SE 18 > 2, ENTÃO 48,18 > 48,2?

Pesquisas e reflexões sobre o ensino de números

Rosinalda Aurora de Melo Teles
Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa
André Pereira da Costa
Luciana Ferreira dos Santos

ORGANIZADORES

Editora UFPE

SE 18 > 2, ENTÃO 48,18 > 48,2?

Pesquisas e reflexões sobre o ensino de números

Rosinalda Aurora de Melo Teles
Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa
André Pereira da Costa
Luciana Ferreira dos Santos

ORGANIZADORES

Editora UFPE

RECIFE
2020

Catalogação na fonte:
Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

S437 Se 18 > 2, então 48,18 > 48,2? [recurso eletrônico] : pesquisas e reflexões sobre ensino de números / organizadores : Rosinalda Aurora de Melo Teles… [et al.]. – Recife : Ed. UFPE, 2020.

Vários autores.
Inclui referências.
ISBN 978-65-86732-72-6 (online)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Professores de matemática – Formação. 4. Prática de ensino. 5. Alfabetização matemática. 6. Jogos no ensino de matemática. 7. Livros didáticos – Avaliação. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Org.).

372.7 CDD (23.ed.) UFPE (BC2020-102)

Editora UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20, Várzea
Recife, PE | CEP: 50740-530
Fone: (81) 2126.8397
publicacoes.editora@ufpe.br
www.ufpe.br/edufpe

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dúvidas e reflexões em torno de questões como a proposta no título desse e-book: *Se 18 é maior que 2, então 48,18 é maior que 48,2?* têm inquietado muitos estudantes e também alguns professores da Educação Básica. Os estudantes pela dificuldade em compreenderem o sentido da comparação de números racionais ou até mesmo o significado da escrita dos números racionais na forma decimal. Os professores, embora compreendam as representações e o significado dos racionais, enfrentam um duplo desafio: como identificar as dificuldades dos seus estudantes e como intervir para que sejam superadas?

Foi pensando no cenário que envolve os números e as diversas operações em diferentes domínios numéricos, especialmente dos naturais e dos racionais positivos, que surgiram as reflexões que compõem os textos deste livro. Buscamos apresentar experiências e olhares diversos sobre o tema e os textos são de autoria de estudantes de pós-graduação em parceria com as docentes da disciplina ou suas orientadoras, estudantes de graduação participantes do PIBID e concluinte de Curso em Pedagogia. A maioria deles é fruto de trabalhos de conclusão da disciplina *Números e Operações*, ministrada pelas professoras Cristiane Pessoa e Rosinalda Teles em 2015.1 e em 2016.2 no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (EDUMATEC).

Portanto, um dos aspectos positivos dessa obra é congregar em torno de um mesmo tema, estudos de graduandos, pós-graduandos e também de professores que atuam na Educação Básica, caracterizando a articulação entre os saberes acadêmicos e a prática desenvolvida na escola básica, resultando em um movimento no qual a universidade contribui com a escola básica e a escola básica nutre a universidade. As pesquisas desenvolvidas ajudam a estabelecer relações entre teoria e prática, consolidando a atuação desejada dos programas de pós-graduação na área de Ensino. A universidade promove reflexões teóricas sobre recursos didáticos utilizados na escola, sobre o que se ensina e como se ensina e como os professores atuam em suas aulas. As reflexões produzidas na universidade ajudam a escola e os seus agentes a promover reflexões e por vezes ressignificar suas práticas. Assim, tem-se reflexão sobre a prática e reflexão na prática.

Os textos incluem, além de outros temas, análise de erros, análise de livros didáticos, relato de experiências de ensino, análise de conhecimentos de professores sobre números, análise de conhecimentos de estudantes, análise de documentos curriculares. Os campos de pesquisa são diversos, em diferentes etapas da escolarização, e os participantes são desde crianças pequenas até adultos. Além disso, destacam-se pelo rigor na realização de uma pesquisa acadêmica e a utilização de diferentes teorias para dar suporte às análises.

Essa obra é composta por 16 capítulos, organizados em 4 partes. Cada uma delas pensada em torno de uma temática relacionada ao campo dos números: construção da escrita numérica no Sistema de Numeração Decimal; problemas de estruturas aditivas e algoritmo da subtração; estruturas multiplicativas e, finalmente, números racionais.

Para separar cada uma das partes, são apresentadas algumas pequenas crônicas, que contam situações vividas pelos autores com adultos ou com crianças em processo de descoberta dos números. São filhos, irmãos, sobrinhos, vizinhos que, em situações cotidianas, explicitam formas de pensar sobre os números, na fase de desenvolvimento que estava passando no momento em que ocorreu o fato contado.

As reflexões envolvem vários aspectos e os textos foram organizados em quatro partes: a parte um com dois capítulos, a parte dois com seis capítulos, a parte 3 com quatro capítulos e a parte 4 com três capítulos.

O capítulo 1, intitulado *Crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental escrevendo números: quais as hipóteses?* analisa as hipóteses que crianças constroem sobre o Sistema Numérico Decimal (SND) com base em suas experiências cotidianas, por meio da replicação da pesquisa realizada pelas educadoras matemáticas argentinas Delia Lerner e Patricia Sadovsky (1996).

O capítulo 2, *Construção da numeração escrita: hipóteses de estudantes em início de escolarização,* discute as hipóteses construídas por estudantes em início de escolarização em relação à escrita numérica e as suas relações com o Sistema de Numeração Decimal. As autoras também replicam a pesquisa realizada por Delia Lerner e Patrícia Sadovsky (1996) em relação à metodologia adotada. Os resultados, assim como nos estudos anteriores e no capítulo 1, revelam que as crianças apresentam várias hipóteses na construção do SND.

O capítulo 3, que inicia a segunda parte do livro, apresenta o texto *Estruturas aditivas: estudantes do 5º ano resolvendo problemas de transformação,* que objetivou investigar o desempenho de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem os seis subtipos de problemas aditivos de transformação, bem como identificar as principais estratégias utilizadas por esses estudantes na resolução dos problemas propostos, buscando mapear a natureza dos erros cometidos.

O capítulo 4, intitulado *Uma proposta de ensino das estruturas aditivas baseada na resolução de problemas e no cálculo mental,* discute o desenvolvimento de compreensões acerca das estruturas aditivas, a partir de uma proposta de ensino que estimula a resolução de problemas e a estratégia do cálculo mental, provocadas pelo uso de literatura infantil e de jogos.

O capítulo 5 é composto pelo texto *Conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas* que buscou identificar e analisar conhecimentos específicos de professores que atuam no Ensino Fundamental sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas e verificar o que eles pensam sobre o conhecimento teórico relativo a este conteúdo.

O capítulo 6, *Algoritmo da subtração: uma análise em coleções de livros didáticos de Matemática do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental,* as autoras analisaram o algoritmo da subtração e as propostas de estratégias para resolução de atividades em três coleções de livros didáticos de Matemática do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. Utilizaram como base a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

O capítulo 7, intitulado *Uso de jogos como recursos didáticos para abordagem de estruturas aditivas nos anos iniciais*, relata os resultados de uma experiência de ensino vivenciada no âmbito do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência PIBID/PEDAGOGIA – UFPE.

O capítulo 8 apresenta os resultados de um trabalho de conclusão de curso em Pedagogia, realizado no agreste de Pernambuco durante a vigência do Projeto de Colaboração Técnica desenvolvido na UFRPE – Unidade Acadêmica de Garanhuns, atualmente UFAPE. O texto *Abordagem da subtração de números naturais em livros didáticos de Matemática utilizados na rede municipal de ensino de Paranatama – PE,* apresenta os resultados de uma análise didática com foco específico na operação matemática subtração com números naturais, utilizando como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

O capítulo 9, *O zero no algoritmo da subtração: o que dizem professores sobre erros cometidos por estudantes,* no qual, sob a ótica da análise de erros e das categorias de conhecimento de Shulman, a autora desenvolve um estudo que tem como foco o algoritmo convencional da subtração e o papel do zero como mantenedor de posição.

Iniciando a parte 3, o capítulo 10, intitulado *Pokémon e Educação Matemática: um estudo sob a perspectiva das estruturas aditivas e multiplicativas,* as autoras realizaram um recorte de dissertação de mestrado que investigou as potencialidades educacionais no campo das estruturas aditivas e multiplicativas do universo Pokémon, mais especificamente o jogo de cartas.

O capítulo 11 é composto pelo texto *A divisão e seus algoritmos: uma análise da interpretação de professores sobre os erros de estudantes.* Os autores buscaram identificar indícios de como professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio interpretam erros de estudantes no processo de divisão, utilizando os algoritmos pessoal, americano e euclidiano longo e curto.

No capítulo 12, *Análise de respostas apresentadas por estudantes dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental ao resolverem problemas de divisão*, as autoras analisaram situações de quotição (medida) e partição (repartir igualmente), sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.

O capítulo 13 apresenta o texto *Abordagem da divisão de números naturais em livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental pós-BNCC* e analisa a abordagem da divisão de números naturais em livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental publicados após o lançamento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A parte 4 é iniciada com o capítulo 14, que apresenta o texto *Números racionais: a relação entre documentos oficiais e os livros didáticos.* As autoras verificam como são abordados os números racionais e seus significados de razão, parte todo e resolução de problemas em livros dos 6º e 7º anos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático[1].

No capítulo 15, *O erro na multiplicação de racionais: afinal, qual caminho seguimos?*, discute como professores que lecionam Matemática no 6º ano do Ensino Fundamental em escolas da rede pública de ensino de Pernambuco, analisam erros cometidos por estudantes na resolução de problemas de multiplicação de números decimais por naturais e entre decimais e as estratégias utilizadas para elucidar os problemas encontrados.

O capítulo 16 é composto pelo texto *Conhecimentos mobilizados por professores ao analisarem dificuldades e erros de estudantes na comparação de números decimais.* Baseados em Deborah Ball, os autores analisaram os conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores ao analisarem uma atividade com números racionais na representação decimal extraída de um livro didático de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tem como principal foco a comparação de números racionais representados na forma decimal, em especial a comparação entre 48,2 e 48,18, que inspirou o título desse livro.

Por fim, essa obra é o resultado de um trabalho coletivo, construído a partir da vivência ao longo de alguns anos, de muitas ações formativas voltadas à Educação Matemática. Nesse sentido agradecemos a todos que contribuíram para essa produção. Esperamos que a partir da leitura dos textos e das reflexões aqui propostas, sejam fomentadas muitas outras pesquisas acadêmicas e também experiências de ensino significativas e exitosas, do ponto de vista do ensino e da aprendizagem. Escrevemos para professores, estudantes de Licenciaturas e para todos aqueles que se interessarem pela beleza da construção do conhecimento matemático relacionado aos números, afinal, *18 é*

1 Atualmente, a sigla PNLD é usada para Programa Nacional do Livro e do Material Didático.

maior que 2, mas 48,18 não é maior que 48,2. As explicações e justificativas para essa afirmação são fascinantes, por isso convidamos o leitor a vir se aventurar conosco no mundo dos números, em especial, nas reflexões sobre ensino de números na escola.

Boa leitura!

Os organizadores

PARTE 1

PÉROLAS DE NICOLAU

Compreensão do sistema de numeração decimal

por Rosinalda Aurora de Melo Teles

Meu vizinho muito querido, Nicolau, no alto dos seus sete anos, entra lá em casa e vê duas velinhas decorativas que comprei para colocar em cima do meu bolo de aniversário. Ele observa atentamente as velas e sai com uma grande pérola matemática:

– Irmã Rosa, sua idade é assim (coloca o 1 e o 5, formando o número 15) ou assim (coloca o 5 e o 1, formando 51)?

Figura 1 - a idade de Rosa

ou

Fonte: acervo pessoal

– O que você acha, Nicolau? Devolvo a pergunta para ele, que prontamente me responde:
– Se for assim: o 1 e depois o 5, forma 15, está muito longe de morrer, mas se for assim: o 5 e o 1, forma 51..... Já está perto de morrer!

Estudos têm mostrado que as crianças formulam hipóteses sobre o sistema de numeração, especialmente relacionadas à análise da quantidade de algarismos, ao valor posicional, e a relação entre o número escrito e o modo como realizamos sua leitura oralmente, ou seja, numeração escrita versus numeração falada. Entender que a numeração falada não é posicional faz toda a diferença na compreensão e apropriação de nosso sistema numérico. A partir disso a criança será capaz de construir a notação convencional.

Por outro lado, essas hipóteses não classificáveis ou categorizáveis apenas auxiliam na análise do quê e como as crianças pensam a escrita do número. Autores como Cecília Parra e Irma Saiz, no clássico *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*, apontaram que as crianças se apoiam em algumas hipóteses, tais como quanto maior a quantidade de algarismos de um número, maior é o número; ao compararem números de igual quantidade de algarismos, as crianças apresentam argumentos por meio dos quais se evidencia que elas já descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante em nosso sistema de numeração; a apropriação da escrita convencional dos números não segue a ordem da série numérica; as crianças manipulam em primeiro lugar a escrita das dezenas, centenas, unidades de milhar e só depois elaboram a escrita dos números que posicionam nos intervalos entre esses nós, são algumas das constatações dessas autoras.

Nicolau está aprendendo na escola as regras do sistema de numeração decimal. A hipótese dele está baseada, provavelmente, no valor posicional do cinco: se o primeiro número é maior, então o número é maior, mas, por outro lado, ele faz uma interessante relação com o tempo de vida do ser humano. Cinquenta e um anos, para ele, é muita vida já vivida, o que, na verdade, é mesmo. Ainda bem que a expectativa de vida dos seres humanos tem aumentado nas últimas décadas, caso contrário, eu estaria mesmo perto de morrer. No dia seguinte avisei aos pais dele que vou escrever um artigo intitulado: *A compreensão do valor numérico no SND e a relação com a construção do tempo biológico por uma criança de 7 anos*, pois é claro que vejo Educação Matemática em tudo. Como não escrevi o artigo ainda, deixo aqui uma provocação para algum leitor que queira investigar essa relação.

Garanhuns (PE), 12 de maio de 2020.

CAPÍTULO 1

Crianças dos anos iniciais do ensino fundamental escrevendo números: quais as hipóteses?[1]

Luciana Ferreira dos Santos, André Pereira da Costa e Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Introdução

Número é um objeto da Matemática usado para descrever quantidade, medida e ordem, além de poder ser utilizado como sistema de códigos. Boyer (1996) afirma que o número provavelmente foi um dos primeiros conceitos matemáticos construídos e assimilados pelo ser humano no processo de contagem. Segundo Toledo e Toledo (2009), os vestígios sobre a vida de nossos antepassados revelam que foi a partir da experiência com muitos conjuntos em correspondência biunívoca que a humanidade concebeu a ideia de número: “a correspondência de dois conjuntos, de modo que a cada elemento de um deles corresponda um e apenas um elemento do outro e que, ao término do pareamento não sobre nenhum elemento qualquer do conjunto” (TOLEDO; TOLEDO, 2009, p.18).

1 Este artigo é fruto de ampliação da discussão e análise de um trabalho apresentado no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática, realizado em 2017.

Embora o conceito número seja fruto de experiências espontâneas vividas pelo ser humano no seu cotidiano, ao longo do tempo, sofreu processos de formalização e complexificação para atender às demandas científicas e tecnológicas da sociedade. Desse modo, hoje nos deparamos com diversas classificações sobre números, organizando-os em diferentes conjuntos: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais... Uma extensão dos naturais, incluindo os números negativos, compõe o conjunto dos números inteiros. Por sua vez, incluindo também frações e outras representações (decimal e percentual), tem-se os números racionais, por exemplo.

Na sociedade contemporânea, a aquisição espontânea desses conhecimentos sobre números (de diferentes naturezas) não é suficiente, sendo necessário que a instituição escolar assuma a responsabilidade de instrumentalizar as situações de produção do saber. Desse modo, crianças e jovens podem articular o desenvolvimento espontâneo na construção do conceito de número, com aquisição de conhecimentos escolares necessários para a vida em sociedade e para as aprendizagens matemáticas posteriores. Contudo, *como a criança constrói o conceito de número? Quais processos estão envolvidos nessa construção?*

A construção do conceito de número envolve o conhecimento social e o conhecimento lógico-matemático. Segundo Kamii (2012), o conhecimento social é "transmitido" a partir do contato com outras pessoas, de um modo geral, a partir da transmissão de conhecimentos. São valores, normas sociais, regras, nomes das pessoas e objetos que o indivíduo precisa saber para se integrar ao meio em que vive. A fonte de conhecimento social é essencialmente externa. As atividades numéricas relacionadas ao conhecimento social são,por exemplo, as de recitação e de grafia, isto é, as relacionadas ao nome e à escrita do número.

Por outro lado, a fonte do conhecimento lógico-matemático não se encontra no objeto, mas, sim, no próprio pensamento do indivíduo. É, assim, uma fonte interna. Um exemplo de atividade numérica relacionada ao conhecimento lógico-matemático é a contagem. Nesse tipo de atividade, há necessidade de estabelecimento de relação entre o objeto a ser contado e o símbolo numérico, relação entre o número e a quantidade. Essa relação se dá em um processo interno (KAMII, 2012).

Para Piaget (1995), o número é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva[2]). Uma é a ordem e a outra a inclusão hierárquica. A ordem é compreendida por Piaget (1995) como a capacidade de colocar os objetos em determinada ordenação para assegurar que todos os objetos sejam contados. Já inclusão hierárquica é a capacidade de a criança incluir mentalmente o 1 no 2, o 1 e o 2 no 3... De acordo com o autor, entre sete e oito anos, o pensamento da criança se torna flexível o bastante para realizar as ações mentais necessárias à construção dessas operações mentais, envolvidas na construção do conceito de número.

Porém, existe a crença de que o conceito de número é "transmitido" pelo professor e memorizado pela criança por meio da repetição de exercícios. Smole (2000), contudo, afirma que o conceito de número não pode ser transmitido. Esse conceito é construído pelo próprio indivíduo, através de um processo que envolve amadurecimento biológico, no qual estão incluídas as experiências vividas e as informações que recebe do meio. Observa-se que, embora a escola valorize o trabalho com os números nas aulas de Matemática e no livro didático, juntamente com a aplicação de suas operações, sobretudo em relação às tarefas de contar e medir, todo esse trabalho é pautado muitas vezes na memorização.

Sendo assim, mudanças no ensino de números são necessárias para que a aprendizagem de fato ocorra, como afirma Mandarino (2010, p. 97):

2 A abstração reflexiva "constitui um dos motores do desenvolvimento cognitivo e um dos processos mais gerais da equilibração" (PIAGET, 1977, p. 303, tradução nossa).

> [...] nos primeiros séculos do ensino no Brasil, a escola destinada às crianças tinha como objetivos principais ensinar a ler, escrever, contar e fazer as quatro operações básicas. De lá para cá, as aplicações da Matemática não param de se expandir, mesmo nas ações mais simples de nosso cotidiano, e a escola tem sido desafiada a se adaptar às novas exigências de formação. Além disso, do ponto de vista metodológico, ensinar a contar e operar ganhou novas configurações e exigências.

Mesmo que algumas questões sejam difíceis de serem compreendidas pelas crianças pequenas, no que se refere à unidade temática Números, a demanda da utilização social produz o encargo do ambiente escolar em trabalhá-la desde cedo nos anos iniciais do ensino fundamental, para permitir a sistematização de outros conceitos em outros níveis escolares. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017, p. 268):

> [...] a unidade temática *Números* tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades [...]. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

Percebemos que a BNCC traz a proposta de pensar mais a respeito de como se dá a construção do conceito de número pela criança, especialmente sobre o papel da numeração escrita e falada e das situações de contagem. Estudos desenvolvidos no campo da Educação Matemática (HIGINO, 1990; LERNER; SADOVSKY, 1996; BERTI; CARVALHO, 2008; NOGUEIRA; SIGNORINI, 2010; POSSENTI; NOGUEIRA, 2014) têm verificado diferentes erros apresentados por estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental referentes ao trabalho com o Sistema de Numeração Decimal (SND). Em geral, tais pesquisas sinalizam a permanência das dificuldades em volta da leitura e da escrita numérica, da comparação de números com diferentes quantidades de algarismos.

Nessa direção, promover o uso dos números em diferentes contextos e o debate de hipóteses tem sido fundamental para ensinar o conceito de números e características do SND, algo essencial para que os alunos avancem na aprendizagem da Matemática. Para tanto, este estudo consiste numa replicação de pesquisa realizada pelas educadoras matemáticas argentinas Delia Lerner e Patrícia Sadovsky (1996), com crianças argentinas, cujo objetivo foi apontar as hipóteses que crianças constroem sobre o SND com base em suas experiências cotidianas.

Assim, partimos dos seguintes questionamentos: *Quais hipóteses sobre a escrita numérica são mobilizadas por crianças no contexto brasileiro, diferentemente do que foi relatado por Lerner e Sadovsky?* Buscamos identificar conhecimentos numéricos de crianças da periferia de Olinda (PE) por meio de ditado de números e questionamentos sobre a magnitude dos números.

Portanto, neste texto, temos a oportunidade de pensar mais a respeito de como se dá a construção do conceito de número pela criança, especialmente sobre o papel da numeração escrita e falada e das situações de contagem, assim como realizaremos uma breve apresentação sobre os pressupostos que fundamentaram a nossa análise.

A compreensão da escrita numérica

A escrita representa, organiza e preserva conhecimento. A escrita registra nosso desejo e necessidade de comunicação e expressão; a vivência de experiências significativas cria necessidades de expressar-se e comunicar-se." (MELLO, 2006, p. 183). No que diz respeito, a escrita numérica, observa-se que ela evoluiu de uma representação de traços verticais, iconográficos, numa correspondência biunívoca, para escrita baseada em agrupamentos. Dentre diversos sistemas numéricos – egípcio, chinês, mesopotâmio entre outros –, o sistema hindu-arábico, uma maneira simples e poderosa de representar quantidades, é resultado de uma evolução cada vez mais eficiente de exprimir quantidades e de realizar contagem por meio da escrita.

O sistema de escrita numérica está associado à ideia das quantidades que representa. Segundo Higino (1990), a interpretação e reprodução desse sistema está relacionada à capacidade gerativa dos sujeitos, isso porque, a partir de um número limitado de regras, os sujeitos são capazes de gerar infinitas sequências numéricas. Carraher, (1995) e Carraher, Carraher e Schiliemann (1995) ressaltam que, a partir do momento em que se tem uma experiência com todos os aspectos básicos de um sistema, a pessoa é capaz de organizá-lo em um esquema lógico e construir sua representação correta. Desse modo, surgem questionamentos como: *quais as características do sistema de numeração decimal que precisam ser compreendidas para que se possa registrar corretamente qualquer quantidade?*

Nesse sentido, o Sistema de Numeração Decimal hindu-arábico é considerado muito prático, posto que, com apenas dez símbolos, é possível escrever qualquer número. Sua base é decimal, isto é, as trocas para formar nova ordem são realizadas a cada agrupamento de 10 unidades. Esse sistema de numeração possui, ainda, um símbolo que representa a inexistência de quantidade – o zero. É posicional, ou seja, o valor de cada algarismo é determinado em função da posição em que ocupa em determinado número. Por fim, é aditivo e multiplicativo. Assim, por exemplo, o número 1853 pode ser escrito como 1 x 1000 + 8 x 100 + 5x10 + 3x1.

Para que o usuário desse sistema possa compreender as regras de funcionamento para o uso adequado, uma questão deve ser considerada por pesquisadores e professores: *como a compreensão correta sobre o Sistema de Numeração Decimal pode ser adquirida pela criança?* Os estudos que buscam analisar a construção da escrita numérica pela criança, indicam as formas erradas de escrita numérica revelam uma compreensão da lógica subjacente aos sistemas de numeração.

No estudo, que buscou analisar as formas erradas de escrita numérica apresentadas por crianças que cursavam a pré-escola e as antigas 1ª, 2ª, 3ª e 4ª série do ensino fundamental, Higino (1990, p. 141) identificou que, "ao perceber a diferença entre a escrita da palavra e a escrita numérica, a criança passa a construir hipóteses que determinam o funcionamento de cada uma delas". Segundo a autora (1990), existe um esquema lógico orientando os registros das crianças e indica a compreensão da lógica subjacente ao SND

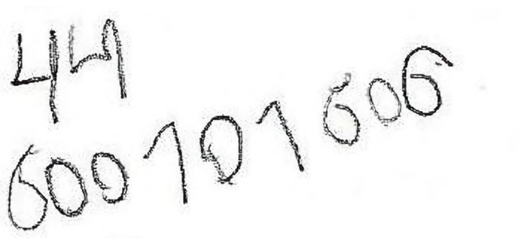
Observou-se que, desde cedo, as crianças mobilizam conhecimentos acerca dos princípios aditivos, isolado ou combinado com o princípio multiplicativo e princípio de base dez. Higino (1990) identificou que o valor do lugar e o papel do zero, como características dominantes da escrita numérica hindu-arábica, só mais tarde serão compreendidos. Contudo, essa compreensão dependerá das oportunidades oferecidas à criança para refletir sobre todos os aspectos subjacentes a representação correta do SND.

A pesquisadora (ibidem) também encontrou evidência de que a representação de número reflete o princípio da composição aditiva da estrutura decimal. Esse tipo de composição aditiva aparecia com mais frequência no caso dos números acima de 100. Isto porque, com os números até 99, as crianças utilizavam a memorização na escrita da sequência numérica. Com relação à composição do princípio multiplicativo, era identificado na leitura que a criança realizava do seu registro, apontando uns valores componentes do número que escreveu. A pesquisadora (1990) constatou que os erros eram mais frequentes nos primeiros anos e diminuíam na 3ª e 4ª série (que correspondem aos atuais 4º e 5º anos do ensino fundamental), apesar do tipo de erro ser sempre o mesmo.

Na pesquisa desenvolvida por Lerner e Sadovsky (1996) e registrada no artigo intitulado *"O sistema de numeração: um problema didático"*, as pesquisadoras acrescentam que as crianças constroem hipóteses sobre o SND com base em suas experiências cotidianas. As autoras identificaram que, ao comparar números com igual quantidade de algarismos, crianças pequenas se baseiam na posição que os números ocupam para descobrir qual é maior ou menor. Isso mostra, que reconhecem os diferentes valores dos algarismos, conforme a posição que ocupam, ou seja, o primeiro é que determina qual será o maior número, nas palavras das crianças: o primeiro é o que manda. Outro aspecto, diz respeito à quantidade de algarismos. Mesmo se não souberem a denominação dos números, as crianças levantam a hipótese de que um número é maior porque tem mais algarismos.

O papel dos "nós" também é um aspecto identificado por Lerner e Sadovsky (1996). Existem alguns números especiais que as crianças conseguem manipular primeiro, com a facilidade que eles têm em escrever os números redondos, ou os "nós", como chamam as pesquisadoras as dezenas, as centenas e os milhares, antes de elaborar a escrita do que se posicionou. Ao começar a produzir números, cuja escrita convencional desconhecem, as crianças misturam um e outro, apoiando-se no que já dominam – a escrita dos "nós". Dessa forma, ao pedir que escrevam 666, vários registros podem surgir seguindo a ordenação dos termos na numeração falada, como ilustrado a seguir:

Figura 1 - Registro de um aluno ao escrever os números 44 e 666.



Fonte: dados da pesquisa.

Uma das maneiras de intervir em um caso desse tipo é valer-se do entendimento que as crianças pequenas têm de que, quanto mais algarismos, maior o número. Ao perceber que a anotação que fez de 666 tem mais algarismos do que o 1011 ou 19507, por exemplo, pode ajudar a perceber que algo está errado com a escrita.

O estudo desenvolvido por Brandt, Camargo e Rosso (2004) parte da hipótese de que, no espaço escolar, os estudantes – enquanto sujeitos de conhecimento – usufruem do SND sem entender como se dá a estruturação dessa noção básica no uso comum. Essa incompreensão sobre o sistema causa dificuldades na compreensão do algoritmo, que envolve operação com conjuntos numéricos e sistema de medidas.

Desta forma, os pesquisadores (2004) realizaram um estudo com 137 crianças que estavam cursando o 2º ciclo do ensino fundamental. Foram aplicadas três provas: a primeira, que foi adaptação de trabalho de Kamii (2012), consistiu na atribuição de significados aos dígitos de um numeral representativo de quantidades, cardinalidade e lógica de contagem. A segunda prova consistiu em solicitar ao sujeito o resultado de uma adição sem a utilização do registro escrito do algoritmo. A terceira prova apresentou às crianças diversos cartões, solicitando-lhes que separassem os cartões que representassem uma quantidade por escrito.

Os resultados da pesquisa desenvolvida por Brandt, Camargo e Rosso (2004) revelaram que as crianças investigadas, independente da série (3ª ou 4ª), em sua maioria, não compreendem o valor posicional dos algarismos usados na representação de quantidades. Embora as crianças tenham demonstrado manipular corretamente o algoritmo da adição e da subtração com reserva, elas não compreendiam o significado dessa reserva.

Os autores identificaram também a importância do rótulo verbal na construção do conceito do valor posicional dos algarismos, de modo que vários alunos que, a princípio, não identificavam esse valor, ao terem sua atenção chamada para o "nome do numeral", passaram a perceber as relações. As crianças escreveram e falaram numerais numa sequência preestabelecida e podem não terem compreendido a estrutura do SND, posto que esse é um conhecimento social, confundido com um conhecimento lógico-matemático e que constitui uma forma primária e rudimentar de representar quantidades. Ao argumentarem e justificarem suas respostas, as crianças revelavam a incompreensão sobre o SND no seu todo.

A pesquisa desenvolvida por Agranionih e Dorneles (2011) evidenciou um maior avanço das crianças em relação ao domínio da escrita numérica convencional do que em relação à compreensão do valor posicional, além de uma mútua influência no desenvolvimento de ambos. Confirmou também que as notações, por si sós, não são transparentes às crianças, e que a aprendizagem do valor posicional a partir da escrita numérica consiste num processo construtivo, não linear, de concepções em direção à compreensão do valor posicional. Essas concepções são construídas à medida que as situações didáticas provocam reflexões e sucessivas tomadas de consciência sobre as notações em si e sobre as relações entre escritas e agrupamentos.

Em síntese, compreender como as crianças pensam o Sistema de Numeração Decimal e as hipóteses e os conflitos existentes na notação numérica é algo essencial para elaboramos intervenções significativas que colaborem para que as crianças possam progredir até a notação convencional. O quadro a seguir apresenta uma visão geral da análise sobre o SND desenvolvida com base em alguns estudos.

No entanto, a escola nos anos iniciais do ensino fundamental parece desconsiderar as hipóteses e experiências com relação à escrita numérica ou compreensão dos princípios lógicos do SND, ao propor situações de escrita repetitiva de sequências numéricas, nas quais a importância é dada à quantidade de números que se vai ensinar.

Quadro 1 - Síntese sobre o SND e resultados das pesquisas

Sistema de Numeração Decimal	Hipóteses das crianças identificadas nas pesquisas
Dez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Base é decimal (agrupamento de 10 unidades) Representa a inexistência de quantidade - o zero Posicional Aditivo e multiplicativo.	Higino (1990) evidência que a representação de número reflete o princípio da composição aditiva da estrutura decimal. Lerner e Sadovsky (1996) apresentam a hipótese de escrita: escrevem com base na fala e apoiam-se nas dezenas e centenas exatas (nós) para escrever. Hipótese da comparação de números: é maior quem tem mais algarismo. E maior aquele que tem o primeiro algarismo maior. Brandt, Camargo e Rosso (2004) confirmam a hipótese de que no espaço escolar os estudantes usufruem do SND sem entender como se dá a estruturação dessa noção básica no uso comum. Agranionih e Dorneles (2011) identificaram mais avanço das crianças em relação ao domínio da escrita numérica convencional do que em relação à compreensão do valor posicional.

Fonte: elaboração dos autores

A seguir, apresentaremos os procedimentos metodológicos utilizados em nosso estudo.

Método

Apresentando uma abordagem qualitativa, a pesquisa foi realizada em uma escola da rede municipal de Olinda (Pernambuco). A coleta de dados ocorreu no dia 6 de setembro de 2016, em conclusão à disciplina

Números e Operações do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, da Universidade Federal de Pernambuco.

Sujeitos

Participaram da pesquisa oito crianças, com faixa etária entre seis e nove anos, que cursavam do 1º ao 3º ano do ensino fundamental, sendo quatro meninas e quatro meninos. Para preservar a identidade dos participantes do estudo, foram criados nomes fictícios, então, as crianças receberam os seguintes nomes: Maria, Carla, Ana, Paula, Pedro, Paulo, João e Marcos.

Procedimentos metodológicos

As entrevistas foram realizadas individualmente, com um roteiro desenvolvido pelos pesquisadores deste estudo. A entrevista obedeceu às seguintes orientações:

- Fazer o ditado com um aluno de cada vez, separadamente.
- Ditar os números e depois solicitar que o aluno leia o que escreveu (ditar na ordem para depois saber qual foi o número que o aluno escreveu).
- Anotar o comportamento dos pesquisados durante a realização da pesquisa.
- Não corrigir o que o aluno fizer.
- Não permitir que escrevam por extenso.
- No momento da coleta, não ensinar ao aluno como se escreve.

Como proposto nas orientações acima, a entrevista foi desenvolvida por dois pesquisadores: enquanto um pesquisador entrevistava, o outro observava e realizava as anotações. A entrevista foi organizada em três momentos.

Descrição dos momentos da entrevista

Primeiro momento: a criança foi solicitada a escrever em uma folha de papel um número grande em quantidade. Em seguida, os pesquisadores deste estudo apresentaram outro número (maior que o escolhido pelo aluno) e questionaram o aluno sobre qual era o número maior (se o dos pesquisadores ou do estudante). O objetivo era identificar hipóteses das crianças referentes à magnitude do número.

Segundo momento: eram apresentados vários números, sempre em dupla, e as crianças deveriam dizer qual o número maior (5 e 12, 31 e 13, 31 e 34, 99 e 102). O objetivo desse momento era comparar números com igual quantidade de algarismos. Para responder a isso, geralmente as crianças se baseiam na posição que os números ocupam para descobrir qual é maior ou menor.

Terceiro momento: ocorreu o ditado dos números naturais, no qual levamos em conta algumas variáveis na escolha dos números:

1. Números "marco", "familiares" ou "frequentes". São aqueles números que, geralmente, as crianças escrevem convencionalmente pelo fato de estarem muito presentes socialmente, de modo que a apropriação da sua escrita ocorra de forma muito tranquila;
2. Números denominados "opacos", que são chamados dessa forma por não deixarem claro, ao pronunciá-los, o princípio aditivo do sistema de numeração, por exemplo: o número 11 (onze), uma vez que não deixam claro, na pronúncia, que temos dez mais um;
3. Números redondos, ou os com dezenas cheias e que terminam com zero;
4. Números "transparentes", ou seja, na pronúncia, o princípio aditivo é explicitado, por exemplo, oitenta e cinco. Aconselha-se utilização de números que tenham dois, três e quatro algarismos.
5. Números com zeros intercalados: 201, 4.002, 1.034, por exemplo;
6. Números com algarismos iguais.

Os números escolhidos para essa atividade foram: 6, 20, 2016, 500, 91, 1011, 19507, 44, 666, 705, 1985. Nosso objetivo era identificar a compreensão dos alunos sobre a escrita numérica.

Com base no aporte teórico de Higino (1990) e Lerner e Sadovsky (1996), as condutas das crianças nas três provas foram analisadas a partir das seguintes categorias: 1) magnitude do número e quantidade de algarismos; 2) comparação de números; 3) escrita numérica. A seguir, apresentamos a análise dos dados produzidos.

Análise dos dados produzidos

Como sinalizado anteriormente, optamos por analisar e discutir os dados com base em três categorias: magnitude do número e quantidade de algarismos, comparação de números e escrita numérica. A seguir, iniciamos a discussão com a magnitude do número e quantidade de algarismos.

Magnitude do número e quantidade de algarismos

Observamos que cinco crianças entrevistadas consideraram a quantidade de algarismos e a magnitude dos números como estratégia para diferenciar o número. Apenas uma aluna não respondeu ao item solicitado. Foram identificados alunos que apresentaram duas respostas (inicialmente o primeiro que manda, depois, ver a quantidade de algarismos):

Quando solicitado a escrever um número grande, inicialmente, o aluno Marcos (nove anos) disse: 2. Pensou novamente e escreveu o número 4. Quando questionado qual o número maior, se o seu ou o apresentado pelos pesquisadores (1523), Marcos disse que 4 é maior, porque nele cabe o 1. Depois de pensar um pouco, disse que 1523 tem o valor maior. Em seguida, ele leu o número corretamente.

Nesse caso, evidenciamos que Marcos considerou, primeiramente, o primeiro que manda, ou seja, comparou 4 com 1 (primeiro algarismo de 1523) e concluiu que 4 é maior que 1. Posteriormente, ele analisou a quantidade de algarismos apresentado pelos dois números, concluindo que 1523 (formado por 4 algarismos) é maior que 4 (formado por 1 algarismo).

A criança Maria (sete anos) escreveu 101 e os pesquisadores apresentaram 1523. Ela respondeu que o segundo número é quem manda, pois inicialmente ela comparou o primeiro algarismo dos números, verificou que ambos eram iguais, depois considerou o segundo algarismo como parâmetro para ver qual era o maior, assim, disse que 1523 era maior que 101 (pois cinco é maior que zero).

Esses dados se assemelham aos pressupostos sinalizados por Lerner e Sadovsky (1996), que apontam que, ao comparar números com igual quantidade de algarismos, as crianças se baseiam na posição que o número ocupa, para, assim, saber qual é o maior número, mostrando, dessa forma, que elas reconhecem os diferentes valores conforme a posição que o número ocupa. Isso é um indício do conhecimento sobre o princípio do SND.

Comparação de números

Ao compararem 5 e 12, observamos que seis crianças apresentaram conceitualização referente à quantidade de algarismos, e duas em relação à magnitude do número. Para os algarismos 13 e 31, identificamos que três crianças consideraram como parâmetro o primeiro número. Além disso, outros dois alunos consideraram a quantidade de algarismos, e uma aluna demonstrou de forma singular a sua compreensão sobre o último número, pois o primeiro algarismo era igual.

Em comparação aos números 13 e 31, para a aluna Carla (seis anos), o 13 é maior (mas, não soube explicar). Ainda, ela leu 13 como 23 e o 31 como 21, provavelmente porque estava estudando por memorização os números compreendidos entre 20 e 29 naquela época da pesquisa. Se foram considerados estes números pela criança, de fato, o 23 é maior que o 21.

Outra criança, Paula (seis anos), ainda na comparação entre 13 e 31, utilizou o valor monetário como forma de materializar a quantidade que o número representa. Para a aluna, 31 é maior. Ela lê corretamente os números. Também diz que, se fosse dinheiro, 31 seria maior.

Quantos aos números 31 e 34, como o primeiro algarismo era igual, cinco crianças (Carla – seis anos, Marcos – nove anos, Ana – sete anos, Pedro – sete anos e Paulo – sete anos) consideraram o algarismo seguinte como parâmetro (pois o primeiro algarismo dos dois números era 3). Uma outra criança fez a inclusão aritmética, nesse caso, ela disse que 34 é o maior, porque ele (o 34) tem 3 a mais, ou seja, se colocar 3 no 31, dá 34.

Por sua vez, Paula (seis anos) utilizou como estratégia o valor monetário como forma de materializar a quantidade que o número representa. Para isso, ela disse que 34 é maior porque tem mais dinheiro.

O aluno Pedro (sete anos) fez a operação aritmética da adição dos algarismos que formam o número. Para Lerner e Sadovsky (1996), esse tipo de conceitualização não é válido, porque não colabora para a compreensão do sistema. Então, a criança disse que 34 é maior porque ele tem sete (somou 3 com 4, encontrando 7).

Ao comparar os números 99 e 102, seis crianças leram 102 como 120, demonstrando que, possivelmente, não compreendem o valor posicional, princípio fundamental do SND. Dessa forma, as crianças consideraram 102 maior devido à quantidade de algarismos. Para uma criança, o primeiro algarismo é o determinante para verificar o número maior. Outra criança utilizou o valor monetário como forma de materializar a quantidade que o número representa.

Esses dados se aproximam aos pressupostos indicados por Lerner e Sadovsky (1996), que sinalizam que, na comparação de números, as crianças ou consideram a quantidade de algarismos que formam o número, ou, então, baseiam-se na magnitude do número. Desse modo, indicam qual é o maior entre os indicados. Tal fenômeno é uma evidência do conhecimento sobre o princípio do SND.

Escrita numérica

Nessa etapa da pesquisa, analisamos a escrita dos números. A maneira de escrever os números é determinada por um conjunto de operações subjacentes (aditivas e multiplicativas), organizadas de forma posicional e decimal. O Quadro 2 ilustra a produção das crianças investigadas em relação ao ditado de números naturais.

Praticamente todas as crianças não apresentaram dificuldades em representar o número 6, com exceção de Carla (seis anos), que escreveu 5 em vez de 6. Essa aluna demonstra dificuldade de diferenciar letra, número e rabisco. Estabelecendo uma relação com as hipóteses de escrita de Emília Ferreiro (1986), Carla estaria no nível pré-silábico.

Nessa direção, Barbosa (2015, p. 1) afirma que no nível pré-silábico: "a criança tem traços típicos, como linhas e formas semelhantes a *emes* em letra cursiva. Apenas quem escreveu sabe o que significa. Ainda não se pode distinguir desenho e escrita em seus registros, recorrendo à utilização de desenhos".

Quanto ao algarismo 20, observamos que as crianças escrevem sem dificuldade. Apenas duas crianças (Pedro – sete anos e Maria – sete anos) apresentaram entraves, sendo que para uma delas o lapso provavelmente ocorreu por falta de compreensão com relação ao valor posicional, visto que escreve 02 em vez de 20. Uma aluna (Carla – seis anos) não consegue representar o algarismo e escreve tracinhos, o que caracteriza, possivelmente, a falta de conhecimento dos algarismos.

Quadro 2 - Produção das crianças em relação ao ditado de números

Números do ditado	1º ano				2º ano		3º ano	
	Maria (6 anos)	Carla (7 anos)	Ana (7 anos)	Pedro (7 anos)	Paula (7 anos)	João (7 anos)	Paulo (9 anos)	Marcos (8 anos)
6	6	5	6	6	6	6	6	6
20	20	//////.....	20	10	02	20	20	20
2016	2016		21	26	26	216	2016	2016
500	40		1005	50	120	500	500	500
91	31		901	12	91	91	91	91
1011	011		10011	29	1211	111	1011	100 1011
19507	19047		90	19507	9127	19507	195007 19005007	19500 19507
44	44		404	44	44	44	44	44
666	6066		6	16	600101606	666	666	666
705	705		76	15	75	705	705	705
1985	1985		1009	152	12101705	10985	1000985	1900 19085

Fonte: dados da pesquisa.

Os autores Agranionih e Dorneles (2011) identificaram que a aprendizagem do valor posicional a partir da escrita numérica consiste num processo construtivo, não linear, de concepções em direção à compreensão do valor posicional, construída à medida que as situações didáticas provocam reflexões e sucessivas tomadas de consciência.

No caso do número 2016, uma criança (Paulo – sete anos) não reconhece o zero como número, logo, não o escreve no registro do número (escrevendo 216). Três alunos (Pedro – sete anos, Ana – sete anos e Maria – sete anos) não reconhecem números com mais de dois algarismos (escreveram 26 ou 21 em vez de 2016), e os demais alunos (João – oito anos, Marcos – nove anos, e Paula – seis anos) não apresentaram dificuldades.

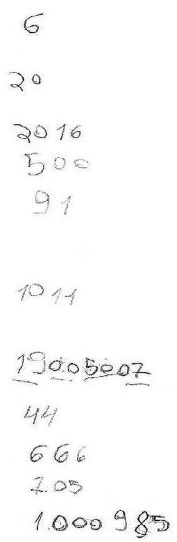
Em relação ao número 500, identificamos crianças que registraram outro número, como Ana (que fez 40 e leu quatro), Pedro (que fez 50 e leu cinco e zero), Maria (que fez 120 e leu um dois e zero), Carla (que não respondeu) e Paula (que fez 1005 e leu 500). Os demais escreveram corretamente. Embora seja um número "redondo", um dos "nós", percebemos que as crianças tiveram dificuldade. Isso contrapõe-se ao que Lerner e Sadovsky (1996) identificaram em seu estudo.

No caso do número 91, quatro crianças (João – oito anos, Marcos – nove anos, Pedro – sete anos, e Maria – sete anos) não tiveram dificuldade. Uma criança (Ana – sete anos) escreveu como fala (fez 901). Por ter compreendido o enunciado de forma equivocada, uma criança, Ana, inicialmente, fez 31, leu 31, depois fez 91. Em relação às demais crianças, uma não fez e a outra fez um número aleatório.

Considerando o número 1011, um aluno (João – oito anos) escreveu corretamente, mas, inicialmente, ele fez 100 e apagou. Alguns alunos tiveram dificuldade em reconhecer o zero: Maria (que fez 1211 e leu um, dois, onze) e Marcos (que fez 111 e disse que o mil está no último um). Outros tiveram dificuldade em reconhecer números com mais de dois algarismos, como Pedro (que escreveu 29 e leu dois e onze) e aqueles com dificuldade em registrar o mil: Ana, que fez 011 e leu mil e onze. Registros com numeração falada foram identificados na escrita de Paula, que fez 10011.

No número 19507, observamos alguns conflitos, como o do aluno João, que inicialmente fez 19500, em seguida, apagou o último zero, colocou o 7 e leu mil novecentos e quinhentos e sete. Houve indícios da numeração falada na escrita de Marcos (que fez 195007, em seguida, disse que estava faltando mil, apagou e acrescentou dois zeros, ficando 19005007, e leu como se fosse 19507), como observamos no protocolo ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Registros da escrita numérica de Marcos (nove anos)

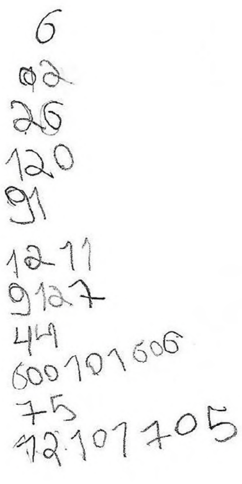


Fonte: dados da pesquisa

Identificamos também alunos com dificuldade em reconhecer números com mais de quatro algarismos, como Maria (sete anos), que, em vez de 19507, escreveu 9127 e leu nove, um, dois, sete. Possivelmente, ela escreveu números aleatórios que fazem parte do seu repertório de algarismos. É importante destacar que uma mesma criança faz coexistir mais do que um tipo de escrita, convencional ou não convencional, dependendo do intervalo numérico, e nem sempre esses tipos são estáveis no mesmo intervalo numérico (LERNER; SADOVSKY, 1996).

O número 44 foi escrito corretamente por quase todas as crianças. Apenas Ana escreveu 404, demonstrando indícios da numeração falada. Sobre o número 666, encontramos dificuldades em relação à escrita: Ana escreveu apenas 6., enquanto outras apresentavam conceituações referentes à numeração falada, por exemplo, como pode ser observado na Figura 3, Maria escreveu 600101606 e leu seis, zero, zero…, seis. Mas também revelaram o princípio aditivo.

