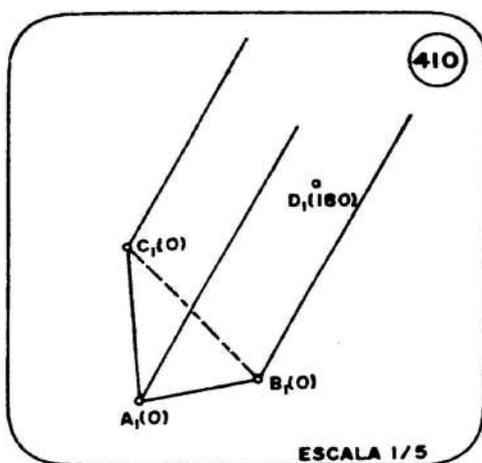
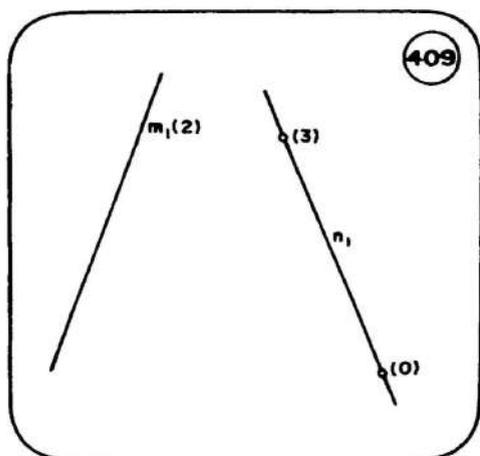
4.14.21. Uma treliça metálica tem ABC como uma das seções (fig. 407). Suas vigas paralelas formam ângulos de  $80^\circ$  com AB e de  $65^\circ$  com AC. Determinar a projeção de um segmento dessa treliça, sendo 1m o comprimento das vigas paralelas entre duas seções (cotas em metros).

4.14.22. Projetar ligações entre os canos m e n (figura 408) nas seguintes condições:

- Usando conexões em "T" com m e n;
- Usando conexão em "T" com m e em "Y" de  $45^\circ$  com n;
- Usando conexões em "Y" de  $45^\circ$  com m e n.  
(cotas em metros)

4.14.23. Determinar a projeção de um segmento com seus extremos em m e n (fig. 409), formando ângulos de  $60^\circ$  com m e tendo declividade 100%.

4.14.24. Uma viga prismática tem seção ABC, e D é um ponto da face que contém AB (fig. 410). Abrir em D um furo que atravesse a viga com seu eixo formando ângulos iguais de  $45^\circ$  com as faces de AB e de AC (cotas em milímetros).



**Editora**  
**Universitária**  **UFPE**

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 • Várzea  
Fone: (081) 271.8397 • Fax: (081) 271.8395  
CEP 50740-530 • Recife • PE



## OS AUTORES

**ALCY PAES DE ANDRADE VIEIRA COSTA**, nascida em Recife, é graduada no curso de Licenciatura em Desenho e Plástica, pela Universidade Federal de Pernambuco, de cujo Departamento de Desenho era professora, estando atualmente aposentada no nível 4 de adjunto.

Durante muitos anos lecionou em cursos de 2º grau em várias escolas oficiais do Estado. É também professora Adjunta atividade no Departamento de Engenharia da Universidade Católica de Pernambuco, onde leciona disciplinas da área de Geometrotecnia para cursos de Engenharia Química e Matemática.

Exerceu durante anos a coordenação do curso de licenciatura em Desenho e Plástica da UFPE, colaborando com o Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Centro de Educação, como professora responsável pela disciplina de Prática de Ensino do Desenho.

Participou, como co-autora, da maioria dos trabalhos do Prof. Mário Duarte Costa.

**MÁRIO DUARTE COSTA**, nascido em Recife, é Professor Titular, por concurso do Departamento de Desenho da Universidade Federal de Pernambuco, onde se graduou em Engenharia Civil e obteve o título de Doutor em Arquitetura.

Leciona todas as disciplinas da área de Geometrotecnia, na graduação da área de ciência e tecnologia - cursos de Engenharia, Matemática e Geologia - e da área de artes - cursos de Arquitetura, Desenho Industrial e Licenciatura em Desenho.

Participa de cursos de especialização locais e de outras regiões do país, onde desenvolve o ensino da Geometria Projetiva. É também Professor Titular - licenciado - do Departamento de Engenharia da Universidade Católica de Pernambuco.

Tem larga experiência administrativa na UFPE como Chefe do Departamento de Desenho e em Direções no Departamento de Controle Acadêmico.

Publicou três teses e artigos científicos em Simpósios Nacionais, bem como livros didáticos sobre vários assuntos, incluindo três edições do volume 1, e duas edições do volume 2 da Geometria Gráfica Tridimensional.