Figura 3 - Registros da escrita numérica de Maria

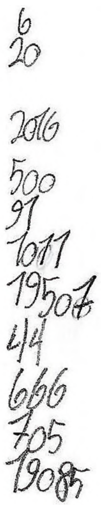


Fonte: dados da pesquisa.

Em relação ao número 705, observamos dificuldades em relação à escrita do número: Pedro fez 15 e leu um e cinco, e Maria fez 75 e leu sete e cinco. Os demais escreveram corretamente.

No caso do número 1985, observamos o princípio aditivo nas escritas de Paulo, que registrou 10090085. Ana fez 1009 (disse que não sabia mais), Maria fez 109085 (e leu 1985). Houve alunos que entraram em conflito, como João, que escreveu 1900, apagou e fez 19085, o que parece a explicitação do princípio aditivo, já em vias de chegar a um registro mais formal, e leu 1985. Higino (1990) aponta que esse tipo de representação de número reflete o princípio da composição aditiva da estrutura decimal. Esse tipo de composição aditiva aparecia com mais frequência no caso dos números acima de 100, conforme vemos a seguir:

Figura 4 - Registros da escrita numérica de João



Fonte: dados da pesquisa

Quando observamos o protocolo de João, identificamos que ele escreve corretamente 19507, mas erra ao escrever 1985, comportando-se como se o conhecimento sobre o sistema não estivesse consolidado.

As hipóteses de escrita numérica apresentadas pelas crianças que participaram de nosso estudo convergem com aquelas identificadas por Lerner e Sadovsky (1996), mesmo em um contexto geográfico e sociocultural diferente das crianças entrevistadas pelas pesquisadoras na década de 1990, na Argentina. Assim como as autoras (1996), identificamos que as crianças elaboram conceitos a respeito da escrita dos números, baseiam-se nas informações da numeração falada e no que já sabem, na escrita convencional, a respeito das dezenas e centenas exatas.

Para produzir os números cuja escrita convencional não dominam, as crianças misturam os símbolos que já conhecem e procuram fazê-los corresponder com a ordenação dos termos na numeração falada, recorrendo à justaposição ao organizar o registro numérico, como evidenciado por Lerner e Sadovsky (1996).

Os dados confirmam as evidências apontadas Higino (1990) de que as crianças não têm dificuldade com os números até 99, porque utilizam a memorização na escrita da sequência numérica. Com relação à composição do princípio multiplicativo, era identificado na leitura que a criança o realizava no seu registro apontando uns valores componentes do número que escreveu.

Considerações finais

A partir deste breve panorama sobre os conhecimentos numérico das crianças, foi possível verificar as suas conceitualizações e desconhecimento sobre os números. Os dados coletados confirmam as hipóteses de que as crianças constroem seu conhecimento sobre o SND com base em suas experiências cotidianas, como descrito no estudo de Lerner e Sadovsky (1996), embora as justificativas não tenham sido tão elaboradas quanto as das crianças do estudo apresentado pelas pesquisadoras argentinas.

Observamos conceitualizações como o "primeiro é quem manda" ao comparar números com igual quantidade de algarismos. Considerar a "o tamanho depende da quantidade de algarismo", as crianças acharam que um número é maior porque tem mais algarismos. Identificamos também conhecimentos referentes à escrita dos "nós" presentes na escrita e ordenação dos termos na numeração falada.

Contudo, notamos que algumas crianças demonstravam conhecimentos que não colaboravam para a construção de conhecimentos sobre o SND quando somavam os algarismos, não fazendo distinção entre algarismos e rabiscos. Algumas crianças conseguiam escrever números com apenas dois algarismos, outras escreviam números aleatórios, mas essas crianças revelavam estar em processo de construção de conhecimento sobre o Sistema de Numeração Decimal.

No entanto, sabemos que as atividades precisam ser significativas e envolventes para auxiliarem o estudante a aprender. Sabemos que nenhum estudante aprende números apenas repetindo exercícios de contagem e escrita ou preenchendo elementos de conjuntos no papel, de modo mecânico e sem sentido.

Referências

AGRANIONIH, N. T., DORNELES, B. V. Concepções de alunos de 2ª série sobre escritas numéricas de milhares e valor posicional. *Zetetike*, 19(1), 2011. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v19i35.8646648

BARBOSA, P. M. R. Emília Ferreiro, Ana Teberosky e a gênese da língua escrita. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v. 15. ed. 11, jun. 2015. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/15/11/emilia-ferreiro-ana-teberosky-e-a-gnese-da-lngua-escrita. Acesso em: 14 jul 2020.

BERTI, N. M.; CARVALHO, M. A. B. O sistema de numeração decimal e a construção deste conhecimento pelos alunos da 5ª série. *In*: SIMPÓSIO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 1., 2008, Cascavel. *Anais*... Cascavel: Biblioteca Central do *Campus* da Unioeste de Cascavel, 2008, v. 1, p.1-15.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgarg Blucher, 1996.

BRANDT, C. F., CAMARGO, J. A., ROSSO, A. J. Sistema de numeração decimal: operatividade discente e implicações para o trabalho docente. *Zetetike*, 12(2), p. 89-124, 2004. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v12i22.8646974.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*: Educação é a Base. Brasília: MEC, 2017.

CARRAHER, T. N. *Aprender pensando*. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 1995.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. *Na vida dez, na escola zero*. 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

FERREIRO, E. *Reflexões sobre Alfabetização*. São Paulo: Cortez, 1986.

HIGINO, Z. M. A criança e a escrita numérica. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, n. 71, p. 141-162, 1990.

KAMII, C. *A criança e o número*: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação de escolares de 4 a 6 anos. Tradução: Regina A. de Assis. 39. ed. Campinas: Papirus, 2012.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração decimal: um problema didático. *In*: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.) *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996. p. 73-155.

MANDARINO, M. C. F. Números e Operações. *In*: CARVALHO, J. B. P. F. (Org.). *Matemática*: ensino fundamental. Brasília: Ministério da

Educação, Secretaria da Educação Básica, 2010. v. 17, p.135-166. (Série Explorando o Ensino).

MELLO, S. A. A. A apropriação da escrita como um instrumento cultural complexo. In: *Vigotski e a Escola atual*: fundamentos teóricos e implicações pedagógicas. Araraquara, SP: Junqueira & Marin, 2006.

NOGUEIRA, C. M. I.; SIGNORINI, M. B. Crianças, algoritmos e o sistema de numeração decimal. *Investigações em Ensino de Ciências*, UFRGS, v.15, p. 446, 2010.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artmed, 1995.

PIAGET, J. *Recherches sur l'abstration réfléchissante*. Paris: P.U.F., 1977.

POSSENTI, L. P. C.; NOGUEIRA, C. M. I. Dificuldade de aprendizagem em Matemática e o sistema de numeração decimal: um estudo com alunos de sala de apoio à aprendizagem. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2014, Campo Mourão. *Anais*... Campo Mourão: SBEM Regional PR, 2014, p.1-11.

SMOLE, K. C. S. *A Matemática na Educação Infantil*: A teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artmed, 2000.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Didática de Matemática*: como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 2009.

CAPÍTULO 2

Construção da numeração escrita: hipóteses de estudantes em início de escolarização

Juscelandia Machado Vasconcelos, Anaelize dos Anjos Oliveira e Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Introdução

O desenvolvimento de habilidades referentes à leitura, escrita e ordenação de números naturais é orientado, desde o início da escolarização, pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017). Segundo esse documento, faz-se necessário realizar, desde cedo, um trabalho que envolva conteúdos como leitura, escrita, comparação e ordenação de notações numéricas, sendo também necessária a compreensão por parte dos alunos do significado do número natural e das características do Sistema de Numeração Decimal (SND).

No processo de construção da noção de número, os estudantes precisam desenvolver, entre outras ideias, a de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos, enfatizando registros, usos, significados (BRASIL, 2017).

A atribuição do sentido à escrita numérica, pela criança, acontece a partir da articulação de conhecimentos distintos (TELES; BELLEMAIN;

GITIRANA, 2013). As pesquisadoras apontam como responsáveis por essa construção os conhecimentos de natureza lógico-matemática e social. Com base em Piaget e Kamii (1992, p.13) amplia essa construção e defende que "o número é construído por cada criança a partir de todas as relações que ela cria entre os objetos". Assim, podemos compreender que há um envolvimento de todos os conhecimentos de forma simultânea para a construção e significação do número e, consequentemente, de sua escrita.

Sobre os tipos de conhecimentos referidos acima, Kamii (2005), com referência à teoria de Piaget, vem ressaltando a existência de três tipos de conhecimentos: o físico, que se refere às características externas e perceptíveis do objeto; o *social*, que diz respeito às convenções sociais transmitidas; e o *lógico-matemático*, que consiste em relações mentais construídas entre os objetos.

Assim, pode-se afirmar que, nos primeiros anos da infância, o conhecimento do número é *social*. Muito antes de as crianças frequentarem a escola, elas já têm contato com os números nas atividades do dia a dia delas. Esse contato se deve ao fato de o sistema de representação dos números ser um "produto cultural, objeto de uso social. O sistema de numeração se oferece à indagação infantil desde as páginas dos livros, a listagem de preços, os calendários, as regras, as notas da padaria, os endereços das casas [...]" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 80). O conhecimento lógico-matemático é construído, depende de relações que são estabelecidas, por exemplo, para entender o conceito de número, o estudante precisa estabelecer relações de ordem, de inclusão, de classificação, de sequenciação, de seriação, de comparação e correspondência, dentre outras.

Segundo Lerner e Sadovsky (1996), investigar o que os alunos pensam sobre os números, o que sabem sobre o sistema de numeração e quais os conflitos existentes quanto à notação convencional é fundamental para que o professor reflita em sua prática que tipos de intervenções poderá desenvolver para favorecer a aprendizagem dos alunos. Teles, Bellemain e Gitirana (2013) destacam que atividades como comparar, escrever e ler os números devem ser vivenciadas constantemente no espaço escolar, pois ajudam a criança na compreensão das regularidades do SND.

Diante do que foi brevemente discutido acerca da construção do número natural e a compreensão das regularidades do SND, e com vistas a proporcionar uma discussão sobre a construção dessas relações por estudantes no início da escolarização, comparando com os achados de Lerner e Sadovsky (1996), o presente estudo[1] se propôs a verificar quais hipóteses são construídas por estudantes em início de escolarização em relação ao SND e se há influência nos resultados em relação às redes de ensino (público ou privado).

No tópico seguinte, apresentaremos e discutiremos alguns estudos que ampliam a discussão sobre o SND.

O que traz a literatura?

Lerner e Sadovsky[2] (1996), diante do questionamento de como as crianças se aproximam do conhecimento acerca do SND, realizaram um estudo que evidenciou, dentre outros resultados, os aspectos mais relevantes do SND considerados pelas crianças, quais as ideias que elaboram acerca do número, quais as hipóteses que constroem, quais os conflitos que podem surgir entre suas próprias conceitualizações. As pesquisadoras utilizaram como metodologia entrevistas clínicas com duplas de crianças de cinco a oito anos. No total, foram

1 Pontuamos que outra análise dos dados discutidos no presente capítulo foi publicada nos anais do V Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática em 2018.

2 Este estudo foi replicado e serviu como referência para as análises, durante a discussão dos resultados.

entrevistadas 50 crianças e as entrevistas consistiram na comparação de números a partir de cartas de baralho e produção de números por meio de ditado.

As hipóteses desenvolvidas pelas crianças para a construção do SND, evidenciadas por Lerner e Sadovsky (1996), foram:

a. Quanto maior a quantidade de algarismos de um número, maior é o número.

Nas palavras das autoras,

> Alina (6 anos, primeira série), ao justificar suas decisões no jogo da guerra, afirma que 23 é maior que 5 "porque este (23, porém ela não o nomeia porque desconhece sua denominação oral) tem dois números e tem mais, e este (5) tem só um número" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 77).

b. A posição dos algarismos é um critério de comparação, ou "o primeiro é quem manda".

Segundo as autoras,

> Lucila (5 anos, jardim), depois de afirmar que 21 é maior que 12, o justifica assim: "Porque o um (no 12) é primeiro e o dois é depois; porque (no 21) o dois é primeiro e o um é depois".
>
> Nádia (6 anos, primeira série) não consegue explicar como se deu conta de que 31 é maior que 13. Pergunta-lhe então como poderia explicá-lo a outra criança e ela responde: "que preste atenção onde está o 3 e onde está o 1, ou onde está o 1 e onde está o 3." (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 81)

c. Alguns números são especiais: o papel dos "nós".

A escrita dos "nós" – "quer dizer, das dezenas, centenas e unidades de mil" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 87).

d. A numeração falada tem importante papel.

De acordo com as autoras,

> Lucila e Santiago (os dois têm cinco anos e estão no jardim de infância) escrevem: 108 e 109. Os dois interpretam suas escritas como "dez e oito" e "dez e nove", respectivamente (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 92).
>
> Yael faz algo semelhante, porém nos explica: enquanto está anotando sua pontuação no jogo da guerra, anota, "dez e oito" como 108 e justifica dizendo que dez e oito se escrevem assim "porque tem um dez, que é um e um zero, então se colocam os dois com o oito" (LERNER; SADOVSKY, 1996, p. 93).

Segundo as pesquisadoras, tais achados corroboram suas suposições iniciais de que as crianças elaboravam critérios próprios para produzir representações numéricas e que a construção da notação convencional não segue a ordem da sequência numérica, embora esta desempenhe um papel importante dessa construção.

Sá e Teles (2008), Teles, Bellemain e Gitirana (2013), Costa, Santos e Pessoa (2017) discutem aspectos referentes à apropriação, às características e ao ensino do SND. Os pesquisadores evidenciam, de um modo geral, dificuldades, como a notação numérica para a aprendizagem do SND, as limitações do ensino baseado na comunicação direta de convenções e memorizações, entre outras. Por outro lado, reforçam a importância de oportunizar diferentes atividades que envolvam a leitura, a comparação e a produção de escritas numéricas para que as crianças tenham um espaço de expor suas hipóteses e confrontá-las, quando necessário, para a compreensão das regularidades presentes no SND.

Diante da discussão apresentada, ressaltamos a importância de se investigar como a criança compreende e se apropria do SND, para que assim possamos oportunizar, em sala de aula, diferentes vivências que venham a favorecer a aprendizagem do SND e a diminuição ou superação das dificuldades que surgem durante o processo de aprendizagem. A seguir, será apresentada a metodologia utilizada neste estudo.

Metodologia

Nosso objetivo foi verificar as conjecturas de estudantes em relação à notação numérica. Para alcançar esse objetivo, foram realizadas entrevistas individuais, nas quais foi proposta uma atividade centrada em dois aspectos: 1) na comparação de números; 2) na escrita de números (ditado).

Foram selecionados aleatoriamente 12 estudantes, sendo dois da Educação Infantil (Grupo V) e dez dos anos inicias do ensino fundamental (2º ao 5º anos), com idades entre cinco e onze anos. Seis estudantes eram de uma escola da rede pública do Recife/PE e participaram da coleta em 2016 e seis estudantes eram de escolas privadas do Crato/CE e participaram da coleta em 2020.

A coleta foi realizada de forma presencial com os estudantes da escola pública e de forma remota, pelo *Google Meet*, com os estudantes das escolas privadas, os quais realizaram o ditado e depois nos enviaram a imagem da produção escrita. Para resguardar a identidade dos entrevistados, adotamos nomes fictícios. Mantivemos apenas as idades e o ano que estavam cursando.

A atividade consistiu em identificar os conhecimentos numéricos de estudantes em início de escolarização. O teste realizado foi dividido em três momentos: inicialmente, fizemos um *ditado dos números*, semelhante ao ditado de palavras. Fomos ditando números e pedimos que cada estudante, individualmente, os escrevesse. Os números ditados foram os seguintes: 6, 20, 2016, 500, 91, 1011, 19507, 44, 666, 705 e 1985.

Tivemos o cuidado de seguir a ordem apresentada, pois acreditamos que, assim, os estudantes poderiam estabelecer relações entre os números. Em seguida, foi solicitado que os discentes fizessem a leitura dos números por eles escritos, como forma de nos certificar de que cada um tinha escrito o que havíamos ditado. É importante salientar que os estudantes deveriam escrever a notação convencional dos números e não o número por extenso. Ressaltamos, ainda, que, no momento da escrita, não podíamos intervir, nem para corrigir possíveis erros nem para ajudar na resposta.

Na sequência, solicitamos que os estudantes pensassem e escrevessem *um número muito grande*. Depois da escrita do número pelo estudante, nós apresentamos um número maior do que o que ele apresentou, acrescentando uma unidade, dezena ou centena, e fizemos o seguinte questionamento: "Uma criança me falou que este número é maior. O que você acha?".

Por fim, fizemos uma *comparação de números* e questionamos: *qual é o maior?* Nesse momento, foram apresentados os seguintes pares de números: 5 e 12, 13 e 31, 31 e 34, 99 e 102, para que os estudantes fizessem a comparação entre os números dos pares e apontassem qual era o número maior, justificando suas respostas.

A seguir, apresentamos os resultados encontrados, partindo inicialmente da descrição dos dados e, na sequência, analisando-os, estabelecendo uma relação com o que vem sendo discutido no estudo de Lerner e Sadovsky (1996) e por outros pesquisadores da área.

Resultados e discussão

Diante dos dados coletados e para facilitar a compreensão e discussão dos resultados, dividimos as análises das entrevistas em momentos distintos, como os apresentados na metodologia: 1) Ditado de números (produção); 2) Escrita de um número grande (produção e comparação de números); 3) Comparação de números. Iniciaremos apresentando os dados dos estudantes das escolas pública e privada e, posteriormente, as análises.

Momento 1: Ditado dos Números

Nesse momento, foram escolhidos onze números para serem ditados para os 12 estudantes, como já apresentado na metodologia.

- Klariane (5 anos), de escola pública, escreveu os números de forma aleatória e quando solicitamos a leitura, ela não soube nomeá-los.
- Ana (5 anos), de escola privada, apresentou resultado semelhante, embora tenha conseguido escrever três números corretamente: 6, 20, 44. Os demais números, ela afirma não conhecer. Por exemplo, ditamos o número 1.985 e a estudante disse que não o conhecia, porque era um "numerozão". Como nessa etapa de escolarização um dos objetivos de aprendizagem é "relacionar números às suas respectivas quantidades e identificar o antes, o depois e o entre em uma sequência" (BRASIL, 2017, p.48), por mais que a estudante afirmasse não conhecer o número ditado, sabia que se tratava de um número muito grande (por apresentar muitos algarismos em sua composição), apesar de a estudante só ter tido contato com números de duas ordens.

Esses dados podem ser justificados, como já mencionado acima, pela idade e pela etapa escolar das estudantes em relação aos outros estudantes pesquisados. Segundo a BNCC (2017), devemos conceber a criança como

> ser que observa, questiona, levanta hipóteses, conclui, faz julgamentos e assimila valores e que constrói conhecimentos e se apropria do conhecimento sistematizado por meio da ação e nas interações com o mundo físico e social não deve resultar no confinamento dessas aprendizagens a um processo de desenvolvimento natural ou espontâneo. Ao contrário, impõe a necessidade de imprimir *intencionalidade educativa* às práticas pedagógicas na Educação Infantil, tanto na creche quanto na pré-escola (BRASIL, 2017, p.34, grifo no documento).

Os outros estudantes, tanto da escola pública, quanto da escola privada, de um modo geral, acertaram a maioria dos números ditados e leram corretamente todos os números, mesmo quando haviam errado algo na escrita. Os quadros 1 e 2, apresentam a sistematização dos resultados.

De acordo com os quadros 1 e 2, podemos perceber que a maioria dos estudantes de ambas as escolas já compreendia as regularidades do SND, apresentando dificuldades apenas na escrita de alguns números com maior quantidade de algarismos. Obtivemos nessa atividade mais acertos que erros, tanto na escola pública quanto na privada.

Quadro 1 - Produção de números por estudantes da escola pública.

Estudantes		Klariane (5 anos)	Luiza (7 anos)	Eduarda (8 anos)	Thiago (9 anos)	Pedro (10 anos)	Matheus (11 anos)
Números ditados	**6**	9	6	6	6	6	6
	20	0	20	20	20	20	20
	2 016	5	2016	2016	2016	2016	2016
	500	E	500	500	500	500	500
	91	1	91	91	91	91	91
	1 011	1	1011	1,011	1011	1011	100.11
	19 507	16	1910005007	19,507	19507	19507	19.507
	44	74	44	44	44	44	44
	666	6	6066	666	60606	666	666
	705	51	7005	705	705	705	705
	1 985	5	10009085	1,985	10985	1985	100.985
	Acertos	0	7	11	9	11	9

Fonte: elaboração das autoras

Quadro 2 - Produção de números por estudantes da escola privada

Estudantes		Ana (5 anos)	Sofia (7 anos)	Isabelle (8 anos)	Bruno (9 anos)	Lucas (10 anos)	Matilde (11 anos)
Números ditados	**6**	6	6	6	6	6	6
	20	20	20	20	20	20	20
	2 016	-	2.16	2.16	2016	2016	2016
	500	-	500	5000	500	500	500
	91	-	91	901	91	91	91
	1 011	-	100011	1.11	1011	1011	1011
	19 507	-	11005007	19000	19507	19507	19.507
	44	44	44	44	44	44	44
	666	-	60066	666	666	666	666
	705	-	7005	705	705	705	705
	1 985	-	1985	1.985	1985	1985	1985
	Acertos	3	6	6	11	11	11

Fonte: elaboração das as autoras.

Em relação aos resultados dos estudantes da Educação Infantil, vale ressaltar alguns pontos: Ana acertou poucos números ditados, enquanto Klariane não acertou nenhum e ainda apresentou uma característica comum das crianças na fase pré-operatória piagetiana, que é a escrita espelhada. Por exemplo, quando solicitamos que ela escrevesse 500, ela escreveu um 3 espelhado. Acreditamos que ela pode ter se confundido e escrito a letra E. Neste caso, levando em consideração a etapa de escolarização da estudante, a escrita espelhada pode ser considerada normal, como pontuam Lourenço e Baiochi (2012), quando afirmam que, quanto à escrita espelhada a criança em fase de alfabetização ainda está adquirindo a noção de lateralidade (direita e esquerda).

Alguns estudantes, de ambas as redes de ensino, apresentaram alguns conflitos na escrita da notação convencional. Eles ainda não compreendiam o zero como mantenedor de posição, pois quando ditamos os números 91, 705, 1011 e 19507, alguns escreveram, respectivamente: 901, 7005, 100011 e 1910005007. Nesses casos, acreditamos que eles associaram a numeração escrita à numeração falada.

Concordamos com Lerner e Sadovsky (1996), quando afirmam que, nesse caso, as crianças "misturam os símbolos que conhecem, colocando-os de maneira tal que se correspondam como a ordenação dos termos na numeração falada" (p. 98). Ainda segundo as autoras, esse erro acontece porque existe uma diferença entre a numeração escrita e a numeração falada, a primeira é posicional e a segunda não. Na escrita dos números 1985 (10009085) e 666 (60666 e 60606), foram colocados zeros a mais por alguns estudantes.

Constatamos também que uma aluna (Eduarda, de 8 anos) trocou o "ponto" utilizado na separação de classes do SND por "vírgula", que em geral é utilizada para representar o sistema monetário e os números decimais. A respeito disso, Teles, Bellemain e Gitirana (2013) apontam que o aspecto aditivo entre as classes é representado pela vírgula ou pelo conectivo "e", como, por exemplo, em sessenta e três mil, setecentos e oitenta e cinco (63.785).

Na maior parte dos casos, os estudantes entrevistados demonstraram já ter compreensão (às vezes ainda pouco consolidada) de algumas regularidades presentes em nosso SND, como o valor posicional, a escrita dos "nós" com a base decimal e o zero como mantenedor de posição.

Momento 2: Escreva um número muito grande

Sintetizamos, nos Quadros 3 e 4, a seguir, as produções e comparações dos 12 estudantes investigados, feitas no segundo momento.

Quadro 3 - Produção e comparação de números por estudantes da escola pública

Estudantes	Escrita (produção)	Pesquisadoras (Comparação)	Justificativa do estudante
Klariane (5 anos)	4	5	O 5 é maior, porque é.
Luiza (7 anos)	100	102	Sim, é duas vezes mais.
Eduarda (8 anos)	2.000	2001	2001 é maior porque tem um a mais.
Thiago (9 anos)	1000	1500	É maior porque tem 500 a mais.
Pedro (10 anos)	1.000.000	1.000.010	É maior porque tem uma dezena a mais.
Matheus (11 anos)	500.000	500.050	É maior porque tem 50 a mais.

Fonte: elaboração das autoras

Quadro 4 - Produção e comparação de números por estudantes da escola privada

Estudantes	Escrita (produção)	Pesquisadoras (Comparação)	Justificativa do estudante
Ana (5 anos)	1000	101	Eu não conheço esse número.
Sofia (7 anos)	500	510	Eu acho que é maior mesmo porque passou mais 1, 2, 3,..., até chegar no 10. Então o 50010 é maior.
Isabelle (8 anos)	1989	1 995	É maior, porque ele vem depois do meu número, exemplo: 6 depois.
Bruno (9 anos)	1.507.605	1 507 705	É maior, só por 100.
Lucas (10 anos)	3.869.312	3 869 313	É maior porque adicionou 1, dependendo da operação fica maior, como foi adicionar ficou maior.
Matilde (11 anos)	43 quintilhões	43 000 000 000 000 110 00	É maior. Porém, não existe um número muito grande porque os números são infinitos, então tem sempre um maior.

Fonte: elaboração das autoras.

Observamos que Klariane (5 anos) compreendia que o 5 é maior que o 4, mas não conseguia justificar o porquê; Ana (5 anos) afirmou que 100 é um número grande, mas, ao registrar, escreveu 1.000 (mil), e disse não conhecer o 101. Outros estudantes responderam que o número era maior porque tinha certa quantidade a mais.

Para Lerner e Sadovsky (1996), a apropriação da escrita convencional não segue a ordem da sequência numérica. "As crianças manipulam primeiro a escrita dos "nós" [...] e só depois elaboram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre os nós" (p. 87). Em consonância com essas autoras, Teles, Bellemain e Gitirana (2013, p. 07) apontam que as crianças "não precisam aprender a contar de 21 a 30, depois de 31 a 40, para saber do 51 a 60, por exemplo".

Os estudantes Pedro (10 anos) e Bruno (9 anos), da escola pública e da privada, respectivamente, demonstraram ter conhecimento sobre os "nós" presentes no SND. Pedro justificou que o número 1.000.010 era maior que 1.000.000 porque tinha uma dezena a mais; e Bruno justificou que o número ditado pelas pesquisadoras era maior porque tinha uma centena a mais.

Matilde (11 anos), ao receber o comando para escrever um número muito grande, escreveu o número 43 000 000 000 000 000 000 (quarenta e três quintilhões), mas salientou que não existe um número muito grande, pois há uma infinidade de números e sempre existirá um número maior. A justificativa da estudante nos permite afirmar que ela entende "que todos os números consecutivos estão conectados pela operação de "+1"". (KAMII, 2012, p. 29). Podemos afirmar que a ideia de sucessor está estabelecida pela estudante, bem como a noção de infinito.

Momento 3: comparação de números: qual é o maior?

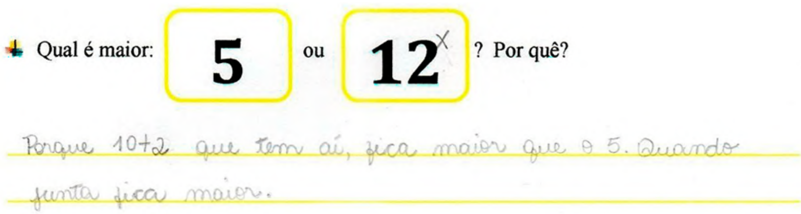
Ao apresentarmos os pares de números (5 - 12; 13 - 31; 31 - 34; 99 - 102) e solicitarmos que os estudantes respondessem qual era o maior, Klariane (5 anos) conseguiu acertar todos, mas não conseguiu justificar suas respostas, falando sempre "porque é mais grande", independente do número ter mais algarismos ou não. Assim, inferimos que a estudante se baseou na sequência dos algarismos.

Ana (5 anos) conseguiu acertar todos os números também, justificando que um era pequeno e o outro era maior. Na comparação dos números *31 e 34*, a estudante demonstrou conhecer antecessor e sucessor do número, pois justificou sua resposta da seguinte forma: "O 34 é maior porque passa do 31".

Conforme Lerner e Sadovsky (1996), "ao comparar números de igual quantidade de algarismos, as crianças exibem argumentos através dos quais evidencia-se que elas já descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante em nosso sistema de numeração" (p. 87). Podemos perceber que Ana já demonstrava conhecimento acerca do valor posicional, pois quando ela notou que o primeiro algarismo (dezena) nos dois números era o mesmo, ela se voltou para o segundo algarismo (unidade), para responder qual era o maior.

Os outros estudantes, ao realizarem as comparações entre os números, apresentaram diferentes estratégias, sendo uma delas a de decomposição, que está exemplificada na Figura 1.

Figura 1 - Estratégia de decomposição de Thiago (9 anos)[3]



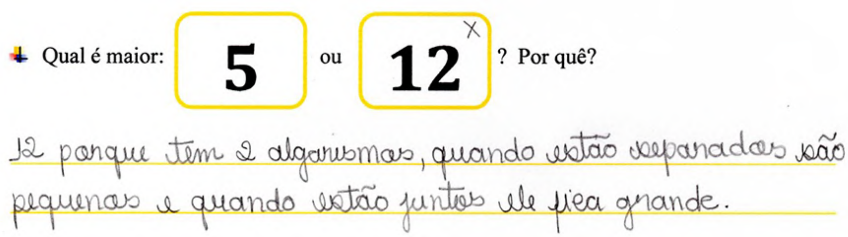
Fonte: banco de dados da pesquisa

3 Durante as entrevistas, as justificativas dadas pelas crianças foram transcritas pelas pesquisadoras.

A Figura 1 nos permite compreender que o estudante percebeu o valor relativo dos algarismos 1 e 2 que compõem o número 12. Ele fez a decomposição desse número para justificar seu valor e chegar à conclusão de que esse número é maior que 5. Thiago utilizou essa mesma estratégia para a comparação dos números *13-31*. Já no caso das comparações entre *31-34 e 99-102*, ele usou a estratégia de complemento.

Estratégia semelhante foi utilizada por Isabelle (8 anos), quando comparou os números *5* e *12*, como mostra a Figura 2, a seguir.

Figura 2 - Estratégia de decomposição e composição de Isabelle (8 anos)



Fonte: banco de dados da pesquisa

Outras justificativas dos estudantes para essa comparação foram: "um ter unidade e a outra dezena" e pelas ordens e classes.

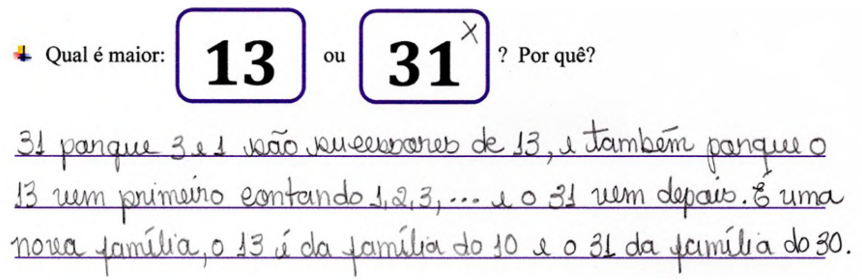
Ainda sobre a comparação entre o *5* e o *12*, Luiza (7 anos) justificou que existiam sete elementos a mais no número 12 e acrescentou: "o 12 é par e pode ser dividido em dois 6, que é maior que 5". A estudante, além de usar a estratégia de complemento, realizou uma divisão do número maior e justificou sua resposta com o resultado dessa operação.

No que se refere à comparação dos números *13* e *31*, boa parte dos estudantes da escola pública utilizou em alguma das comparações a estratégia de complemento de números, para chegar ao que eles consideravam maior. Por exemplo: “Faltam três números em 31 para chegar ao 34, por isso, o 34 é maior”.

Eduarda (8 anos) conseguiu acertar a comparação, evidenciando em sua resposta o critério de quantidade de algarismos, porém na comparação entre os números 13-31 ela se confundiu e justificou a resposta dizendo que a diferença entre os números é de 16 (a resposta correta é 18), o que é, provavelmente, um equívoco de contagem, e não de compreensão sobre o SND. Acreditamos que isso ocorreu devido à diferença entre os números ser maior, o que a levou a confundir-se, pois nas demais comparações, nas quais a diferença dos números era menor, ela acertou a resposta, utilizando a mesma estratégia.

Os estudantes da escola privada se basearam mais no conhecimento de sucessor, como é explicitado na Figura 3, abaixo.

Figura 3 - Estratégia utilizando o conhecimento de sucessor de Sofia (7 anos)

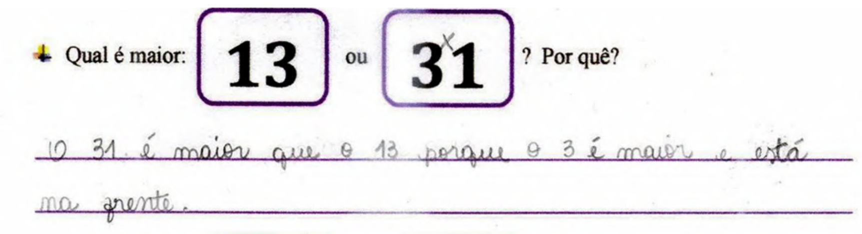


Fonte: banco de dados da pesquisa

Sofia (7 anos) demonstrou conhecimento dos “nós”, conhecimento também apresentado por Bruno (9 anos), ao afirmar que “31 é maior porque é da casa do 30 e 13 é da casa dos 10”.

Isabelle (8 anos) chamou a atenção para a posição dos algarismos. A estudante afirmou que “31 é maior, mas se colocar o 1 ao contrário ele fica menor". Com essa justificativa, podemos perceber que Isabelle tinha conhecimento do valor relativo do algarismo, ou seja, que dependendo da posição que ele ocupa pode ser maior ou menor. Lerner e Sadovsky (1996) classificam essa hipótese como "o primeiro é quem manda" (ver Figura 4).

Figura 4 - Estratégia "o primeiro é quem manda" de Luiza (07 anos)



Fonte: banco de dados da pesquisa

Podemos perceber que a aluna já demonstrava compreender a importância da posição dos algarismos em nosso SND. Utilizando essa mesma estratégia, Matheus (11 anos), ao comparar 13-31, justificou que "31 é maior porque o 3 está na frente e o 1 atrás".

Na comparação entre os números 31-34, a maioria das justificativas apresentadas pelos estudantes nos remeteu novamente à hipótese "o primeiro é quem manda" (LERNER; SADOVSKY, 1996). Luiza utilizou a mesma lógica do posicionamento do número, porém atribuindo valor ao segundo número, devido aos primeiros serem iguais, justificando que "o 4 é maior que o 1 porque o 1 só tem um dedinho e o 4 tem mais".

Podemos perceber que Luiza e Matheus, ambos da escola pública, já compreendiam o valor posicional dos números. Teles, Bellemain e Gitirana (2013, p.02) afirmam que "o domínio pleno da leitura e escrita numérica depende, dentre outros fatores, de entender que a identificação da quantidade representada se baseia tanto no símbolo como na posição que ele ocupa."

Além disso, segundo Lerner e Sadovsky (1996), quando o primeiro algarismo das duas quantidades é o mesmo, é preciso ater-se ao segundo para identificar qual é o maior. Isabelle (8 anos) também observou que o algarismo 3 estava ocupando a casa das dezenas nos dois números e que precisaria identificar na casa das unidades qual seria o número maior. Os demais estudantes justificaram suas respostas através do complemento, da sequência numérica e da posição do número.

Em relação à comparação dos números *99-102*, Pedro (10 anos) explicou que "o 102 é maior porque tem três a mais e passou da dezena para a centena". A resposta do estudante revela que, além de usar o critério de complemento, ele demonstra compreender a mudança entre as ordens e as classes.

Matheus (11 anos) utilizou a lógica de complemento, mas acabou se confundindo no momento de justificar, dizendo que "102 é maior, porque tem um número a mais".

Podemos constatar que, embora os estudantes apresentem diferenças (faixa etária, coleta 2016/2020 e rede de ensino - público/privado), os protocolos não apresentam muitas diferenças (com exceção dos estudantes da Educação Infantil). Foram identificadas estratégias como o critério da posição "o primeiro é quem manda", o da quantidade de algarismos e a estratégia de complemento, sequência, valor relativo quando justificaram as comparações, entre os estudantes das duas redes de ensino, o que nos faz refletir que, de um modo geral, as crianças se valem de conhecimentos sociais e lógico-matemáticos, além dos conhecimentos escolares, para construir suas percepções sobre a produção escrita dos números e suas lógicas. Destacamos que, além das diferenças (faixa etária, ano de coleta, rede de ensino) entre os grupos, podemos comparar estes resultados com os de Lerner e Sadovsky (1996), de pesquisa feita com crianças argentinas nos anos 1990, e percebemos que os resultados se assemelham.

Lerner e Sadovsky (1996) apontam que estabelecer regularidades no SND é uma condição necessária para compreender as regras do SND. Afirmam, ainda, que as vivências do estudante com o sistema influenciam as estratégias de escrita e leitura dos números.

Em consonância com as afirmações dessas autoras, a BNCC (BRASIL, 2017) defende que a aprendizagem da Matemática está diretamente relacionada à compreensão, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, bem como suas aplicações. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano e entre os diferentes temas matemáticos.

Nesse sentido, o ensino fundamental precisa se comprometer com o desenvolvimento do letramento matemático, ou seja, as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente (BRASIL, 2017).

Considerações finais

Nosso estudo, na esteira do de Lerner e Sadovsky (1996), permitiu-nos perceber o uso das diversas estratégias e hipóteses evidenciadas por estudantes na produção da notação numérica e na comparação entre os números.

Assim como no estudo que tomamos como referência, também no nosso as estratégias mais utilizadas pelas crianças foram "o primeiro é quem manda", a influência da numeração falada na produção dos números e o conhecimento dos "nós". Também identificamos outras estratégias para a justificativa das comparações entre os números, tais como a de decomposição de números, o valor absoluto e relativo do número, a ideia de complemento (quanto falta para determinado número) e a ideia de sequência numérica antecessor e sucessor de um número.

Em relação à escrita dos números, foi visto que a maior dificuldade apresentada pelos estudantes foi a escrita do zero como limitador de posição, conhecimento que ainda precisa ser consolidado. A compreensão acerca das dificuldades demonstradas pelos estudantes no processo de numeração escrita possibilita ao professor criar estratégias e momentos que favoreçam sua superação e a consolidação das relações necessárias para a aprendizagem do SND.

No que se refere às possíveis influências que as redes de ensino poderiam ter em relação aos resultados, constatamos que, de um modo geral, os resultados foram parecidos. Como já pontuamos ao longo da discussão, a estudante da Educação Infantil da escola privada apresentou alguns acertos no ditado, se comparada à estudante do mesmo ano escolar da escola pública, que não teve acertos. Isso pode ser justificado pelas vivências familiares ou pelo desenvolvimento individual (já que temos apenas uma estudante de cada grupo, não se pode generalizar), e não apenas pelas vivências escolares. Com a evolução dos anos escolares, os resultados e estratégias apresentados pelos estudantes tornam-se semelhantes.

Compreendendo que o estudante começa a entender o SND antes mesmo de ter seu conhecimento formalizado – uma vez que os números são utilizados no nosso cotidiano e assumem diversos significados, como contagem, valor ou identificação –, cabe ao professor acompanhar e estimular essa aprendizagem, buscando entender as hipóteses criadas pelas crianças e oportunizar a elas situações e reflexões, como as desenvolvidas em nosso estudo, pois acreditamos que são reflexões que podem favorecer as práticas pedagógicas, na mobilização de conhecimentos sobre o SND.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf; acesso em 10 abr. 2018, às 13h15.

COSTA, A.; SANTOS, L.; PESSOA, C. Ditado de números naturais: um estudo com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Anais do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática - EPEM*. Garanhuns, Pernambuco, 2017.

KAMII, C. *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos*. Campinas: Papirus, p. 7-25, 70-98, 1992.

KAMII, C.; LINDA, J. *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética (séries iniciais) implicações da Teoria de Piaget*. Porto Alegre: Artmed, 2005, pp.11-20.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In Cecília Parra e Irma Saiz (Orgs.). *Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 73-155, 1996.

LOURENÇO, E. M. da S.; BAIOCHI, V. T. *Alfabetização Matemática nas Séries Iniciais: O que é? Como fazer?* Revista da Universidade Ibirapuera, São Paulo, v. 4, p. 32-39, jul./dez. 2012.

SÁ, G.; TELES, R. Sistema de Numeração Decimal: dialogo com pesquisas sobre como a criança se apropria da escrita numérica. *Anais do Encontro de Educação Matemática*. Aracajú, Sergipe, 2008.

TELES, R.; BELLEMAIN, P.; GITIRANA, V. *A apropriação da escrita numérica no sistema de numeração decimal*. In: Verônica Gitirana, Rosinalda Teles (org.). Jogos com sucata na Educação Matemática. 1ª ed. Editora Universitária – UFPE. Recife, 2013.

PARTE 2

O ZERO VIRA NOVE!

A saída do pai de Priscila

por Rosinalda Aurora de Melo Teles

Certo dia, Priscila, estudante do 3º do ensino fundamental, estava indo de carona para escola com a mãe de Rebeca, sua colega de turma. Entre risadas e conversas infantis, surge o tema *estudar matemática em casa*. Priscila explica que seu pai é quem lhe ajuda nas tarefas de casa. Naquela semana, o tema das aulas era subtração; mais especificamente algoritmo da subtração. Priscila mostra o caderno com uma conta que ela achou muito difícil: 203 – 127. A principal dificuldade, nesse caso, seria, numa linguagem escolar, *pedir emprestado através do zero*.

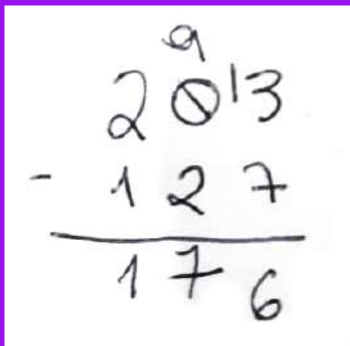
A mãe de Rebeca, bem curiosa, pergunta:

– Priscila, como foi que seu pai explicou essa conta para você?

Ela prontamente respondeu:

– Meu pai disse que o zero vira nove!!! Assim.... apontando para sua tarefa no caderno.

Figura 1 - O zero vira nove



Fonte: arquivo pessoal

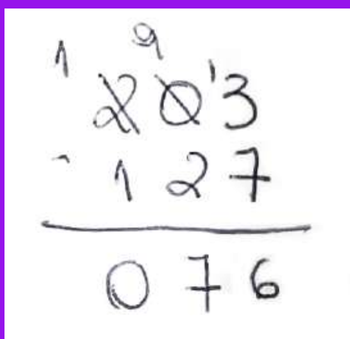
A importância do zero nos sistemas posicionais historicamente remonta aos babilônios, que a princípio não tinham um modo claro de indicar uma posição vazia, pois, embora às vezes deixassem uma coluna vazia, não tinham um símbolo para o zero. Inclusive esse símbolo hindu-arábico foi criado 600 anos depois que todos os outros (do 1 ao 9) já haviam sido criados. Assim, como o zero demorou a ser compreendido e representado pela humanidade, também demora para que as crianças compreendam o zero como uma ausência de quantidade e ao mesmo tempo como um símbolo que ocupa uma ordem vazia no sistema de numeração decimal. Não é simples para a criança entender, por exemplo, que no número 203 há um zero na ordem das dezenas, mas, na verdade, nesse número há 20 dezenas.

Esse episódio nos instiga a refletir sobre vários aspectos. Um deles é sobre a relação entre a família e a escola, mais precisamente sobre o conhecimento e a formação matemática dos pais e as abordagens mais modernas no ensino da matemática escolar. No caso do algoritmo da subtração, atualmente ancorada no método do empréstimo – ou *processo de recurso à ordem superior* – para calcular subtrações. Ao dizer que o nove vira zero, claramente o pai de Priscila buscou uma alternativa para justificar a aplicação do recurso à ordem superior (ou método do empréstimo).

Como discutido em alguns capítulos desse livro, para resolver subtrações com reagrupamentos, quando um ou mais algarismos do minuendo é menor que o do subtraendo, há dois métodos. Um mais antigo, que embora se apoie solidamente em propriedades matemáticas, não é de fácil demonstração para as crianças, chamado método da compensação, que consiste em adicionar quantidades iguais no minuendo e no subtraendo, ou seja, utilizava-se o Teorema da Invariância do Resto: numa subtração, se adicionarmos o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo a diferença não se altera. E o método do recurso à ordem superior ou método do empréstimo ou troca que envolve a decomposição do minuendo a partir do desagrupamento (e reagrupamento) no próprio minuendo. Pode ser representado concretamente, por exemplo, com material dourado e predomina nas propostas metodológicas de livros didáticos atuais. Ou seja, o método utilizado no ensino atualmente consiste na decomposição do minuendo e supõe uma compreensão clara dos valores relativos dos algarismos e do SND de modo geral.

No entanto, a *invenção didática* do pai de Priscila pode resolver parte do problema de pedir emprestado através do zero. Mas ainda faltava dar significado ao restante, pois a técnica correta envolve a decomposição das duas centenas em 20 dezenas; 10 delas são *emprestadas* para a ordem das dezenas que está ocupada pelo zero, depois uma dessas dezenas é decomposta em 10 unidades que são emprestadas para a ordem das unidades, ou seja, *o zero virou nove*, assim, da direita para a esquerda temos 13 unidades – 7 unidades; 9 dezenas – 2 dezenas e finalmente 1 centena – 1 centena.

Figura 2 - Centenas e dezenas são decompostas



Fonte: Arquivo pessoal

Os algoritmos são técnicas engenhosas e que imprimem agilidade e praticidade aos cálculos numéricos. Antigamente quem as dominava levava vantagem em muitas coisas, especialmente em comercializações. Hoje, temos calculadoras dos mais diversos tipos ao nosso alcance, seja nos celulares, no computador ou outros recursos. Resta-nos refletir sobre a angústia do pai de Priscila ao criar essa explicação e também se os próprios professores que ensinam matemática nos anos iniciais compreendem a técnica que ensinam, afinal é um desafio ensinar diferente daquilo que aprendeu. Felizmente o paradigma atual nos instiga a aprender a aprender e até mesmo a desaprender para poder aprender diferente.

Recife, 2013.

CAPÍTULO 3

Estruturas aditivas: estudantes do 5º ano resolvendo problemas de transformação

Ewellen Tenorio de Lima, Arlam Dielcio Pontes da Silva, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Os conhecimentos matemáticos se desenvolvem ao longo do tempo, por meio das experiências vividas e do contato com diferentes conceitos e situações, conforme apontado por Vergnaud (1986). A adição e a subtração são operações trabalhadas desde o início da escolarização e podem ser consideradas como conceitos simples, entretanto, "são conceitos bastante complicados, e até que crianças captem a base conceitual destas operações, elas serão incapazes de usar quaisquer procedimentos que lhes sejam ensinados" (NUNES; BRYANT, 1997, P. 117).

O presente estudo teve como foco os problemas aditivos de transformação, que pressupõem uma relação dinâmica entre quantidades. Nesse tipo de situação, "a partir de uma quantidade inicial e, através de uma ação direta ou indireta, causa-se o aumento ou diminuição" (PESSOA, 2004, p. 41). Contudo, mesmo que as situações nas quais se realiza uma adição ou subtração em um problema no qual o resultado é desconhecido sejam bastante exploradas na sala de aula, os problemas de transformação apresentam diferentes níveis de dificuldades para sua resolução, a depender das quantidades desconhecidas envolvidas nos problemas (resultado, valor inicial ou transformação realizada), bem como dos contextos envolvidos.

À luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), defende-se que a apropriação dos conceitos de adição e subtração acontece por meio do trabalho com as variadas situações que os atribuem sentido. Assim, fazendo uso da classificação de problemas de estruturas aditivas presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) para o 1º e 2º ciclos do ensino fundamental (BRASIL, 1997) – atualmente equivalente aos anos iniciais – investigou-se, em especial, o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino fundamental quando da resolução dos seis tipos de situações que atribuem sentido aos problemas nos quais se trabalha com a ideia de transformação. Buscou-se identificar, também, as principais estratégias utilizadas por esses estudantes na resolução dos problemas propostos, a fim de levantar a natureza dos erros por eles cometidos.

Aporte teórico

Vergnaud (1986) dá destaque ao papel do conhecimento nos processos de ensino e de aprendizagem, adotando uma concepção desenvolvimentista do conhecimento. Para ele, “o saber se forma a partir do problema a resolver, quer dizer, de situações a dominar” (p. 1). Assim, o desenvolvimento (domínio de diferentes conceitos) ocorre ao longo do tempo, através do contato com diferentes problemas. Entende-se por problema “toda situação na qual se precisa descobrir as relações, desenvolver as atividades de exploração, de hipótese e de verificação” (p. 1), ou seja, situações para as quais não se sabe, de imediato, como resolver.

Pessoa e Borba (2009) destacam que Vergnaud distingue o *cálculo numérico* do *cálculo relacional* como diferentes habilidades relacionadas à resolução de problemas, de forma tal que "os *cálculos numéricos* são as resoluções numéricas propriamente ditas. Os *cálculos relacionais* envolvem operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos nas situações" (p. 111). Assim, o cálculo numérico exige do estudante um domínio hábil das operações/algoritmos, enquanto o relacional demanda capacidade de interpretação e compreensão das situações.

Um conceito é definido por Vergnaud (1986) por um tripé dos conjuntos, que são: "S: o conjunto das *situações* que dão sentido ao conceito; I: dos *invariantes* que constituem as diferentes propriedades do conceito; R: das *representações simbólicas* que podem ser utilizadas" (p. 9). A Teoria dos Campos Conceituais remete à importância do contato com situações variadas para que se possa apreender determinado conceito, visto que "as concepções dos alunos são formadas pelas situações que eles tenham encontrado" (p. 2). É importante, portanto, que as diferentes situações que atribuem sentidos aos conceitos sejam exaustivamente identificadas e classificadas por pesquisadores da área, para que esta variedade possa ser trabalhada no ambiente escolar.

Um campo conceitual, conforme Vergnaud (1986), se refere a "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p. 10). A pesquisa aqui apresentada direcionou o olhar às estruturas aditivas, caracterizadas pelo autor como "o conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996, p. 167).

No que se trata desse campo conceitual, corroborando o já apontado anteriormente, Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) afirmam que "a competência para resolver [...] problemas aditivos é desenvolvida num longo período de tempo, o que implica dizer que problemas que envolvem as operações de adição e subtração devem ser trabalhados durante todo o ensino fundamental" (p. 21). Logo, é de suma importância reconhecer as diferentes situações que atribuem sentido a um conceito, a fim de proporcionar a sua apropriação. Existem diferentes classificações referentes aos problemas de estrutura aditiva na literatura. Neste trabalho, foi adotada a classificação presente nos PCN (BRASIL, 1997).

Nos PCN de Matemática, anos iniciais (BRASIL, 1997), foram apresentados quatro grupos de problemas de estrutura aditiva, sendo esses compostos por situações que envolvem as ideias de combinar, transformar, comparar e de compreender mais de uma transformação. O Quadro 1 sintetiza as características de cada um dos grupos de problemas aditivos apresentados nos PCN (BRASIL, 1997).

Quadro 1 - Classificação dos problemas aditivos

Grupo de problemas	Características
Primeiro	"situações associadas à ideia de combinar dois estados para obter um terceiro, mais comumente identificada como ação de 'juntar'" (p. 70).
Segundo	"situações ligadas à ideia de transformação, ou seja, alteração de um estado inicial, que pode ser positiva ou negativa" (p. 70).
Terceiro	"situações ligadas à ideia de comparação" (p. 70).
Quarto	"situações que supõem a compreensão de mais de uma transformação (positiva ou negativa)" (p. 71).

Fonte: Brasil (1997).

É importante destacar, ainda, que cada grupo de problemas citado acima engloba uma diversidade de situações e, "embora a ação em uma classe de problemas seja a mesma, dependendo de quais quantidades são conhecidas e qual é desconhecida, eles se tornarão muito diferentes [...] apresentando diferentes níveis de dificuldade" (VASCONCELOS, 1998, p. 59).

O estudo tratou, em especial, dos problemas inseridos no segundo grupo apresentado no Quadro 1, ou seja, de problemas de *transformação* – e das diferentes situações a eles relacionadas. Tais situações diferenciam-se entre si, a depender do valor desconhecido no problema, sendo a série inicial, a transformação ou o resultado. Além disso, para cada um desses casos foram considerados, ainda, os contextos de acréscimo e decréscimo, trabalhando-se, assim, com seis situações relacionadas aos problemas de transformação. A discussão sobre tais situações será aprofundada mais adiante, na seção de método. É oportuno, no entanto, antes disso, apresentar o que é apontado por documentos oficiais e trabalhos anteriores disponíveis na literatura.

Revisão bibliográfica

Os PCN (BRASIL,1997) orientavam que deveriam ser desenvolvidas, no período de escolarização equivalente aos anos iniciais, habilidades como:

> - Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais;
> - Reconhecimento de que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e de que diferentes operações podem resolver um mesmo problema;
> - Resolução das operações com números naturais, por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos (p. 59).

Quanto aos problemas inseridos no campo conceitual das estruturas aditivas, concordamos com o documento ao afirmar que a construção dos diferentes significados relacionados a esses problemas demanda tempo e se dá por meio da descoberta de diferentes procedimentos de solução, bem como no sentido de este destacar, ainda, que "o estudo da adição e da subtração deve ser proposto ao longo dos dois ciclos

[...] em função das dificuldades lógicas, específicas a cada tipo de problema, e dos procedimentos de solução de que os alunos dispõem" (p. 69). Assim sendo, concordamos que é preciso que se mantenha o trabalho de habilidades aditivas ao longo dos anos iniciais do ensino fundamental, visando proporcionar a oportunidade de que os estudantes desenvolvam estratégias específicas para cada tipo de situação.

Como discutido anteriormente, os PCN (BRASIL, 1997) classificaram os problemas aditivos em quatro grupos, que se distinguem de acordo com a ideia a qual remetem, sendo essas as ideias de combinação, transformação, comparação e situações que exigem a compreensão de mais de uma transformação. São apresentados os seguintes exemplos de situações que envolvem a ideia de transformação/mudança:

> - Paulo tinha 20 figurinhas. Ele ganhou 15 figurinhas num jogo. Quantas figurinhas ele tem agora? (transformação positiva).
> - Pedro tinha 37 figurinhas. Ele perdeu 12 num jogo. Quantas figurinhas ele tem agora? (transformação negativa).
>
> [...]
> - Paulo tinha algumas figurinhas, ganhou 12 no jogo e ficou com 20. Quantas figurinhas ele possuía?
> - Paulo tinha 20 figurinhas, ganhou algumas e ficou com 27. Quantas figurinhas ele ganhou?
> - No início de um jogo, Pedro tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ele perdeu 20 e terminou o jogo com 7 figurinhas. Quantas figurinhas ele possuía no início do jogo?
> - No início de um jogo Pedro tinha 20 figurinhas. Ele terminou o jogo com 8 figurinhas. O que aconteceu no decorrer do jogo? (BRASIL, 1997, p. 70).

Os exemplos acima reproduzidos são, segundo classificação de Carpenter e Moser (1982 *apud* PESSOA, 2004), respectivamente, problemas de mudança com: 1. Resultado desconhecido, situação de acréscimo, 2. Resultado desconhecido, situação de decréscimo, 3. Série inicial desconhecida, situação de acréscimo, 4. Transformação desconhecida, situação de acréscimo, 5. Série inicial desconhecida, situação de decréscimo, 6. Transformação desconhecida, situação de decréscimo. Nesta pesquisa, foram explorados os seis tipos de problemas acima citados.

No âmbito das estruturas aditivas, "os problemas mais difíceis são aqueles de estruturas mais complexas, menos usuais na sala de aula e nos livros didáticos e os que os verbos que dão a informação numérica são semanticamente contrários" (PESSOA, 2004, p. 42). Nesse sentido, Magina *et al.* (2001), afirmam, ainda, que Vergnaud considera os problemas de transformação cujo estado inicial é desconhecido "como os mais difíceis da classe de transformação, porque a solução deles envolve a operação inversa" (p. 48).

Pessoa (2004) realizou uma pesquisa de intervenção com estudantes do 5º ano resolvendo problemas de estruturas aditivas em um pré-teste e em um pós-teste, visando investigar o papel da interação social na superação de dificuldades na resolução desses problemas. Nessa pesquisa, os problemas de mudança/transformação apresentaram percentuais de acertos variados, de acordo com as diferentes situações inseridas nesse grupo de problemas. É válido destacar que os estudantes apresentaram maiores dificuldades nos problemas nos quais a transformação ou a série inicial era desconhecida (em situações de acréscimo), e maior percentual de acertos (91%) quando o resultado era o valor desconhecido e a situação envolveu um acréscimo.

Os problemas que oferecem maior dificuldade para os estudantes, conforme Guimarães (2005), são aqueles que apresentam incongruência entre a operação a ser realizada e as expressões presentes nos enunciados ou que solicitam as transformações e não os estados ou, ainda, quando para a resolução é necessária uma inversão da sequência temporal. Isto dá importância à análise da presença de termos como 'ganhou'/'perdeu' e semelhantes nos enunciados e a relação destas com o tipo específico de problema abordado.

Mendonça, Pinto, Cazorla e Ribeiro (2007) realizaram um estudo diagnóstico com 1803 estudantes, de 1ª à 4ª série (atualmente 2º ao 5º ano), resolvendo 12 problemas de estruturas aditivas. As autoras constataram que estudantes da 4ª série (5º ano) ainda não dominavam os conceitos investigados (que deveriam estar consolidados ao final do 2º ciclo do ensino fundamental, conforme estabelecido nos PCN (BRASIL, 1997)), apresentando dificuldades ao resolver problemas aditivos de estrutura mais complexa.

Doravante, tendo em vista que a pesquisa aqui apresentada foi realizada no segundo semestre de 2016, em contexto de conclusão da disciplina *Números e Operações* no programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, é conveniente que seja feita uma atualização da revisão de literatura para incluir a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), visto que este documento representa o currículo vigente atualmente.

Em seu texto, este currículo destaca que

> o ensino fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento ao letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. [...] Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como forma privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o ensino fundamental (BRASIL, 2017, p. 266).

Desta forma, este documento curricular afirma a necessidade de promover, durante o ensino fundamental, oportunidades de aprendizagem no que diz respeito a um ensino da Matemática pautado não apenas na fixação de exercícios, mas na construção de conhecimentos que desafiem os estudantes e permitam que eles conheçam e desenvolvam diferentes estratégias para resolução de problemas.

No que diz respeito às competências específicas a serem desenvolvidas em Matemática no ensino fundamental, são apontadas, dentre outras, as capacidades de:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, *sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções* [...]; Enfrentar *situações-problema em múltiplos contextos,* incluindo-se situações imaginadas, não diretamente com o aspecto prático-utilitário, *expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens* (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras línguas para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (BRASIL, 2017, p. 267, grifos nossos).

A BNCC (BRASIL, 2017) organiza as orientações referentes às habilidades a serem desenvolvidas em Matemática em cinco unidades temáticas, sendo a de *Números* aquela na qual o foco desta pesquisa se insere. Esta unidade temática tem como objetivo "desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades" (BRASIL, 2017, p. 268).

Especificamente nos anos iniciais, conforme apontado por tal documento, a expectativa referente a esta unidade temática é que os estudantes "resolvam problemas com números naturais [...] envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados" (BRASIL, 2017, p. 268).

É válido ressaltar, ainda, que "em todas as unidades temáticas, a delimitação dos objetivos de conhecimento e habilidades considera que *as noções matemáticas são retomadas, ampliadas e aprofundadas ano a* *ano"* (BRASIL, 2017, p. 276, grifos nossos). Em função disso, reforçamos a escolha pela coleta de dados no 5º ano, momento da escolarização no qual se espera que os estudantes já possuam conhecimentos mais consolidados e tenham atingido as habilidades almejadas no que diz respeito ao tema investigado.

Nesse sentido, foi feito o levantamento dos objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas nos anos iniciais para compreender mais a fundo as orientações sobre o trabalho com as estruturas aditivas na BNCC (BRASIL, 2017). As principais informações referentes a esse levantamento estão organizadas no Quadro 2, no qual uma indicação à progressão e retomada de noções, conceitos e procedimentos é evidente.

Quadro 2 - Estruturas aditivas na BNCC - anos iniciais

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
1º	Construção de fatos básicos da adição	(EF01MA06) Construir fatos básicos da adição e utilizá-los em procedimentos de cálculo para resolver problemas.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)	(EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, *com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar*, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, *utilizando estratégias e formas de registro pessoais.*
2º	Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração	(EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)	(EF02MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, *com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais.*

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
3º	Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação Reta numérica	(EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito. (EF03MA04) Estabelecer a relação entre números naturais e pontos da reta numérica para utilizá-la na ordenação dos números naturais e também na construção de fatos da adição e da subtração, relacionando-os com deslocamentos para a direita ou para a esquerda.
	Procedimentos de cálculo (mental e escrito) com números naturais: *adição e subtração*	(EF03MA05) *Utilizar diferentes procedimentos de cálculo mental e escrito*, inclusive os convencionais, *para resolver problemas significativos envolvendo adição e subtração* com números naturais.
	Problemas envolvendo significados da adição e da subtração: juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades	(EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração *com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo* exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.
4º	Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA03) *Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração*, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado. (EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
5º	*Problemas: adição e subtração* de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita	(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de *adição e subtração com números naturais* e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, *utilizando estratégias diversas*, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Fonte: Brasil (2017).

Nota-se, dessa maneira, que a BNCC (BRASIL, 2017) reforça a defesa do trabalho com os variados significados da adição e subtração, como apontado anteriormente, inclusive pelos PCN (BRASIL, 1997). Isto é, este novo documento de caráter de orientação curricular, reforça a importância de que problemas que abordam os variados significados da adição e da subtração estejam presentes nas discussões em sala de aula para o amplo desenvolvimento do conhecimento das estruturas aditivas nos anos iniciais do ensino fundamental.

Com base no posto até então, são apresentados, na próxima seção, os objetivos do presente estudo.

Objetivos

Geral

Analisar o desempenho de estudantes do 5º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas aditivos de transformação, visando identificar os erros mais comuns e as estratégias utilizadas para resolução dos problemas propostos.

Específicos

- Verificar o desempenho dos estudantes participantes da pesquisa ao resolverem problemas aditivos relacionados a situações de transformação;
- Identificar os erros mais frequentes na resolução dos problemas propostos;
- Analisar as principais estratégias utilizadas e relacioná-las aos erros cometidos.

Método

Os dados apresentados e discutidos no presente texto foram coletados no segundo semestre de 2016 junto a 22 estudantes do 5º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada no Agreste pernambucano. Os participantes do estudo resolveram um teste composto por seis situações-problema envolvendo os diferentes tipos de problemas de transformação/mudança presentes nos PCN (1997) e nomeados segundo classificação de Carpenter e Moser (1982 *apud* PESSOA, 2004) como: resultado desconhecido (acréscimo/decréscimo), série inicial desconhecida (acréscimo/decréscimo) e transformação desconhecida (acréscimo/decréscimo).

O teste proposto foi estruturado de maneira que cada par de problemas semelhantes (cujo mesmo valor é desconhecido, envolvendo as ideias de acréscimo e de decréscimo) envolvesse, em sua resolução, cálculos numéricos com quantidades semelhantes. Desta forma, foi possível comparar o desempenho nesses problemas, investigando se houve diferença neste, quando do envolvimento do contexto de acréscimo ou decréscimo. Os valores dos resultados são baixos porque o nosso objetivo estava centrado no cálculo relacional, muito mais do que no cálculo numérico. Tais problemas são apresentados no Quadro 3.

Quadro 3 - Situações-problema propostas na pesquisa

Valor desconhecido/ contexto	**Situação-problema**
Resultado (acréscimo)	Amanda tinha 25 adesivos em sua coleção e sua mãe lhe comprou mais 12 adesivos. Quantos adesivos Amanda tem agora? (Resposta: 37)
Resultado (decréscimo)	João comprou 37 bombons para ele e seus amigos. Durante a tarde eles comeram 25 bombons. Quantos bombons João ainda tem? (Resposta: 12)

Valor desconhecido/ contexto	Situação-problema
Série inicial (acréscimo)	Bianca tinha alguns lápis. Ela ganhou 9 lápis novos de sua tia e agora tem 22 lápis. Quantos lápis Bianca tinha antes? (Resposta: 13)
Série inicial (decréscimo)	Diogo tinha alguns biscoitos. Ele deu 9 biscoitos a sua irmã e agora tem 13 biscoitos. Quantos biscoitos ele tinha antes? (Resposta: 22)
Transformação (acréscimo)	Cecília tinha 15 bolinhas de gude no começo de uma partida. No fim da partida ela tinha 28 bolinhas de gude. O que aconteceu no decorrer da partida? (Resposta: Cecília ganhou 13 bolinhas)
Transformação (decréscimo)	Rafael tinha 28 pontos no início de uma partida de UNO. No fim da partida Rafael tinha 13 pontos. O que aconteceu no decorrer da partida? (Resposta: Rafael perdeu 15 pontos)

Fonte: elaboração dos autores.

Os principais resultados desta pesquisa, em uma versão preliminar do presente texto, foram previamente apresentados e publicados no VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática (LIMA; SILVA, 2017).

Apresentação e discussão dos resultados

As situações-problema apresentadas na seção anterior foram resolvidas por 22 estudantes com idade média de 11,8 anos, cursando o 5º ano do ensino fundamental em uma escola pública localizada no Agreste pernambucano.

A única situação-problema que não foi deixada em branco por nenhum dos participantes foi a que abordava o problema com resultado desconhecido (acréscimo), sendo este o problema que apresentou maior percentual de acertos. Esse dado reforça o achado de Pessoa

(2004), que indica este como sendo o problema de transformação no qual os estudantes do 5º ano apresentam melhor desempenho. Já as situações de transformação desconhecida (acréscimo) e série inicial desconhecida (acréscimo) não foram solucionadas por três estudantes, cada. A média de acertos no teste foi de 2,77 pontos (sendo o máximo de 6 pontos). O desempenho em cada problema proposto pode ser conferido na Tabela 1:

Tabela 1 - Desempenho por tipo de problema

Situação-problema	Acertos (%)
Resultado desconhecido - acréscimo	68,2
Resultado desconhecido - decréscimo	50,0
Transformação desconhecida - acréscimo	36,4
Transformação desconhecida- decréscimo	36,4
Série inicial - acréscimo	27,3
Série inicial - decréscimo	59,1

Fonte: elaboração dos autores.

A partir da realização de análises estatísticas com o auxílio do *software* Statistical Package for the Social Sciences (SPSS), foi possível constatar que, no geral, não houve diferença significativa no desempenho em função da situação se referir a um acréscimo ou decréscimo. Ao comparar o desempenho em função do problema tratar de acréscimo ou decréscimo, dentro de cada grupo de problemas, foi observada diferença significativa apenas nos problemas de série inicial desconhecida. Dessa forma, a operação a ser realizada não teve grande influência no desempenho apresentado pelos estudantes participantes da pesquisa e sim a natureza do valor desconhecido em cada uma das situações-problema propostas.

Analisando os dados da Tabela 1 por grupo de problemas, é possível observar que as situações-problema com resultado desconhecido tiveram média de acertos mais alta, enquanto os problemas cujas transformações são desconhecidas apresentaram desempenho médio mais baixo. Entre esses grupos de problemas houve diferença significativa nos desempenhos, entretanto, não foi observada diferença significativa no desempenho dos problemas de resultado desconhecido em relação aos problemas de série inicial desconhecida, nem entre o desempenho nos problemas de transformação desconhecida e nos de série inicial desconhecida.

Os problemas cujas séries iniciais são desconhecidas exigem operações inversas, assim, a situação de acréscimo exige o uso de uma subtração, enquanto a situação de decréscimo é resolvida por meio de uma adição. Os próprios enunciados desses problemas apresentam termos que geralmente são associados à operação inversa àquela esperada para a resolução correta. No problema de série inicial desconhecida (acréscimo) proposto (ver Quadro 2) o termo 'ganhou' pode ter induzido o uso de adição. Tal hipótese poderia explicar o baixo desempenho apresentado (principalmente no problema que envolve a situação de acréscimo). Algo semelhante foi observado na pesquisa de Pessoa (2004), que obteve 35%, de acertos para série inicial (acréscimo), sendo o segundo menor percentual observado (transformação desconhecida em situação (acréscimo) tendo 32% de acertos).

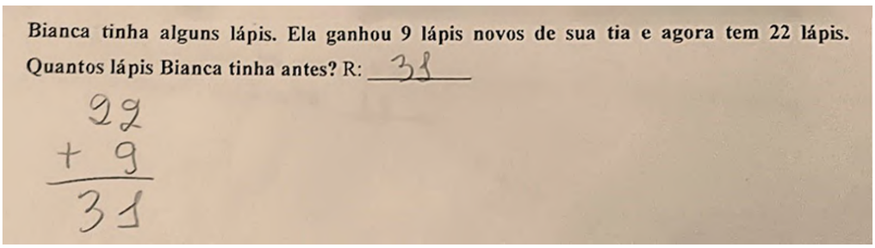
Situações-problema nas quais a transformação é desconhecida exigem sempre a realização de uma subtração e não foi observada diferença de desempenho a depender do contexto abordado (acréscimo/decréscimo).

Era esperado que os problemas com resultado desconhecido apresentassem maior percentual de acertos, visto que a situação de acréscimo exige a realização de uma adição e o contexto de decréscimo exige uma subtração, podendo, assim, promover mais fácil compreensão do problema, o que facilita a realização do cálculo relacional.

Como posto anteriormente, os problemas com série inicial (acréscimo) e ambos os problemas com transformações desconhecidas foram aqueles que apresentaram maiores percentuais de erros quando da resolução do teste aplicado. Tal resultado era esperado, dado o que é apontado em estudos anteriores. Discutem-se, a seguir, as estratégias que levaram ao baixo desempenho em tais problemas.

A situação-problema que apresenta série inicial desconhecida (acréscimo) apresentou 13 erros (dos 22 estudantes participantes). Destes, 61,5% foram motivados pelo uso de uma adição para resolução do problema, ou seja, o uso da operação inversa, caracterizando, assim, um erro de cálculo relacional (Figura 1). É válido notar que no enunciado deste problema em específico existe a palavra '*ganhou*', o que, de acordo com a literatura, pode ter influenciado a escolha do uso da adição e o erro em questão. 7,7% dos participantes que erraram tal questão realizaram uma subtração, o mesmo percentual utilizou uma multiplicação. Os outros 23,1% dos erros estão relacionados a questões que apresentam apenas resposta final, sem registro da operação realizada.

Figura 1 - Erro de cálculo relacional: uso da operação inversa - P20

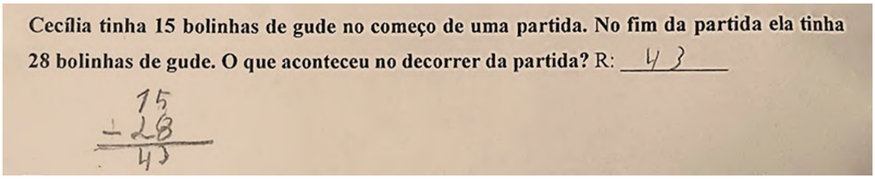

Bianca tinha alguns lápis. Ela ganhou 9 lápis novos de sua tia e agora tem 22 lápis. Quantos lápis Bianca tinha antes? R: 31

$$\begin{array}{r} 22 \\ +\ 9 \\ \hline 31 \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa.

Quanto à situação-problema cuja transformação desconhecida (acréscimo), foi observado um total de 11 erros, sendo 54,5% destes ocasionados pelo uso de uma adição, 18,2% provocados pelo uso de subtração incorreta, 9,1% pelo uso de multiplicação e 18,2% apresentando apenas resposta. Assim, tanto o erro de cálculo numérico quanto do relacional aparecem como potenciais fatores que explicam o baixo desempenho observado nesse problema (Figura 2).

Figura 2 - Erro de cálculo numérico - P19


Cecília tinha 15 bolinhas de gude no começo de uma partida. No fim da partida ela tinha 28 bolinhas de gude. O que aconteceu no decorrer da partida? R: 43

15
+28
43

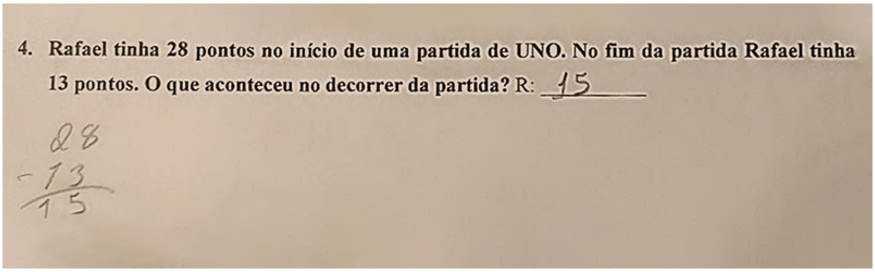
Fonte: dados da pesquisa.

Por fim, no problema de transformação desconhecida (decréscimo) foram observados 12 erros, sendo 41,7% relacionados ao uso de uma adição, 25% ao uso de subtração incorreta e 33,3% apresentando apenas resposta.

Foi possível notar que o baixo desempenho em certos problemas deveu-se, principalmente, a erros de cálculo, tanto relacional quanto numérico. Entretanto, é importante destacar que os erros de cálculo relacional foram identificados mais vezes no presente estudo.

Vale ressaltar, ainda, que nos problemas cujas transformações são desconhecidas não houve explicitação, por parte dos estudantes, da transformação ocorrida. Em grande parte das vezes, foi apresentada apenas resposta numérica, não deixando claro se houve compreensão dos contextos de ganho e perda (Figura 3).

Figura 3 - Realização da operação correta sem explicitação de situação de ganho ou perda - P17



4. Rafael tinha 28 pontos no início de uma partida de UNO. No fim da partida Rafael tinha 13 pontos. O que aconteceu no decorrer da partida? R: 15

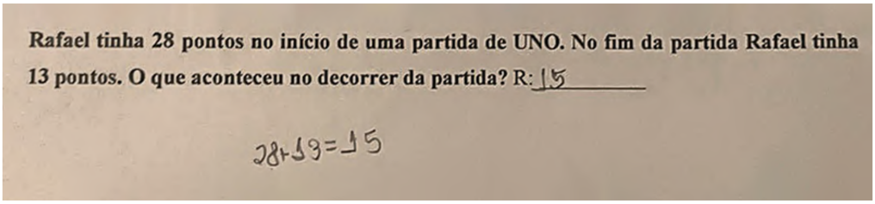
$$\begin{array}{r} 28 \\ -13 \\ \hline 15 \end{array}$$

Fonte: dados da pesquisa.

O teste foi entregue para que os estudantes o resolvessem e o devolvessem aos pesquisadores. Foi solicitado que, além da resposta final, os estudantes registrassem as operações utilizadas para a resolução de cada problema. Ainda assim, algumas resoluções não apresentam registro algum além da resposta final, não havendo explicação da estratégia utilizada.

Durante a aplicação do teste foi possível perceber como a resolução dos problemas foi conduzida pelos participantes da pesquisa. Muitos deles resolveram os problemas utilizando cálculo mental, registros não convencionais (no próprio caderno) e até mesmo os dedos. Os mesmos apresentaram resistência em registrar estratégias na folha de teste e, somente após a solicitação do registro, alguns dos estudantes explicitaram a operação aritmética utilizada. Por esse motivo, foram encontradas situações como a apresentada na Figura 4, na qual a resposta correta para o problema é encontrada, porém é registrada uma operação incorreta, o que leva à inferência de que o registro foi construído posteriormente ao uso de cálculo mental que embasou a resposta dada.

Figura 4 - Registro de operação inadequada à resposta dada - P6


Rafael tinha 28 pontos no início de uma partida de UNO. No fim da partida Rafael tinha 13 pontos. O que aconteceu no decorrer da partida? R: 15

28+13=15

Fonte: dados da pesquisa.

A seguir são apresentadas algumas considerações levantadas a partir do desenvolvimento da pesquisa aqui relatada.

Considerações finais

A partir da análise dos dados coletados no estudo desenvolvido em uma turma composta por 22 estudantes do 5º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada no Agreste pernambucano foi possível perceber que a hipótese levantada inicialmente foi confirmada. A referida hipótese era de que os problemas cujos resultados são desconhecidos apresentariam maiores percentuais de acerto quando resolvidos pelos participantes da pesquisa e foi levantada com base em estudos como os de Magina *et al.* (2001), Pessoa (2004), Guimarães (2005) e Mendonça *et al.* (2007). Tais problemas são mais comumente trabalhados na sala de aula e exigem a realização de uma adição (quando o contexto sugere acréscimo) e uma subtração (quando traz a ideia de decréscimo), facilitando a compreensão do enunciado do problema e minimizando erros de cálculo relacional.

No que diz respeito aos erros mais presentes na resolução dos problemas propostos, destacamos a dificuldade de compreensão das situações apresentadas nos problemas, visto que a falta de clareza quanto às mesmas pode levar a erros de cálculo relacional, muito observados no presente trabalho. Além disso, erros de cálculo numérico foram bastante frequentes, geralmente relacionados a registros posteriores das estratégias, motivados pela resistência por parte dos estudantes em produzir registros escritos que esclarecessem o processo de resolução das situações-problema. Essa dificuldade em produzir registros escritos pode ser superada em estudos posteriores com a realização de entrevistas com os estudantes para que eles possam expressar verbalmente as estratégias utilizadas na resolução dos cálculos.

Os resultados encontrados reafirmam dados levantados em pesquisas anteriores e, corroborando prescrições presentes em documentos curriculares, evidenciam a importância do trabalho com as variadas situações que atribuem sentido aos conceitos de adição e de subtração no âmbito escolar. É oportuno ressaltar, assim, a defesa de que somente um ensino que explore os problemas aditivos em seus diversos sentidos e contextos poderá proporcionar a sua adequada apropriação pelos estudantes.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular* - BNCC. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática – 1º e 2 ciclos do Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/SEF, 1997.

GUIMARÃES, S. D. A resolução de problemas de estrutura aditiva de alunos de 3ª série do ensino fundamental. *Publicação da 28ª Reunião Anual da* ANPED, 2005.

LIMA, E.; SILVA, A. Estruturas aditivas: problemas de transformação no 5ª ano do Ensino Fundamental. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática – VII CIEM. *Anais*... Canoas, 2017.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V.. *Repensando adição e subtração:* contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: Proem, 2001.

MENDONÇA, T. M.; PINTO, S.; CAZORLA, I.; RIBEIRO, E. As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. n.10, p. 219-239, 2007.

NUNES, T.; BRYANT, P.. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, C.. Interação social uma análise do seu papel na superação de dificuldades em resolução de problemas aditivos. *Infocus*, n. 4, p. 40-52, 2004.

PESSOA, C.; BORBA, R.. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, v. 17, n. 31, 2009.

VASCONCELOS, L. Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticas de ensino. In: SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David (orgs.). *A compreensão de conceitos aritméticos*. São Paulo: Papirus, p. 53-72, 1998.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, Jean (org.). *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, p.75-90, 1986.

CAPÍTULO 4

Uma proposta de ensino das estruturas aditivas baseada na resolução de problemas e no cálculo mental

Emilly Rayane Moura Diniz Santos, Waleska Stefany Moura Diniz, Amanda Regina dos Santos Andrade e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Este estudo surgiu na vivência de uma experiência de ensino no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da UFPE/Curso de Pedagogia no ano de 2017. O Programa visava proporcionar aos discentes de cursos de licenciatura a vivência no cotidiano das escolas públicas e do contexto em que estão inseridas, através de atividades de planejamento e execução de aulas na educação básica. Essa pesquisa se desenvolveu numa escola municipal localizada na cidade de Recife, em uma turma do 5° ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, composta por 21 estudantes, sendo dois deles identificados com deficiência intelectual e dificuldades de aprendizagem.

O estudo objetiva discutir o desenvolvimento de compreensões acerca das estruturas aditivas através de uma proposta de ensino que estimula a resolução de problemas e a estratégia do cálculo mental a partir de situações provocadas pelo uso de literatura infantil e jogos[1]. Propomos discutir o desenvolvimento do raciocínio relacional e numérico a partir de situações-problema do campo aditivo, analisar o processo de resolução de problemas a partir de situações promovidas pela literatura infantil e investigar o uso do cálculo mental e as estratégias de contagem desenvolvidas pelos estudantes a partir de situações-problema presentes em jogos.

Nesse texto, serão apresentados os elementos conceituais que embasam o ensino das estruturas aditivas, a presença da metodologia de resolução de problemas, do uso do cálculo mental, bem como das contribuições da literatura infantil e dos jogos no ensino de Matemática.Por fim, articularemos tudo isso com o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido para os estudantes da educação básica, elencando as dificuldades e estratégias empregadas para transposição desses obstáculos.

O ensino das estruturas aditivas e a resolução de problemas

Fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), esse estudo discute o campo conceitual aditivo, dialogando com uma metodologia de ensino baseada na Resolução de Problemas. Essa perspectiva metodológica contribui de forma significativa para a construção dos conceitos envolvidos nessas operações, além de possibilitar que os estudantes estabeleçam lógicas próprias ao significar o processo de resolução. É nesse sentido, que daremos ênfase ao uso do cálculo mental, desenvolvendo variadas estratégias de contagem, no processo de aprendizagem do campo conceitual das estruturas aditivas.

A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) define campo conceitual como uma interação entre um conjunto de conceitos e um

1 Outra análise dos dados discutidos neste capítulo foi publicada no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM), em 2017.

conjunto de situações cuja compreensão necessita do domínio desses conceitos. Nesse sentido, Vergnaud (1990) concebe um tripé de aspectos que estão estreitamente relacionados na construção do conceito: 1) o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; 2) o conjunto de invariantes consideradas como as propriedades lógico operatórias; e 3) o conjunto de símbolos que permitem representar os conceitos, as propriedades, as situações e os procedimentos. Assim, um conceito não se desenvolve de modo isolado, mas a partir da relação com outros conceitos, através de campos conceituais, numa variedade de contextos, procedimentos e representações simbólicas. Dessa maneira, os conceitos de adição e subtração se relacionam através das situações, propriedades, operações de pensamento e representação, constituindo o campo conceitual das Estruturas Aditivas.

O campo conceitual das estruturas aditivas é entendido como "o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, ou uma combinação destas operações, e também como o conjunto dos conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (VERGNAUD, 1990, p.9). No campo conceitual das Estruturas Aditivas estão envolvidos conceitos como: número, adição, subtração, medidas, comparação, transformação e combinação.

Carpenter e Moser (1982) também classificam os problemas aditivos em quatro tipos básicos de problemas ao observarem fatores de ordem semântica, que se subdividem em dezesseis subcategorias dependendo do valor desconhecido na situação-problema.

1. *Problemas que envolvem combinação:* esses problemas apresentam um relacionamento estático entre duas quantidades e suas partes com as seguintes variações:
   - Combinação - todo desconhecido
   - Combinação - parte desconhecida

2. *Problemas que envolvem mudança:* esses problemas apresentam um relacionamento dinâmico na medida em que, a partir de uma quantidade inicial, e, através de uma ação direta ou indireta, causa-se um aumento ou diminuição na mesma. Elas apresentam as seguintes variações:

   - Mudança - resultado desconhecido - situação de acréscimo
   - Mudança - resultado desconhecido - situação de decréscimo
   - Mudança - transformação desconhecida - situação de acréscimo
   - Mudança - transformação desconhecida - situação de decréscimo
   - Mudança - série inicial desconhecida - situação de acréscimo
   - Mudança - série inicial desconhecida - situação de decréscimo

3. *Problemas que envolvem igualização:* esses problemas envolvem o mesmo tipo de ação encontrada nos problemas de mudança, porém apresentam também uma comparação envolvida. Problemas de igualização envolvem a mudança de uma quantidade para que as duas venham a ter a mesma quantidade ou o mesmo número de atributos. Apresentam as seguintes variações:

   - Igualização - acréscimo na quantidade menor
   - Igualização - decréscimo na quantidade maior

4. *Problemas que envolvem comparação:* esses problemas envolvem a comparação entre duas quantidades, em que a diferença entre duas quantidades precisa ser encontrada. Diferente dos problemas de mudança e de igualização, que envolvem uma dinâmica, esses são estáticos. Apresentam as seguintes variações:

   - Comparação - diferença desconhecida - termo a mais
   - Comparação - diferença desconhecida - termo a menos
   - Comparação - quantidade menor desconhecida - termo a mais
   - Comparação - quantidade menor desconhecida - termo a menos

- Comparação - quantidade maior desconhecida - termo a mais
- Comparação - quantidade maior desconhecida- termo a menos

Vergnaud (1990) aponta que o primeiro contato com um campo conceitual é a partir das situações e depois com os conceitos e os teoremas. As situações apresentam relações com a realidade dando significado aos conceitos, e assim é através da resolução das situações e dos problemas que um conceito adquire sentido para a criança. Segundo o autor, para ampliar a perspectiva conceitual é necessário desenvolver a competência do cálculo relacional, que se refere a compreensão das relações envolvidas na operação, capacitando para a escolha da operação adequada ao problema, bem como a competência para o cálculo numérico que envolve as resoluções dos algoritmos ou outros procedimentos operatórios.

Por muito tempo as escolas enfatizaram o ensino de técnicas operatórias e dos algoritmos, deixando de lado a compreensão dos conceitos e propriedades presentes nas operações. Defendemos que não é suficiente realizar as operações, se não compreendemos as ideias matemáticas ali presentes; como apontado na publicação do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) – Operações na resolução de Problemas (BRASIL, 2014), pouco adianta a um estudante saber realizar a "conta", ou seja, saber utilizar o algoritmo, "se não souber desenvolver estratégias que lhe permitam resolver um problema que tenha sido solicitado em sala de aula ou na própria vida fora da escola" (p. 7).

Considerando essas contribuições, a metodologia de Resolução de Problemas destaca-se como potencializadora da compreensão conceitual das operações, pois ela possibilita estabelecer diferentes relações com o objeto através da construção de estratégias e lógicas próprias que permitirão ao estudante dar significado aos procedimentos e técnicas de resolução, construindo e consolidando conceitos envolvidos nessas operações.

A perspectiva metodológica de Resolução de Problemas se baseia no uso de problemas matemáticos, a publicação PNAIC – Operações na resolução de Problemas (BRASIL, 2014) define que um problema não é um exercício ao qual o estudante aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório, salientando que só há problema quando o estudante é levado a interpretar o enunciado da questão proposta e a estruturar a situação que lhe foi apresentada (p. 8). Nesse sentido, um problema matemático é uma situação em que se faz necessário estabelecer relações entre as informações apresentadas para obter o resultado a partir da construção de uma solução. Assim, é nesse processo de construção da solução que o estudante dá sentido aos cálculos e às operações.

Nesse sentido, faz-se necessário ao estudante desenvolver estratégias de resolução que o auxiliem na busca da solução. Orrantia (2000) e Orrantia et al. (2002) discutem os procedimentos e estratégias de contagem utilizadas pelos estudantes para a resolução de problemas do campo aditivo, apontando que é a partir da interação com diferentes situações ou procedimentos que os estudantes evoluem de estratégias de contagem mais simples, como contar todos, até estratégias mais maduras, como a recuperação da memória. As estratégias identificadas pelos autores são:

- Contar todos: o estudante representa todas as parcelas, por exemplo, em 4 + 5, usa os dedos das mãos representando em uma mão quatro dedos, e na outra, cinco dedos, para contar todos;
- Contar a partir do primeiro: o estudante percebe que não precisa contar a primeira parcela, por exemplo, em 3 + 6, retém na memória o primeiro número (3) e estende a contagem para o número seguinte da sequência (4, 5, 6, 7, 8, 9), considerando o quantitativo presente na segunda parcela (6);
- Contar a partir do maior: o estudante percebe que iniciar a contagem pela parcela maior torna o processo mais rápido e com

chances menores de erro, por exemplo, em 2 + 5, retém a parcela maior (5) na memória e adiciona a parcela menor (2) contando os números seguintes da sequência (6,7).

- Usar fatos derivados ou decompor: o estudante decompõe uma das parcelas em um numeral que achar mais fácil, realiza a operação e depois acrescenta os números que faltam, por exemplo, em 7 + 5, decompõe o 7 em 5 + 2, agrupa o 5 + 5 = 10 e acrescenta os 2;
- Recuperar fatos básicos da memória ou recuperação direta: o estudante busca uma resposta automática na memória de longo prazo a partir de fatos memorizados, por exemplo, a tabuada.

Entendemos que a escola deve contribuir para o uso de diferentes estratégias de contagem, levando os estudantes a desenvolverem lógicas próprias que permitam construir estratégias mais maduras sobre contagem. Além das estratégias de contagem, existem diversas estratégias de resolução de operações convencionais e não convencionais, como o uso da calculadora, do lápis e do papel, dos dedos, de materiais concretos ou do cálculo mental.

No dia a dia é muito comum as pessoas realizarem mentalmente um cálculo chegando a um resultado ou estimando um valor aproximado, como por exemplo, para saber quanto vai gastar na cantina, o estudante não usa o algoritmo. Sem lápis e papel, ele faz aproximações, decompõe e alcança o resultado com bastante segurança. Porém, por muito tempo o cálculo mental foi considerado uma prática inadequada, pois se acreditava que a economia de etapas e a rapidez na resolução de problemas fossem os principais objetivos a serem alcançados, dessa maneira, a escola preconizava o ensino dos algoritmos para realização das operações.

Compreendemos que o uso de fórmulas permite organizar o raciocínio, registrá-lo, lê-lo e chegar à resposta exata, entretanto, fixar o aprendizado somente nessa estratégia leva o estudante a conhecer apenas uma prática e a realizá-la de modo automático, enquanto o uso do cálculo mental, além de ser um procedimento ágil, permite à criança ser ativa e criativa na escolha dos caminhos para chegar ao valor final. É o que afirma Parra (1996), ao dizer

> (...) se busca que os alunos encontrem uma maneira de fazer Matemática que não se reduza a usar algoritmos e produzir resultados numéricos, mas que inclua analisar os dados, estabelecer relações, tirar conclusões, ser capaz de fundamentá-las, provar o que se afirma de diversas maneiras, reconhecer as situações em que não funciona, estabelecer limites de validade do que se encontrou. (p. 198)

Dessa maneira, entende-se que os dois procedimentos são importantes e devem ser desenvolvidos paralelamente, pois o objetivo é possibilitar ao estudante, cada vez mais, recursos para chegar ao resultado das operações com segurança e compreendendo sua resolução.

Nesse sentido, defendemos que aprender sobre as operações envolve construir estratégias e resolver diferentes problemas e operações. Porém, é importante ressaltar que a compreensão de conceitos próprios a essas operações "requer coordenação com os diferentes sistemas de representação, o que torna clara a importância da interação da criança com diferentes formas de registros, dentre eles, os numéricos" (BRASIL, 2014, p. 43).

O nosso sistema de numeração, o hindu-arábico, também chamado de Sistema de Numeração Decimal – SND, se diferencia dos demais pelo fato de o valor de um símbolo ser determinado pela posição que ocupa, ou seja, é "um sistema posicional, uma vez que um mesmo símbolo representa diferentes posições dependendo da posição que ocupa no número" (TELES; BELLEMAIN; GITIRANA, 2013, p. 146).

O Sistema de Numeração Decimal se baseia no uso do algoritmo tradicional que além de ampliar a compreensão sobre o próprio sistema, permite a realização de cálculos de maneira ágil. Diversos recursos podem auxiliar no processo de aquisição do SND, da compreensão dos algoritmos tradicionais e do valor posicional do número, como o material dourado, o ábaco e o Quadro Valor Lugar, além de diversos tipos de materiais manipulativos e jogos (como o Troca Troca). Nesse contexto, Teles, Bellemain, Gitirana (2013), afirmam que

> O domínio pleno da leitura e escrita numérica depende, entre outros fatores, de entender que a identificação da quantidade representada se baseia tanto no símbolo como na posição que ele ocupa. Nesse sentido, a memorização simples do símbolo não é suficiente para ler, interpretar e representar quantidades. (p. 144)

Teles, Bellemain, Gitirana (2013), vão apontar que este sistema de numeração se organiza por agrupamentos de 10, sendo um sistema de base 10; por exemplo, as três primeiras posições ou ordens (unidade, dezena e centena) são formadas por agrupamentos de 10, e "cada 'nova' ordem é formada pelo agrupamento de 10 da ordem anterior. Assim, uma dezena é formada por 10 unidades, uma centena é formado por 10 dezenas" (p. 144). Mas além de ser um sistema de base 10, é também de base 1000; pois a partir da quarta ordem (unidade de milhar), os números passam a ser agrupados em classes, assim cada 3 ordens formam uma classe, a primeira é a das unidades, a segunda a do milhar, a terceira a do milhão, etc.

As contribuições da literatura infantil e dos jogos no ensino de matemática

A Matemática está a todo momento presente em nossa vida, em nosso cotidiano, em nosso meio social, seja de maneira informal ou de forma tradicional, por meio do seu uso direto ou por meio de relações. Apesar disso, seu ensino sempre foi motivo de medo entre muitos professores e alunos, dando a essa disciplina um aspecto negativo.

Esse fato dificulta aspectos educacionais como o processo de ensino e aprendizagem e mesmo a relação professor/aluno.

Rêgo e Rêgo (2000) destacam a importância da introdução de novas metodologias de ensino no cenário educacional. Metodologias essas, que despertem a curiosidade e o desejo do aluno em estudar coletivamente, e em ser sujeito ativo de sua aprendizagem. Entendemos que aprender Matemática vai além da execução de técnicas e cálculos, já que para promover a interiorização de conceitos, a Matemática deve fazer sentido para o aluno, e por esse motivo, deve-se criar momentos para que ele possa identificar as relações e conceitos matemáticos dessas situações, usar o raciocínio matemático para a compreensão do mundo que o cerca e avaliar a adequação dos resultados obtidos na solução de situações-problema.

Acreditamos que a literatura infantil nas aulas de Matemática permite uma mudança significativa no ensino e na construção de conhecimento pelos estudantes, haja vista que a relação da Matemática com a língua materna potencializa a linguagem matemática ao dotar de sentido essas relações. Entendemos que muitas vezes o ensino de Matemática promove uma relação distante, desarticulada e fragmentada da realidade do estudante, e que a literatura oferece elementos da realidade para a construção dessas compreensões (YUNES; PONDÉ, 1989).

Ainda sobre as potencialidades da literatura infantil, Smole (2000) destaca que a linguagem e a Matemática possuem uma relação de complementaridade, na medida em que a Matemática toma emprestada da linguagem, a oralidade, que dá suporte de significação para o aprendizado da Matemática. A autora ainda atribui à linguagem dois papéis em relação à Matemática que são: o estabelecimento de relações entre o pensamento e a palavra, ligando as ideias matemáticas às suas representações; e sua aplicação na Matemática, pois considera que os elos do raciocínio matemático estão apoiados na organização sintática e no poder dedutivo da língua.

Acerca das potencialidades do jogo, Grando (2000) afirma que

> O jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas na medida em que possibilita a investigação, ou seja, a exploração do conceito através da estrutura matemática subjacente ao jogo e que pode ser vivenciada pelo aluno, enquanto ele joga, elaborando estratégias e testando-as a fim de vencer o jogo.(p. 32)

Dessa maneira, salientamos que o uso dos jogos permite que os estudantes realizem cálculos e resolvam problemas a partir de situações lúdicas que se assemelham às brincadeiras, mas perpassadas por uma intencionalidade pedagógica que visa sistematizar os conhecimentos a serem construídos. O jogo ainda permite avaliar de forma contínua o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes, pois como afirma Moura e Viamonte (2006), trabalhar com jogos matemáticos possibilita ao professor detectar as dificuldades e os avanços apresentados pelos estudantes.

Desse modo, podemos afirmar que a literatura infantil e os jogos pedagógicos podem ser considerados, além de recursos e estratégias de ensino, também como instrumento de avaliação, uma vez que, por meio dele, o professor pode observar a aplicação de conceitos em um contexto diferenciado. Porém utilizar esses recursos em sala de aula exige do professor metodologias que possam explorar ao máximo esses recursos e suas potencialidades para o ensino da Matemática de modo que favoreçam o desenvolvimento dos estudantes, com suas especificidades de aprendizagem.

Desenvolvendo conceitos das estruturas aditivas através da literatura infantil e dos jogos

Este estudo discute o desenvolvimento de compreensões acerca das estruturas aditivas, especificamente, o raciocínio relacional e numérico, a partir da resolução de problemas, do uso do cálculo mental e das estratégias de contagem promovidos pela literatura infantil e por jogos. Através de um recorte das atividades desenvolvidas em uma sequência didática aplicada no período de estágio do PIBID/MATEMÁTICA, são apresentados e analisados três momentos da sequência didática referentes ao uso da literatura infantil "*Quem ganhou o jogo?*" de Ricardo Dreguer (2011) e dos jogos "*Cobre Tabuleiro* e *Troca Troca*" de Souza et al. (2008).

Participaram dessa pesquisa 21 estudantes de uma turma do 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal da cidade do Recife. Dois estudantes dessa turma são pessoas com deficiência cognitiva e apresentavam dificuldades de aprendizagem, entretanto realizaram as mesmas atividades que os demais colegas de turma.

A literatura infantil Q*uem ganhou o jogo?* conta a história de Lucas, uma criança com deficiência física que pilota uma cadeira de rodas amarela. Inicialmente muito solitário, Lucas encontra bons amigos e com eles soluciona problemas matemáticos em diversas situações, inclusive em um jogo de basquete, em que utilizaram a Matemática para ganhar o jogo. Além de explorar as estruturas aditivas a partir da resolução de problemas e de estratégias não convencionais de resolução, o livro ainda permite discutir o processo de inclusão dos estudantes com deficiência nas aulas regulares e a importância da amizade no desenvolvimento afetivo e cognitivo.

Para a leitura do livro *Quem ganhou o jogo?* (DREGUER, 2011), os estudantes foram divididos em duplas. Receberam papel ofício e materiais manipulativos - potes com bolinhas coloridas e cartões de figurinha para auxiliar o processo de resolução de problemas do campo aditivo apresentados no livro, permitindo o desenvolvimento de estratégias convencionais e não convencionais de resolução. A leitura do livro foi perpassada por perguntas de compreensão do texto (BRANDÃO; ROSA, 2010), que compreende as perguntas de ativação de conhecimentos prévios, de previsão sobre o texto; literal ou objetivas; inferenciais; e, subjetivas; realizadas antes, durante e depois da leitura.

Figura 1- Livro *Quem ganhou o jogo?*

Fonte: Dreguer (2011)

O livro *Quem ganhou o jogo?* apresenta quatro problemas explícitos de estruturas aditivas, mas possibilita a criação de diversas outras situações-problema, porém nessa experiência iremos explorar apenas as situações explícitas no texto. O quadro 1 apresenta as situações-problema e sua classificação a partir dos estudos de Carpenter e Moser (1982):

Quadro 1 - Situações-problema presentes no livro *Quem ganhou o jogo?*

Situações-problema	**Classificação**
Lucas tem um pote com 20 bolinhas e Paulo um com 16 bolinhas. Quantas bolinhas os dois potes têm juntos?	Combinação – Todo desconhecido
Lucas tinha 28 figurinhas, mas perdeu 10 para Paulo. Com quantas figurinhas ele ficou?	Mudança – resultado desconhecido – situação de decréscimo
Em um jogo de basquete, Lucas, Paulo e Priscila fizeram duas cestas de 3 pontos, mas perderam 4 pontos em passes. Com quantos pontos eles ficaram?	Mudança – resultado desconhecido – situação de decréscimo

Situações-problema	Classificação
Na outra rodada, Lucas, Paulo e Priscila fizeram 28 pontos, mas só 18 pontos foram válidos. Quantos pontos eles perderam?	Mudança – transformação desconhecida – situação de decréscimo

Fonte: elaboração das autoras

O momento da leitura se inicia com a apresentação do livro e ativação dos conhecimentos prévios dos estudantes, incentivando-os a fazer previsões sobre a temática do livro a partir do título e da capa. Durante a leitura do livro, foram realizadas quatro pausas para a resolução das situações-problema. Os estudantes eram instruídos a resolverem os problemas da maneira livre. Na primeira situação-problema, as duplas receberam papel ofício e dois potes contendo bolinhas coloridas (1° pote: 20 bolinhas, 2° pote: 16 bolinhas); na segunda situação-problema foram entregues papel ofício e vinte e oito cartões de figurinha; na terceira e quarta situações-problema foram entregues papel ofício para que, semelhante ao que as crianças faziam no livro, cada ponto marcado fosse simbolizado no papel pelo desenho de uma bola e para cada ponto perdido as bolas fossem riscadas com X. Após a resolução de cada problema, a leitura da história continuava apresentando as estratégias utilizadas pelos personagens para resolver os mesmos problemas.

Durante a realização dessa atividade os estudantes preferiram utilizar as estratégias não convencionais de resolução, recorrendo ao uso dos materiais manipulativos que receberam, construindo suas soluções a partir do estabelecimento de relações entre o que o problema propõe, os conhecimentos matemáticos e as estratégias individuais. A publicação PNAIC – Operações na resolução de Problemas (BRASIL, 2014) destaca a importância de estimular as estratégias individuais por possibilitarem aos estudantes "vivenciarem as situações matemáticas articulando conteúdos, estabelecendo relações de naturezas diferentes e decidindo sobre a estratégia que desenvolverão" (p. 11).

Os jogos *Cobre Tabuleiro* e *Troca Troca* fazem parte do livro de apoio didático *Matemática primeiros passos* (SOUZA et al., 2008), que traz discussões sobre conceitos, explicações e jogos acerca dos eixos ou unidades temáticas de números, álgebra e geometria. Utilizamos o jogo *Cobre Tabuleiro* para desenvolver cálculos mentais e estratégias de contagem com operações do campo aditivo, e o jogo *Troca Troca* para construir compreensões sobre valor posicional e cálculos utilizando materiais manipulativos (estratégia não convencional). Os jogos foram trabalhados com os estudantes em dois momentos diferentes.

O primeiro jogo a ser utilizado foi o *Cobre Tabuleiro*, que se propõe a desenvolver aprendizagens de resolução de operações de adição e subtração através do cálculo mental.

Figura 2 - Jogo Cobre Tabuleiro

Fonte: Souza *et al* (2008, v. 1, p.63)

O quadro 2 apresenta e discute as regras do jogo *Cobre Tabuleiro*:

Quadro 2 - Regras do Jogo Cobre Tabuleiro.

Material:

- 1 Tabuleiro de enumerado de 1 a 25, aleatoriamente;
- 2 Dados com os seguintes valores:
  1º Dado – 10, 9, 6, 3, 2, 1;
  2º Dado – 15, 13, 8, 7, 5, 0;
- 1 Dado com os sinais + e -;
- 25 Círculos coloridos, para cada jogador (totalizando 75 círculos).

Número de jogadores: 3 participantes.

Regras:

- Divida a classe em trios;
- Distribua o tabuleiro numerado e os círculos coloridos, cada jogador receberá 25 círculos de uma única cor.
- Tire par ou ímpar para saber quem vai ser o primeiro a jogar.
- Cada jogador deverá jogar os três dados, os dois dados com números, que correspondem às parcelas; e o dado com sinais para saber a operação que irá realizar.
- O jogador deverá procurar no tabuleiro o resultado da operação que efetuou; cobrindo com o círculo colorido esse número.
- O jogador perderá a vez quando errar a operação ou se o resultado já estiver coberto.
- Ganha o jogador que tiver o maior número de círculos sobre o tabuleiro.

Fonte: Souza *et al* (2008, v. 1, p. 62)

Dividimos a turma em trios e distribuímos o jogo entre os grupos e explicamos as regras. Com o jogo em mãos, os estudantes tiraram par ou ímpar para ver quem iniciaria a partida, em seguida, eles jogavam os três dados e obtinham uma operação, ao resolver mentalmente a operação os estudantes deveriam socializar aos colegas de equipe a estratégia que utilizou para chegar ao resultado, permitindo aos colegas corroboram com o resultado, e ainda, expandir o repertório de estratégias.

Durante a resolução das operações, muitos questionaram se poderiam resolver com lápis e papel, por esse motivo instruíam os estudantes a utilizarem outras estratégias para chegar ao resultado. Nesse sentido, passamos a apresentar diferentes estratégias de contagem para resolver as operações. Dentre as situações destacam-se algumas, como o fato de que muitos estudantes que estavam utilizando a estratégia de contar todos os números com os dedos das mãos apresentaram dificuldade para realizar cálculos que envolviam números maiores que a quantidade de dedos. Com base nas estratégias discutidas por Orrantia (2000) e Orrantia et al. (2002), explicamos que, por exemplo, se nos dados aparecerem a operação 6 + 15, eles poderiam colocar na cabeça (memorizar) o primeiro número (6) e contar o outro número (15) com os dedos (estratégia de contar a partir do primeiro), ou ainda, poderiam colocar o número 15 (maior número) na cabeça (memorizá-lo) e, a partir dele, contar mais seis nos dedos, encontrando o resultado (estratégia de contar a partir do maior). Percebemos que a maioria dos alunos preferiu utilizar a estratégia de contar a partir do número maior, pois segundo eles, demandava o uso de menor quantidade de dedos e permitia chegar ao resultado mais rapidamente.

Outra situação envolveu a estratégia de decomposição de números para resolver a operação. Nesse caso, os estudantes poderiam decompor um dos números para um número mais familiar, realizando a operação e acrescentando o que falta, por exemplo, se nos dados aparecerem a operação 10 + 15, o estudante poderia decompor a segunda parcela, obtendo a operação 10 + 10 + 5, podendo ainda recorrer a recuperação de fatos da memória que o auxiliam na resolução de operações com números familiares, tornando o processo mais rápido. Percebemos que, apesar de alguns estudantes realizarem essas estratégias (usar fatos derivados ou decompor, e recuperar fatos básicos da memória ou recuperação direta), a maioria dos estudantes não se sentiu confortável em executar essas estratégias.

Destacamos ainda uma situação dentre outras que gerou discussão entre os estudantes, que foi o fato de algumas operações possibilitarem a resolução a partir de duas operações diferentes, por exemplo, a operação 13 – 6 poderia ser realizada através de uma adição ou subtração; realizando uma adição, deve-se memorizar o número 6 e somar até chegar no número 13, o resultado seria a quantidade de números (7) que faltavam para chegar ao 13; realizando uma subtração, deve-se memorizar o número 13 e tirar 6, sobrando 7. Nesse sentido, muitos estudantes não compreendiam como uma operação de subtração poderia ser resolvida com uma adição, gerando discussão entre os que utilizaram esse tipo de resolução. Após o uso de operações inversas para resolver diversas situações, apresentando o mesmo resultado em ambas as formas de resolução, eles compreenderam que as operações de adição e subtração fazem parte do mesmo campo conceitual, sendo possível, dependendo do cálculo relacional escolhido, utilizar ambas as operações e chegar ao mesmo resultado.

Inicialmente os estudantes com deficiência apresentaram mais dificuldade em colocar em prática as estratégias de cálculo mental que ensinamos, recorrendo sempre ao uso dos dedos na resolução das operações. Por exemplo, na operação 8 – 3, que poderia ser realizada através de uma adição ou subtração, os estudantes poderiam realizar uma adição memorizando o número 3 e somando na sequência com os dedos até chegar no número 8, o resultado seria o número de dedos utilizados, da seguinte forma, 4 (1 dedo), 5 (2 dedos), 6 (3 dedos), 7 (4 dedos), 8 (5 dedos), obtendo um total de 5 dedos, ou seja, 8 – 3 = 5; para a realização de uma subtração, os estudantes memorizavam o número 8 e tiravam 3 nos dedos, da seguinte forma, 8 (1 dedo), 7 (2 dedos), 6 (três dedos), dessa maneira, até o 6 foram retirados 3 números, então sobram 5, ou seja, 8 – 3 = 5. Entretanto, as operações de subtração que envolviam cálculos com números maiores que a quantidade de dedos da mão eram com as quais os estudantes apresentaram maiores dificuldades. Nessas operações, os eles tiveram a ideia de utilizar as fichinhas do jogo para auxiliar na resolução, por exemplo, na operação 13 – 9, eles contavam 13 fichinhas e tiravam 9 delas, a quantidade restante de fichinhas (4 fichinhas) correspondia ao resultado da operação. Dessa maneira chegavam ao resultado de maneira mais fácil e conseguiram socializar as etapas realizadas para obtê-lo.

Orrantia et al. (2002) aponta que as crianças com dificuldades de aprendizagem apresentam uso de procedimentos imaturos para a resolução de cálculos, utilizando por mais tempo a estratégia de contar todos com a ajuda dos dedos, além de dificuldades em alcançar a estratégia de recuperação de fatos básicos da memória, justificado pela dificuldade em armazenar e/ou recuperar os fatos básicos da memória de longo prazo. Entretanto, os autores apontam que quando motivados, esses estudantes demonstram avanços no uso das estratégias, abandonando a contagem de todos com a ajuda dos dedos, passando a utilizar estratégias de contagem verbal e, por fim, de memória, fato que pudemos observar também nesse estudo, em estudantes com deficiência intelectual e dificuldade de aprendizagem.

Durante o jogo foi possível observar que a cada jogada, todos os estudantes, com e sem deficiência, conseguiam compreender melhor as relações envolvidas nas operações e as estratégias que ensinamos, e ainda, criar suas próprias estratégias de contagem, já que compreendiam a existência de outras estratégias de resolução de operações para além do registro com lápis e papel. Outro destaque pode ser dado à socialização das respostas e estratégias de resolução, que permitiram perceber os erros e acertos presentes nas soluções, pois o levantamento de dúvidas e a troca de conhecimentos entre os pares permitem ampliar o repertório de estratégias, como apontado na publicação PNAIC – Operações na resolução de Problemas (BRASIL, 2014) "a socialização dessas estratégias desenvolvidas pelos alunos é um recurso a mais para que os mesmos percebam as diferentes possibilidades de resolução de um problema" (p.11).

Acerca do uso das diferentes estratégias de contagem, podemos afirmar que a estratégia mais utilizada pelos estudantes foi a de contar a partir do número maior, já que elas postula o uso menor de tempo para chegar ao resultado; porém, também foi feito uso das demais estratégias, na medida em que conheciam os diferentes procedimentos de resolução, experienciando as estratégias que mais se sentiam confortáveis em executar. Orrantia et al (2002) destacam que os estudantes usam uma variedade de estratégias, avançando gradualmente do uso da estratégia de contar todos para um maior uso da recuperação da memória. Ou seja, de estratégias menos maduras para estratégias mais sofisticadas. Porém, salientam que a estratégia predominante na resolução de cálculos simples é a de contar a partir do número maior devido ao melhor tempo de resposta.

O jogo *Troca Troca* se propõe a desenvolver aprendizagens de resolução de operações de adição e subtração em situações concretas do jogo por meio da realização de transformações de ordem.

Figura 3 - Jogo *Troca Troca*

Fonte: Souza *et al* (2008, v. 1, p. 61)

O quadro 3 apresenta e discute as regras dos jogos *Troca Troca*:

Quadro 3 - Regras do Jogo Troca Troca.

Material: - 3 Garrafas PET cortadas ao meio e identificadas com as letras U (unidade), D (dezena) e C (centena), nas cores vermelho, verde e amarelo, respectivamente; - 60 Círculos em EVA (20 círculos em EVA vermelho, 20 círculos em EVA verde, e 20 círculos em EVA amarelo); **Número de jogadores: 4 participantes.** **Regras:** - Divida a classe em grupos de 4 alunos; - Explique aos alunos o valor de cada círculo: Vermelho vale 1 ponto, verde vale 10 pontos e amarelo vale 100 pontos. - Explique também a regra do troca-troca, que a cada 10 círculos vermelhos deverão ser trocados por 1 verde, e a cada 10 círculos verdes deverão ser trocados por 1 círculo amarelo. - Os alunos deverão representar números e efetuar operações com o material, não esquecendo de que para efetuar a operação é necessário representar as parcelas. - À medida que os alunos forem compreendendo as operações, o professor deverá ampliar os desafios propondo adição, adição com reserva, subtração e subtração com empréstimo.

Fonte: Souza *et al* (2008, v. 1, p. 54-55)

Neste trabalho, abordamos apenas as três primeiras ordens, unidade, dezena e centena, para que os estudantes com dificuldade de aprendizagem também pudessem chegar à compreensão das propriedades do Sistema de Numeração Decimal, como à identificação e representação de quantidades, sua organização em agrupamentos de base 10, e da posição que este ocupa; entretanto, a depender das especificidades da turma, o professor poderá acrescentar ou diminuir as ordens e classes dos números.

Dividimos a turma em grupos, distribuímos o jogo entre eles e explicamos as regras, informando aos estudantes o valor de cada círculo e o que significa cada pote: os círculos vermelhos do pote das Unidades (U) valem 1 ponto cada, os círculos verdes do pote das Dezenas (D) valem 10 pontos cada, e os círculos amarelos do pote das Centenas (C) valem 100 pontos cada. Explicamos ainda, que cada 10 unidades (ou dez círculos vermelho) correspondem a 1 dezena (ou um círculo verde), e que, cada 10 dezenas (ou dez círculos verdes) correspondem a 1 centena (ou um círculo amarelo), destacando que eles deveriam estar atentos para fazer essas conversões entre as ordens (centena, dezena e unidade).

Com o jogo em mãos, os estudantes ficaram atentos aos comandos que eram dados. Nesse momento utilizamos dois tipos de comandos:

1. Os primeiros comandos foram para que os alunos representassem com os círculos os números: 7, 35, 68, 90, 143, 205 e 820.

Inicialmente, os estudantes não apresentaram dificuldades em representar o número 7, rapidamente representaram-no com sete círculos das unidades. Porém, a partir do número 35 começaram a apresentar dificuldade, questionando a falta de círculos vermelhos (das unidades) para representar esse número. Então, lembramos que, como havíamos dito antes, cada grupo de 10 círculos vermelhos das unidades deveriam trocar por um círculo verde das dezenas; e mostramos que, no caso do número 35 temos 10+10+10+5, então, seriam 3 dezenas e 5 unidades, ou seja, 3 círculos verdes das dezenas e 5 círculos vermelhos das unidades.

Porém, no número seguinte, o 68, os estudantes com deficiência ainda apresentavam dificuldades na representação do número através das fichas. Então, propomos outra estratégia, explicando que, números como o 68 (números com dois algarismos), apresentam duas ordens, a ordem das unidades - representada nesse número pelo algarismo 8 - e a ordem das dezenas - representada nesse número pelo algarismo 6. Assim, questionamos aos estudantes, "Se o número 8 representa as unidades, então, quantos círculos das unidades temos que usar para representá-los?" e a mesma questão fizemos com o número 6 das dezenas. A partir dessa explicação percebemos que os estudantes passaram a compreender melhor a relação entre a posição que os algarismos ocupam no número e sua ordem, ou valor relativo ou posicional.

2. Os segundos comandos foram para que os estudantes representassem com os círculos os resultados das operações: 23 + 12; 5 + 42; 24 + 39; 67 + 38; 136 – 22; 79 – 48; 23 – 14; 242 – 126.

Para essa etapa, escrevíamos as operações e pedíamos que os estudantes representassem as respostas utilizando os círculos. Nesse momento os estudantes apresentaram facilidade, inclusive os com deficiência, para resolver operações que não apresentavam agrupamento e desagrupamento, por já compreenderem melhor a ordem dos números para representá-los. Dessa maneira, os estudantes iam colocando dentro dos potes, que representavam as ordens, as duas parcelas da operação e contando ao final o resultado. Para auxiliar a resolução dos problemas, os estudantes com deficiência usaram a mesma estratégia do jogo anterior, utilizando os círculos do jogo para encontrar os resultados das operações propostas. Por exemplo, para resolver a operação 23 + 12, pegavam 23 círculos e acrescentavam mais 12, e ao final contavam a quantidade total de círculos, chegando ao resultado.

Entretanto, os discentes demonstraram dificuldade para realizar as operações que apresentavam agrupamento e desagrupamento quando essas operações demandam conversões entre as ordens; por exemplo, na operação 67 + 38, que demanda agrupamento ou reserva, os estudantes iniciavam somando as unidades 7 + 8, obtendo o número 15, assim deviam ser separados 5 círculos das unidades e 1 círculo das dezenas, posteriormente, deveriam somar as dezenas 6 + 3 e acrescentar a 1 dezena da soma anterior, obtendo 10 dezenas, necessitando realizar a conversão de 10 dezenas para 1 centena. Dessa maneira, o resultado da operação é 105, sendo representado por 5 círculos das unidades, 0 círculos das dezenas e 1 círculo da centena. Outra situação de dificuldade, envolveu a necessidade de desagrupamento, como na operação 242 – 126, em que os estudantes precisam fazer trocas entre dezenas e unidades. Iniciando pela casa das unidades, devem subtrair 6 de 2 – o que não é possível de fazê-lo, dessa maneira, se faz necessário trocar 1 dezena por 10 unidades, acrescentando a casa das unidades 10 + 2, obtendo 12 unidades, podendo agora subtrair 6 de 12 unidades, obtendo 6 como resultado; posteriormente, deve ser subtraído 2 de 3 (na medida em que perdeu uma dezena na conversão anterior), obtendo como resultado 1 dezena, por fim, realizar a subtração das casa das centenas, tirando 1 de 2, e obtendo 1 centena, assim, o resultado da operação é 116, sendo representado por 6 unidades, 1 dezena e 1 centena.

A publicação PNAIC – Operações na resolução de Problemas (BRASIL, 2014) aponta a contribuição de recursos que favoreçam a compreensão dos algoritmos tradicionais e o desenvolvimento de compreensões sobre o valor posicional do número tendo como base o trabalho com agrupamentos em base dez, destacando alguns recursos, como o material dourado, o ábaco e o Quadro Valor Lugar (QVL). Salientando que se faz importante iniciar esse tipo de trabalho através de representações diferentes para que se possibilite a apropriação das regras e para que o processo se torne mais ágil.

Considerações Finais

As discussões aqui tratadas acerca do desenvolvimento de compreensões sobre as estruturas aditivas, baseando-se na resolução de problemas e do cálculo mental, levam-nos a evidenciar as potencialidades de uma proposta de ensino que permita o desenvolvimento dos cálculos relacional e numérico, haja vista que os estudantes apenas terão condições de desenvolver estratégias de resolução se compreenderem a situação apresentada. Essa proposta de ensino ainda propõe estimular o uso de estratégias individuais de resolução, pois compreende que é no desenvolvimento de estratégias que os estudantes "mobilizarão conceitos matemáticos conhecidos e fundamentarão os que estão em processo de construção conceitual" (BRASIL, 2014, p. 12).

Consideramos que por meio do processo dialógico os estudantes conseguiram desenvolver compreensões sobre os conceitos e propriedades das estruturas aditivas e do Sistema de Numeração Decimal ao ampliarem, a partir de diferentes situações-problema, as compreensões sobre operações de adição e subtração, raciocínio relacional e numérico e valor posicional dos números; rompendo as barreiras da dificuldade de aprendizagem, mostrando que o uso de recursos, estratégias e metodologias diferenciadas possibilitam aos estudantes com deficiência desenvolver suas potencialidades e ultrapassar suas dificuldades.

Ao refletir sobre as contribuições da literatura infantil para a construção de conceitos numa perspectiva metodológica de resolução de problemas, podemos afirmar que a relação entre a Matemática e a linguagem, permite tomar a oralidade emprestada da linguagem, dando suporte de significação para o aprendizado da Matemática, gerando uma relação de complementaridade (SMOLE, 2000). Nesse sentido, Smole e Diniz (2001) consideram que os estudantes devem aprender "a ler Matemática e ler para aprender Matemática" (p. 71) nas aulas dessa disciplina. Pois, defendem que, para ler e interpretar um texto matemático, é necessário se familiarizar com a linguagem e os símbolos para encontrar sentidos no ler e escrever.

Acerca da potencialidade do jogo, concordamos com Moura e Viamonte (2006), ao afirmarem que o uso de jogos nas aulas de Matemática traz benefícios para o processo de ensino-aprendizagem, permitindo sistematizar os conceitos e propriedades matemáticas a partir de situações lúdicas perpassadas por uma intencionalidade pedagógica, além de possibilitar ao professor investigar dificuldades e avanços no processo de aprendizagem dos estudantes. Porém não basta somente introduzir essa metodologia nas aulas, é preciso que o professor esteja atento às potencialidades que o jogo escolhido traz para a aprendizagem de seus estudantes.

Nesse sentido, entendemos que o uso da literatura infantil e do jogo na sala de aula e o papel de mediação do professor são de grande importância para a construção de uma dinâmica de ensino problematizadora. Salientamos que a literatura ou o jogo por si só podem não desenvolver nos estudantes os conceitos desejados, o que revela a necessidade da intervenção do professor na construção de compreensões em que observações, reflexões e ressignificações sejam realizadas.

Levar tal discussão aos professores da educação básica permite elencar a importância de tratar esses conceitos de forma articulada ao possibilitar uma compreensão ampla dos diferentes conceitos envolvidos, além de oportunizar o contato com diferentes situações-problema em que o estudante possa analisar as situações e buscar significados, observando a necessidade de estimular o uso de diferentes estratégias de resolução e contagem, permitindo aos estudantes ampliar, comparar e significar suas compreensões.

Por fim, consideramos que as discussões realizadas neste capítulo permitem refletir sobre nossas práticas em sala de aula e as diferentes possibilidades que nos rodeiam, entendendo que há uma variedade de informações, recursos e estratégias que podem auxiliar em um processo de ensino e aprendizagem dinâmico e significativo, e cabe a nós, professores, problematizar e inovar constantemente a nossa prática pedagógica.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Operações na resolução de problemas.* Brasília, DF, 2014.

BRANDÃO, A. C. P.; ROSA, E. C. de S. A leitura de textos literários na sala de aula: é conversando eu a gente se entende. In: PAIVA, A.; MACIEL, F.; COSSON, R. (Orgs.). *Coleção Explorando o Ensino – Literatura/ Ensino Fundamental.* Brasília: MEC/SEB, 2010, p. 69-88.

CARPENTER, T.; MOSER, J. The development of addition and subtraction problem - solving skill. In: T. Carpenter, J. Moser e T. Romberg (orgs.). *Addition and subtraction:* A cognitive perspective. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, p. 9-24, 1982.

DREGUER, R. *Quem ganhou o jogo? Explorando a adição e a subtração.* Ilustrações de Elisa Sassi. São Paulo: Moderna, 2011.

GRANDO, R.C. *O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula.* 2000, 239 f. Tese (Doutorado) –Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

MOURA, P. C.; VIAMONTE, A. J. *Jogos matemáticos como recurso didático.* Revista da Associação de Professores de Matemática, Lisboa, n. 40, 2006. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_CO_Moura_Viamonte_4a4de07e84113.pdf>

ORRANTIA, J. Las dificultades em el aprendizajedel cálculo desde el punto de vista cognitivo. *PremiosNacionales de Investigación Educativa, Madrid*, n. 1, p. 75-102, 2000.

ORRANTIA, J.; MARTÍNEZ, J.; MORÁN, M. C.; FERNÁNDEZ, J. C. Dificultades em el aprendizaje de la aritmética: uma análisis desde los modelos cronométricos. *Cognitiva*, Madrid, n. 14, v. 2, p. 183-202, 2002.

PARRA, C. Cálculo Mental na escola primária. In: PARRA, C; SAIZ, I. (Org.) *Didática da Matemática – reflexões psicopedagógicas.* 1. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 186-235.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M. *Matemática Ativa.* João Pessoa: Universitária/UFPB, INEP, Comped, 2000.

SMOLE, K. C. S. *A matemática na educação infantil: a teoria das inteligências múltiplas na prática escola.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I. Ler e aprender matemática. In: SMOLE, K. C. S. e DINIZ, M. I. (Orgs). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

SOUZA, A. F. de; RAFFA, I.; SOUZA, S. S. F. *Matemática - Primeiros Passos: Números e operações / Espaço e Forma.* 1ª ed. São Paulo: Giracor, 2008.

TELES, R. A. M.; BELLEMAIN, P. M. B.; GITIRANA, V. A apropriação da Escrita Numérica no Sistema de Numeração Decimal. In: GITIRANA P.; TELES R.; BALTAR P. (Org.). *Jogos com Sucata na Educação Matemática.* Recife: Editora Universitária UFPE, 2013, v. 1, p. 143-161.

VERGNAUD, G. La théoriedeschampsconceptuels. *Recherches em Didactiques des Mathématiques,* 10 (23), p. 133-170, 1990.

YUNES, E.; PONDÉ, G. *Leitura e leituras da literatura infantil.* 2.ed. São Paulo: FTD, 1989.

CAPÍTULO 5

Conhecimentos de professores do ensino fundamental sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas

Cláudia de Albuquerque Nascimento Ignácio, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Se planejar o ensino de modo a proporcionar aprendizagem apenas de cálculos numéricos sem contextos, envolvendo adição e subtração para estudantes do ensino fundamental não é uma tarefa tão simples, pensemos no quão desafiante é ensiná-los a resolver situações-problema que envolvam estas operações isoladamente ou não. As crianças apresentam muitas dificuldades no trabalho com resolução de problemas por diversas razões, como aponta Muniz (2009):

- Dificuldade de interpretação do enunciado;
- Operações ensinadas de forma estanque, sem articulação entre elas;
- Falta de significado da situação para o estudante;
- Ausência de autonomia no estudante que busca no adulto suporte para validar suas ações;
- Baixa autoestima e insuficiente autoconfiança decorrente do ambiente educativo que enfatiza o erro e gera punições e leva o

estudante a ficar aguardando uma pista do professor para mostrar o caminho certo a ser percorrido;

- Enunciado não evidencia apenas dois números a serem diretamente operados e o estudante aprende que resolver um problema é utilizar os dois números presentes no enunciado e operá-los;
- Hábito de encontrar, no texto, palavras que conduzem de forma absoluta determinada operação aritmética.

Estas e ainda outras razões, têm contribuído para que atividades que envolvem resolução de problemas não sejam bem aproveitadas na escola. Como essas reflexões iniciais, construímos esse estudo no qual a primeira autora ocupa vários papéis: pesquisadora; professora que atua nos anos iniciais e também a realizadora dos encontros de estudo aqui descritos.

É possível que muitas vezes, o que resulte desse processo seja um grande desgaste tanto para os professores quanto para os estudantes, assim como uma frustração de ambas as partes, pois os docentes podem passar a se sentirem incapazes ou incompetentes para ajudar os estudantes a construírem suas aprendizagens de modo significativo. Ao passo que estes se desmotivam e passam também a crer em possíveis limitações cognitivas para aprender Matemática.

Essas dificuldades e as consequências delas para o ensino da Matemática despertaram o interesse por essa pesquisa, que visa a identificar e analisar conhecimentos específicos do conteúdo de professores inseridos no ensino fundamental de 1º ao 5º ano, relativos às situações-problema envolvendo estruturas aditivas. Outro objetivo nosso, foi verificar o que professores pensam sobre o conhecimento teórico acerca do ensino das estruturas aditivas em sua prática pedagógica.

Para tanto, levantamos a seguinte questão: o que já conhecem e o que pensam os professores que atuam no 1º ao 5º ano do ensino fundamental sobre o conhecimento teórico relativo às situações-problema envolvendo estruturas aditivas?

O conhecimento específico do conteúdo e o trabalho com situações-problema com estruturas aditivas

Ao longo da nossa vivência profissional, temos percebido certa rejeição ou temor em torno do ensino da Matemática tanto entre professores, quanto entre estudantes, o que pode gerar dificuldades no trabalho com este componente curricular. Algumas delas podem ser oriundas de um conhecimento pouco aprofundado dos professores em relação aos conteúdos específicos com os quais necessita trabalhar em sala de aula.

Neste sentido, para Mello (2000), isso acontece porque os professores muitas vezes recebem no início de suas formações profissionais, uma preparação reduzida a um conhecimento abstrato, ou esvaziado do conteúdo a ser ensinado. Esta autora também diz que o conhecimento do conteúdo, nas situações de aprendizagens dos futuros professores, não oportuniza a articulação entre conteúdos e transposição didática, o que torna esta prática também abstrata, desvinculada do processo de apropriação do conteúdo que será ensinado.

Pesquisas apontam a existência de diversos e necessários tipos de conhecimentos que devem fazer parte do trabalho docente. Dentre outros, destacamos os estudos de Lee Shulman (1986), que identificou sete categorias de conhecimentos base para o ensino (conhecimento específico do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos alunos e de suas características, conhecimentos dos princípios, meios e fins da educação, conhecimento do currículo e conhecimento dos contextos educacionais). E nesse conjunto, tomaremos como referência para nossas discussões acerca do trabalho em sala de aula com as estruturas aditivas em situações-problema, a categoria do *conhecimento específico do conteúdo.*

Sabemos que o conhecimento acumulado por meio da experiência profissional desempenha um grande papel na prática dos professores, porém, também temos a compreensão que apenas isto não é suficiente para a garantia de um bom ensino e, segundo o pensamento de Shulman (1986), existe um saber que é adquirido com a prática, mas que também necessita da compreensão dos conceitos e estruturas da matéria e do conteúdo a ser ensinado para que seja plenamente desenvolvido, o que torna o conhecimento específico de um conteúdo algo tão necessário ao conhecimento docente quanto a sua experiência.

Em seus estudos, Shulman (1986) destaca que o conhecimento específico do conteúdo é um tipo de conhecimento em que os aspectos conceituais e procedimentais relacionados aos conteúdos com os quais os professores trabalham numa determinada matéria ou disciplina, são explicitados em suas aulas e nos mostra que devem fazer parte da base do conhecimento docente. De nossa parte, acreditamos na necessidade do desenvolvimento desse tipo de conhecimento como uma forma de possibilitar ao professor uma maior autonomia em sua prática cotidiana, pois ao dominar aquilo do qual está falando ou com o que está trabalhando, poderá melhor conduzir seu trabalho em sala de aula. E é nesse contexto que situamos o conhecimento acerca das estruturas aditivas em situações-problema pelos professores do ensino fundamental.

Mas, antes de aprofundarmos as discussões sobre a importância do trabalho com situações-problema no ensino da Matemática, cabe aqui ampliarmos a compreensão sobre o que é uma situação-problema e o que a caracteriza. Vale destacar que também é possível encontrarmos referências no âmbito da Educação Matemática ao termo *situação-problema,* como "problema contextualizado" ou "problema surgido de situação da vida real".

Câmara dos Santos (2002), define uma situação-problema como algo capaz de gerar a busca pela solução de um problema em que os conceitos envolvidos na resolução do problema sejam construídos pelos próprios estudantes. Ele destaca também que uma situação-problema deve ter como objetivo levar o aluno a construir o conhecimento por meio de um novo conceito matemático. Isto difere da ideia relacionada aos problemas matemáticos fechados, ainda tão comuns na ideia de resolução de problemas como exercício e cujos enunciados indicam aos estudantes quais os "conteúdos" e procedimentos que o levarão a resolver os problemas propostos.

Segundo Câmara dos Santos (2002), durante muito tempo, existiu no ensino da Matemática uma ideia de que os estudantes deveriam resolver muitos problemas para aprender Matemática de fato. Ainda para este autor, o que fundamentou essa concepção foram os *problemas fechados*, caracterizados pelos enunciados que sinalizavam para os estudantes quais os conteúdos que deveriam ser utilizados nas resoluções dos problemas.

Esta visão, digamos, um pouco limitada sobre o trabalho com problemas matemáticos, fez surgir propostas com *problemas abertos*, em que os estudantes utilizam estratégias mais diversificadas de raciocínios matemáticos na busca de soluções para os mesmos, sem enfatizar apenas os cálculos com algoritmos.

São algumas características de uma situação-problema, apontadas por Câmara dos Santos (2002):

- O estudante deve ser capaz de começar a resolver o problema;
- Os conhecimentos dos estudantes devem ser insuficientes para que ele resolva o problema;
- A situação-problema deve permitir ao estudante decidir se uma solução encontrada é conveniente ou não, por exemplo, se se trata de uma solução particular ou de uma solução geral.

Assim, com a crença de que o trabalho com as situações-problema deve fazer parte do cotidiano das crianças desde os anos iniciais do ensino fundamental e também que é importante e necessário o conhecimento dos professores sobre as estruturas aditivas para melhor conduzir esse trabalho em sala de aula, buscamos nas pesquisas de Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) a ratificação para nossas ideias a respeito do tema. Segundo as referidas autoras, a apropriação desses conceitos pelo professor, permitirá não apenas uma boa condução da sua prática pedagógica, mas também um desempenho mais significativo dos estudantes ao realizarem suas tarefas, já que o professor, mais instrumentalizado, poderá introduzir e desenvolver melhor os conceitos em suas aulas.

Ao levantarmos a questão da importância do conhecimento por parte dos professores sobre as estruturas aditivas em situações problema no ensino fundamental, recorremos à Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, por ser uma teoria que apresenta elementos que podem aproximar o professor da compreensão de como se dá a aprendizagem dos estudantes acerca dos processos matemáticos envolvidos na resolução de problemas de adição e subtração.

De acordo com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986), os conceitos desenvolvidos pelas crianças fazem parte de *campos conceituais*. Compreendidos como uma complexa relação entre um conjunto de conceitos e um conjunto de situações em que esses conceitos são utilizados. Essa teoria considera que para formular seus conceitos, as crianças vivenciam a interferência e a influência de muitos fatores que são importantes para esse processo e que isso deve se dar no contexto de situações-problema.

Diante da compreensão de que existem muitos fatores no processo de construção dos conceitos pelas crianças, concordamos com o pensamento de Magina *et al* (2001), quando afirmam que são as variedades de situações que dão sentido aos conceitos matemáticos e que não é apenas um conceito que permitirá que uma situação seja analisada.

Vergnaud (1986) diz que existe um conjunto de situações-problema (S), de invariantes (I) e de símbolos que são usados para representar um conceito (R) e que a interligação desses conjuntos de elementos forma uma "terna" que deve ser considerada na construção de um conhecimento. Em outras palavras, o estudo de um conceito matemático não se dá de forma isolada, ele ocorre de forma inter-relacionada às situações e às formas de representações do conceito.

Nesses três conjuntos que formam um conceito matemático no desenvolvimento de um campo conceitual, para Vergnaud (1986), *S* são as situações que dão significado ao conceito; *I* são os invariantes ou propriedades lógico-operatórias mobilizadas no desenvolvimento do conceito e *R* são as representações simbólicas utilizadas para representar os procedimentos realizados.

Esses são conhecimentos importantes que acreditamos ser necessários ao professor, haja vista que ter o domínio sobre eles poderá auxiliar o seu trabalho com conceitos matemáticos e a resolução de problemas em sala de aula, tornando a aprendizagem mais interessante e dinâmica e ainda contribuir para que faça uma análise do desempenho do estudante de maneira mais clara e coerente identificando suas competências, concepções e *os Teoremas-em-ação,* existentes nas ações dos estudantes. Magina *et al* (2008, p. 16), com base em Vergnaud (1986), chamou de "*Teorema-em-ação*" relações matemáticas que são levadas em consideração pelos estudantes, quando eles escolhem uma operação ou sequência de operações para resolver um problema.

Essa postura em relação à abordagem de situações problema de estruturas aditivas de modo mais consistente pelo professor dos anos iniciais estaria, a nosso ver, relacionada ao conhecimento específico do conteúdo do trabalho docente, já que exige do professor a compreensão das estruturas da matéria, os princípios da organização conceitual e os princípios da investigação, como indica Shulman (1987). A ausência de um conhecimento específico pode limitar o professor a ficar repetindo experiências, a evitar o conteúdo e a utilizar, por exemplo, o livro didático como única fonte de consulta.

Dessa forma, o conhecimento teórico se apresenta como necessário à superação dessas limitações, pois poderá munir o professor de condições adequadas para ampliar o seu fazer pedagógico com os conteúdos que irá ensinar aos seus estudantes. Além disso, no caso específico das situações-problema envolvendo estruturas aditivas, o fato de muitos professores desconhecerem classificações dos tipos de problemas, como por exemplo, as apresentadas por Vergnaud (1986) e as de Carpenter e Moser (1982) e a importância de incluir todas elas no ensino, pode resultar no acesso limitado dos estudantes aos diversos tipos de problemas.

Para construir as classificações dos tipos de problemas de estrutura aditiva, cada uma dessas duplas de estudiosos partiu da observação das estratégias de cálculos relacionais das crianças e das dificuldades apresentadas ao resolverem problemas. As categorias diferem em alguns termos e aspectos, no entanto, possuem muitas semelhanças entre si.

Nunes e Bryant (1997) adaptaram as estruturas aditivas classificadas por Vergnaud (1976) em três grupos básicos de problemas: composição, transformação e comparação. Eles subdividiram cada tipo em situações. Os problemas de *composição* compreendem as situações que envolvem parte-todo e a ideia envolvida não é a de acrescentar, mas, sim, de juntar partes cujos valores são desconhecidos. Os de *transformação* tratam de situações em que a ideia temporal está sempre envolvida, pois no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (com perda/ganho; acréscimo/decréscimo; etc...), chegando ao estado final com outra quantidade. E os de *comparação* que comparam duas quantidades, uma denominada de referente e a outra de referido.

Já Carpenter e Moser (1982), apresentaram quatro categorias de tipos de problemas com estruturas aditivas subdivididos em dezesseis variações, as quais utilizamos nesta investigação, por acreditarmos que as categorias seriam mais facilmente compreendidas pelos professores participantes desta pesquisa. Pessoa (2008), elencou as categorias básicas e as variações apresentadas por Carpenter e Moser:

- Problemas que envolvem *combinação*: descrevem um relacionamento estático entre duas quantidades e suas partes. Suas variações são: com o todo desconhecido e com a parte desconhecida.
- Problemas de *mudança*: envolvem um relacionamento dinâmico, pois, a partir de uma quantidade inicial e através de uma quantidade uma ação direta ou indireta causará um aumento ou diminuição na mesma. Suas variações podem ser: com o resultado desconhecido em situação de acréscimo; com o resultado desconhecido em situação de decréscimo; com transformação desconhecida em situação de acréscimo; com transformação desconhecida em situação de decréscimo; com a série inicial desconhecida em situação de acréscimo e com a série inicial desconhecida em situação de decréscimo.
- Problemas de *igualização*: envolvem a mudança de uma quantidade para que as duas venham a ter a mesma quantidade ou o mesmo número de atributos. As variações são: com acréscimo na quantidade menor e com decréscimo na quantidade maior.
- Problemas de *comparação*: tratam da comparação entre duas quantidades e a diferença entre duas quantidades precisa ser encontrada. São problemas estáticos. Suas variações são: com diferença desconhecida e termo a mais; com diferença desconhecida e termo a menos; com quantidade menor desconhecida e termo a mais; com quantidade menor desconhecida e termo

a menos; com quantidade maior desconhecida e termo a mais e com quantidade maior desconhecida e termo a menos.

Assim, entendemos que conhecer a diversidade de tipos de problemas de adição e subtração existentes, ajuda o professor a interpretar o modo que seus estudantes estão raciocinando, podendo contribuir para um planejamento de ensino mais eficiente, com reflexos positivos tanto para suas avaliações quanto para necessárias intervenções pedagógicas posteriores em sala de aula.

Além disso, ao buscar respostas, o professor possivelmente construirá novos conhecimentos, como também ampliará sua experiência docente, incluindo em sua prática, por exemplo, outros recursos pedagógicos, retirando o foco apenas do livro didático.

Metodologia

Na presente investigação foi realizada uma intervenção em formato de estudo em grupo com seis professoras de duas escolas da rede municipal de ensino do Recife, localizadas na RPA-4. Em cada escola participaram três professoras com 02 a 17 anos de atuação na docência e cujas formações eram todas em Pedagogia com especializações na área da educação. As referidas professoras lecionam em turmas de 1º ano (uma), 2º ano (uma), 3º ano (uma), 4º ano (uma) e 5º ano (duas). Vale ressaltar que a amostra se deu por conveniência, considerando a disponibilidade das participantes e que o tempo de atuação profissional foi bem distinto por não ser um critério para a escolha das professoras.

A coleta dos dados para a análise ocorreu por meio de uma intervenção que se configurou como um estudo em grupo, que envolveu seis professoras distribuídas em dois grupos de três.

A ideia de realizar uma intervenção em formato de estudo em grupo se deu como uma forma de oportunizar um momento de troca e de socialização de conhecimentos às professoras que se dispuseram a participar da nossa coleta de dados. Na verdade, um momento de estudo coletivo que geralmente são escassos nas escolas públicas. Dessa forma, até mesmo o instrumento utilizado foi pensado e criado para atender a esse propósito.

O instrumento para a coleta dos dados foi subdividido em quatro atividades: a primeira, era composta de duas questões escritas; a segunda, uma ficha com 11 situações-problema com estruturas aditivas; a terceira consistiu na intervenção pedagógica no formato de estudo em grupo e a última atividade, mais duas questões escritas. O quadro abaixo faz a descrição de cada etapa do trabalho e do instrumento:

Quadro 1 - Descrição dos procedimentos e do instrumento de coleta de dados

Procedimentos e instrumento de coleta dos dados	
ATIVIDADE 1: Duas questões escritas	Você trabalha com situações-problema de adição e subtração em sua sala de aula? Se sim, como? De onde você transcreve as situações-problema trabalhadas em sua sala de aula ou no que você se baseia para elaborá-las?
ATIVIDADE 2: 1º momento: Antes do estudo em grupo (conhecimentos prévios); 2º momento: Estudo em grupo (Intervenção Pedagógica)	Ficha com 11 situações-problema de tipos variados para que os professores tentassem classificar cada um dos tipos de problemas apresentados na ficha. Em seguida a ficha seria recolhida. Estudo sobre a Teoria dos Campos Conceituais, Estruturas aditivas e Tipos de problemas com estruturas aditivas.
ATIVIDADE 3: Após o estudo em grupo.	Nova classificação de cada um dos tipos de problemas da ficha com as 11 situações-problema apresentadas na atividade 2 que foi nesse momento devolvida às professoras.

Procedimentos e instrumento de coleta dos dados	
ATIVIDADE 4: Questões escritas finais.	1. A partir do que foi visto em nosso estudo, por que seria importante conhecer as classificações das situações-problema com estruturas aditivas? 2. Os conhecimentos trabalhados em nosso encontro de estudo sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas poderão ser aplicados em sua prática? Como?

Fonte: elaboração das autoras

No momento da intervenção em formato de estudo em grupo com os sujeitos, foram utilizados slides contendo uma breve teorização sobre as estruturas aditivas, a Teoria dos Campos Conceituais e a apresentação das classificações dos tipos básicos de problemas baseadas em Carpenter e Moser (1982) com os devidos exemplos para cada um dos problemas.

Após as discussões coletivas a partir do material visual utilizado, no terceiro momento da intervenção, as fichas foram devolvidas a cada uma das professoras para que, de posse de novas informações e conhecimentos, tentassem classificar os mesmos problemas a partir da classificação de Carpenter e Moser. Terminados os novos registros na ficha, foi entregue a cada uma delas uma ficha com as respostas correspondentes a cada um dos 11 problemas apresentados para que pudessem comparar suas respostas iniciais e finais nas fichas e estar de posse de um material que, posteriormente, no dia a dia, as auxiliem na elaboração de novos problemas para suas turmas.

Discussão dos Resultados

Considerando as ideias de Shulman (1987) a respeito do conhecimento específico do conteúdo como um tipo de conhecimento central na base do conhecimento para o ensino que exige do professor a compreensão mínima das estruturas da matéria, dos princípios da organização conceitual e o conhecimento não só de que ele ensina, mas também o motivo pelo qual um conteúdo deve ser ensinado e como ocorre a construção de determinado conteúdo, percebemos em nossas análises a existência de conhecimentos específicos sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas na base do conhecimento de todas a professoras que integraram o grupo de sujeitos de nossa investigação.

Para identificar os conhecimentos específicos explicitados pelos sujeitos dessa pesquisa, foram criadas categorias de análises apoiadas nos estudos de Magina *et al* (2001) e de Pessoa (2004), as quais serão apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 2 - Conhecimentos evidenciados e respostas dos sujeitos

Conhecimentos evidenciados	**Respostas dos sujeitos**
Problemas com estruturas aditivas podem ser realizados por diversos raciocínios que levam à expansão do raciocínio aditivo.	*"Sempre surge a dúvida se é de "mais" ou de "menos". O grande problema não está em resolver a questão, mas sim em compreender o enunciado."* (S-1)
Existe mais de uma ideia na subtração que não apenas a de retirar/tirar/perder.	*"[...] para desconstruir a ideia que está engessada nos professores e alunos que a adição só pode ser feita com soma e que a subtração só pode ser feita retirando/perdendo algo. [...]"* (S-1)
Uma situação-problema pode ser resolvida por várias estratégias.	*"Para diversificar o ensino das estruturas aditivas em sala de aula, possibilitando aos estudantes desenvolver diversas estratégias de resolução de problemas."* (S-5); *"[...] além de incentivar o uso por eles de diferentes estratégias de cálculos, sem se prender ao uso exclusivo de contas/operações armadas."* (S-6); *"Também serve para que o aluno reflita sobre as múltiplas possibilidades para solucionar o mesmo problema."* (S-1)

Conhecimentos evidenciados	Respostas dos sujeitos
Existem as classificações dos tipos de problemas aditivos e elas precisam ser bem aproveitados nas situações-problema apresentadas aos estudantes.	*"Para saber identificar as classificações [...]"* (S-4);*"Para saber que tipo de problema nossos estudantes estão acostumados a resolver [...]"* (S-2)
Conhecer as classificações dos tipos de problemas aditivos auxilia o professor na sua avaliação e acompanhamento do desenvolvimento do estudante frente ao conteúdo.	*"Para [...] facilitar as nossas avaliações."* (S-4)
Conhecer as classificações dos tipos de problemas permite diversificar e elaborar situações-problema com estruturas aditivas	*"[...] na forma como irei fazer o meu trabalho [...] e também na elaboração dos problemas.".* (S-3); *"Esses tipos de problemas já vêm sido trabalhados, porém, não com o olhar que terei agora antes de escolher e elaborar tais problemas em sala."* (S-2); *"Na elaboração dos problemas que irei apresentar aos alunos[...]"* (S-6)
No trabalho com situações-problema a ênfase não deve ser apenas no algoritmo (uso do cálculo numérico), mas também no cálculo relacional.	*"[...] trabalhar com os alunos essa nova prática de somar e subtrair de forma reflexiva."* (S-1)
As operações de adição e subtração tem sentido para os estudantes quando os problemas apresentados em sala de aula estão inseridos em situações que as tornem significativas.	*"As poucas situações problemas que utilizo, retiro do próprio dia-a-dia dos alunos. Uso sempre o nome de alguém da turma e as coisas da realidade da escola/comunidade/família [...]"* (S-1); *"Tento eu mesma elaborar os problemas a partir de situações que surge em sala de aula, nos projetos e outros momentos que tenham significado para os alunos."* (S-6); *"São construídas de forma contextualizada"* (S-4);*"Do cotidiano escolar."* (S-2); *"Crio baseando-me no dia-a-dia dos alunos."* (S-3)

Conhecimentos evidenciados	Respostas dos sujeitos
A interação entre os estudantes nos momentos de realizarem resolução de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem deles (considerar a existência de diversos fatores que influenciam nesse processo).	*"Resolvemos as situações-problema individual, em dupla e coletivamente.* (S-5)
O desenvolvimento de um conceito matemático ocorre dentro de um longo período de tempo por meio de diversos fatores.	*"[...] aos poucos trabalhar com os alunos essa nova prática. [...] Não deve ser uma tarefa fácil, mas é possível e deve ser gratificante."* (S-1)

Fonte: elaboração das autoras

Apesar de termos identificado os conhecimentos específicos acima apresentados, destacamos que ainda não são suficientes para tratá-los como um corpo de conhecimentos aprofundado e comum a todos os professores sobre o conteúdo em questão, porém indicam que problemas de adição e subtração é um conteúdo explorado em sala de aula e que os professores reconhecem sua importância no ensino da Matemática.

As categorias utilizadas nas análises dos dados contemplaram não apenas o conhecimento sobre os tipos de problemas de estruturas aditivas, mas também sobre cálculos numéricos, cálculos relacionais, ideias da subtração, avaliação da aprendizagem, tempo e espaço de aprendizagem e fatores que influenciam no processo de aprendizagem dos estudantes.

Ao refletirmos que, de maneira geral, todos esses conhecimentos compõem o repertório profissional dos professores que lecionam Matemática, questionamos se os processos de formação inicial e em serviço, principalmente para os professores do ensino fundamental, possibilitam satisfatoriamente a construção de todo esse conjunto de conhecimentos.

Sendo assim, é importante considerarmos que as respostas dos professores, sujeitos desta pesquisa, representam o conjunto de conhecimentos específicos a que eles tiveram acesso em seus processos formativos profissionais.

Esta compreensão leva-nos a perceber a importância dos conhecimentos matemáticos na prática docente no ensino fundamental, considerando que a aprendizagem dos estudantes está diretamente relacionada à ação pedagógica dos professores diante da forma como eles mobilizam e dominam os conteúdos a serem trabalhados.

Em relação ao conteúdo situações-problema envolvendo estruturas aditivas, as respostas dos participantes da pesquisa apontam para uma necessidade de ampliação desse conhecimento específico do conteúdo no processo formativo dos profissionais do ensino fundamental, a fim de possibilitar-lhes uma abordagem mais segura e eficiente do conteúdo junto aos estudantes. Conhecer os tipos de problemas com estruturas aditivas, elaborar situações-problema e utilizá-las em suas aulas, pode vir a ser um meio de melhor acompanhar e avaliar o desempenho dos estudantes, já que eles estarão expostos a diferentes processos de raciocínios matemáticos.

Quanto ao que pensam os professores sujeitos desta investigação em relação ao conhecimento teórico sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas, verificamos em suas respostas que os docentes acreditam que esses conhecimentos podem:

- Auxiliar a desconstruir ideias já superadas no ensino desse conteúdo: *"Para desconstruir a ideia que está engessada nos professores e alunos que a adição só pode ser feita com a soma e a subtração só pode ser feita retirando/perdendo algo."* (S-1)

- Melhorar e orientar o trabalho dos professores: *"Para facilitar nossas avaliações"* (S-4)
- Auxiliar na elaboração dos problemas que serão trabalhados com os estudantes: "*Auxiliar nos problemas que irei apresentar aos alunos."* (S-6)
- Diversificar o ensino das estruturas aditivas em sala de aula: "*Para diversificar o ensino das estruturas aditivas em sala de aula, possibilitando aos estudantes desenvolver diversas estratégias de resolução de problemas."* (S-5)
- Utilizar maior variedade de problemas em sala de aula: *"Na elaboração dos problemas que irei apresentar aos alunos[...]"* (S-6)
- Auxiliá-los a identificar os tipos de problemas: *"Para saber identificar as classificações [...]"* (S-4);
- Promover mudanças na prática pedagógica: *"[...] na forma como irei fazer o meu trabalho [...] e também na elaboração dos problemas."* (S-3)
- Melhorar o aprendizado dos estudantes: *"Também serve para que o aluno reflita sobre as múltiplas possibilidades para solucionar o mesmo problema."* (S-1)
- Direcionar o olhar dos professores na escolha dos problemas que serão apresentados em sala de aula: *"[...] aos poucos trabalhar com os alunos essa nova prática. [...] Não deve ser uma tarefa fácil, mas é possível e deve ser gratificante."* (S-1)
- Facilitar a avaliação da aprendizagem dos estudantes pelos professores: *"Para facilitar nossas avaliações."* (S-4);
- Levar os estudantes a desenvolverem novas e variadas estratégias de resolução de problemas: *"Também serve para que o aluno reflita sobre as múltiplas possibilidades para solucionar o mesmo problema."* (S-1)

As ideias acima apresentadas pelos sujeitos da pesquisa evidenciam o que Shulman (2005) diz sobre a relação existente entre os conhecimentos específico do conteúdo e o pedagógico do conteúdo, pois para o referido teórico, ter o domínio da matéria não garante que o conteúdo específico seja realmente ensinado e aprendido, já que acredita que os professores também devem encontrar formas de comunicar seus conhecimentos para outros. Assim, entendemos que esses dois tipos de conhecimentos devem andar juntos, pois se relacionam e se complementam. Elas também reforçam nossa reflexão sobre o quanto professores do ensino fundamental, que atuam nos anos iniciais, possuem ou não clareza sobre a importância e necessidade dos conhecimentos teóricos sobre o ensino das situações-problema envolvendo estruturas aditivas, para dar sustentação às suas práticas. Acreditamos que essa compreensão por parte dos professores pode lhes proporcionar maior autonomia pedagógica frente ao trabalho com tal conteúdo matemático.

No estudo que desenvolvemos, as discussões realizadas com o grupo de participantes e em suas respostas escritas, identificamos que a falta de maior conhecimento teórico acerca do conteúdo abordado na intervenção realizada, limitou a participação das professoras, considerando que a maioria desconhecia a existência das classificações dos tipos de problemas, o que são estruturas aditivas e cálculos numéricos e relacionais.

Tais constatações reforçam a importância das formações iniciais e em serviço para o desenvolvimento do conjunto de conhecimentos necessários à prática docente de quem leciona Matemática no ensino fundamental.

Considerações Finais

O presente estudo, desenvolvido com o olhar imbricado de pesquisadora e de professora dos anos iniciais, visou identificar e analisar conhecimentos específicos de professores que atuam no ensino fundamental sobre situações-problema envolvendo estruturas aditivas e verificar o que eles pensam sobre o conhecimento teórico relativo a este conteúdo, evidenciou alguns aspectos importantes a considerar quanto ao que foi investigado.

Um dos aspectos, diz respeito ao conhecimento específico sobre o conteúdo matemático abordado. Inferimos que os conhecimentos evidenciados ainda são insuficientes para serem tratados como um corpo de conhecimentos aprofundados e comum a todos os professores do ensino fundamental, apesar de ser um conteúdo explorado em sala de aula e os professores considerarem a sua importância no ensino da Matemática.

Identificamos alguns conhecimentos específicos do conteúdo importantes sobre o que foi investigado, que mesmo não tendo sido observados em todos os professores que participaram da investigação, nos dão uma ideia sobre o processo de formação inicial e continuada a que esses profissionais tiveram acesso, tais como: ideias da subtração, algoritmo da subtração, variedade de estratégias de cálculos e existência de uma diversidade de tipos de problema.

No entanto, também observamos que ainda há ausência de conhecimento sobre as classificações dos tipos de problemas matemáticos com estruturas aditivas, o que são estruturas aditivas e de outros conhecimentos relacionados ao conteúdo investigado, como cálculos numéricos e cálculos relacionais. Constatamos ainda, que a teoria dos Campos Conceituais não foi identificada e nem relacionada ao trabalho com situações-problema com estruturas aditivas pelas professoras, o que limitou um pouco a participação das mesmas nas discussões realizadas com o grupo.

Tais constatações indicam-nos que os conhecimentos específicos que os professores apresentam sobre o conteúdo que foi abordado na pesquisa, necessitam ser ampliados em seus processos formativos em serviço, para que suas práticas pedagógicas possam contribuir melhor na aprendizagem, no acompanhamento e avaliação do desempenho dos estudantes, além de melhor orientar seus planejamentos de ensino. Com isso, espera-se que os estudantes realizem aprendizagens mais significativas, reflexivas e dinâmicas a partir de um maior domínio do conteúdo pelo professor.

Os dados também revelaram o pensamento dos professores relativo à importância do conhecimento teórico que fundamenta o conteúdo sobre as estruturas aditivas e o trabalho com situações-problema. Verificamos que os professores reconhecem a necessidade de ampliar esse conhecimento para uma atuação profissional mais autônoma e consistente. Acreditamos que espaços de formações continuadas também podem promover a mobilização desse conhecimento.

É preciso considerar também que apenas o conhecimento específico do conteúdo não garante que este conteúdo específico seja ensinado e aprendido. Segundo Shulman (2005), o conhecimento pedagógico do conteúdo também se faz necessário na mobilização de um conhecimento específico, pois são complementares entre si.

Considerando os resultados verificados nesta pesquisa, acreditamos que outros estudos podem ser realizados com o olhar voltado para outros tipos de conhecimentos necessários à prática docente, tanto à luz dos estudos de Shulman, ou de outros teóricos que investigam conhecimentos docentes, ou ainda, que ampliem esta investigação com uma amostra maior de professores do ensino fundamental.

Finalmente destacamos que realizar esse estudo, ocupando vários papéis, de professora dos anos iniciais, que vivenciou a oportunidade de cursar mestrado em Educação Matemática e Tecnológica, tornando-me pesquisadora; e como pesquisadora olhar para os conhecimentos dos meus pares, me ajudou a compreender os desafios para a construção de conhecimentos docentes e também a ressignificar minha prática.

Referências

CÂMARA DOS SANTOS, M. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. *Revista do Professor de Matemática*, nº 50, 3º quadrimestre de 2002. (http//www.rpm.org.br/cdrpm/50/7.htm)

CARPENTER, T. & MOSER, J. The development of addition and subtraction problem solving skill. In. T. Carpenter, J. Moser e T. Romberg (orgs.), Addition and subtraction: A cognitive perpective. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1982, p. 9-24.

GUIMARÃES; BORBA, R. org. *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização.* Recife: SBEM, 2009.

MAGINA, S. CAMPOS, T. M. M; GITIRANA, V; NUNES, T. *Repensando adição e subtração:* contribuições da teoria dos campos conceituais. 3ª ed. – São Paulo: PROEM, 2001.

MELLO, G. N. d. *Formação inicial de professores da Educação Básica:* uma (re)visão radical. São Paulo: Perspectiva, Vol. 14, nº 1, São Paulo, Jan/Mar, 2000.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*, Porto Alegre, 1997.

PESSOA, C. *Interação Social:* uma análise do seu papel na superação de problemas aditivos. Infocus, ano 2, nº 4, pp. 40-52, 2004.

SHULMAN, Lee. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15 (2), 1986. p. 4-14.

SHULMAN, Lee. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational* 57 (1), 1987, p. 1-22.

SHULMAN, Lee. S. Conocimiento didáctico em Cencias Sociales. Profesorado. *Revista de Curriculum y formación del profesorado*, 9, 2, 2005.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986, pp. 75-90.

CAPÍTULO 6

Algoritmo da subtração: uma análise em coleções de livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental

Regina de Lima Silva, Ana Quele Gomes de Almeida, Rosinalda Aurora de Melo Teles e Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Introdução

A presente pesquisa teve como objetivo analisar estratégias didáticas apresentadas para as resoluções de atividades envolvendo o algoritmo da subtração em livros didáticos. Olhamos para o trabalho com essa temática em livros aprovados pelo Plano Nacional de Livros Didáticos (PNLD). De acordo com o guia do PNLD "o livro didático de Matemática, instrumento de trabalho do professor e de aprendizagem do aluno, é adequado na medida em que favorece a aquisição, pelo aluno, de um saber matemático autônomo e significativo"(BRASIL, 2013, p.19).

A construção desta pesquisa é fruto do trabalho de conclusão da disciplina Números e Operações, vivenciada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, mas também das experiências que vivenciamos enquanto professoras dos anos iniciais, situação na qual percebemos que o livro é um recurso

1 Trabalho ampliado a partir de artigo publicado no XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.

de referência para professores e estudantes permeando o processo de ensino e de aprendizagem.

De acordo com Amorim e Silva (2016), os professores fazem uso dos conceitos apresentados nos livros didáticos para consolidar saberes, tornando esses materiais um dos principais instrumentos para orientar o processo de ensino e de aprendizagem, contribuindo também no processo de resolução de problemas e reflexão sobre os conteúdos. Dessa forma, o livro didático é um instrumento importante para introdução, consolidação e aprofundamento de conceitos que estão sendo desenvolvidos nas aulas de Matemática, sendo uma ferramenta muito utilizada na prática docente. Essa ampla utilização dos livros didáticos sinaliza a necessidade e a relevância da produção de pesquisas que abordem o uso, embora não seja o foco nesta pesquisa.

Os algoritmos são procedimentos de cálculo que utilizam uma sequência programada para se obter um resultado. No entanto, se o uso de algoritmos não estiver associado à compreensão, pelos estudantes, dos conceitos envolvidos em cada etapa da técnica utilizada nos mesmos, será um conhecimento superficial, memorização de técnicas, sem compreensão do processo. A utilização do algoritmo da subtração precisa estar associada à compreensão do Sistema de Numeração Decimal, através de seus agrupamentos e reagrupamentos (BRASIL, 2014). Acerca do uso do algoritmo na subtração com reserva, pesquisas apontam dificuldades dos estudantes com este conteúdo (MELLO, 2008; SANTOS; TELES, 2015; BERTINI; PASSOS, 2007).

Mello (2008) elenca em seus estudos, dentre outros aspectos, as dificuldades que os estudantes do 3º e 4º ciclos de aprendizagem apresentam com o algoritmo da subtração com reserva. A pesquisadora buscou elementos para averiguar se a dificuldade dos estudantes estaria no método do empréstimo. A partir da leitura dos resultados dessa pesquisa, nos deparamos com alguns questionamentos, a saber:

Como os livros didáticos abordam o conteúdo da subtração em coleções do 4º e 5º anos do ensino fundamental? Quais os tipos de algoritmos da subtração e ideias que estariam implícitas ou explícitas nas atividades propostas?

Para tentarmos buscar respostas para tais questionamentos, partimos da hipótese de que os livros didáticos apresentavam apenas o trabalho com o método de empréstimo, mas também poderiam apresentar outras estratégias para ajudar nas resoluções dos cálculos numéricos da subtração. Examinando os estudos de Vergnaud (1982, p.1) acerca da formação dos campos conceituais, podemos concluir que "o saber se forma a partir do problema a resolver [...] de situações a dominar", ou seja, são estas situações que colaboram para construir um conceito.

A seguir, apresentaremos algumas orientações e discussões acerca do ensino das estruturas aditivas nos anos iniciais do ensino fundamental, dando ênfase às ideias da subtração. Após essas discussões, serão introduzidos os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa e os resultados e discussões a partir da análise documental realizada e, por fim, nas considerações finais, serão retomados os pontos relevantes da pesquisa.

Construção da problemática

No contexto das quatro operações fundamentais, a subtração configura-se, juntamente à adição, como aspecto inicial a ser trabalhado na escola (BRASIL, 1997). Para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017, em relação aos cálculos, é importante que estudantes desenvolvam diversificadas estratégias para encontrar os resultados, tais como: estimativa, cálculo mental, algoritmo e uso de calculadora. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam que se trabalhem os problemas subtrativos concomitantemente aos aditivos, dada a estreita relação entre eles. Os PCN (BRASIL, 1997) dividem os diferentes significados da adição e da subtração em quatro grupos:

- As situações associadas às ideias de combinar dois estados para obter um terceiro, também denominada de "juntar";
- O segundo grupo de situações são as transformações de um estado inicial, o qual pode ser positivo ou negativo;
- No terceiro grupo está a ideia de comparação;
- No quarto e último grupo estão as situações ligadas à ideia de mais de uma transformação, que por sua vez pode ser positiva ou negativa.

Segundo Vergnaud (1996 apud Lins, 2011, p. 79-80), o campo conceitual das estruturas aditivas é o conjunto das situações em que se inserem cálculos relacionados às adições ou subtrações, ou às duas combinadas, havendo nestas uma diversidade de conceitos, como o conceito de numeral, antecessor, sucessor, além de diversas operações envolvendo as variáveis do problema, como: seriar, ordenar, reunir, juntar, somar, acrescentar, subtrair, separar, afastar, transformar, comparar.

Vergnaud (1996 apud Mello 2008) sinaliza que, quando introduzimos um algoritmo, estamos conduzindo o estudante a criar um determinado esquema, ou seja, o algoritmo é um tipo de esquema que, dependendo da forma como foi introduzido, será utilizado habitualmente pelo estudante. Considerando os esquemas como a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações, Vergnaud (1996, p. 203) defende que "a educação, portanto, deve contribuir para que o sujeito desenvolva um repertório amplo e diversificado de esquemas". Dessa forma, consideramos o livro didático um importante recurso para que se explorem atividades no campo das estruturas aditivas, colaborando com esse processo de cognição.

Magina et al. (2010) defende a necessidade de não se estudar a adição e a subtração separadamente, mas dentro do campo conceitual das estruturas aditivas, considerando que um conceito pode remeter a diversas situações e uma situação pode estar relacionada a vários conceitos.

Nosso olhar para essa análise não está na ideia de "juntar", mas nas ideias básicas das relações aditivas e suas diversas situações. Segundo Vergnaud, "as relações aditivas são relações ternárias que podem ser encadeadas de diversas maneiras e resultar em uma grande variedade de estruturas aditivas." (VERGNAUD, 2009, p. 200). Nesse sentido, as relações ternárias, por sua vez, têm o papel de ligar: "conforme seja a transformação b positiva ou negativa; - conforme seja a pergunta concernente ao estado final c (conhecendo-se a e b), à transformação b (conhecendo-se a e c), ao estado inicial (conhecendo-se b e c)", afirma Vergnaud (2009, p.207).

As situações problemas de subtração podem apresentar três diferentes ideias: *tirar, completar* e *comparar*. A ideia mais usual de subtrair é *tirar*.

São comuns muitas atividades que trabalham essas ideias no livro didático, como no exemplo:

"João tinha 10 bolinhas de gude e deu 5 para seu irmão. Quantas bolinhas João tem agora?"

Esse tipo de problema, segundo Magina et al. (2008), é facilmente resolvido por crianças de aproximadamente 5 anos, devido à associação que elas fazem entre as situações de "ganho" e "perda", que são suas primeiras representações sobre as ideias de somar e subtrair. Entretanto, as outras ideias da subtração, *completar* (Quanto falta para?) e *comparar* (quanto tem a mais/menos?), devem ser igualmente exploradas, através de diferentes situações, para que se construam os significados desta operação fundamental.

Nogueira (2015) afirma que, na ideia de comparar, a criança não se depara com grandes dificuldades, porque essa operação se trata de uma correspondência biunívoca, apenas contando os elementos que sobraram depois. Por exemplo, a situação, *Isabela tem 20 adesivos. Manoela tem 30. Quantos adesivos Manoela tem a mais que Isabela?* representa uma sentença do tipo (X – Y), a qual não apresenta dificuldades expressivas para as crianças.

A ideia de completar, entretanto, pode apresentar dificuldade para a criança saber quando se deve acrescentar valores à quantidade que tem menos ou tirar da quantidade que tem mais. Isso ocorre porque a criança, muitas vezes, não percebe que há uma ideia de subtração implícita na situação e que o valor desconhecido é a parcela de uma adição, por exemplo nessa situação *Fabio tinha R$ 6,00. Ganhou mais dinheiro de sua mãe. Quando contou, percebeu que agora tinha R$ 10,00. Quanto ele ganhou da mãe?*.

Segundo Magina et al. (2008), esse tipo de problema pode desenvolver na criança a estratégia de completar ao invés de subtrair, o que demonstra um raciocínio aditivo. Embora essa estratégia seja válida e correta, pode não ser viável para resolver problemas com dados numéricos maiores, como no exemplo: *Na biblioteca da escola havia 456 livros. Chegaram mais 654 livros. Quantos livros a biblioteca tem agora?*.

À medida que a criança se familiariza com novas situações de subtração, ela irá ampliando as várias faces dessa operação e progredindo em sua experiência matemática. Assim, quanto menos *pistas* o estudante tiver do tipo de estratégia que deve utilizar para resolver o problema, mais ele poderá refletir sobre os dados e a situação, explorando diferentes raciocínios. É necessária uma diversificação de problemas que possibilite ao aluno interpretar, analisar, descobrir e verificar diferentes estratégias subtrativas (MAGINA et al., 2008).

Segundo Mello (2008), no ensino do algoritmo da subtração com reserva existem dois métodos:

O método mais antigo é o da compensação, que consiste em adicionar a mesma quantidade no minuendo e no subtraendo, diz-se que houve uma compensação.

O método do empréstimo (decomposição do minuendo ou reagrupamento) é mais recente. Quando um número do minuendo é maior que o do subtraendo, há a necessidade de "pedir emprestado" uma dezena ao número vizinho, e assim há uma decomposição do minuendo. Mas essa situação de decomposição muitas vezes não fica clara para o estudante, que não compreende que se trata de uma decomposição.

Diante da variedade de relações matemáticas presentes no conteúdo da subtração, faremos uma análise de livros didáticos, com o objetivo de identificar como apresentam a resolução do algoritmo da subtração, o conteúdo da subtração, especialmente quais os recursos envolvidos na introdução do conteúdo, quais os métodos utilizados na subtração com reserva e as sugestões de estratégias apresentadas para a resolução de problemas.

Metodologia

A pesquisa se caracteriza como uma análise qualitativa e documental de três coleções de livros didáticos de Matemática do 4º e 5º anos. Escolhemos duas coleções aprovadas pelo PNLD para o ano de 2013 e uma coleção aprovada em 2019, de forma aleatória, totalizando seis livros. O intuito dessas escolhas foi trazer uma amostragem das coleções de 2013 e olhar também para uma coleção mais atualizada, a de 2019, tendo como objetivo analisar o algoritmo da subtração e as estratégias didáticas que cada livro aponta para desenvolver o trabalho com essa temática.

Para Guimarães (2009), acerca do tratamento temático da informação (TTI), a natureza da análise documental consiste na busca de elementos internos de dados que permitam categorizar os elementos textuais e não textuais do documento para poder extrair suas noções fundamentais. Consoante com essas orientações e de acordo com as pesquisas de Brandão e Selva (1999) sobre livro o didático na educação infantil, refletimos sobre a estrutura dos livros e elaboramos alguns questionamentos a fim de criarmos nossas categorias de análise.

Produzimos uma ficha de avaliação com os seguintes eixos de análise:

1. Forma de introdução do conteúdo da subtração: como o conteúdo da subtração é apresentado no início da unidade para o estudante?
2. Métodos utilizados para a resolução do algoritmo da subtração com reserva (compensação e empréstimo): o livro apresentaria apenas o método do empréstimo ou também da compensação?
3. Sugestões de estratégias apresentadas para resoluções de atividades: o livro propõe estratégias diversificadas para a resolução de atividades?

Buscamos também algumas orientações teóricas que subsidiaram a pesquisa, relacionadas com a teoria dos campos conceituais das estruturas aditivas de Vergnaud (1982), além de outras pesquisas que enfocam essa temática baseadas no teórico. Utilizamos as siglas de identificação F4, F5, P4 e P5 para os livros de 2013 e A4 e A5 para a coleção de 2019, cada número corresponde ao seu respectivo ciclo.

Análise dos dados

Organizamos nossos resultados apresentando o levantamento dos dados identificados nos livros, bem como as discussões, a partir das três categorias citadas anteriormente.

A primeira categoria observada foi *a introdução do conteúdo da subtração:*

No livro F4, a subtração foi apresentada juntamente com a adição. Observamos que na introdução do conteúdo é colocada uma situação-problema expondo uma ilustração de um “contador” formado por esferas, no qual essas esferas representavam centena, dezena e unidade, estimulando a reflexão sobre o sistema de numeração decimal. Também visualizamos alguns exercícios de contas para resolução na apresentação do conteúdo.

Figura 1 - Introdução à subtração

Fonte: Munhoz (2011, p.81).

Já o livro P4, inicialmente, apresenta todos os conteúdos da subtração que serão estudados na unidade. Verificamos que o conteúdo é abordado de maneira contextualizada, fazendo ligação com o gênero textual receita. Também constatamos que aparecem várias situações-problema que envolvem o algoritmo da subtração. O mesmo livro também explica os três termos da subtração (minuendo, subtraendo e resto ou diferença). Entretanto, percebemos que não existia definição do que seja a subtração em nenhum deles.

Nas coleções F5 e P5, o conteúdo da subtração foi apresentado juntamente com os números racionais na forma decimal e fracionária. Inicialmente, expõe-se uma imagem de crianças em situações de brincadeira utilizando dinheiro, proporcionando uma situação problema para resolução. Observamos que, assim como a coleção anteriormente analisada, nestas também não há uma definição do que seja a subtração. Porém encontramos diversos cálculos na introdução do conteúdo, fazendo uma relação de compra e venda envolvendo o algoritmo da subtração. Em uma atividade, é explicada como tirar a prova real do algoritmo da subtração. Percebemos também problemas com a ideia de comparar, tirar e completar.

Nas análises dos livros A4 e A5, que correspondem à coleção de 2019, identificamos que o material dialoga com a BNCC, pois no início da apresentação do conteúdo observamos as habilidades propostas para aquela temática (adição e subtração). A coleção também faz a introdução, mencionando outras unidades temáticas da Matemática que serão relacionadas naquele capítulo, como: números, álgebra, probabilidade e estatística. Por fim, os livros introduzem uma situação-problema referente à adição e subtração.

Magina et al. (2010) esclarece que há a necessidade de se estudar a adição e a subtração de formas relacionadas, por exemplo, às operações inversas, dentro do campo conceitual das estruturas aditivas, visto que um conceito pode se referir a muitas situações e uma situação pode estar relacionada a outros conceitos. Observamos que os livros A4 e A5 lidam nessa perspectiva, relacionando a adição à subtração no decorrer do capítulo. Portanto, as propostas sugeridas nos livros objetivam, possivelmente, colaborar com o trabalho didático realizado pelo professor e na aprendizagem dos estudantes.

A seguir, apresentamos um resumo da forma de introdução do conteúdo da subtração identificada nessa categoria:

Quadro 1 - Forma de introdução do conteúdo da subtração e dados identificados

Forma de introdução do conteúdo da subtração	F4	F5	P4	P5	A4	A5
Situações-Problema	X	X	X	X	X	X
Prova Real				X		
Situação contextualizada			X	X		
Algoritmo			X	X		
Apresentação de Habilidades da BNCC					X	X
Relação com outras unidades temáticas					X	X

Fonte: elaboração das autoras

Esteves (2013), fundamentada na teoria de Vergnaud (1982), afirma que o funcionamento cognitivo dos sujeitos se baseia no seu repertório de esquemas já formados. À medida que as situações se tornam mais complexas, o sujeito pode construir uma variedade de esquemas. Percebemos, na introdução dos conteúdos dos livros, uma relação entre conceitos já trabalhados com os estudantes em anos anteriores. Os livros também exploram diversas situações-problema.

Essa diversidade de situações confirmam as pesquisas de Vergnaud acerca da formação de conceitos, quando o autor afirma que é necessária uma variedade de situações para que os estudantes construam relações matemáticas dando significado a um conceito. Vergnaud (1983 apud Moreira 2002) define três argumentos para a formação de um campo conceitual. São eles:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos

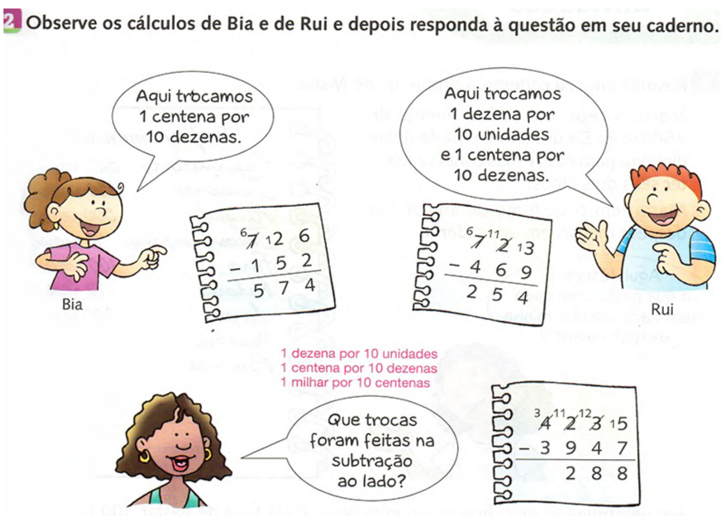
entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes. (VERGNAUD, 1983, p. 393).

A segunda categoria da análise foram *os métodos utilizados para a resolução do algoritmo da subtração com reserva.*

Em seus estudos, Mello (2008) concluiu que o algoritmo da subtração com o método do empréstimo poderia ser uma das causas da dificuldade dos estudantes na subtração com reserva, especialmente quando envolve zeros no minuendo. Entretanto, encontramos diversificadas estratégias de subtração com reserva nos livros didáticos, especialmente com o zero intercalado, sugerindo a autonomia e criatividade para solucionar as diversas situações.

A seguir, apresentamos uma atividade utilizando o método do empréstimo:

Figura 2 - Método do empréstimo



Fonte: Veridiano (2011, p.75)

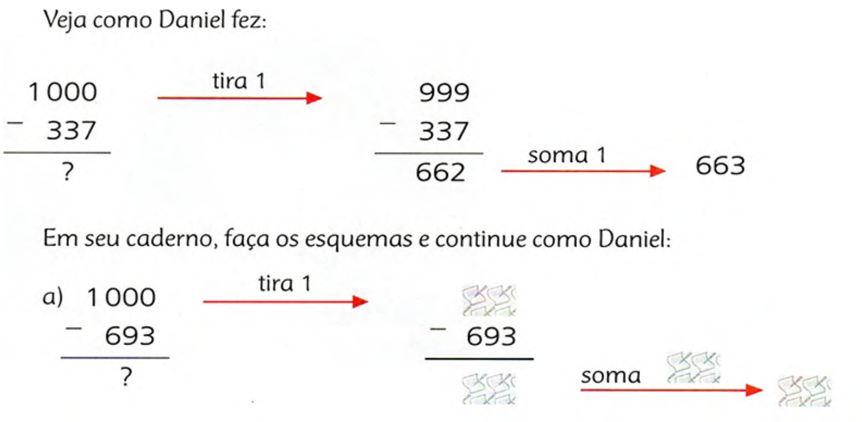
No exemplo apresentado para resolução do algoritmo da subtração, o livro exibe o passo a passo para se chegar à resposta correta, usando o sistema de numeração decimal, diferentemente do livro F4, que trouxe exemplos utilizando o material dourado como estratégia para aprofundamento e entendimento de como funcionam as trocas da milhar, centena, dezena para a decomposição do minuendo, e assim solucionar as questões.

Nos estudos de Mello (2008), quando a autora analisou 60 livros didáticos do 3º ano do ensino fundamental, foi visualizado em diversos livros a resolução do algoritmo da subtração com recurso ou reagrupamento utilizando a decomposição do minuendo, denominado método do empréstimo. Podemos apontar que o uso deste método é bastante empregado em diversos livros para resoluções de exercícios e problemas que envolvem o algoritmo da subtração com reserva.

De acordo com a pesquisa de Bertini e Passos (2007), ao se depararem com o zero nas parcelas da subtração e adição, mesmo os estudantes que não têm dificuldade com o algoritmo da subtração, cometem erros. Ruiz e Nascimento (1993 apud Queiroz e Lins), a partir de suas pesquisas, denominaram esse erro de "supremacia do zero", quando se demonstrou que o percentual de erros dos estudantes envolvendo o zero no algoritmo da subtração foi altíssimo. As estratégias encontradas nos livros F4 e P4 apresentam diferentes formas de resolução envolvendo o zero, seja decompondo os números em partes menores, seja subtraindo uma unidade e compensando no resultado e utilizando estimativas.

Ao analisar os seis livros didáticos, vemos que o método mais utilizado para solucionar os problemas e cálculos envolvendo subtração com reserva foi o método do empréstimo (decomposição do minuendo). No livro F4, verificamos também o método da compensação, conforme Figura 3.

Figura 3 - Método da compensação



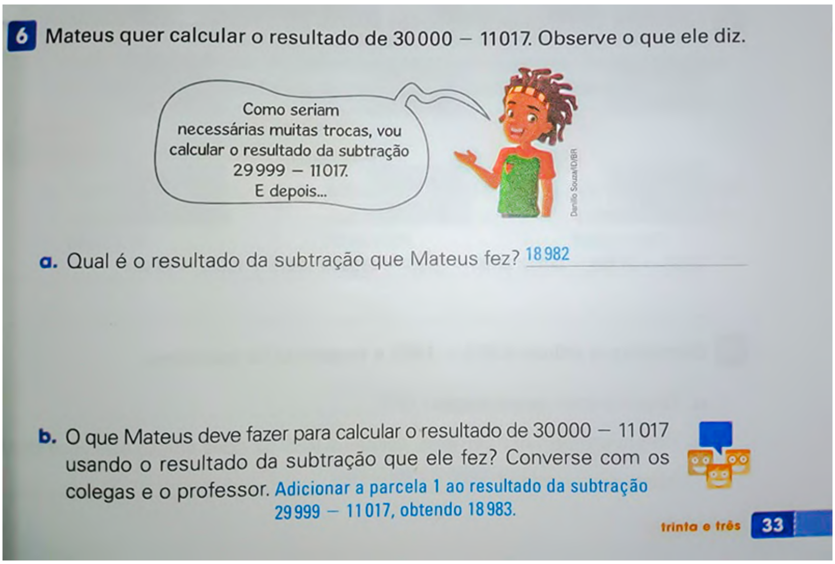
Fonte: Munhoz (2011, p. 91)

Constatamos a presença desse método em atividades de subtração com reserva. O livro apresentava a explicação para a resolução, sugerindo tirar uma unidade do minuendo e depois acrescentar uma unidade na diferença ou no resto. Essa estratégia despertou atenção por haver uma compensação na diferença encontrada para facilitar o algoritmo da subtração envolvendo o zero. Nas atividades que exploravam o zero, nesse livro F4, não foi sugerido o método do empréstimo, mas diferentes estratégias como cálculo mental, arredondamento e a estratégia de compensação acima citada.

Ao observar o livro A4, encontramos mais atividades com o algoritmo da subtração com reserva utilizando o método do empréstimo (decomposição do minuendo) para as resoluções dos exercícios propostos. Esse método estava bem presente durante o capítulo, trazendo estratégias diversificadas para ajudar na resolução e no entendimento dos estudantes. No entanto, verificamos uma única atividade que explorava o método da compensação (Figura 4).

O livro apontava explicação para a resolução desse exercício, salientando que era uma subtração que envolvia muitas trocas. Na resolução desse exercício, o livro orienta a tirar uma unidade do minuendo e adicionar uma unidade na diferença ou no resto para facilitar o algoritmo envolvendo o zero. O próprio livro ressalta que essa era uma estratégia que ainda não tinha sido apresentada no capítulo. Santos e Teles (2015) destacam que o método da compensação é baseado no teorema da Invariância do resto. Segundo os autores supracitados, o método da compensação se apoia em técnicas; e o do empréstimo, no entendimento do Sistema de Numeração Decimal (SND).

Figura 4 - Método da Compensação



Fonte: Leite e Taboada (2017, p. 33).

Em relação ao livro A5, foram apenas apresentadas atividades utilizando o método do empréstimo, propondo a decomposição dos números.

No quadro a seguir, estão resumidos os principais dados descritos na segunda categoria:

Quadro 2 - Métodos utilizados para a resolução do algoritmo da subtração com reserva

Métodos da Subtração com Reserva	**F4**	**F5**	**P4**	**P5**	**A4**	**A5**
Empréstimo	X	X	X	X	X	X
Compensação	X				X	

Fonte: elaboração das autoras

A terceira categoria a ser analisada diz respeito às *sugestões de estratégias apresentadas para resoluções de atividades.*

Diversas estratégias foram identificadas nessa categoria, conforme o Quadro 3:

Quadro 3 - Sugestões de estratégias apresentadas para resoluções de atividades.

Sugestões de Estratégias	**F4**	**F5**	**P4**	**P5**	**A4**	**A5**
Decomposição	X	X	X	X	X	
Prova Real			X	X		
Material Dourado	X				X	
Cálculo Mental	X		X	X	X	X
Calculadora			X			X
Algoritmo	X	X	X	X	X	X

Sugestões de Estratégias	F4	F5	P4	P5	A4	A5
Ábaco de pino					X	X
Arredondamento					X	X
Situações-problema					X	X
Passo a passo			X	X	X	
Situação contextualizada					X	
Estimativa			X	X	X	X

Fonte: elaboração das autoras

Bertini e Passos (2007), em suas pesquisas sobre dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais do ensino fundamental, enfatizam que, ao se utilizarem reagrupamentos, ocorrem com frequência erros nas resoluções dos estudantes, principalmente na subtração. Os erros que envolvem reagrupamento se apresentaram nesse trabalho de diferentes maneiras, mas na grande maioria dos casos, têm sua origem na falta de compreensão do sistema de numeração decimal. Os estudos dos autores supracitados confirmam também que uma estratégia que pode favorecer o conhecimento do sistema de numeração decimal e facilitar a subtração com reserva é a utilização de recursos didáticos como o material dourado, (BERTINI e PASSOS, 2007), conforme constatamos no livro F4. Essa pesquisa demonstra que nos algoritmos da subtração envolvendo reagrupamentos, os estudantes possuem dificuldades e erram mais.

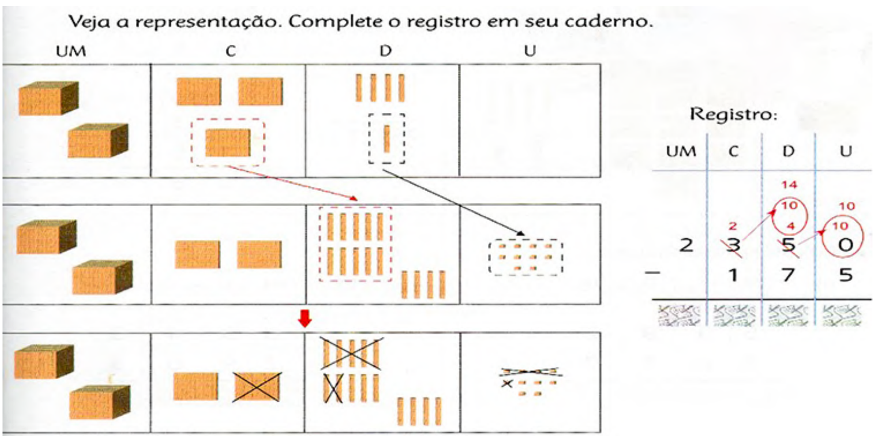
Outras estratégias utilizadas nos livros P4 e P5 foram o cálculo mental e a estimativa. Segundo Bertini e Passos (2007, p.8),

> esse tipo de estratégia facilita muito a estimativa de resultados e, portanto, a verificação pelo próprio aluno se sua conta ou seu procedimento para resolver um dado problema são coerentes. O cálculo mental e aproximado

permite que os alunos obtenham a estimativa do resultado e percebam sozinhos se o resultado encontrado é adequado.

No livro F4, em algumas atividades que enfocam a subtração com reserva de números com centenas, não foi apresentado o algoritmo da subtração, estimulando a autonomia do estudante em criar estratégias. Nesse livro, também há atividades que sugerem aos estudantes tirar o subtraendo aos poucos, sem "armar a conta", decompondo o subtraendo em centena, dezena e unidade. Em outras atividades, é demonstrada a representação do minuendo com o material dourado e a decomposição do mesmo. Em algumas atividades, o minuendo apresenta o número zero intercalado, e também são feitos sucessivos empréstimos, sendo demonstrado com o material dourado como deve ser feito o procedimento de decomposição e empréstimo da dezena pelos estudantes.

Figura 5 - Utilização do material dourado na subtração



Fonte: Munhoz (2011, p.87).

A maioria das atividades que envolvem contas com a subtração com reserva sugere o uso do algoritmo, mas também estimulam outras estratégias. Uma proposta muito interessante para a subtração com reserva sugeria que o estudante descobrisse que, ao acrescentar ou tirar parcelas iguais do minuendo e do subtraendo, facilita-se a resolução dos cálculos de subtração com reserva.

Já no livro F5, o conteúdo da subtração aparece de forma sucinta e apresentando apenas o método do empréstimo para a resolução de problemas e cálculos, trabalhando com o sistema monetário.

Na análise dos livros P4 e P5, foram encontradas quatro estratégias para solucionar os problemas e exercícios propostos. Para Vergnaud (1982), a formação de conceito não se dá em um só tipo de situação, mostrando que diversas situações devem ser apresentadas para a construção de conceitos

Nos livros P4 e P5, visualizamos algumas estratégias para a resolução do algoritmo da subtração com reserva. Notamos que no decorrer das atividades apresentadas foram utilizados o método do empréstimo para soluções dos problemas e exercícios propostos, como também observamos em outras atividades procedimentos utilizando estimativa. As explicações dos exemplos mostram as resoluções dos problemas bem detalhados, ou seja, o passo a passo para se chegar à resposta correta.

Identificamos alguns exercícios que incentivam o uso da calculadora no livro P4, assim como constatamos propostas de atividades para uso do cálculo mental. Nesse livro, o conteúdo da subtração é mais detalhado, com diversidade de exercícios e problemas a resolver; já no livro P5, o conteúdo e os exercícios são mais sucintos. O livro P4 também explora o método do empréstimo. Algumas atividades enfatizam que os estudantes podem verificar os resultados da subtração utilizando a calculadora (Figura 6) e também a prova real, relacionando adição e subtração:

Figura 6 - Utilizando a prova real e a calculadora.

Os alunos poderão verificar o resultado das subtrações fazendo a adição ou utilizando a calculadora.

Agora, calcule, em seu caderno, o resultado das subtrações e verifique se estão corretas.

a) 748 – 359

a) $\begin{array}{r} 748 \\ -\,359 \\ \hline 389 \end{array}$ $\begin{array}{r} 359 \\ +\,389 \\ \hline 748 \end{array}$

b) 1559 – 1397

b) $\begin{array}{r} 1559 \\ -\,1397 \\ \hline 162 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1397 \\ +\,162 \\ \hline 1559 \end{array}$

c) 2456 – 1397

c) $\begin{array}{r} 2456 \\ -\,1397 \\ \hline 1059 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1397 \\ +\,1059 \\ \hline 2456 \end{array}$

d) 3624 – 1396

d) $\begin{array}{r} 3624 \\ -\,1396 \\ \hline 2228 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1396 \\ +\,2228 \\ \hline 3624 \end{array}$

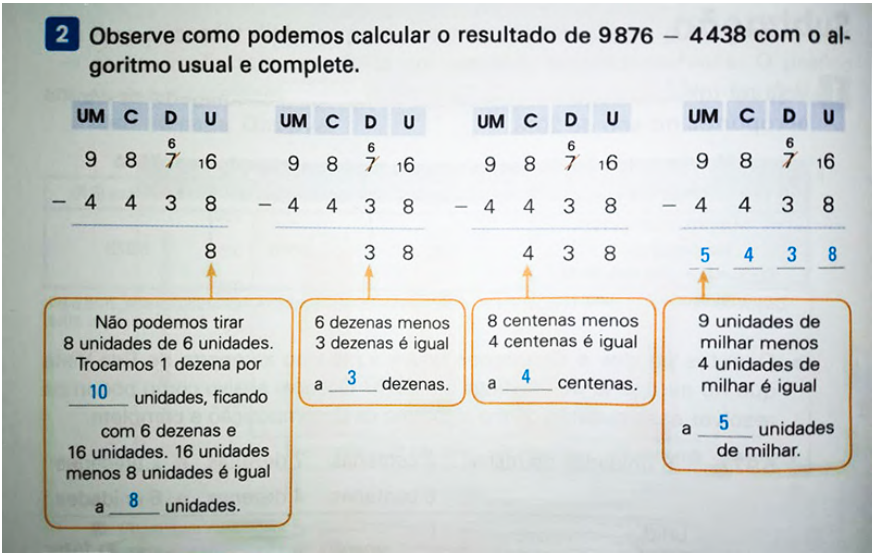
Fonte: Veridiano (2011, p. 70).

Ao olhar para as estratégias apresentadas para resoluções das atividades com o algoritmo da subtração do livro A4, observamos variedades de procedimentos para soluções dos exercícios propostos pelo livro. Algumas atividades propõem o uso de cálculo mental, material dourado para realizar a decomposição dos números e o ábaco de pino. Também constatamos a existência de sugestões como arredondamento, estimativa, situações-problema contextualizadas. A seguir apresentamos uma estratégia de decomposição que despertou atenção (Figura 7) pela forma de resolução.

Essa estratégia despertou nosso interesse pelo fato de a resolução do algoritmo com reserva propor a utilização de um procedimento bem explicativo e seguindo etapas da decomposição para facilitar o entendimento dos estudantes. A atividade mostra, por exemplo, que não se poderia tirar 8 unidades de 6 unidades, mas trocar 1 dezena por 10 unidades, e assim ficando 16 unidades para conseguir efetuar a subtração, demonstrando da mesma forma nas outras etapas das operações. O livro ressalta que, caso os estudantes sintam dificuldades de acompanhar o algoritmo da subtração, eles poderiam utilizar o material dourado e o ábaco de pino.

No livro A5, observamos algumas estratégias também utilizadas no livro A4, como, por exemplo, situações-problema; uso do ábaco de pino; cálculo por estimativa; arredondamento; uso da calculadora; e cálculo mental. Na sequência, apresentamos uma atividade (Figura 8) que solicita o uso de calculadora.

Figura 7 - Estratégia utilizando a decomposição passo a passo


2 Observe como podemos calcular o resultado de 9876 − 4438 com o algoritmo usual e complete.

UM	C	D	U
9	8	$\overset{6}{\cancel{7}}$	16
− 4	4	3	8
			8

Não podemos tirar 8 unidades de 6 unidades. Trocamos 1 dezena por 10 unidades, ficando com 6 dezenas e 16 unidades. 16 unidades menos 8 unidades é igual a 8 unidades.

UM	C	D	U
9	8	$\overset{6}{\cancel{7}}$	16
− 4	4	3	8
		3	8

6 dezenas menos 3 dezenas é igual a 3 dezenas.

UM	C	D	U
9	8	$\overset{6}{\cancel{7}}$	16
− 4	4	3	8
	4	3	8

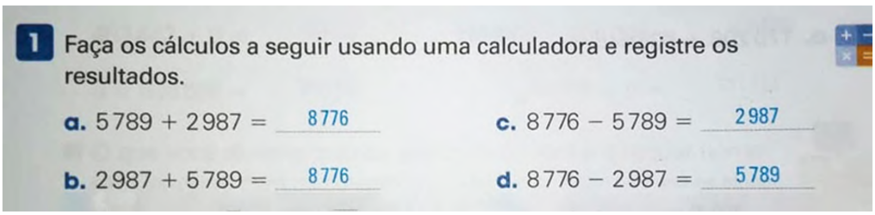
8 centenas menos 4 centenas é igual a 4 centenas.

UM	C	D	U
9	8	$\overset{6}{\cancel{7}}$	16
− 4	4	3	8
5	4	3	8

9 unidades de milhar menos 4 unidades de milhar é igual a 5 unidades de milhar.

Fonte: Leite e Taboada (2017, p. 32)

Figura 8 - Estratégia utilizando calculadora


1 Faça os cálculos a seguir usando uma calculadora e registre os resultados.

a. 5789 + 2987 = 8776

b. 2987 + 5789 = 8776

c. 8776 − 5789 = 2987

d. 8776 − 2987 = 5789

Fonte: Leite e Taboada (2017, p. 34)

Percebemos que o livro solicita o uso da calculadora para resoluções das questões. As atividades propõem a relação da adição e da subtração, trabalhando com as estruturas aditivas. Para Borba e Selva (2012, p. 51), "o reconhecimento da calculadora como importante ferramenta de fazer cálculo é grande, mas, por outro lado, não se tem o olhar para a máquina como instrumento pedagógico". O livro também salienta que o professor observe se os estudantes percebem que não é necessário realizar todas as operações com esse recurso.

Ao olharmos para a BNCC (2017), verificamos a presença das habilidades dessa unidade temática para o 4º ano, como solucionar e criar problemas com números naturais, relacionados com adição e subtração, utilizando diversidades de estratégicas como: cálculo, cálculo mental, algoritmos, estimativas, usando a relação entre adição e subtração. Em relação às habilidades para o 5º ano, o documento sinaliza a elaboração e resolução de problemas de adição e subtração com números naturais e racionais, utilizando diversificadas estratégicas tais como: cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmo.

Diante dos resultados desta análise documental, nos deparamos com situações-problema apontadas nos estudos de Vergnaud (1982), acerca das estruturas aditivas; além de Mello (2008); Bertini e Passos (2007); Esteves (2013); e Magina et al. (2008), os quais enfatizam também as ideias de tirar, comparar e completar, entre outras. Os livros, de forma geral, apreciam a diversidade de situações-problema tão importantes para a construção de conceitos desta operação matemática.

Considerações finais

Tivemos como objetivo de pesquisa analisar o algoritmo da subtração e as propostas de estratégias para resolução de atividades em livros didáticos de Matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental.

Nossa hipótese era que os livros apresentavam apenas o trabalho com o método do empréstimo, de acordo com os resultados da pesquisa de Mello (2008), mas supomos que eles poderiam apresentar outras estratégias para auxiliar na resolução das atividades propostas. Em nossos resultados, identificamos, além do método do empréstimo, estratégias que utilizaram o método da compensação, no qual se subtraia uma unidade do minuendo e adicionava-se uma unidade ao resultado da subtração.

A partir dessa análise, pudemos constatar variadas situações-problema presentes nos livros didáticos, como também a sugestão de diferentes estratégias para a solução da subtração com reserva, como a decomposição de termos da subtração, a utilização do método da compensação em subtrações com reserva com muitos zeros ou o zero intercalado. Outras estratégias foram identificadas, como o uso da prova real, o estímulo ao ábaco tradicional e o de pino, o cálculo mental, a calculadora e o uso de estimativa. As situações presentes nos livros estão em consonância com os pressupostos teóricos que nortearam a pesquisa, uma vez que possibilitam a criação de uma diversidade de relações a partir das atividades propostas, possivelmente contribuindo para o processo de conceitualização do estudante.

Conforme foi evidenciado em algumas pesquisas (BERTINI; PASSOS, 2007; ESTEVES, 2013; LINS, 2010; MELLO, 2008; QUEIROZ; NOGUEIRA, 2015), a dificuldade com o algoritmo da subtração está presente mesmo em estudantes que estão cursando a segunda etapa do ensino fundamental. Os livros didáticos são um importante instrumento de pesquisa para averiguar como o conteúdo está sendo apresentado aos estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental, etapa necessária para a construção de conceitos matemáticos. Sinalizamos a necessidade de pesquisas em outras coleções para a investigação desta temática.

Referências

AMORIM, N. da D; SILVA, R. d. L. Apresentação e utilização de tabelas em livros didáticos de matemática do 4º e 5º anos do ensino fundamental. EM TEIA – *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, vol. 7, n. 1, 2016.

BERTINI, L. F.; Passos, C. L. B. Dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais. In: 16º COLE - Congresso de leitura do Brasil, 2007, Campinas. *Anais do 16º COLE*. Campinas: ALB, 2007. p. 1-10.

BORBA, R. E. d. S. R.; SELVA, A. C. V. O que pesquisas têm evidenciado sobre o uso da calculadora na sala de aula dos anos iniciais de escolarização? *Educação Matemática em Revista* - RS, v. 1, n. 10, 2012.

BRANDÃO, A. C. P; SELVA, A. C. O livro didático na educação infantil: reflexão versus repetição na resolução de problemas matemáticos. *Educação e Pesquisa*, São Paulo: v. 25. n. 2, p.69-83, jul/dez. 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Guia do Livro Didático PNLD 2013*: Alfabetização matemática e matemática, ensino fundamental, anos iniciais. Brasília: MEC/SEB, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino de 1ª a 4ª série*: *Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Operações na Resolução de Problemas*. Brasília: MEC, SEB, 2014.

ESTEVES, M. M; GALVÃO, M. E. E. L. *Estruturas Aditivas: uma análise das propostas de esquemas contidas em diferentes coleções de materiais didáticos* *para os anos iniciais.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, 2013.

GUIMARÃES, J. *Abordagens Teóricas de tratamento temático da informação (TTI): catalogação de assunto, indexação e análise documental.* São Paulo: Ibersid, 2009.

LEITE, A; TABOADA, R. *Aprender Juntos:* SM, 6ª ed. São Paulo, 2017. Livros 4º e 5º anos.

MAGINA, S. M. P. et al. *Repensando adição e subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* 3ª ed. São Paulo, Brasil: PROEM, 2008.

MAGINA, S. M. P. et al. As estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. *Zetetiké,* Campinas: UNICAMP, v. 18, n. 34, jul/dez, 2010. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646679/13581. Acesso em: 10 jul. 2020.

MELLO, E. M. *Análise de dificuldades de alunos com o algoritmo da subtração.* Dissertação (Mestrado em Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. São Paulo, 2008.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciência e a pesquisa nesta área. *Investigação em Ensino de Ciências.* Porto Alegre, v. 7, p. 7-29, 2002.

MUNHOZ, A. F. D. S. *Fazer, Compreender e criar em matemática*: IBEP, 4ª ed. São Paulo, 2011. Livros 4º e 5º anos.

NOGUEIRA, C. M. I. *Salas de Apoio - Matemática - Operações Elementares,* 2010. Disponível em: http://www.fozbartolomeumitre.seed.pr.gov.br/redeescola/escolas/11/830/82/arquivos/File/Matematica/Prof-Clelia--Maria-Ignatius-Nogueira.pdf. Acesso em: 06 jul. 2015.

QUEIROZ, S; LINS, M. *Erros mais frequentes cometidos por alunos adolescentes de uma turma de EJA nas operações aritméticas de subtração.* X Encontro Nacional de Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

SANTOS, J. F. d; TELES, R. A. d. M. *Um estudo sobre o algoritmo da subtração com reserva:* a interpretação do professor para erros cometidos pelos alunos. Trabalho de conclusão de curso (TCC). Universidade Federal de Pernambuco, 2015.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didático das matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. Revista Grang, nº 38, 1982.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade.* Traduzido por Maria Lucia Faria Moro. Curitiba, PR: UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno de la didáctica. *Perspectivas.* Paris: Unesco, Oficina Internacional de Educación,v. 26, nº. 1, p. 195-207, março, 1996.

VERIDIANO, M. C. d. S. *Projeto Pitanguá Matemática*: Moderna, 3ª ed. São Paulo, 2011. Livros 4º e 5º anos.

CAPÍTULO 7

Uso de jogos como recurso didático para abordagem de estruturas aditivas nos anos iniciais

Dayse Cosme da Cruz Miranda, Juliana dos Santos do Espírito Santo Silva, Maria Mayara Araújo da Costa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Recomenda-se para o ensino de Matemática, especialmente nos anos iniciais do ensino fundamental, a utilização de jogos que visem, entre outros aspectos, a elaboração de estratégias mais adequadas para resolução de uma determinada situação-problema. Podem ser usados na introdução, no desenvolvimento, ou na finalização de um dado conteúdo. De acordo com Moura (2011, p.47):

> O jogo para ensinar Matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado.

No entanto, Teles (2019), acredita que o grande desafio do professor que atua com estudantes na faixa etária da infância é conduzir a atividade na direção do prazer, do querer e do gostar. A autora também afirma que há uma polissemia de termos usados para se referir a recursos didáticos, tais como, materiais ou objetos educativos; materiais pedagógicos; materiais instrutivos e materiais manipulativos. No entanto, de acordo com Teles (2019), “é consensual entre Educadores Matemáticos, que recursos didáticos para o ensino de Matemática seriam objetos do mundo natural que podem ser utilizados para representar a abstração”.

Também é consensual que necessitam da atuação didática do professor como sujeito engajado para utilizá-lo como ferramenta auxiliar para atingir os objetivos de aprendizagem, pois, consolidam saberes, produzem novos, motivam, são manipuláveis e propõe a concretização do abstrato.

Muitos educadores concordam que a Matemática está presente em quase todas as atividades realizadas por uma criança no seu contexto diário. Com os diferentes perfis de estudantes encontrados em sala de aula, os processos de mediação pedagógica ganham importância, revelando que qualquer aprendizagem na Matemática, seja do número ou de outro conceito, depende da qualidade da mediação realizada pelo professor, sempre desafiando, estimulando e intervindo nos processos de construção da aprendizagem de cada criança. É consensual que o professor, especialmente aqueles que tiveram uma formação Matemática frágil na educação básica, enfrenta muitos desafios para aprender fazer essa mediação no ensino de Matemática, entre eles dominar os conteúdos matemáticos e também o modo de ensiná-los. Esses dois aspectos, são o que Shulman (1896) chama de conhecimento do conteúdo específico, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular do conteúdo. Conhecimento pedagógico do conteúdo seria uma forma de conhecimento prático que é usada por professores para orientar suas ações em sala de aula, constituída, dentre outras coisas, pelo conhecimento das estratégias de ensino específicas que podem ser usados para atender às necessidades de aprendizagem dos alunos em circunstâncias específicas em sala de aula.

O autor também defende que os professores, para serem bem-sucedidos, teriam que enfrentar os problemas de conteúdo e pedagogia ao mesmo tempo, incorporando "os aspectos de conteúdo mais pertinentes para sua "*teachability*" (habilidade de ensinar). (SHULMAN, 1986, p. 9)".

Na experiência de ensino vivida no Subprojeto PIBID/Pedagogia UFPE – Campus Recife, sob a orientação da Professora Rosinalda Teles, organizamos e executamos uma proposta de utilização de jogos como recurso didático para a abordagem do tema Estruturas Aditivas, numa turma de 4º ano do ensino fundamental. Trabalhamos os jogos como elementos pedagógicos que contribuem nos processos de ensino e de aprendizagem, facilitando o desenvolvimento cognitivo do estudante. Portanto, fez-se necessário conhecer os alunos e criar métodos que os levassem a refletir sobre as dinâmicas e desenvolver habilidades proporcionadas pelo o jogo. A turma era constituída por 18 estudantes, com idade entre 9 a 14 anos. Havia crianças fora da faixa etária esperada para aquele ano escolar, especialmente por terem abandonado a escola em anos anteriores, seja por vontade própria, problemas familiares ou mudança de endereço. Em relação à rotina da turma, desenvolvemos atividades que permitiam a participação ativa das crianças nas aulas, favorecendo a construção do conhecimento em seu cotidiano. Uma versão inicial deste relato de experiência foi publicada em 2017 nos Anais do VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática[1].

Fundamentação teórica

Adotamos como fundamentação teórica, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), criada nos anos de 1980, no campo da Didática da

1 Texto disponível no link: http://epem.sbempe.com.br/anais/2017/PDFs/RE10510815480_162812.pdf

Matemática. Seu idealizador é o professor, psicólogo e pesquisador francês Gérard Vergnaud. Essa teoria foi criada para "[...] tentar melhor compreender os problemas de desenvolvimento específicos no interior de um mesmo campo de conhecimento" (VERGNAUD, 1996, p.11).

Nesse texto, temos como foco as Estruturas Aditivas e seus diferentes tipos de problemas. O campo conceitual dessas estruturas é entendido como:

> O conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações, e também como o conjunto dos conceitos, teoremas e representações simbólicas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1990, p. 9).

É necessário que o estudante desenvolva habilidades para resolver diferentes tipos de problemas, envolvendo estruturas matemáticas das mais simples, às mais complexas. Nesse sentido, o professor como mediador, deve incentivá-lo, criando diferentes situações. Para isso, é necessário que esse professor tenha um bom domínio do conhecimento, que irá acompanhá-lo ao longo de sua jornada. A TCC afirma que as crianças, normalmente, constroem um campo conceitual através da experiência na vida diária e na escola. Esses fatores perpassam necessariamente pela vida escolar delas, ou seja, a aprendizagem é, por excelência, de responsabilidade escolar.

De acordo com Mendonça, Pinto, Cazorla e Ribeiro (2007), Vergnaud classifica os diferentes tipos de problemas de Estruturas Aditivas em:

- Composição: nessa classe é possível relacionar parte e todo. Por exemplo: "Num tanque havia 6 peixes vermelhos e 7 peixes amarelos. Quantos peixes havia no tanque?";
- Transformação: é possível relacionar o estado inicial, uma transformação, que leva a um estado final. Por exemplo: "Maria

tinha 9 figurinhas e ganhou 4 figurinhas de seu pai. Quantas figurinhas Maria tem agora?";

- Comparação: é possível relacionar duas partes comparando–as. Elas são denominadas referente e referido, e uma relação. Por exemplo: "Ana tem 8 anos e Carlos tem 2 anos a mais que ela. Quantos anos tem Carlos?";
- Mistos: é possível combinar problemas das classes anteriores. Por exemplo: "João tinha 13 carrinhos, deu alguns para seu irmão e ficou com 8 carrinhos. Depois ganhou 4 carrinhos de seu pai. E, por fim, presenteou seu primo com 4 carrinhos. Quantos carrinhos João deu ao todo? E com quantos carrinhos João ficou no final?"

No entanto, neste trabalho, em virtude do domínio numérico no conjunto dos números naturais predominar nas situações que propomos, utilizamos como base a classificação de Carpenter e Moser (1982), no que diz respeito aos problemas aditivos. As autoras, distribuem os problemas em quatro categorias básicas, que se subdividem em dezesseis subcategorias conforme o valor desconhecido na situação-problema, onde é perceptível fatores de ordem semântica. São elas:

Quadro 1- Classificação de Carpenter e Moser

Combinação	Relata um convívio estático, entre duas quantidades e suas partes. (02 Subcategorias): Série desconhecida. Ex: Em seu aniversário, Breno ganhou 5 carros azuis e 3 carros vermelhos. Quantos carros ele ganhou ao todo? Subsérie desconhecida. Ex: Em seu aniversário, Breno ganhou 8 carros. Sendo 5 deles azuis e os outros vermelhos. Quantos eram os carros vermelhos?

Igualização	Problemas criativos que envolvem a transformação de umas das quantidades para que as duas fiquem iguais. (02 Subcategorias): Aumento da quantidade menor. Ex: Dani pintou 8 quadros e Heloísa pintou 5. Quantos quadros Heloísa precisa pintar para ficar com a mesma quantidade de quadros de Dani? Diminuição da quantidade maior. Ex: Dani pintou 8 quadros e Heloísa pintou 5. Quantos quadros Dani precisa doar para ficar com a mesma quantidade de Heloísa?
Mudança	Problemas criativos nos quais, a partir de uma quantidade inicial e uma transformação, causa um acréscimo ou decréscimo desta quantidade. (06 Subcategorias): Resultado desconhecido – situação de acréscimo. Ex: Jonata tem 7 canetas coloridas e sua tia lhe deu 4 canetas coloridas. Quantas canetas Jonata tem agora? Resultado desconhecido – situação de decréscimo. Ex: Jonata tem 7 canetas coloridas. Deu 4 canetas para sua prima. Com quantas canetas coloridas Jonata ficou? Transformação desconhecida – situação de acréscimo. Ex: No quintal de Bruno tinham 12 árvores. Nasceram outras 3 árvores. Quantas árvores têm no quintal de Bruno agora? Transformação desconhecida – situação de decréscimo. Ex: Bruno colheu no seu pomar 13 carambolas. Sua irmã comeu algumas. Agora só tem 8 carambolas. Quantas carambolas a irmã de Bruno comeu? Série inicial desconhecida – situação de acréscimo. Ex: Mamãe tinha alguns perfumes. Sua amiga chegou de viagem e trouxe-lhe, de presente, 3 perfumes. Agora a mamãe tem 28. Quantos perfumes mamãe já tinha? Série inicial desconhecida – situação de decréscimo. Ex: Mamãe tinha alguns perfumes. Ela deu para sua amiga 3 perfumes. Agora mamãe tem 9 perfumes. Quantos perfumes mamãe tinha antes?

Comparação	Problemas estáticos (não acrescenta, nem diminui) e que envolvem a comparação entre duas quantidades. (06 Subcategorias): Diferença desconhecida – termo "a mais". Ex: Sofia e Aurora comeram docinhos na festa. Sofia comeu 22 docinhos e Aurora 14. Quantos docinhos Sofia comeu a mais que Aurora? Diferença desconhecida – termo "a menos". Ex: Sofia e Aurora comeram docinhos na festa. Sofia comeu 22 docinhos e Aurora 14. Quantos docinhos Aurora comeu a menos que Sofia? Quantidade menor desconhecida – termo "a mais". Ex: Amanda têm 22 galinhas. Ela tem 8 a mais que Pedro. Quantas galinhas Pedro tem? Quantidade menor desconhecida – termo "a menos". Ex: Amanda tem 22 galinhas. Pedro tem 8 a menos que Amanda. Quantas galinhas Pedro tem? Quantidade maior desconhecida – termo "a mais". Ex: Fernando tem 14 garrafas e Juliana tem 8 garrafas a mais que ele. Quantas garrafas Juliana tem? Quantidade maior desconhecida – termo "a menos". Ex: Fernando tem 14 garrafas. Ele tem 8 garrafas a menos que Juliana. Quantas garrafas Juliana tem?

Fonte: Carpenter e Moser (1982)

Segundo Pessoa (2004), várias pesquisas surgiram em torno das Estruturas Aditivas sob as considerações de Carpenter e Moser, e as de Vergnaud. Resultados mostraram que mesmo ao final dos cincos primeiros anos do ensino fundamental, os estudantes apresentam dificuldades quanto a compreensão dos problemas que envolvem essas Estruturas Aditivas, principalmente os de tipos mais complexos e os que são menos usados pelos livros didáticos. Caso o aluno não possua uma verdadeira compreensão das relações subentendidas no problema, isto é, caso não esteja atento aos cálculos relacionais, possivelmente acontecerá o *erro*.

Para mediar e facilitar a aprendizagem dos estudantes, resolvemos então, propor a realização de jogos. Conforme Muniz (2010, p.26), "o interesse pelos estudos da relação entre jogos e aprendizagem Matemática sustenta-se na possibilidade de que todos os alunos possam, por meio dos jogos, se envolverem mais na realização de atividades matemáticas".

Entretanto faz-se necessário enfatizar que os jogos têm uma função que vai muito além de estratégia para preencher o tempo livre e as horas vagas do estudante. É possível enxergá-los como instrumento pedagógico a ser utilizado dentro da sala de aula, para que o educando usufrua dessa ferramenta desafiadora e estimuladora, da melhor maneira possível. Oliveira (1998, p.53), também se refere a essa dimensão:

> O jogo tem fortes componentes da resolução de problemas na medida em que jogar envolve uma atitude psicológica do sujeito que, ao se predispor para isso, coloca em movimento estrutura do pensamento que lhe permitem participar do jogo [...] O jogo, no sentido psicológico, desestrutura o sujeito que parte em busca de estratégias que o levem a participar dele. Podemos definir jogo como um problema em movimento. Problema que envolve a atitude pessoal de querer jogar tal qual o resolvedor de problema que só os tem quando estes lhes exigem busca de instrumentos novos de pensamento.

Além de propor um método diferenciado que motiva e atrai o aluno, os jogos transmitem informações de várias formas, fazendo com que a atenção e o interesse do aluno sejam mantidos, sem se tornar cansativo, facilitando a aprendizagem. Kishimoto (2003, p.13), também se refere a esta dimensão afirmando que:

> O jogo como promotor de aprendizagem e do desenvolvimento passa a ser considerado nas práticas escolares como aliado importante para o ensino, já que coloca o aluno diante de situações lúdicas. O jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem vinculados na escola.

A partir do momento que o professor, como mediador, adota o uso de jogos em seu ensino, é possível que o aprendizado aconteça de maneira continuada e progressiva, pois ele busca ferramentas que possibilitem esse processo, criando situações em que os estudantes possam sistematizar aprendizagens.

Relato de experiência

Desde o princípio, optamos por trabalhar as estruturas aditivas de forma lúdica, pois as observações empíricas, nos mostraram que este é um conteúdo que vai sendo aperfeiçoado durante todo o ensino fundamental, muitas vezes de maneira monótona e repetitiva. Mesmo assim, durante a sondagem com a professora regente da turma e consequentemente a supervisora do projeto, ficamos cientes de que não era algo que as crianças tinham facilidade de aprender. Em contrapartida, conseguimos perceber em alguns diálogos com as crianças, que problemas de estruturas aditivas eram algo recorrente do cotidiano. Por exemplo, no intervalo, brincando com bolas de gude, resolviam rapidamente problemas relacionados a pontuação dos diferentes tipos de bolas: quem ganhou mais bolas na partida ou quantas ainda precisavam ganhar para se equiparar aos colegas. Também percebemos uma criança que estava juntando dinheiro para comprar uma bola que viu na feira, tinha apenas parte do valor, mas não sabia quanto faltava. Então, constatamos que precisávamos trabalhar com ferramentas que despertassem o interesse desses estudantes.

A partir de então, elaboramos e desenvolvemos na turma do 4º ano, três jogos, sendo eles: Trilha da Galinha, Dominó humano e Pega-varetas. Todos recriados através de modelos disponíveis na internet. Os jogos foram desenvolvidos com materiais manipuláveis, para trabalharmos as estruturas aditivas de forma recreativa.

A seguir, apresentaremos a descrição das atividades desenvolvidas e, posteriormente, os resultados, reflexões e alguns registros fotográficos feitos durante as atividades.

Jogo 1: Trilha da Galinha

A Trilha da Galinha é um jogo de tabuleiro que foi criado para dar sequência à leitura deleite do livro "*Um amor de confusão*", da autora Dulce Rangel, servindo como culminância da atividade.. Ele foi criado e confeccionado pelas autoras com base na teoria dos campos conceituais, idealizada por Gerard Vergnaud, 1986. O jogo é interessante pelo fato de conseguir trabalhar as operações fundamentais de maneira instigante e divertida. Os objetivos principais para criação desse jogo foram:

- Estimular, de forma divertida, a aprendizagem de problemas de estruturas aditivas;
- Desenvolver a interação dos alunos entre si, e deles com professor;
- Calcular combinações numéricas utilizando as operações: adição e subtração;
- Trabalhar a linguagem oral e a escrita numérica, sequência, ordem crescente e decrescente, contagem e quantificação.

O jogo é composto por um tabuleiro com trinta casas, um dado e dezesseis fichas com perguntas relacionadas ao tema. O jogo tem início após o lançamento do dado por cada jogador (ou grupo, vai depender do quantitativo de alunos presentes em sala). Inicia-se aquele que obtiver a face do dado com mais pontos.

Nas casas com os números 3, 7, 10, 14, 19, 22, 26 e 29 têm um sinal de interrogação. Caso o jogador/grupo pare em uma dessas casas, puxa-se uma ficha do monte, onde estão embaralhadas, e o jogador/grupo terá que responder a pergunta da vez. Quando as dezesseis fichas acabarem, elas serão embaralhadas novamente para reiniciar o jogo. Caso acerte, o participante avançará duas casas. Caso erre, volta duas casas. O vencedor será quem chegar primeiro ao ni-nho/chegada.

No percurso da trilha os jogadores encontrarão alguns comandos. Esses comandos estarão nas casas de número 11 (Espere uma rodada. A galinha foi contar os ovinhos) e (oba!!! A galinha encontrou mais um ovo, avance três casas).

Apesar de adotarmos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, este jogo foi elaborado a partir das classificações propostas por Carpenter e Moser (1982), que envolvem apenas números naturais, com 4 tipos de problemas básicos. Eles subdividem-se em 16 tipos de problemas diferentes. Como mostra os exemplos citados acima no texto. Foi elaborada 1 carta para cada tipo de problema.

Na realização do jogo, mostramos o tabuleiro aos estudantes, eles se mostraram entusiasmados com a proposta e foram se agrupando para darmos início à primeira rodada. A princípio, alguns estudantes se mostraram tímidos pelo fato de precisarem resolver alguns problemas relacionados às estruturas aditivas. Depois da primeira rodada, percebemos que o jogo superou o desafio de envolver os estudantes com a atividade. Desse modo, atingiu todas as nossas expectativas e alcançamos, com êxito, os objetivos acima citados. As fotos a seguir, ilustram o desenvolvimento da atividade na turma do 4º ano:

Figura 1- Trilha da Galinha

Fonte: arquivo pessoal das autoras

Jogo 2: Dominó Humano

Esse jogo é composto por 43 peças. De um lado tem um resultado e do outro uma operação a ser resolvida. Assim como a trilha, esse jogo também trabalha as operações de subtração e adição de maneira instigante, pelo fato de ser algo lúdico. O modo de se jogar é praticamente o mesmo do dominó tradicional, o que o difere deste, é o desenho das peças. Ao contrário do dominó tradicional que possui apenas a representação numérica, este, possui operações a serem resolvidas e o resultado de alguma operação que, por sua vez, pode está numa outra carta. Decidimos incluir esse jogo na sequência de atividades, pelo fato de seus objetivos contemplarem os nossos, para aquele momento:

- Trabalhar o lúdico;
- Estimular a observação e concentração dos participantes;
- Traçar um plano e resolver os problemas propostos.

O jogo foi elaborado com a intenção de aprofundar os conceitos de adição e subtração, para que os estudantes tivessem mais desembaraço e agilidade nas resoluções dos problemas de estruturas aditivas. Sendo trabalhada também a categoria de combinação.

Como jogar:

Os alunos receberam fichas, 43 no total, contendo, por exemplo, a frase “Eu tenho 15, quem tem 18 – 6?”. Quem tiver a ficha com a resposta correta vai à frente e fica ao lado, formando o dominó, até a última ficha. O jogo começará pelo grupo que tiver a ficha que possuir o maior número. As regras do jogo são as seguintes:

- As fichas devem ser embaralhadas com o lado ilustrado virado para baixo, de forma que não seja possível saber qual é a sua “numeração”. Quando todas as fichas estiverem sido embaralhadas, cada jogador retira cinco delas.

- Na hora de jogar, cada participante coloca uma ficha no “monte” que se formará na mesa;
- Caso o jogador não tenha ficha para continuar o jogo, ele pode comprar outra na mesa e repetir o processo até encontrar uma para continuar jogando. Quando não houver mais fichas a serem compradas, o jogador passa a vez;
- O vencedor será aquele que eliminar todas as peças, antes do(s) adversário(s). Consequentemente, perde aquele jogador que estiver com mais cartas na mão.

A princípio, os estudantes não se mostraram interessados, tivemos dificuldades até para compor as equipes. Ao invés de só observarmos, decidimos jogar uma rodada junto com eles. A partir daí todos se instigaram e se envolveram com dinamismo, para ganhar dos adversários. Esse jogo proporcionou o desenvolvimento da aprendizagem em relação às operações e à resolução dos problemas em cada partida.

Figura 2 - Jogo Dominó Humano

Fonte: arquivo pessoal das autoras

Jogo 3: Pega-Varetas

O jogo é simples e tem poucas regras, as quais constam a seguir: cada vareta tem um número de pontos definido pelas cores. Os jogadores podem fazer mais ou menos pontos, de acordo com as varetas que conseguirem pegar. Esse jogo pode ter vários participantes, inclusive, pode ser jogado sozinho, principalmente se desejar praticar e melhorar suas habilidades manuais, a destreza e o equilíbrio, tornando-se um grande oponente quando for jogar com outras pessoas.

Utilizamos quatro pega-varetas. A pontuação de cada palito foi mais elevada que no jogo tradicional, além de ter uma das cores com o valor negativo, para que os alunos pudessem subtrair. Consequentemente, dividimos a sala em quatro grupos. A proposta era que os alunos realizassem operações e preenchessem uma tabela com a soma dos pontos conquistados.

Ao final de cada rodada, houve a contagem dos pontos das varetas adquiridas, por cada aluno.

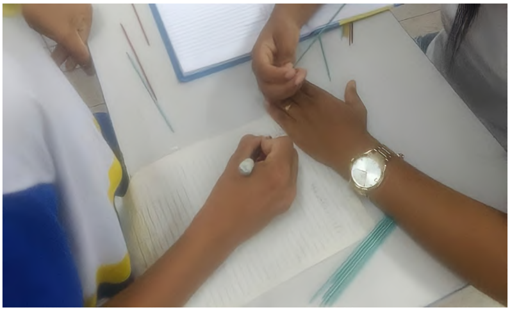
Por ser um jogo muito minucioso e os participantes serem crianças e pré-adolescentes, optamos por deixar no máximo cinco participantes, para evitar possíveis conflitos com relação a principal regra do jogo: "se mexer algum palito, o jogador deixará a vareta e passará a vez". As demais regras são as seguintes:

- De forma aleatória as varetas devem ser misturadas, e segurando uma das pontas de todo o maço de varetas, o jogador deve deixá-las cair em uma superfície plana que pode ser uma mesa, por exemplo;
- Da forma que as varetas caírem devem ser retiradas, uma a uma, sem tocar nas outras varetas, com as mãos ou com a própria vareta;
- A saída para ser bem-sucedido nesse jogo é sempre tentar pegar as varetas que estiverem soltas ou por cima;
- Por isso, independentemente do valor de cada cor de vareta, o essencial é tentar pegar o maior número delas;
- Os jogadores também devem fazer uma tabela marcando os pontos para cada cor de vareta retirada com sucesso, e no final, os pontos são contados e assim é definido um vencedor.

O jogo foi elaborado com a intenção de aprofundar os conceitos de adição e subtração e promover o desembaraço e agilidade nas resoluções dos problemas de estruturas aditivas. Além de ser possível trabalhar a combinação, também levantamos hipóteses sobre as possibilidades de abordar também multiplicações.

A princípio, tivemos dificuldades para acalmar os ânimos dos estudantes, pois estavam eufóricos e sem prestar atenção nas instruções orais. À medida que entregamos o jogo ao grupo, explicamos as regras. Porém, percebemos que alguns participantes resistiam a jogar e passavam a vez, quando percebiam que precisavam pegar o palito que tinha uma pontuação negativa, ou seja, não queriam perder pontuação. No início tiveram dificuldades para realizar os cálculos, mesmo assim, corresponderam bem as nossas expectativas. Inclusive com relação aos palitos com pontuações negativas.

Figura 3 - Jogo Pega-varetas



Fonte: arquivo pessoal das autoras

No último jogo aplicado, percebemos que os estudantes estavam mais habilidosos na montagem e resolução dos problemas. Ao decorrer das aulas, não mais se envergonhavam quando precisavam recorrer aos dedos para consolidar a resolução de um ou outro problema lançado. Passaram a prestar mais atenção aos enunciados, interpretando melhor, e assim compreendendo com eficiência a descrição dos problemas de estruturas aditivas, como por exemplo, aos termos "a mais", "a menos", "quanto falta". Começaram a construir o entendimento de que não basta ser o mais rápido e terminar a atividade primeiro, é preciso procurar estratégias eficientes que conduzam ao acerto.

Considerações finais

Foi possível identificar melhorias no desempenho dos estudantes através dos jogos aplicados em sala de aula, relacionados às estruturas aditivas. De maneira lúdica, eles conseguiram realizar as atividades propostas com mais agilidade e participaram de forma mais segura. Os jogos possibilitaram maior reflexão, concentração, agilidade e foco no objetivo a ser alcançado. Identificamos, a partir da vivência dos jogos, que os estudantes já tinham noção de como se estrutura os problemas/operações e como se inicia a resolução.

Na prática das crianças, diante dos jogos propostos, observamos que elas tiveram uma desenvoltura maior através da oralidade, nas resoluções dos problemas. Por exemplo, no jogo "A trilha da galinha", ao identificarem em que "casa" caía o dado, os estudantes discutiam se o problema seria adição ou subtração; e resolviam em grupo. O raciocínio de uns era mais rápido que de outros, mesmo assim tinham que responder em equipe, apontando uma resposta única.

Antes da aplicação do jogo, os alunos tinham dificuldades na representação e em identificar se o número era dezena, centena ou milhar. Para facilitar, criamos casas de representação numérica com três espaços em cada linha, já que as respostas não ultrapassavam uma centena. Como se tratava de um momento dinâmico, os alunos ficaram à vontade para interagir dentro do grande grupo. Conversavam explicando um ao outro onde seria a escrita do número de acordo com o resultado encontrado. Com a prática dessas respostas, os alunos começaram a indicar verbalmente e transcrever corretamente com mais facilidade e agilidade.

A partir dessa experiência de ensino vivenciada no âmbito do PIBID, passamos a refletir sobre a importância do uso dos jogos, como ferramenta importante no planejamento didático, especialmente por incentivar tomadas de decisões e a troca de aprendizagem entre os estudantes. Os jogos trouxeram benefícios, possibilitando uma maior desenvoltura, pelo fato deles se sentirem à vontade em relação à oralidade.

Concluímos apontando alguns aspectos dessa experiência que contribuíram para nossa própria formação docente e para o desenvolvimento de conhecimentos necessários à nossa profissão. Dentre eles, o conhecimento do conteúdo específico, ao nos debruçarmos no estudo de problemas de estruturas aditivas para compor os jogos. Também conhecimento pedagógico do conteúdo, quando optamos pelo uso dos jogos e analisamos a reação do estudantes aos problemas propostos.

Além disso, nos deparamos com várias situações que nos conduziram a desenvolver conhecimento sobre os estudantes, por exemplo, ao fazermos escolhas exitosas para motivá-los. Tais como a decisão de jogar junto com eles para mostrar que o jogo era divertido e não difícil. Também aprendemos como lidar com inquietações, barulhos excessivos e, principalmente, como instigar o trabalho em grupo, respeitando a participação de todos. Enfim, olhar para essa experiência, apontando aspectos positivos e negativos, lacunas e possibilidades, além do desafio de sistematizá-la em forma de texto acadêmico, nos fez profissionais docentes mais reflexivos.

Referências

CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M. The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, p. 9-24, 1982.

CAZORLA; I. MENDONÇA; T. PINTO, S. RIBEIRO, E. *As estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes.* Disponível em <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200003>. Acesso em 10 de julho de 2017.

GROSSI, G. P. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada--em-pratica Acesso em 07 de julho de 2020.

KISHIMOTO, T. O jogo e a educação infantil. KISHIMOTO,T. (Org.) *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.* São Paulo: Cortez, 2003.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, Tizuko M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e educação.* 14 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MUNIZ, Cristiano Alberto. *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

OLIVEIRA, M. K. *Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento – um processo sócio – histórico.* São Paulo; CENP, 1998.

PESSOA, C. A. S. Interação social: Uma análise do seu papel na superação de dificuldades em resolução de problemas aditivos. *Revista Infocus.* Recife. Ano 02, nº 04, p. 40-52, março.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher.* 1986.

TELES, R. A. M. CONHECIMENTOS DOCENTES X DECISÕES DIDÁTICAS: possíveis reflexões no processo de avaliação da aprendizagem. In: *Anais do VIII Encontro Mineiro de Educação Matemática* (EMEM). Ituiutaba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Minas Gerais, 2018. v. único. p. 1-12. Disponível em: https://app.eventmaster.

com.br/event/viiiemem/site/embed/ANAIS.pdf (p. 82 a 92) acessado em 13 de jun de 2020.

TELES, R. A. M. Recursos Didáticos para o Ensino de Matemática na Infância. *Anais do XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2019. SBEM Mato Grosso – Brasil. Disponível em <https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/3638> acesso em 24 de jul de 2020.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, Porto Alegre, Nº 4, pp. 9-19, 1996.

CAPÍTULO 8

Abordagem da subtração de números naturais em livros didáticos de matemática utilizados na rede municipal de ensino de Paranatama - PE

Tânia de Melo Oliveira e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

A construção conceitual relativa às operações matemáticas de estrutura aditiva ao longo dos anos iniciais é um processo que envolve um vasto campo de dificuldades expressas pelas crianças, tanto no cálculo relacional, ou seja, na compreensão do enunciado dos problemas, quanto no cálculo numérico, especialmente nas operações que envolvem a decomposição e o reagrupamento, aquelas nas quais o valor absoluto de alguns algarismos do minuendo são menores que os do subtraendo, e muito mais quando aparecem "zeros" no minuendo.

Neste sentido, é relevante compreender o encadeamento de ideias, as concepções formadas pelos estudantes e no que implicam as dificuldades de aprendizagem. Sabendo-se que os livros didáticos se constituem como instrumentos auxiliares no processo de ensino e de aprendizagem, mas nem sempre promovem estratégias para desenvolvimento das habilidades necessárias para resolver diferentes situações, neste texto buscamos compreender como livros didáticos de matemática para os anos iniciais, especificamente para os 4º e 5º anos, abordam situações envolvendo a operação fundamental subtração. Restringimos a análise à subtração com números naturais por ser esse o domínio numérico das operações que são estudadas nos anos iniciais.

Como enfatizado por Choppin (2004, p.5), o livro didático: "constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações". Deste modo, é relevante analisar como este instrumento didático aborda os conteúdos e que estratégias propõe para a aprendizagem dos estudantes.

Utilizaremos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud (1993), nos restringindo às ações de retirar, comparar e completar, subjacentes à operação de subtração. Os resultados obtidos poderão ajudar a conjecturar sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático e as estratégias de resolução de problemas que podem ser utilizadas pela criança para resolver diferentes situações propostas nesses livros. Em razão disto, temos a seguinte questão de pesquisa: Como os livros didáticos de matemática do 4° e 5° anos do ensino fundamental abordam a subtração de números naturais?

As dificuldades enfrentadas pelos estudantes em relação às operações de adição e subtração são recorrentes, sendo que nesta última a frequência com que ocorrem é mais constante. "[...]não é em alguns dias ou em algumas semanas que uma criança adquire uma competência nova ou compreende um conceito novo, mas, sim, ao longo de vários anos de escola e de experiência". (VERGNAUD, 2011, p.16).

Desta forma, a aquisição de conhecimentos é um processo contínuo que exige construções anteriores iniciadas no começo da escolarização. Visando apontar aspectos que possam nos ajudar a compreender melhor as dificuldades dos estudantes em relação às operações aditivas, temos como objetivo geral: analisar a abordagem da subtração de números naturais em livros didáticos do 4° e 5° anos do ensino fundamental adotados pela Escola João Bezerra Sobrinho da rede municipal de Paranatama - PE. E como objetivos específicos: a) analisar quais tipos de situações envolvendo subtração de números naturais são abordadas em livros didáticos de matemática; b) identificar estratégias de cálculo sugeridas nos livros didáticos; c) identificar recursos didáticos sugeridos nas abordagens dos livros didáticos.

Compreensão das estruturas aditivas no processo de aquisição do conhecimento para o desenvolvimento de habilidades

Adotamos como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud (1993), que oferece um referencial ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas. Magina (2005), afirma que de acordo com essa teoria, a compreensão de um conceito exige um conjunto variado de situações, procedimentos e representações simbólicas que estão intimamente ligados, e estes ocorrem ao longo do tempo por meio de experiências, maturidade e aprendizado.

As operações fundamentais, especificamente a de subtração, constituem o âmago de dificuldades demonstradas pelos estudantes nos anos iniciais para resolução de situações matemáticas. Conforme Vergnaud (1993, p.2), "[...] É nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do estudante, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do estudante seja operatória".

Assim sendo, as situações matemáticas envolvem esquemas já formulados pelo estudante, havendo duas circunstâncias: ou o estudante já dispõe das competências necessárias apresentando já de forma automática um esquema diante da tarefa a ser resolvida; ou ainda não dispõe das devidas competências, apresentando vários esquemas com intuito de chegar à resposta certa.

A compreensão do valor numérico, em especial a noção do valor posicional dos algarismos, aspecto importante para compreensão do cálculo numérico, é, de fato, um empecilho para boa parte dos estudantes, conforme pesquisas anteriores já constataram, dentre elas Melo (2008) e Borba e Guimarães (2015).

A subtração, como já dissemos, envolve as ações de retirar, comparar e completar. Tomando como referência Ramos (2009), apresentamos algumas técnicas para cálculo numérico envolvendo essas ações.

i. Ação de retirar: há um estado inicial e posteriormente ocorre a modificação desse estado inicial, que requer uma ação de retirar, resultando num estado final. Essa ação assemelha-se ao tipo de problema que Vergnaud chama de *transformação negativa*.

No parque havia 29 crianças e saíram 17. Quantas crianças ficaram no parque?"

Havia Saíram

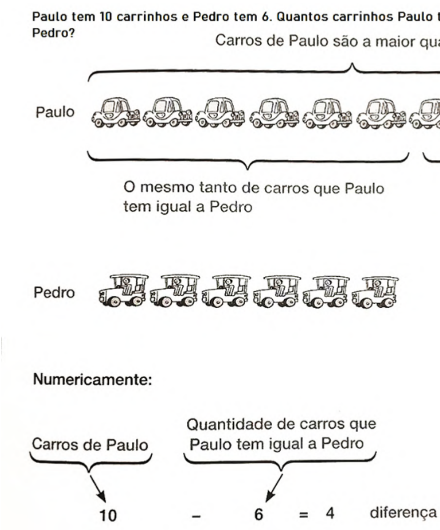
29 - 17 = 12 crianças ficaram no parque

No exemplo acima há um estado inicial (29) que sofre uma modificação ou transformação negativa, pois retira-se desse estado inicial 17, resultando num estado final (12). Uma alternativa para explorar esta operação com os estudantes que se encontram em nível inicial de aprendizagem relacionado a operações pode ser a resolução realizada de forma expandida, que é justamente a decomposição dos valores numéricos.

ii. A ação de completar: exige análise de uma situação na qual há um valor numérico inicial a ser comparado com um segundo valor. Se o segundo valor for maior que o primeiro, a pergunta será quanto falta ser acrescentado ao primeiro valor para torná-lo igual ao segundo; se o segundo valor for menor, a pergunta é quanto falta para torná-lo igual ao primeiro. Isto é, em ambos os casos é preciso descobrir quanto falta para tornar as quantidades iguais.

iii. A ação de comparar: consiste não somente em saber qual a diferença, mas em saber o significado numérico; há situações nas quais é necessário analisar o todo/parte, fazendo a distinção e ao mesmo tempo correlação entre ambos. No exemplo, proposto na Figura 1 a seguir, extraído de Ramos (2009) podemos compreender melhor esta correlação:

Figura 1 - situação de comparar



Fonte: Ramos (2009, p.73)

Mello (2008) menciona que compreender o método do empréstimo é uma das dificuldades mais recorrentes, pois os estudantes erram muito, principalmente quando há algarismo zero no minuendo; inclusive considerado como sem valor algumas vezes. Borba e Guimarães (2015), em um estudo realizado em duas escolas do Estado do Paraná nos anos iniciais do ensino fundamental (4° e 5° anos), verificaram que na utilização deste método(empréstimo) os estudantes expressaram dificuldades na resolução da operação de subtração, identificando que quando o minuendo é menor que o subtraendo alguns dos estudantes não conseguiram realizar a subtração de todas as ordens dos algoritmos; subtraindo somente uma, o empréstimo foi desconsiderado, pois permaneceu o mesmo valor numérico inicial do algoritmo do subtraendo como sendo a diferença numa das ordens. No entanto, Ramos (2009) ressalta que o método do empréstimo- ou *processo de recurso a ordem superior,* como define Schirlo (2014), tanto é relevante no processo de aprendizagem quanto é mais viável, pois a criança por meio de situações cotidianas, com uso de materiais, vai refletir sobre, de maneira que o adulto deve propiciar boas situações para possibilitar compreender tal conceito, deixando-a livre para pensar, com autonomia para chegar à sua própria conclusão.

Sabe-se que o planejamento e a prática desenvolvidos pelos professores são definidores para o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental, no entanto, neste trabalho não temos a pretensão de analisar como esse ensino acontece, analisaremos apenas como ele é proposto nos livros didáticos, nesse sentido, no tópico a seguir discutiremos sobre um dos recursos didáticos mais importantes e estruturantes para a prática do professor: o livro didático.

Uso do livro didático e a importância de ressignificar a prática docente

O livro didático é um instrumento que auxilia o docente em sala de aula, pois contribui para ampliar os conhecimentos prévios que os estudantes têm, desenvolver habilidades por meio de diversas estratégias, tratando de "[...]potencializar as oportunidades de aprendizagem dos alunos, por meio do estímulo ao pensamento criativo, lógico e crítico", como ressalta o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (BRASIL, 2019, p.15).

No entanto, o livro não deve ser priorizado de maneira que a autonomia do professor seja deixada de lado; o docente deve abordar os conteúdos de modo que estejam contextualizados com a vivência dos estudantes, para que possam atribuir significado.

A maneira que os conteúdos são apresentados no livro didático tanto pode contribuir para propiciar boa aprendizagem aos estudantes quanto pode não oferecer os subsídios necessários para o desenvolvimento das habilidades. A maneira que o docente aborda o conteúdo em sala de aula influencia na aprendizagem, na apropriação do conhecimento.

É comum o fato de boa parte dos professores não terem um conhecimento consolidado em relação a determinados conteúdos matemáticos, sendo imprescindível uma formação continuada para ressignificar sua prática, rever os equívocos por vezes cometidos, refletindo sobre as ações realizadas e problematizando.

Torna-se relevante que os docentes busquem aperfeiçoar sua prática com a finalidade de favorecer o aprendizado dos estudantes, incluam outras alternativas para o ensino em sala de aula, especialmente com auxílio de variados suportes, não dependendo apenas do livro didático. Ou seja, devem buscar diferentes recursos para subsidiar o planejamento da sua prática docente, entre eles, outros livros didáticos que ofereçam conteúdos que auxiliem no ensino, além de livros de metodologia da matemática e artigos científicos publicados em revistas e anais de congressos. Silva (2015, p.116) salienta que o professor deve apresentar "um perfil reflexivo, motivador, colaborador e socializador" ante a sua prática, pois a mediação feita pelo docente vai influenciar no processo de ensino e aprendizagem.

Metodologia e análise dos dados

Este trabalho é um recorte do resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso em Pedagogia desenvolvido na UFRPE/Unidade Acadêmica da Garanhuns (UAG) em 2019. Fez parte de um conjunto de estudos do Grupo de Pesquisa e Estudos SEMEAR, coordenado pela Professora Rosinalda Teles. A Pesquisa é do tipo documental com abordagem qualitativa envolvendo também o aspecto quantitativo. Minayo (2009) ressalta a importância da abordagem qualitativa juntamente com a abordagem quantitativa, pois entre esses dois tipos de abordagem "há uma oposição complementar [...] que produz riqueza de informações, aprofundamento e maior fidedignidade interpretativa" (MINAYO, 2009. p.22). Segundo Ludke e André (2012): "a análise documental pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema" (p.38).

O método utilizado é indutivo, pois não há concepções pré-formadas, sendo um processo no qual a conclusão só será possível após a análise, averiguando cada fato do fenômeno investigado. Conforme Xavier (2010, p.38), "o pesquisador inicia a pesquisa sem levar em conta qualquer hipótese ou teoria sobre o funcionamento e características de um determinado fenômeno natural ou humano".

Em relação aos procedimentos metodológicos, foram analisados dois livros didáticos de matemática para os 4º e 5º anos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), utilizados na única escola municipal da cidade de Paranatama, localizada no agreste pernambucano, que atende aos anos iniciais. Foram eles:

1. DANTE, Luis Roberto. *Projeto Ápis Matemática:* 4º ano. São Paulo: Ática, 2019.

2. DANTE, Luis Roberto. *Projeto Ápis Matemática:* 5° ano. São Paulo: Ática, 2019.

Serão analisados especificamente nos capítulos dos livros que abordam a subtração de modo explícito, as seguintes categorias:

1. Tipos de situações apresentadas pelo livro didático;
2. As estratégias de cálculo;
3. Os recursos didáticos propostos.

A opção apenas pelos livros do 4º e 5º anos deve-se ao fato dos documentos curriculares nacionais, tais como Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugerirem a abordagem da subtração de modo mais consistente nestes anos de escolaridade.

De acordo com os PCN:

> A construção dos diferentes significados leva tempo e ocorre pela descoberta de diferentes procedimentos de solução. Assim, o estudo da adição e da subtração deve ser proposto ao longo dos dois ciclos, juntamente com o estudo dos números e com o desenvolvimento dos procedimentos de cálculo[...] (BRASIL,1997, p.69)

Bem como a BNCC enfatiza que:

> [...] A compreensão do papel que determinada habilidade representa no conjunto das aprendizagens demanda a compreensão de como ela se conecta com habilidades dos anos anteriores, o que leva à identificação das aprendizagens já consolidadas, e em que medida o trabalho para o desenvolvimento da habilidade em questão serve de base para as aprendizagens posteriores. (BRASIL, 2017, p.274)

Análise do livro didático do 4º ano

No livro do 4° ano, nós restringimos à unidade 4, intitulada *Adição e subtração com números naturais.*

Em relação aos tipos de situações, analisamos as ideias de *retirar, comparar* e *completar* abordadas nas situações, e identificamos as quantidades organizadas na tabela 1 a seguir:

Tabela 1 - Tipos e quantidade de situações apresentadas no livro do 4º ano

Tipo de situação	Quantidade
Retirar	2
Comparar	2
Completar	2
Total de situações identificadas no livro do quarto ano	6

Fonte: banco de dados da pesquisa

De acordo com os dados acima, percebemos que prevalece um equilíbrio em relação às três ideias da subtração. As situações que envolvem a ideia de retirar, ou seja, tirar uma quantidade de outra, segundo Vergnaud (2009) são mais fáceis, pois o cálculo relacional feito mediante um problema de retirar é mais simples para a criança realizar, especificamente os de transformação negativa envolvendo estado inicial, alteração desse estado e resultado final.

O cálculo relacional trata da operação que a criança realiza no pensamento, a compreensão e relação que ela estabelece para resolver o problema. Esses dados nos instigam a refletir se esse equilíbrio de situações que o livro didático apresenta contribui eficazmente para o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes, já que as situações aparecem em pouca quantidade. Em nosso ponto de vista, deveriam ser exploradas mais situações envolvendo as diferentes ideias da subtração.

A seguir, para ilustrar nossa análise, apresentamos e comentamos exemplos das situações extraídas do livro didático do 4º ano:

Figura 2 -Situação que envolve a ideia de retirar

Revendo as ideias da subtração: tirar, comparar, completar e separar

1 O professor de Educação Física levou 30 garrafas de água para a quadra. Os alunos consumiram 13 garrafas durante a aula. Quantas garrafas sobraram?

Compreender

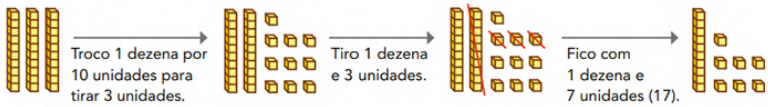
Para responder a essa pergunta é preciso tirar 13 garrafas das 30 que o professor levou, ou seja, devemos efetuar a subtração 30 − 13.

Planejar

Vamos efetuar 30 − 13 com o material dourado e pelo algoritmo usual.

Executar

- Com o material dourado.



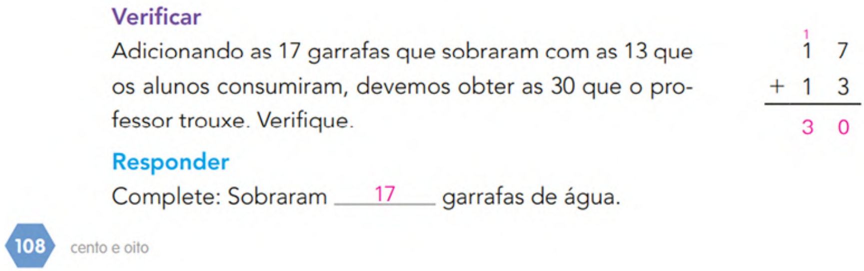
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, 30 − 13 = 17.

Fonte: Dante (2019, p.108)

Na figura 2, há uma quantidade inicial (30 garrafas) e a retirada de uma parte dessa quantidade (13 garrafas), e o estado final a ser obtido (17 garrafas). O exemplo propicia uma melhor forma do estudante entender o problema a ser resolvido, conforme as etapas de compreender, planejar e executar. O material dourado é apontado como um recurso a ser utilizado nesta resolução, explanando o aspecto de dezenas e unidades. Também é proposta a prova real, que é justamente a aplicação da operação inversa, na qual o estudante deve verificar se o resultado é coerente, somando o valor obtido (17 garrafas) com a quantidade que foi retirada (13 garrafas):

Figura 3 - Realização da prova real



Verificar

Adicionando as 17 garrafas que sobraram com as 13 que os alunos consumiram, devemos obter as 30 que o professor trouxe. Verifique.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1}\ 7 \\ +\ 1\ 3 \\ \hline 3\ 0 \end{array}$$

Responder

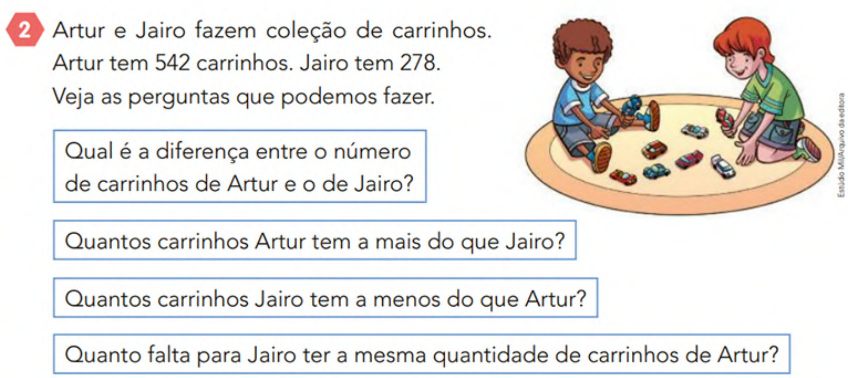
Complete: Sobraram __17__ garrafas de água.

108 cento e oito

Fonte: Dante (2019, p.108)

A BNCC (2017) ressalta que os estudantes devem ser capazes de resolver problemas, nos quais os diferentes significados das operações sejam explorados, além de usarem várias estratégias, entenderem seus porquês e avaliarem suas legitimidades.

Figura 4 - Situação que envolve as ideias de comparar e completar



2 Artur e Jairo fazem coleção de carrinhos. Artur tem 542 carrinhos. Jairo tem 278. Veja as perguntas que podemos fazer.

Qual é a diferença entre o número de carrinhos de Artur e o de Jairo?

Quantos carrinhos Artur tem a mais do que Jairo?

Quantos carrinhos Jairo tem a menos do que Artur?

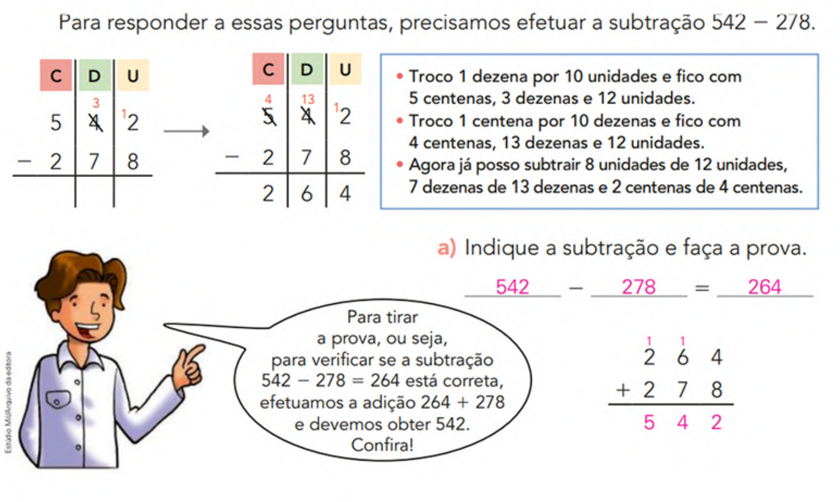
Quanto falta para Jairo ter a mesma quantidade de carrinhos de Artur?

Fonte: Dante (2019, p.109)

Na figura 4, a situação envolve uma comparação entre a quantidade de carrinhos dos dois garotos: quanto a mais, quanto a menos, calcular qual a diferença; depois de ler e interpretar os estudantes devem calcular 542-278. Embora este seja um exemplo da ideia de comparar, também está envolvida a ideia de completar, pois a última questão solicita que estudante responda “quanto falta” para Jairo ter a mesma quantidade de carrinhos que Artur.

Nesta situação, o cálculo numérico envolve uma subtração com reserva, ou seja, exige agrupamento e desagrupamento na realização do algoritmo, como mostra a ilustração a seguir:

Figura 5 - Cálculo numérico

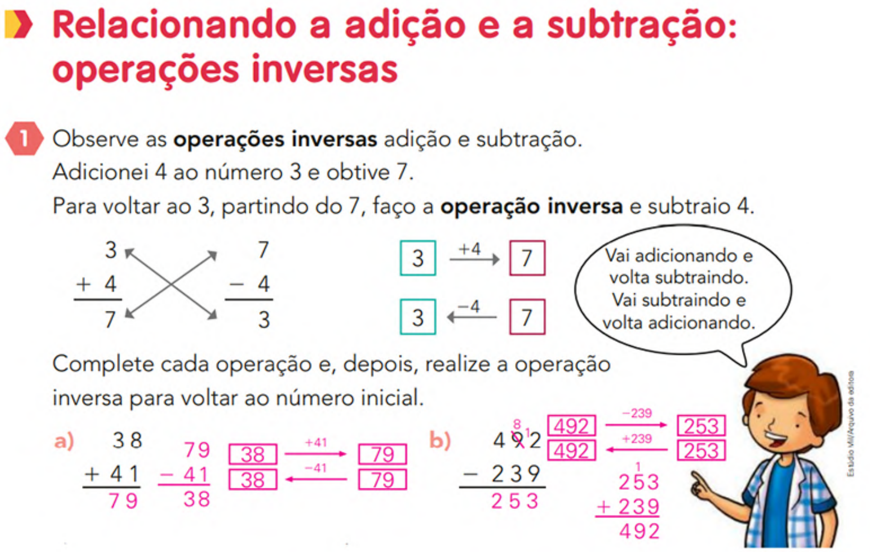


Fonte: Dante (2019, p.109)

Além da resolução desta operação, explicando as trocas, é solicitado que o estudante teste a prova real.

No capítulo analisado também há um exemplo envolvendo a adição e a subtração como operações inversas, ilustrado na Figura 6 a seguir. Vergnaud (2009) ressalta a relação entre as duas operações como sendo integrantes do campo conceitual aditivo, porém, a subtração tem sua particularidade em termos de complexidade, a adição é mais simples, mas as duas se inter-relacionam.

Figura 6 - Operações inversas



Relacionando a adição e a subtração: operações inversas

1 Observe as **operações inversas** adição e subtração.
Adicionei 4 ao número 3 e obtive 7.
Para voltar ao 3, partindo do 7, faço a **operação inversa** e subtraio 4.

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 4 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ -\ 4 \\ \hline 3 \end{array}$$

$\boxed{3} \xrightarrow{+4} \boxed{7}$

$\boxed{3} \xleftarrow{-4} \boxed{7}$

Complete cada operação e, depois, realize a operação inversa para voltar ao número inicial.

a) $\begin{array}{r} 38 \\ +\ 41 \\ \hline 79 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 79 \\ -\ 41 \\ \hline 38 \end{array}$ $\quad \boxed{38} \xrightarrow{+41} \boxed{79}$, $\boxed{38} \xleftarrow{-41} \boxed{79}$

b) $\begin{array}{r} 492 \\ -\ 239 \\ \hline 253 \end{array}$ $\quad \boxed{492} \xrightarrow{-239} \boxed{253}$, $\boxed{492} \xleftarrow{+239} \boxed{253}$ $\quad \begin{array}{r} 253 \\ +\ 239 \\ \hline 492 \end{array}$

Fonte: Dante (2019, p. 115)

As estratégias de cálculo

Ao analisar quais estratégias de cálculo são sugeridas no capítulo que aborda a subtração no livro do 4º ano, identificamos o algoritmo usual da subtração, estratégia de arredondamento, o uso da reta numérica e a estratégia de subtrair *um* no minuendo e também no subtraendo, ou seja, o método da compensação que consiste em adicionar quantidades iguais no minuendo e no subtraendo. Em outras palavras o aumento do primeiro número é compensado pelo aumento do segundo número. A seguir ilustramos com exemplos cada uma dessas estratégias.

Figura 7 - Algoritmo usual

4 Efetue as subtrações pelo algoritmo usual.

a) 2894 – 1562 = ________

b) 1836 – 1428 = ________

c) 52839 – 21287 = ________

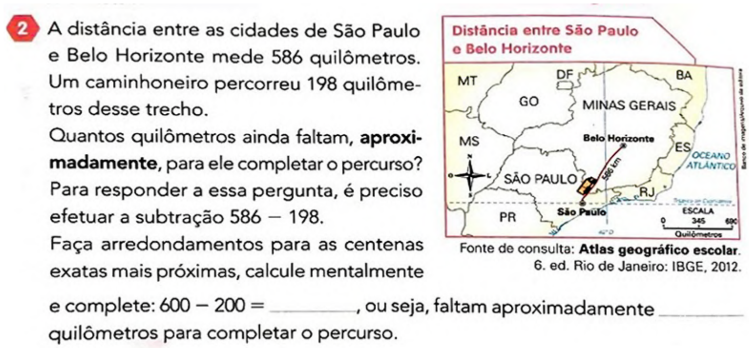
d) 5103 – 2193 = ________

Fonte: Dante (2019, p. 110)

A figura 08 a seguir, envolve uma atividade na qual os estudantes, para facilitar o cálculo mental, devem efetuar uma subtração utilizando como estratégia o arredondamento para as centenas exatas mais próximas dos números dados no enunciado. O resultado deverá ser a medida aproximada da distância. Neste exemplo, as noções de arredondamento e aproximação são exploradas simultaneamente.

Arredondamentos e aproximações são estratégias interessantes, especialmente por estarem presentes em várias ações do cotidiano, nesse sentido é importante incorporá-las às abordagens e práticas desenvolvidas em sala de aula.

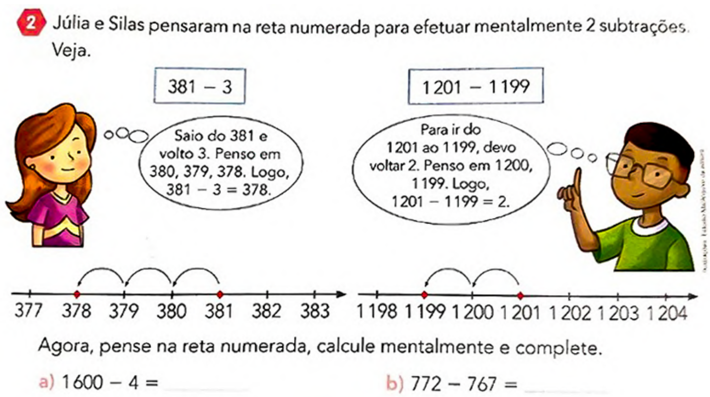
Figura 8 - Arredondamento


2 A distância entre as cidades de São Paulo e Belo Horizonte mede 586 quilômetros. Um caminhoneiro percorreu 198 quilômetros desse trecho.
Quantos quilômetros ainda faltam, **aproximadamente**, para ele completar o percurso?
Para responder a essa pergunta, é preciso efetuar a subtração 586 − 198.
Faça arredondamentos para as centenas exatas mais próximas, calcule mentalmente e complete: 600 − 200 = ______, ou seja, faltam aproximadamente ______ quilômetros para completar o percurso.

Fonte: Dante (2019, p. 112)

A utilização da reta numérica para dar suporte ao cálculo mental, como nesse exemplo proposto na Figura 09, extraído do capítulo analisado, também é uma estratégia importante para dar significado à operação de subtração.

Figura 9 - reta numérica


2 Júlia e Silas pensaram na reta numerada para efetuar mentalmente 2 subtrações. Veja.

Agora, pense na reta numerada, calcule mentalmente e complete.

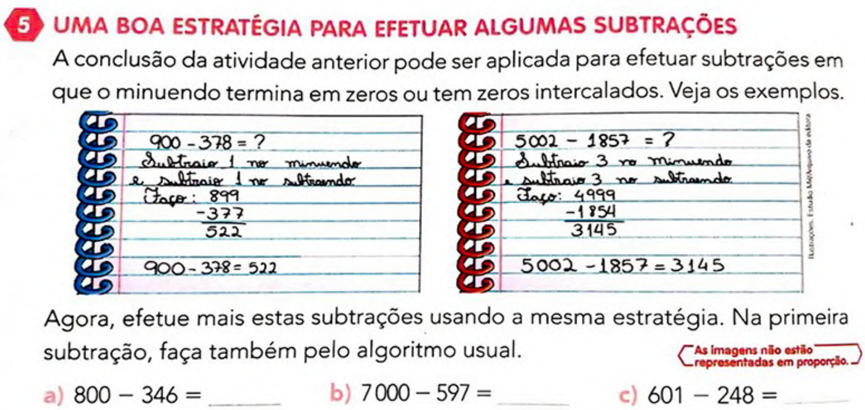
a) 1 600 − 4 = ______

b) 772 − 767 = ______

Fonte: Dante (2019, p. 111)

Várias pesquisas já apontaram que muitos estudantes apresentam dificuldades para realizar o cálculo numérico em subtrações quando há zero ou zeros intercalados no minuendo. A figura 10 ressalta uma estratégia antiga, mas interessante para facilitar o cálculo, pois enfatiza subtrair o mesmo valor tanto do minuendo quanto do subtraendo, conservando a diferença. Ou seja, utilizar o método da compensação.

Figura 10 - Estratégia de subtração no minuendo e no subtraendo



5 UMA BOA ESTRATÉGIA PARA EFETUAR ALGUMAS SUBTRAÇÕES

A conclusão da atividade anterior pode ser aplicada para efetuar subtrações em que o minuendo termina em zeros ou tem zeros intercalados. Veja os exemplos.

Agora, efetue mais estas subtrações usando a mesma estratégia. Na primeira subtração, faça também pelo algoritmo usual.

As imagens não estão representadas em proporção.

a) 800 − 346 = ______ b) 7 000 − 597 = ______ c) 601 − 248 = ______

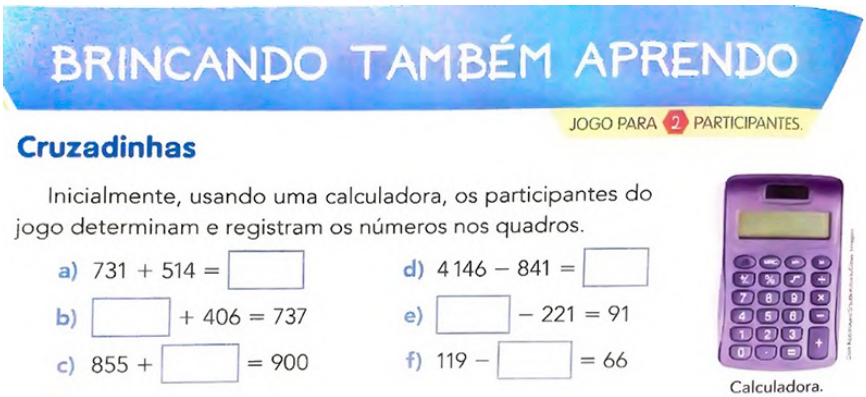
Fonte: Dante (2019, p.114)

Os recursos didáticos propostos

Ao analisarmos o capítulo que aborda subtração, e também o manual do professor, identificamos vários tipos de recursos didáticos sugeridos para dar suporte aos cálculos numéricos, entre ele:

- Material dourado, utilizado numa situação de retirar, exemplificando dezena e unidade.
- Jogo em grupos de 4 jogadores, com uso de 2 dados. O primeiro colega subtrai os valores iniciais, por exemplo 5 e 2 (5 - 2 =3); o segundo colega multiplica esses valores por 10 e subtrai (50-20 = 30); o terceiro multiplica por 100 e subtrai (500-200 =300) e o último colega registra as subtrações em uma folha. Esse jogo foi sugerido no manual do professor como estratégia de cálculo mental.
- Calculadora - seu uso foi sugerido duas vezes no capítulo, em exercícios que envolvem adição e subtração e também para conferir resultados, conforme ilustramos a seguir na Figura 11. É apresentada uma atividade na qual os estudantes devem usar a calculadora para efetuarem as operações e preencher os quadros.

Figura 11 - Uso da calculadora para verificação de resultados


BRINCANDO TAMBÉM APRENDO

JOGO PARA 2 PARTICIPANTES.

Cruzadinhas

Inicialmente, usando uma calculadora, os participantes do jogo determinam e registram os números nos quadros.

a) 731 + 514 = ☐

b) ☐ + 406 = 737

c) 855 + ☐ = 900

d) 4 146 − 841 = ☐

e) ☐ − 221 = 91

f) 119 − ☐ = 66

Calculadora.

Fonte: Dante (2019, p. 116)

Após essa verificação de resultados usando a calculadora, há uma cruzadinha para ser preenchida pelos estudantes, que explora os termos da adição e da subtração,

Além do material dourado e da calculadora, há também o uso da reta numérica como recurso para desenvolver estratégia de cálculo.

Ademais, as outras sugestões de atividades que o manual do professor propõe dizem respeito a aspectos como nomenclaturas, adição e subtração abordadas em sala de aula com cédulas e moedas envolvendo trocos.

No Quadro 1 a seguir, sintetizamos os dados coletados e analisados no Livro Didático do 4º ano.

Quadro 1 - Tipos de situações, estratégias e recursos didáticos - 4º ano

Dados coletados no livro do 4º ano		
Os diferentes significados da subtração	**Estratégias de cálculo**	**Recursos didáticos propostos**
Ideia de retirar Ideia de comparar Ideia de completar	Algoritmo usual Arredondamento Cálculo mental Subtração do minuendo e do subtraendo	Material dourado Calculadora Reta numérica Dados Cédulas e moedas

Fonte: dados da pesquisa

Análise do Livro Didático do 5º Ano

Neste tópico apresentamos a análise realizada na unidade 3 do último volume da coleção Ápis para os anos iniciais do ensino fundamental, cujo título é *Adição e Subtração com Números Naturais*. Também analisamos as sugestões de atividades propostas no manual do professor.

Tipos de situações apresentadas no livro didático

Ao analisarmos as ações de retirar, comparar e completar no livro do 5º ano identificamos as quantidades descritas na tabela 4. Os dados obtidos se assemelham aos obtidos no livro do 4º ano.

Tabela 2 - Tipos e quantidade de situações no livro do 5º ano

Tipo de situação	Quantidade
retirar	3
comparar	1
completar	1
Total de situações identificadas	5

Fonte: banco de dados da pesquisa

De acordo com a tabela acima, percebemos que prevalecem situações do tipo retirar. As outras ideias de comparar e completar são abordadas de maneira insuficiente. Apresentamos e comentamos exemplos de situações identificadas no livro analisado. Na figura 12, ilustramos um exemplo que envolve a ideia de retirar.

Nesta atividade, a situação envolve a ideia de retirar uma quantidade de outra, compreendida também como um estado de transformação. Além disso inclui a estratégia de resolução, etapas de planejar, executar e verificar o resultado, o que está de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), pois a mesma ressalta a importância do estudante compreender o problema exposto e sistematizá-lo.

Figura 12 - Situação de retirar

Subtração: algoritmos e vocabulário

1 Carlos tinha R$ 3 596,00 na poupança e tirou R$ 1 378,00 para comprar um *tablet*.
Quantos reais restaram na poupança de Carlos?

Compreender

Você sabe que Carlos tinha R$ 3 596,00 na poupança e tirou R$ 1 378,00. Quer saber quantos reais ficaram na poupança.

Tablet.

Planejar

Uma das ideias da subtração é tirar uma quantidade de outra. Assim, para saber quantos reais ficaram na poupança basta efetuar a subtração 3 596 − 1 378, ou seja, tirar 1 378 dos 3 596.

Fonte: Dante (2019, p. 63)

Positivamente destacamos a reflexão sobre valor posicional, ilustrada na figura 13 a seguir. Na atividade, explora-se a decomposição de dezenas em unidades e os nomes dos termos da subtração. Além disso, a prova real é solicitada posteriormente.

Figura 13 - Etapa de execução do problema

Executar

Efetuamos a subtração.

	UM	C	D	U
	3	5	$\overset{8}{\cancel{9}}$	${}^{1}6$
−	1	3	7	8

Como não podemos tirar 8 unidades de 6 unidades, trocamos 1 dezena por 10 unidades, ficando com 8 dezenas e 16 unidades. Depois, subtraímos as unidades, as dezenas, as centenas e as unidades de milhar.

	UM	C	D	U
	3	5	$\overset{8}{\cancel{9}}$	${}^{1}6$
−	1	3	7	8
	2	2	1	8

Complete o algoritmo usual simplificado.

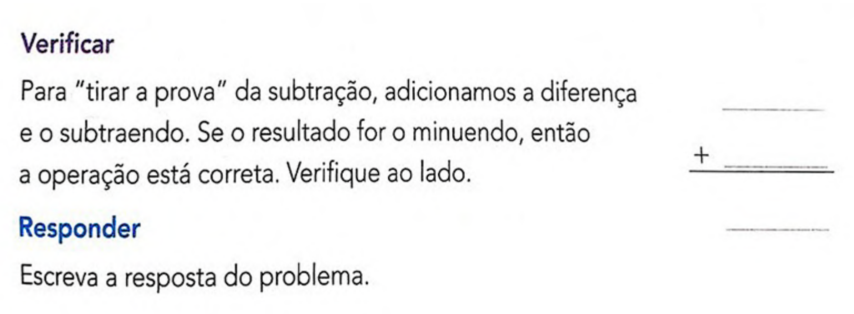
Algoritmo usual simplificado

	3	5	9	6	← minuendo
−	1	3	7	8	← subtraendo
	___	___	___	___	← diferença ou resto

Fonte: Dante (2019, p.63)

A prova real, exemplificada na Figura 14 a seguir, consiste em verificar se o resultado obtido é verdadeiro utilizando a noção de operações inversas. Ou seja, para conferir se o cálculo numérico está correto deve-se adicionar o resultado da subtração (diferença) ao subtraendo e verificar se corresponde ao minuendo.

Figura 14 - Prova real



Verificar

Para "tirar a prova" da subtração, adicionamos a diferença e o subtraendo. Se o resultado for o minuendo, então a operação está correta. Verifique ao lado.

Responder

Escreva a resposta do problema.

Fonte: Dante (2019, p.63)

A figura 15 ilustra uma atividade que remete às ideias de comparar e completar. Neste exemplo temos duas ideias a serem trabalhadas: a de comparar e a de completar; num primeiro momento os estudantes terão que somar a quantidade de pessoas, já o item b coloca em questão quantas pessoas a mais seriam necessárias para completar a quantidade de 3.000 pessoas. Portanto, há a ideia de completar, pois implica em saber quanto falta para se chegar a uma determinada quantidade. Já o item c trata da ideia de comparar uma quantidade com a outra.

O capítulo também aborda a subtração e a adição como operações inversas, conforme ilustrado na figura 16 a seguir. Percebe-se que os dois livros didáticos de Matemática (4° e 5° anos) analisados abordam diversas situações que envolvem adição e subtração. Os PCN (BRASIL, 1997) e também a BNCC (BRASIL, 2017) apontam a importância de abordar no ensino de matemática as relações entre adição e subtração, como operações inversas. Esse também é um princípio da Teoria dos Campos Conceituais ao denominar problemas de adição e subtração como fazendo parte do campo conceitual das estruturas aditivas.

Figura 15 - Situação de comparar e completar

1 No dia do aniversário da cidade, a prefeitura ofereceu à população alguns eventos culturais. Veja quais foram os eventos e o número de pessoas que compareceram a cada um deles.

- Concerto de música: 1 390 pessoas.
- Exposição de arte: 1 230 pessoas.
- Sessão de cinema: 175 pessoas.
- Apresentação de teatro: 98 pessoas.

Concerto de orquestra sinfônica em Belo Horizonte, Minas Gerais. Foto de 2015.

a) Qual foi o número total de pessoas nos 4 eventos? 2 893 pessoas.

b) Quantas pessoas a mais deveriam ter ido aos eventos para que esse número chegasse a 3000? 107 pessoas.

c) O concerto de música teve quantas pessoas a mais do que a exposição de arte? 160 pessoas.

a) $\begin{array}{r} 1390 \\ 1230 \\ 175 \\ +\ 98 \\ \hline 2893 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 3000 \\ -\ 2893 \\ \hline 0107 \end{array}$ ou $\begin{array}{r} 2999 \\ -\ 2892 \\ \hline 0107 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} 1390 \\ -\ 1230 \\ \hline 0160 \end{array}$

Fonte: Dante (2019, p.70)

Figura 16 - Uso das operações inversas

Adição e subtração: operações inversas

1 Márcio tinha R$ 20,00. Complete.

a) Ao ganhar R$ 10,00 do pai dele, Márcio passou a ter R$ 30,00, pois 20 + 10 = 30.

b) Se comprar um CD de R$ 10,00, ele ficará com R$ 20,00, pois 30 − 10 = 20.

Fonte: Dante (2019, p.66)

As estratégias de cálculo

Neste item, vamos analisar as estratégias de cálculo sugeridas no capítulo analisado no livro do 5º ano, algumas delas também identificadas no capítulo do livro do 4º ano. Dentre as estratégias comuns aos dois volumes, citamos o algoritmo usual da subtração, incluindo no volume do 5º ano a abordagem das nomenclaturas da subtração, como mostra a figura 17:

Figura 17 - Nomenclaturas da subtração

3 Observe a atividade anterior e responda.

a) Como se chama a operação efetuada em todos os itens? Subtração.

b) Qual é o resultado no item **b**? Como se chama esse resultado?

7 768; diferença ou resto.

c) No item **a**, o número 1 643 é o subtraendo ou o minuendo? Subtraendo.

d) Qual é o minuendo no item **b**? 8 509

e) Qual é a diferença no item **c**? 18 206

f) Como ficam as diferenças obtidas nos 4 itens escritas em ordem decrescente? 22 664, 22 206, 18 206, 7 768.

Fonte: Dante (2019, p.64)

Na figura 18 a seguir, vemos a estratégia de subtrair o mesmo valor do minuendo e do subtraendo, que contribui de forma relevante para efetuar cálculos, principalmente quando há zeros no minuendo:

Figura 18 - Subtração do minuendo e do subtraendo

5 UMA IDEIA GENIAL PARA ALGUMAS SUBTRAÇÕES

Analise os exemplos com atenção.

$\boxed{3000 - 1742}$

Tirando o mesmo valor (1) do minuendo e também do subtraendo, a diferença não muda.

Fazemos:

$$\begin{array}{r} 2999 \\ -\ 1741 \\ \hline 1258 \end{array}$$

Logo: $\boxed{3000 - 1742 = 1258}$

$\boxed{1002 - 658}$

Tirando 3 de 1002 e tirando 3 de 658, fazemos:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 655 \\ \hline 344 \end{array}$$

Logo: $\boxed{1002 - 658 = 344}$

Efetue mais estas subtrações usando o algoritmo mostrado nos exemplos.

a) $40000 - 7258 =$ 32742 $\begin{array}{r} 39999 \\ -\ 7257 \\ \hline 32742 \end{array}$

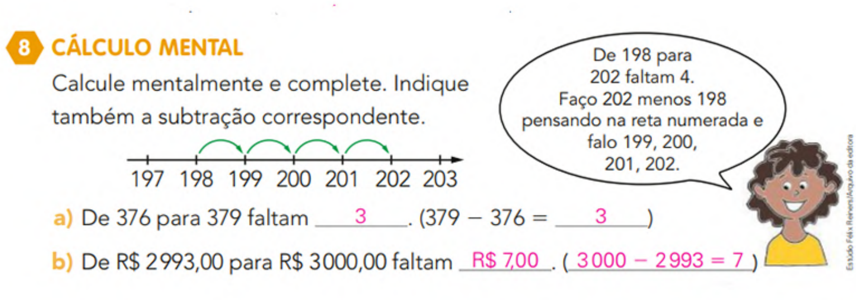
b) $6001 - 2493 =$ 3508 $\begin{array}{r} 5999 \\ -\ 2491 \\ \hline 3508 \end{array}$

Fonte: Dante (2019, p. 64)

Esta estratégia utilizando o método da compensação visa facilitar o cálculo numérico da subtração quando há zero(s) no minuendo. Também foi abordada no livro do 4° ano. São comuns erros na subtração relacionados ao zero, como enfatizado por Bertini (2003) e Silva (2015) em suas pesquisas, dentre eles destaca-se apenas repetir o zero, sem considerar a posição que está representando.

Na figura 19, a reta numérica é utilizada como um recurso para realização de cálculo mental. Consiste no estudante pensar quanto falta para chegar a um determinado número, também presente no livro do 4° ano.

Figura 19 - Reta numérica como estratégia de cálculo mental



Fonte: Dante (2019, p.65)

Na figura 20 a seguir, também ilustramos uma estratégia utilizada no livro do 5º ano para explorar o cálculo mental. No exemplo aparecem zeros tanto no minuendo quanto no subtraendo. Na maioria dos itens, a presença do zero não consiste em dificuldade de cálculo, pois prevalece "zero – zero".

Figura 20 - Cálculo mental

6 CÁLCULO MENTAL

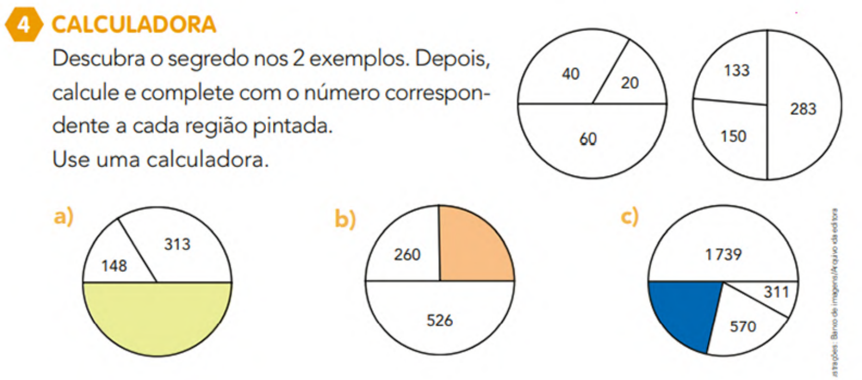
Calcule mentalmente e anote os resultados.

a) 700 − 100 = ________
b) 4000 − 3000 = ________
c) 928000 − 10000 = ________
d) 60000 − 20000 = ________
e) 100 − 20 = ________
f) 3000 − 400 = ________
g) 2000 − 50 = ________
h) 195 − 100 = ________
i) 1237 − 3 = ________
j) 80 − 20 = ________
k) 300 − 90 = ________
l) 77 − 20 = ________

Fonte: Dante (2019, p.65)

Outra representação utilizada para explorar o cálculo numérico na subtração, especialmente com a ideia de completar, é um círculo dividido em duas partes iguais, sendo que uma delas é subdividida em outras partes. O estudante deverá descobrir o valor de uma delas utilizando a calculadora.

Figura 21 - Calculadora utilizada como recurso na resolução de operações inversas



Fonte: Dante (2019, p.66)

Na figura 21, também podemos inferir que a calculadora é utilizada como recurso para resolver uma situação que envolve perceber a relação entre operações inversas. A BNCC (BRASIL, 2017, p.267) e os PCN (BRASIL 1998, p.71-72) mencionam o uso de tecnologias digitais na resolução de problemas matemáticos, particularmente validando estratégias e resultados.

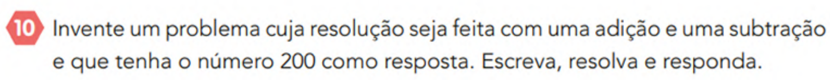
O livro do 5º ano, assim como o do 4º, também aborda o arredondamento, conforme Figura 22 a seguir. Empregado no cotidiano, torna-se relevante explorar de modo consistente e sistemático em sala de aula atividades que envolvam essa estratégia.

Figura 22 - Situação com uso do arredondamento

Fonte: Dante (2019, p.67)

Na Figura 23 a seguir, a atividade propõe que o estudante crie um problema. Para isso são definidas as operações que devem ser utilizadas e também a resposta que deve ser obtida, ou seja, um problema com uma solução única, mas com várias possibilidades de formulação. Este tipo de situação está de acordo com umas das competências que os PCN e a BNCC defendem ao ressaltarem que o estudante deve ser capaz de elaborar problemas.

Figura 23 - Elaboração de um problema


10 Invente um problema cuja resolução seja feita com uma adição e uma subtração e que tenha o número 200 como resposta. Escreva, resolva e responda.

Fonte: Dante (2019, p. 73)

Os recursos didáticos propostos

O capítulo analisado no livro não aborda os problemas matemáticos com muitos recursos didáticos, porém em relação à subtração, o manual do professor sugere que sejam discutidos em sala de aula exemplos do cotidiano nos quais fazemos arredondamento de valores. Sugere uma atividade na qual seja montada uma loja com vários produtos juntamente a seus preços onde os estudantes irão simular situações de compra, com no máximo 10 produtos a serem listados por cada um; sendo solicitado que anotem aproximações dos preços e o valor aproximado que gastaram. Para um registro final, deverão usar a calculadora para calcular o valor exato. A seguir, sintetizamos os dados coletados e analisados:

Quadro 2 - Tipos de situações, estratégias e recursos didáticos no livro do 5° ano

Dados coletados no livro do 5° ano		
Os diferentes significados da subtração	**Estratégias de cálculo sugeridas**	**Recursos didáticos propostos**
Ideia de retirar Ideia de comparar Ideia de completar	Algoritmo usual Subtração do minuendo e do subtraendo Cálculo mental Arredondamento Elaboração e resolução de um problema	Material dourado Reta numérica Calculadora Cédulas do sistema monetário brasileiro

Fonte: dados da pesquisa

Considerações finais

Este capítulo é o resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso em Pedagogia que analisou a abordagem da subtração em livros didáticos do 4° e 5° anos do ensino fundamental adotados pela Escola João Bezerra Sobrinho da rede municipal de Paranatama, estado de PE.

Os dados apontaram que no livro didático do 4° ano há equilíbrio na quantidade de questões envolvendo as ideias de retirar, comparar e completar envolvendo subtração de números naturais. Já no livro do 5° ano prevalecem as situações que envolvem a ideia de retirar. Consideramos que explorar os diferentes significados da subtração, das mais variadas formas, é relevante no processo de aprendizagem do estudante.

Dentre as estratégias de cálculo para resolução de subtrações sugeridas em ambos os livros didáticos analisados, destacam-se o uso do algoritmo convencional a partir do recurso à ordem superior ou método do empréstimo, mas também a subtração de um mesmo valor no minuendo e no subtraendo, especialmente quando há zeros no minuendo; o arredondamento e a reta numérica também foram utilizados para desenvolver estratégias de raciocínio. Estimulam o cálculo mental. Além disso, no livro do 5° ano há a proposta do estudante elaborar problemas e resolvê-los, aspecto não abordado no livro do 4° ano. Em ambos, a adição e a subtração como operações inversas, são abordadas em vários problemas. Os manuais do professor sugerem que o docente solicite que os estudantes expliquem as estratégias que usaram para resolver as questões e como desenvolveram esse pensamento e porque utilizaram tal estratégia de resolução, ou seja, estimulam a argumentação.

Em relação aos recursos didáticos sugeridos nas abordagens dos livros didáticos, destacaram-se a reta numérica, a calculadora e o material dourado. Os manuais do professor, propõem ainda um jogo com uso de dados envolvendo a subtração e multiplicação; uso de cédulas do sistema monetário brasileiro para representar situações em sala de aula.

Boa parte dos conteúdos explorados nos dois livros aborda os mesmos conceitos e estratégias, com exceção do livro do quinto ano, no qual há atividades com mais profundidade em relação ao livro do quarto ano, com destaque para a ampliação dos valores numéricos envolvidos nas operações. Embora o PNLD (2019, p.48) aponte que a obra ÁPIS apresenta muitas situações problemas e variadas estratégias de resolução a serem utilizadas pelos estudantes, ao finalizarmos essa análise pensamos que as ideias de retirar, comparar e completar deveriam ser mais exploradas nos dois livros.

A respeito do método do empréstimo que é o abordado nos dois livros, autores como Ramos (2009) e Schirlo (2014) enfatizam sua importância. Assim, "ter o conhecimento do processo de recurso à ordem superior ou decomposição é relevante para o desenvolvimento da operação de subtração" (SCHIRLO, 2014, p. 31). Neste sentido, pensamos que se trata de um método que, quando bem proposto e explorado em situações que favorecem a compreensão, pensamento e autonomia do estudante, sendo atribuído significado ao conceito, de fato ocorre aprendizagem. O ábaco poderia ser um importante recurso sugerido nos dois livros para possibilitar ao estudante melhor compreensão do reagrupamento.

O presente estudo contribuiu de forma significativa para minha formação enquanto graduanda em Pedagogia, pois compreendi melhor sobre a subtração e seus aspectos, suas ideias, cada tipo de situação e conceitos envolvidos. Obtive mais clareza e aprendizado em relação a esta operação e as dificuldades que ocorrem no ensino fundamental ao longo dos anos. Algumas dessas dificuldades eu mesma enfrentei ao longo da minha escolaridade básica. Como futura docente, pretendo promover aprendizagem significativa, tendo um olhar voltado para as diferentes dificuldades demonstradas pelos estudantes e considerando suas vivências, não me restringindo somente ao livro didático, mas recorrendo a outras alternativas metodológicas.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997. 142 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática, ensino de quinta a oitava série. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.148 p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Curricular Comum.* Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Matemática:* guia de digital: PNLD 2019. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. 200 p.

BERTINI, L. de F; PASSO, C. L. B. Dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais. *In:* 16º COLE -CONGRESSO DE LEITURA DO BRASIL, 2007. *Anais*...Departamento de Metodologia de Ensino. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2007. p.1-10. Disponível em: http://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_02.pdf Acesso em: 10 set.2019.

BORBA, R. GUIMARÃES, G. *Pesquisa e atividades para o aprendizado matemático na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental.* Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, 2015. 214p.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: Sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa.* São Paulo, v.30, n.3, p. 549–566, set/dez. 2004. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdfAcesso em: 09 out. 2019.

DANTE, L. R. *Projeto Ápis Matemática:*4º ano. São Paulo: Ática, 2019.

DANTE, L. R. *Projeto Ápis Matemática:*5º ano. São Paulo: Ática, 2019.

LUDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A.Método de coleta de dados: observação, entrevista e análise documental. *In*: LUDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: a*bordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2012. p. 25-43.

MAGINA, S. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da psicologia para a prática docente. *In: Anais do XVIII ERPM*-Encontro Regional de Professores de Matemática, v. 18, 2005.São Paulo: Unicamp, 2005. p.1-5. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais.htma Acesso em: 09 set.2019.

MELLO, E. M. Análise de dificuldades de alunos do ensino fundamental com o uso do algoritmo da subtração. *Anais do 2° SIPEMAT*- SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2008. São Paulo, 2008. p.1-7.

MINAYO, M. C. S. O desafio da pesquisa social. *In:* DESLANDES, S. F. GOMES, R. *Pesquisa social:* teoria, método e criatividade. 2009. 28. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2009, p.9-27. ISBN 978-83-326-1145-1.

RAMOS, L. F. *Conversas sobre números, ações e operações.* São Paulo: Ática, 2009. 156 p.

SCHIRLO, J. L. *As quatro operações fundamentais da aritmética:* conhecimentos prévios dos alunos no início do 1º ano do ensino médio. 2014.137 p. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em rede nacional)- Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2014. Disponível em:http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/fevereiro2016/matematica_dissertacoes/dissertacao_joao_luiz_schirlo.pdf. Acesso em: 21 nov.2019.

SILVA, L. C. C. *Ressignificando a construção dos Algoritmos da adição e subtração.* 2015. 181 p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo horizonte, 2015. Disponível em: http://www1.pucminas.

br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20150803103324.pdf Acesso em: 21 nov.2019.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. *In*: Nasser, L. (Ed)*Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro,* 1993, p.1-27.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2009. 322 p.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, Curitiba, n. especial 1/2011, p. 15-27. UFPR, 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602011000400002 Acesso em: 02 ago. 2019.

XAVIER, A. C. Ciência, seus métodos e classificações. *In:* XAVIER, A. C. *Como fazer e apresentar trabalhos científicos em eventos acadêmicos.* Recife: Rêspel, 2010. p. 35 – 40.

CAPÍTULO 9

O zero no algoritmo da subtração: o que dizem professores sobre erros cometidos por estudantes

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Neste capítulo apresentamos resultados obtidos num estudo que consistiu em duas etapas inter-relacionadas. A primeira delas investigou especificamente elementos conceituais relacionados ao algoritmo da subtração, tomando como foco a análise de erros, os quais numa concepção construtivista são necessários à aprendizagem e revelam um saber em constituição. Este tipo de análise contribui para que o professor busque entender as respostas dadas e o porquê das estratégias escolhidas por seus alunos. De acordo com Silva e Buriasco (2005), diferentes tipos de erros exigem diferentes ações do professor, por isso a primeira coisa que precisa fazer é aprender a identificá-los, distinguir qual a natureza de cada um deles, bem como que ações realizar para que sejam superados. Resultados desta etapa foram apresentados em 2015, no X Encontro Capixaba de Educação Matemática (ECEM).

Complementando o estudo, sob a ótica das categorias de conhecimento de Lee Shulman (2005), acrescenta-se à análise de erros, a análise da produção escrita de professores, ao escreverem sobre procedimentos utilizados por alunos na resolução do algoritmo da subtração utilizado na primeira etapa do estudo. Resultados específicos desta etapa da pesquisa foram apresentados VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) realizado também em 2015.

De acordo com Gitirana et al (2014), o erro pode ser uma fonte de informação cognitiva. Segundo as autoras, na tentativa de solucionar problemas matemáticos, os estudantes utilizam-se de procedimentos variados, sejam eles formas bem sucedidas, limitadas ou até mesmo equivocadas de resolução. Tanto os sucessos, quanto os equívocos são fontes de informação, igualmente, preciosas sobre como o aluno pensa. Concordamos com as autoras ao defenderem que deve interessar a todo educador matemático tanto os procedimentos diferentes daqueles usualmente adotados, que conduzam ou não a resposta correta, quanto os procedimentos inadequados.

Em relação ao algoritmo da subtração, concordamos com Pires (2012), ao destacar que, embora o domínio do algoritmo seja um dos objetivos do ensino de Matemática, ele não deve ser imposto às crianças que precisam experimentar as próprias estratégias. Também concordamos que as crianças devem ser estimuladas a utilizar cálculo mental, aproximações, estimativas, elaborar suas próprias estratégias para o cálculo escrito, e até mesmo utilizar a calculadora. No entanto, ao lidarem com determinados valores numéricos, como os que vamos discutir neste trabalho, sem terem acesso à calculadora, por vezes torna-se necessário utilizar algoritmos convencionais que são mais rápidos, práticos e resultantes de longos caminhos percorridos para sua sistematização na história da matemática.

Embora também concordemos que o motor da aprendizagem matemática é a resolução de problemas a partir de variados contextos, tais como, contextos das práticas sociais; da história da matemática, da própria matemática ou outras áreas de conhecimento, optamos neste estudo por fazer um recorte no aspecto "sintático" da resolução de problemas, ou seja, o cálculo numérico, especificamente. Segundo Ramos (2009), em situações simples, que envolvem quantidades pequenas, as crianças fazem contagens para realizar cálculos. No entanto, de acordo com a mesma autora, quando os cálculos numéricos envolvem números "grandes", são necessários outros recursos, entre eles, os algoritmos, técnicas operatórias constituídas de procedimentos para resolver as operações fundamentais. De acordo com Mendonça (1996),

> um algoritmo é uma sequência de passos pré-estabelecidos que, se seguidos, devem levar ao sucesso de uma tarefa. Isto é, se executarmos, numa sequência, os passos elaborados para realizar o algoritmo de uma operação matemática, estes certamente nos levarão a um resultado correto. Em geral, os algoritmos convencionais apresentam a forma mais econômica e resumida de se realizar, por escrito, o cálculo de uma operação e são arranjos muito elegantes e belos (p.57).

O papel desempenhado pelo zero na escrita numérica do minuendo de uma subtração recebe atenção especial e desencadeia uma reflexão: será que os professores conseguem associar os erros cometidos pelos estudantes, ao resolverem a conta, ao papel do zero ou às dificuldades relacionadas ao mesmo como mantenedor de posição? Que indícios ajudam a caracterizar conhecimentos deste conteúdo específico e conhecimento pedagógico do conteúdo nas produções dos professores?

O zero e o algoritmo da subtração

Dado o papel do zero na escrita numérica do minuendo de uma subtração, neste artigo situamos, em linhas gerais, o zero historicamente, sua criação e importância para o sistema de numeração decimal, como também, alguns aspectos didáticos sobre técnicas operatórias para subtração, ou seja, o algoritmo da subtração com reserva e com o zero ocupando uma das posições.

O zero

Historicamente a importância do zero nos sistemas posicionais remonta aos babilônios que a princípio parecem, segundo Boyer (2009), não ter tido um modo claro de indicar uma posição vazia, pois, embora às vezes deixassem uma coluna vazia, não tinham um símbolo para o zero. O autor também afirma que "é possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez da Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá" (Boyer, 2009, p.145).

Teles, Bellemain e Gitirana (2013), ao discutirem o papel do zero como mantenedor ou delimitador de posição no sistema de numeração decimal, afirmam que nesse tipo de sistema, posicional e que trabalha por agrupamentos, para representar alguns números surge o problema de haver ordens (posições) em que não há agrupamentos que não possam ser reagrupados em ordens superiores. As autoras ilustram a discussão tomando como exemplo o número 501, no qual há 50 agrupamentos de dezenas. No entanto, 50 dezenas podem ser reagrupadas em 5 centenas.

Fica então uma posição da escrita sem agrupamentos. Diante desse tipo de problema, surgiu o zero, como delimitador de posição. O delimitador de posição surgiu antes do sistema hindu-arábico, com os babilônios, porém ele adquire status de número, podendo ser operável, no sistema hindu-arábico.

De acordo com Mendonça (1996), os algoritmos das operações aritméticas estão submetidos à pressão dos princípios que organizam a estrutura do sistema de numeração decimal, entres eles o princípio aditivo, princípio multiplicativo e valor posicional, os quais determinam os passos de todas as técnicas operatórias presentes nos algoritmos convencionais.

O algoritmo da subtração

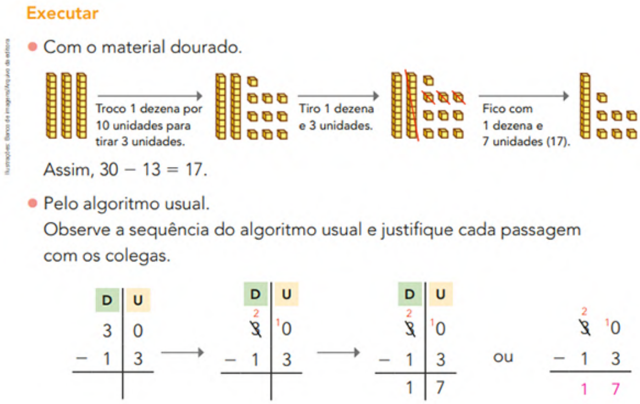
Em relação ao algoritmo da subtração, o primeiro termo de uma subtração é chamado minuendo, o segundo, subtraendo e o resultado da operação de subtração é denominado resto ou diferença. Daí algumas relações podem ser estabelecidas: minuendo - subtraendo = resto ou diferença e a soma do minuendo com o subtraendo e o resto é sempre igual ao dobro do minuendo. Para resolver subtrações com reagrupamentos, quando um ou mais algarismos do minuendo é menor que o do subtraendo, há dois métodos: um da época dos nossos avós e de nossos pais: método da compensação que consiste em adicionar quantidades iguais no minuendo e no subtraendo, ou seja, utilizava-se o Teorema da Invariância do Resto: numa subtração, se adicionarmos o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo a diferença não se altera. Esta ideia pode ser sintetizada assim: na subtração de dois números, sempre que ambos são acrescidos da mesma quantidade, a diferença entre eles permanece inalterada. Em outras palavras o aumento do primeiro número é compensado pelo aumento do segundo número. Daí o nome: propriedade da compensação. Assim, por exemplo, a diferença entre 324 e 126 é igual à diferença entre 424 e 226, pois ambos os números foram aumentados em uma centena.

E o método do empréstimo ou troca que envolve a decomposição do minuendo a partir do desagrupamento (e reagrupamento) no minuendo. Este método requer compreensão de características do sistema de numeração decimal (SND), em especial a noção de valor posicional e agrupamentos na base 10. Pode ser representado concretamente, por exemplo, com material dourado e predomina nas propostas metodológicas de livros didáticos atuais. Ou seja, o método utilizado no ensino atualmente, consiste na decomposição do minuendo e supõe uma compreensão clara dos valores relativos dos algarismos e do SND de modo geral.

A opção atual pela decomposição, certamente deve-se ao fato desta técnica ser mais facilmente concretizável para as crianças, tornando possível a compreensão da *técnica* de modo mais eficiente no ensino e na aprendizagem da matemática. Já a compensação baseia-se em técnicas não muito elementares que carregam em si o caráter de "decorar", automação. No entanto, há quem defenda o retorno da técnica da compensação. Por exemplo, Mello (2008), ao finalizar seu artigo diz que "a introdução do algoritmo da compensação nos permite trabalhar conceitos como a invariância da diferença que poderá ser muito útil, posteriormente, no estudo das equações". A mesma autora observou que a maioria dos alunos por ela pesquisados demonstram dificuldades com o uso do algoritmo da subtração quando são necessários vários empréstimos. Também identificou que todos os livros didáticos e apostilas analisadas em seu estudo, em 2008, propõem o método do empréstimo para efetuar as subtrações com recurso. Vários professores pesquisados pela autora também não conheciam o método da compensação e todos afirmam ensinar a subtração utilizando o método do empréstimo.

Uma observação exploratória em livros didáticos mais recentes indica, além da apresentação de estratégias variadas de cálculo, o uso recorrente de materiais como ábaco e material dourado para explicar os desagrupamentos e reagrupamentos, como ilustramos a seguir:

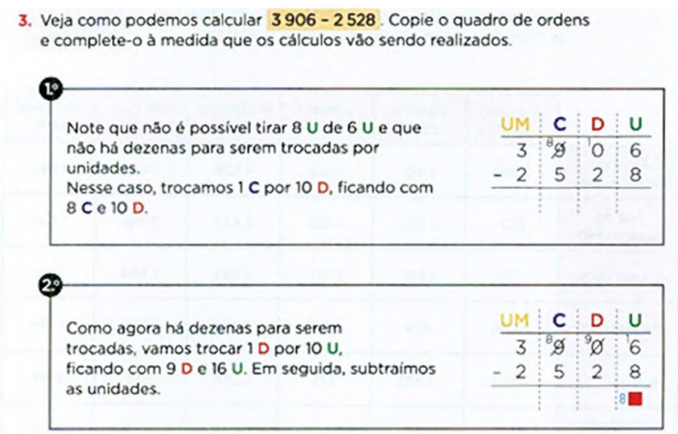
Figura 1 - Uso do material dourado para dar suporte ao algoritmo da subtração

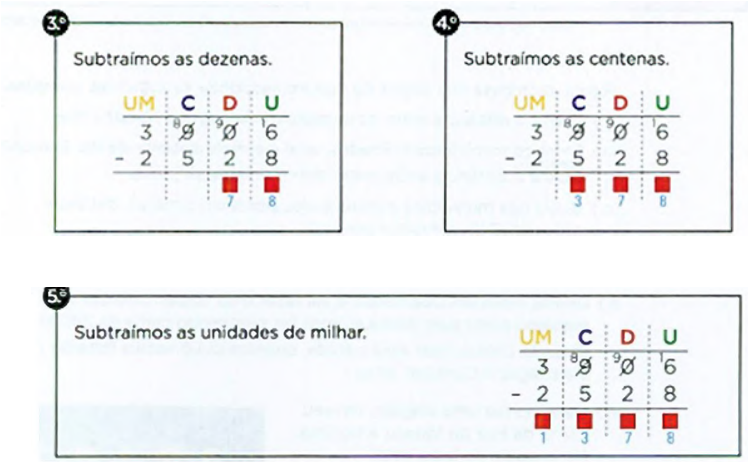


Fonte: Dante (2015, v. 4, p.126)

O exemplo a seguir, ilustra uma explicação contida em livro didático de matemática para o 4º ano, numa operação envolvendo o zero como mantenedor de posição no minuendo de uma subtração:

Figura 2 - O zero como mantenedor de posição no minuendo de uma subtração





Fonte: Vieira, Ribeiro e Pessôa (2011, v. 4, (p. 71).

Há muitos anos pesquisas vêm investigando a temática algoritmo da subtração. Em 1995, Batista já discutia em artigo publicado na revista Zetetikê o fracasso escolar associado a erros em operações matemáticas. A autora apontava, por exemplo, erros específicos da subtração, tais como o que ela chama de operação invertida, atualmente dizemos "retirar o maior do menor independente da posição" e utilização incorreta do emprestar, o que chamamos erros de decomposição. Também Borba e Santos, em 1997 investigaram erros de no cálculo numérico na resolução de subtrações com reserva e com reserva e zero. Estes dois estudos já citavam e se apoiavam nos resultados de Ruiz e Nascimento (1993). Barreto (2001) também evidenciou erros de cálculo numérico cometidos por alunos cursando o último ano do ensino fundamental, principalmente na subtração quando havia zero. Também Bertini e Passos (2007), identificaram, entre outros erros, alguns relacionados ao zero, tais como: somar ou subtrair o zero - erro semelhante ao que Ruiz e Nascimento (1993) chamaram de supremacia do zero, que consistia em utilizar nas subtrações as regras: zero menos qualquer número natural é sempre igual a zero e qualquer número natural menos zero é sempre igual a zero, independente se o zero está no minuendo ou no subtraendo.

Mesmo em outra modalidade de ensino como a Educação de Jovens e Adultos (EJA), Queiroz e Lins (2011), evidenciaram que estudantes cometem erros de cálculo numérico quando se deparam, na subtração, com algoritmo em que é preciso decompô-lo, sendo eles: inversão ou decomposição e composição, assim como a presença do algarismo zero os faz cometer também dois outros tipos de erros: Supremacia do Zero e Zero neutro, de acordo com a mesma classificação utilizada por Ruiz e Nascimento(1993), retomada pelas autoras e amplamente confirmadas em pesquisas em que o público era composto por alunos do ensino fundamental. Neste sentido, investigar como os professores lidam com o tema após tantos estudos sobre o algoritmo da subtração, com foco especial no zero, nos parece pertinente.

Shulman e o conhecimento do professor

Neste trabalho, adotamos como pressuposto que, para resolvermos qualquer problema, temos que entendê-lo em profundidade. Neste sentido, tomando como referencial os estudos de Shulman (1987 e 2005), que indicam como elementos essenciais para o trabalho docente, entre outros, o conhecimento do conteúdo específico e do conhecimento pedagógico do conteúdo, buscamos construir um conjunto de estudos que identifiquem conhecimentos dos professores. Estes conhecimentos podem dar suporte à tomada de decisões didáticas de professores que ensinam matemática, de modo a potencializar a avaliação escolar em sua dimensão diagnóstica, permitindo ao professor a criação ou adoção de estratégias mais eficientes na abordagem do conteúdo a ser ensinado por ele e aprendido pelos estudantes.

As pesquisas de Shulman, desde 1986 e de outros pesquisadores, vêm destacando a importância de se aprofundar estudos sobre o conhecimento dos profissionais da educação, com ênfase no professor. Shulman (1987) subdivide os tipos de conhecimento do professor em sete categorias: conhecimento específico do conteúdo, conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais, conhecimento pedagógico geral, conhecimento dos contextos educacionais, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento dos alunos e suas características. Nessa pesquisa optamos por trabalhar com as categorias que tratam do conhecimento específico do conteúdo e do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Uma série de estudos, tais como Grossman, Wilson e Shulman (2005) também indicam que o conhecimento dos professores sofre transformações durante o processo de formação inicial e durante toda vida profissional, atuando como docente. No Brasil, de acordo com Curi e Pires (2008), alguns pesquisadores têm se preocupado com os conhecimentos matemáticos dos professores e reforçam a ideia da especificidade do conhecimento matemático. Dentre elas, a pesquisa realizada por Curi e Pires (2001), que evidenciou, com base nas vertentes propostas por Shulman, lacunas, tanto em termos de conhecimentos matemáticos, envolvidas nas questões que foram propostas a um grupo de 208 professores que lecionavam na quarta série (5º ano) de vários estados brasileiros, como na área de conhecimentos didáticos e curriculares.

Para justificar a pertinência deste estudo, destacamos ainda que é consensual entre os educadores matemáticos o fato dos professores, mesmo os que atuam apenas nos anos iniciais do ensino fundamental, estarem atentos à correção teórica e conceitual do que ensinam e como ensinam; aos aspectos didáticos e pedagógicos do como ensinar e também do como se aprende. Neste sentido, identificar erros e suas respectivas justificativas poderá ajudá-los na realização ou elaboração de planejamentos de intervenções didáticas mais eficientes, que necessariamente não excluam do ensino aspectos dos conceitos e conteúdos que podem gerar dificuldades, mas, ao contrário, desenvolvam estratégias didáticas que potencializem a compreensão dos estudantes, sejam elas para introduzir, aprofundar ou revisar um conteúdo. Gitirana, et al (2014), ao reafirmarem um ponto passível nas pesquisas em educação matemática em relação ao fato dos erros apresentados pelos alunos expressarem suas dificuldades de compreensão, defendem que quando estes são analisados e interpretados, permitem ao professor identificar a natureza da dificuldade que impede a resolução apropriada.

Embora concordemos com Ramos (2009), que o ensino das técnicas operatórias não garante a compreensão das operações matemáticas, pois "entender o significado das operações matemáticas é compreender as ideias e ações envolvidas em cada operação de maneira concreta e significativa, baseando-nos em experiências e vivências" (p.97), pensamos que dar relevo aos erros relacionados às habilidades operatórias no algoritmo da subtração poderá potencializar a intervenção do professor de modo adequado, como discutido anteriormente neste texto.

Buscando contribuir neste sentido, apresentamos neste capítulo os resultados obtidos num estudo que, como já dissemos, consistiu em duas etapas inter-relacionadas com objetivos específicos distintos e complementares: categorizar padrões de procedimentos errôneos relacionados ao papel do zero como mantenedor de posição, mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental na resolução do algoritmo de uma subtração. E identificar indícios de conhecimento do conteúdo específico no modo como os professores interpretam os erros cometidos pelos alunos e indícios de conhecimentos pedagógicos do conteúdo nas intervenções que dizem que fariam.

Procedimentos metodológicos

Na primeira etapa do estudo aplicamos uma atividade escrita para um grupo de 14 alunos de um quinto ano do ensino fundamental de uma escola pública pernambucana. Na segunda etapa, numa ação de formação continuada, foi aplicado um questionário para um grupo de 40 professores, contendo uma seleção de erros categorizados na primeira etapa, com a finalidade de identificar elementos que caracterizem conhecimentos de conteúdos específicos e conhecimentos pedagógico do conteúdo de acordo com a categorização de Lee Shulman (2005).

A atividade escrita foi elaborada e aplicada por um grupo de graduandos em Pedagogia participantes do Programa de Iniciação à Docência (PIBID), inicialmente com a finalidade de diagnosticar a habilidade daquele grupo de estudantes do 5º ano do EF na resolução de problemas envolvendo o algoritmo da subtração.

O enunciado da questão que supunha um contexto vivido na escola num momento de preparação de uma festa coletiva era o seguinte:

Figura 3 - Questão proposta

1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam?

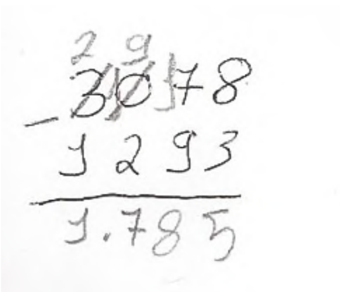
Fonte: arquivo da pesquisa

Utilizando a classificação de Vergnaud (1986) para problemas de estruturas aditivas, este seria um problema do tipo composição com uma das partes desconhecida. Os valores numéricos envolvidos na questão possuem os seguintes aspectos: o zero como mantenedor de posição no número 3078; e a necessidade de efetuar decomposições e reagrupamentos com o zero intercalando unidades de milhar e dezenas.

Neste texto, não levamos em consideração as ações relacionadas ao cálculo relacional, apenas ao cálculo numérico. No grupo de 14 alunos, apenas um deles, não acertou o cálculo relacional, ou seja, não escolheu a operação 3078 – 1293 para resolver a questão. Este dado reforça nosso interesse em olhar mais especificamente erros cometidos no cálculo numérico, ou seja, na resolução do algoritmo da subtração, pois, assim como apenas um errou o cálculo relacional, apenas um acertou o cálculo numérico, ou seja, dos 14 sujeitos, 13 erraram a "*conta*".

O principal entrave na resolução da operação 3078 – 1293, a nosso ver, seria, numa linguagem escolar "pedir emprestado através do zero", ou seja, desagrupar as três unidades de milhar e decompor uma delas em 10 centenas, desagrupar estas centenas e decompor uma delas em 10 dezenas que se juntarão ao 7, que está na casa das dezenas, para tornar possível a subtração 17 – 9 = 8, ou seja, 17 dezenas menos 9 dezenas, depois perceber que no lugar do 0, após os desagrupamentos e reagrupamentos, ficará 9 e no lugar do 3 agora ficará 2. Este ponto de vista foi confirmado a partir dos resultados obtidos. A figura 4 abaixo a única resolução correta do grupo de alunos:

Figura 4 - Cálculo numérico correto



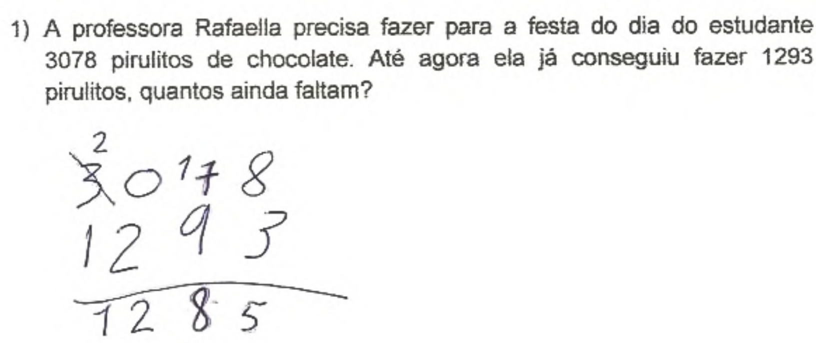
Fonte: arquivo da pesquisa

Na análise dos 14 protocolos foi possível identificar vários padrões de procedimentos na resolução do algoritmo desta subtração. Alguns deles confirmam resultados de pesquisas anteriores, no entanto apontam outros indicativos e nos instigam a pensar na ação do professor frente a estes tipos de erros.

Um mesmo aluno apresentou vários padrões de procedimentos, ou seja, os procedimentos se sobrepõem num mesmo protocolo, por isso, os percentuais que discutimos a seguir, são independentes entre si.

1. Efetuar corretamente a subtração dos algarismos que ocupam a 1ª ordem, classe das unidades simples: 8 - 3 = 5; 11 dos 14 alunos conseguem: 78,6%;
2. Subtrair 9 de 17, ou seja, perceber a necessidade de "juntar 10" ao 7 para ser possível efetuar a subtração: (10+7) -9 =8; 4 alunos conseguem: 28,6. Neste procedimento os alunos "pulam" o zero e pedem emprestado diretamente ao 3, ou seja, a posição ocupada pelo zero no número é desconsiderada. Para ilustrar:

Figura 5 - Pular o zero

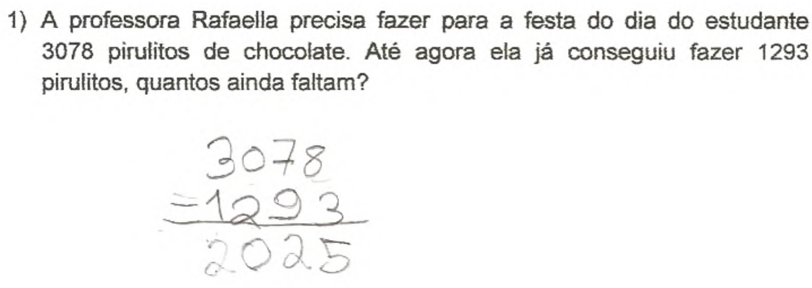


Fonte: arquivo da pesquisa

3. Não efetuam a decomposição e reagrupamento – no caso das dezenas, retirar o maior do menor independente da posição. Dentre aqueles que não desagruparam as unidades de milhar ou ignoraram a posição ocupada pelo zero destacaram-se dois procedimentos na ordem das centenas:

    a. Zero menos dois igual a zero (0 - 2 = 0). Cinco alunos fizeram esta opção. Outras pesquisas já elaboraram explicações para este tipo de erro. Entre elas, o argumento que o aluno utiliza na subtração a mesma noção do zero como elemento neutro na adição, neste caso além do caráter da ausência da decomposição necessária para calcular, há indicativos para pensarmos na construção do conceito de números negativos na continuidade da escolaridade destes alunos. Para este grupo de alunos: zero menos qualquer número natural é igual a zero.

Figura 6 - Retirar o maior do menor (A).

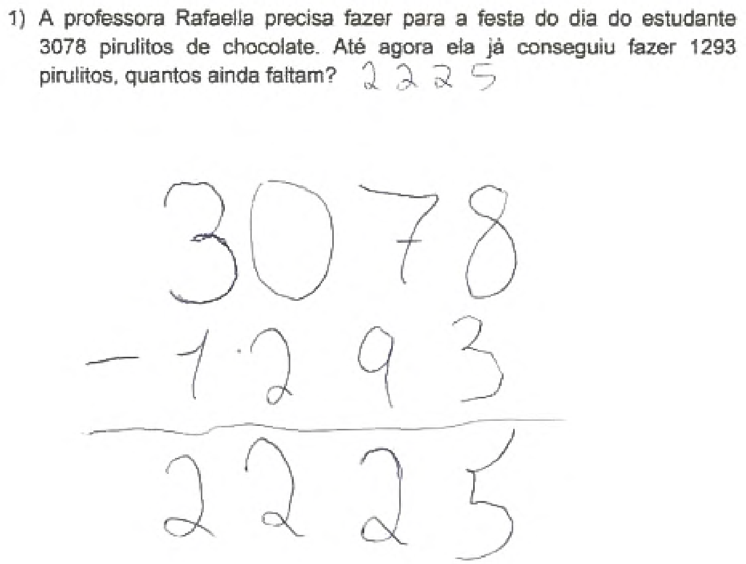

1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam?

$$\begin{array}{r} 3078 \\ -1293 \\ \hline 2025 \end{array}$$

Fonte: arquivo da pesquisa

    b. Zero menos dois é igual a dois (0- 2 = 2). Para outros cinco alunos zero menos qualquer número natural é igual ao número.

Figura 7 - Retirar o maior do menor(B).



1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam? 2225

$$\begin{array}{r} 3078 \\ -\ 1293 \\ \hline 2225 \end{array}$$

Fonte: arquivo da pesquisa

Na tabela 1 sintetizamos os padrões de procedimentos observados na resolução do algoritmo da subtração.

A partir destes resultados, selecionamos dois procedimentos e construímos um segundo instrumento de coleta que foi submetido a um grupo de 40 professores que atuam no 5º ano do ensino fundamental de uma rede pública municipal de ensino. A finalidade era identificar elementos que caracterizem conhecimentos de conteúdos específicos e conhecimentos pedagógicos do conteúdo, de acordo com a categorização de Lee Shulman (2005), em suas produções escritas, ao analisarem os erros cometidos pelos alunos e indicarem possibilidades de intervenções didáticas que fariam para ajudá-los a superar as dificuldades identificadas.

Tabela 1 - Padrões de procedimentos na resolução do algoritmo da subtração.

Procedimento identificado	Quantidade de alunos/ %	Exemplo
Efetuar corretamente a subtração dos algarismos que ocupam a 1ª ordem, classe das unidades simples: 8 - 3 = 5	11/ 78,6%	
Subtrair 9 de 17, ou seja, perceber a necessidade de "juntar 10" ao 7 para ser possível efetuar a subtração: (10+7) -9 =8.	4/28,6%	$\overset{2}{\cancel{3}}0\,{}^{1}7\,8$ 1293 1285
Não efetuam a decomposição e reagrupamento, ou seja, retiram o maior do menor independente da posição.	13/92,9%	3078 −1293 2025

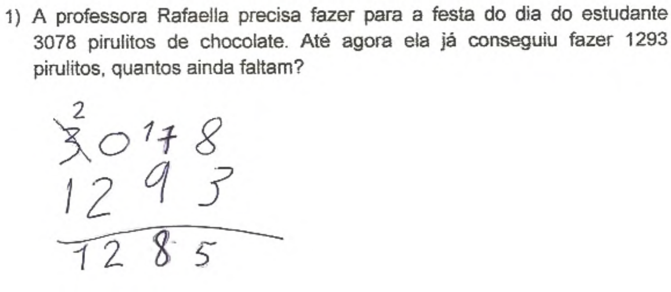
Fonte: arquivo da pesquisa

O protocolo

Professor,
A questão a seguir foi proposta para uma turma de 5º ano do ensino fundamental. Dentre os procedimentos numéricos identificados, destacaram-se estes dois:

1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam?

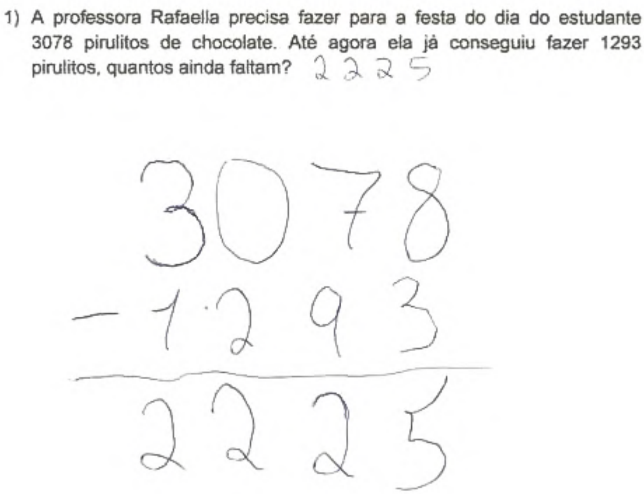
Procedimento 1:



1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam?

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,0\,{}^{1}\cancel{7}\,8 \\ 1\,2\,9\,3 \\ \hline 1\,2\,8\,5 \end{array}$$

Procedimento 2:



1) A professora Rafaella precisa fazer para a festa do dia do estudante 3078 pirulitos de chocolate. Até agora ela já conseguiu fazer 1293 pirulitos, quantos ainda faltam? 2225

$$\begin{array}{r} 3078 \\ -\,1293 \\ \hline 2225 \end{array}$$

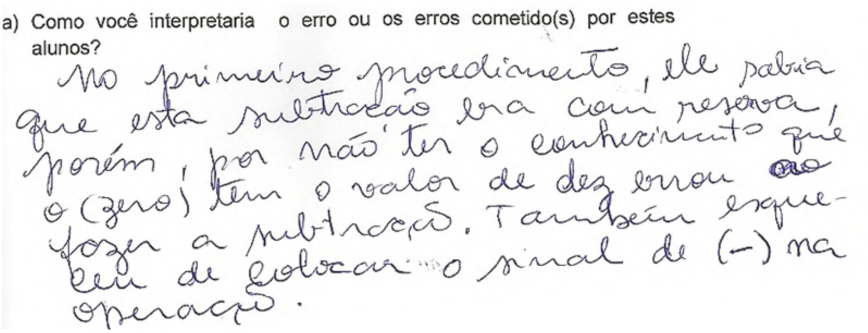
a. Como você interpretaria o erro ou os erros cometido(s) por estes alunos?
b. Como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?

Discussão dos resultados

Os dados possibilitaram a identificação de vários indícios de conhecimentos docentes.

Em relação ao zero, apenas 4 (10%) dos 40 sujeitos citam explicitamente dificuldades coerentemente relacionadas ao zero, tais como: "*o aluno achou que o zero da centena não tinha valor*". No entanto também cometem equívoco ao dizer que "*o zero tem valor de 10*", como ilustrado a seguir:

Figura 8 - O zero


a) Como você interpretaria o erro ou os erros cometido(s) por estes alunos?

No primeiro procedimento, ele sabia que esta subtração era com reserva, porém, por não ter o conhecimento que o (zero) tem o valor de dez errou ao fazer a subtração. Também esqueceu de colocar o sinal de (–) na operação.

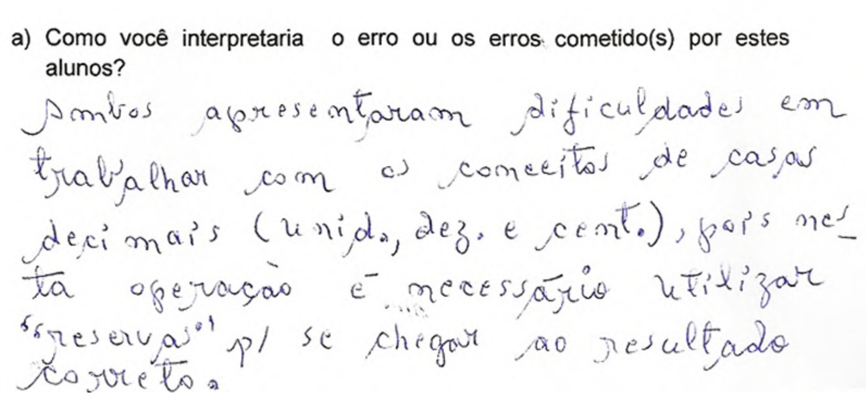
Fonte: arquivo da pesquisa

Indícios de conhecimento do conteúdo específico no modo como os professores interpretam os erros cometidos pelos alunos

O conhecimento do conteúdo específico, de acordo com Shulman (2005), refere-se ao material de uma disciplina, a informação factual, princípios de organização e conceitos centrais. Além da capacidade de identificar, definir e discutir sobre cada elemento da matéria, separadamente (o "quê" do ensino). Buscamos, nas escritas dos professores sobre o erro do aluno, o seu próprio conhecimento: quais aspectos do conteúdo eles julgam relevantes? Quanto eles conseguem enxergar no protocolo do aluno?

A maneira como os sujeitos deste estudo interpretam os erros cometidos pelos estudantes sinaliza para conhecimentos do conteúdo específico na medida em que atribuem o erro do aluno ao conhecimento ou desconhecimento deste sobre algum aspecto conceitual do algoritmo da subtração, tais como valor posicional no sistema de numeração decimal. Por outro lado, também foi possível identificar equívocos de linguagem, como o uso recorrente da expressão "casas decimais" para significar "valor posicional"; e se referir às características do sistema de numeração decimal como "números decimais", como ilustrado a seguir:

Figura 9 - casas decimais


a) Como você interpretaria o erro ou os erros cometido(s) por estes alunos?

Ambos apresentaram dificuldades em trabalhar com os conceitos de casas decimais (unid., dez. e cent.), pois nesta operação é necessário utilizar "reservas" p/ se chegar ao resultado correto.

Fonte: arquivo da pesquisa

Mais detalhadamente, organizamos estes indícios em quatro grupos:

1. Relacionam o erro ao conhecimento ou desconhecimento do aluno sobre algum aspecto próprio do algoritmo da subtração,

tais como na linguagem utilizada pelos sujeitos: consciência do "procedimento das reservas"; ou "compreensão do sistema de agrupamento". Também fazem referência ao fato de os alunos não terem "noção sobre a subtração com casas decimais":

Figura 10 - Subtração com casas decimais

a) Como você interpretaria o erro ou os erros cometido(s) por estes alunos?

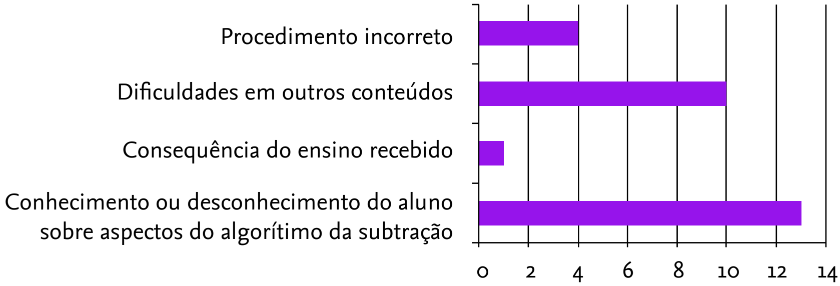
No primeiro ele pediu impestado na Casa decimal errada.
no segundo ele não tem nocão sobre a subtracão com casos decimais.
Entende-se que os dois alunos não compreenderam com exatidão os casos decimais.

Fonte: arquivo da pesquisa

II. Relacionar os erros a conhecimentos de outros conteúdos que interferem na resolução do algoritmo, principalmente ao sistema de Numeração Decimal;
III. Ou simplesmente o erro relacionado à escolha ou procedimento incorreto;
IV. Também um dos professores não reconheceu o que o aluno fez correto e outro atribuiu o erro ao ensino recebido.

Em síntese, os professores atribuem o erro dos alunos à natureza do objeto, aos conceitos necessários, às escolhas equivocadas ou ao ensino recebido, como sintetizado no gráfico a seguir:

Gráfico 1 - Razão dos erros sob a ótica dos professores

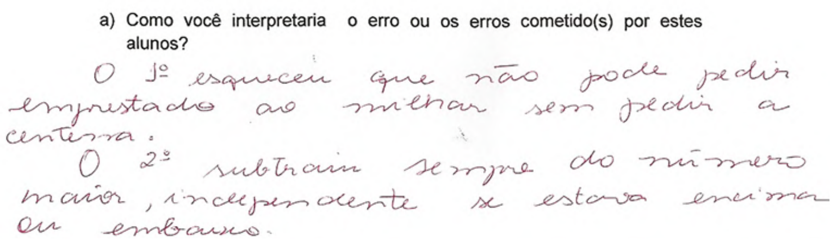


Fonte: dados coletados na pesquisa

Cinco sujeitos também atribuíram os erros ao “esquecimento”, a não identificação ou à falta de atenção. Outros três não mencionam o agrupamento e justificam o equívoco no procedimento dos alunos utilizando outros aspectos.

Ainda foi possível identificar indícios de conhecimentos específicos do conteúdo nas expressões utilizadas pelos professores para se referir à necessidade de (de)composição no algoritmo da subtração: procedimento das “reservas”; se perdeu no agrupamento; sistema de agrupamento; troca entre as casas (ordens) decimais; composição e decomposição, predominando a expressão “pegar emprestado”, que ilustramos a seguir:

Figura 11 - Pedir emprestado


a) Como você interpretaria o erro ou os erros cometido(s) por estes alunos?

O 1º esqueceu que não pode pedir emprestado ao milhar sem pedir a centena.

O 2º subtraiu sempre do número maior, independente se estava encima ou embaixo.

Fonte: arquivo da pesquisa

Indícios de conhecimentos pedagógicos do conteúdo nas intervenções que o professor pretenderia realizar

O conhecimento pedagógico do conteúdo, como já explicitado sucintamente, se desenvolve constantemente pelo professor ao longo de sua vida profissional. Ele inclui além do "*que*" ensinar o "*como*" ensinar, ou seja, além do objeto específico da matéria para o ensino e a aprendizagem, inclui os princípios e técnicas essenciais para o processo de ensino. A partir das respostas que os professores escreveram para o questionamento "como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?", foi possível identificar conhecimentos e também limitações que podemos associar a desconhecimentos ou equívocos dos professores, especialmente de linguagem matemática. Alguns professores indicam mais de uma ação, por isso o somatório é maior que 40.

Tabela 2 - o que os professores fariam

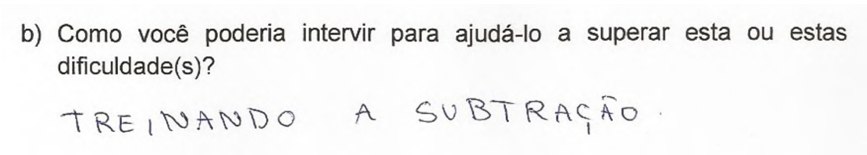
O que fariam	Quantos
Reforçar o ensino do aspecto que acham que o aluno tem dificuldade, propondo situações similares.	10
Refazer as contas com as crianças; treinar a subtração; mostrar como se faz.	4
Conduzir o aluno a refletir sobre o procedimento incorreto.	3
Usar recursos didáticos, tais como quadro valor de lugar; material dourado e ábaco ou genericamente material concreto.	16
Abordar outros conteúdos relacionados ao assunto, tais como: SND incluindo valor posicional; agrupamento, base 10, valor relativo e valor absoluto e tabuada.	8
Chamar individualmente ao quadro aqueles que apresentaram mais dificuldades.	2

O que fariam	Quantos
Solicitar que o aluno explique como pensou.	1
Ajudar no processo de operações com “números decimais”; casas decimais + ordens e classes numéricas.	2

Fonte: elaboração da autora

Os dados sistematizados nesta tabela permitem visualizar alguns possíveis posicionamentos dos professores: a necessidade de repetir, reforçar o ensino do algoritmo, sem necessariamente focar na fonte de erro, como na escrita do professor a seguir:

Figura 12 -Treinando a subtração

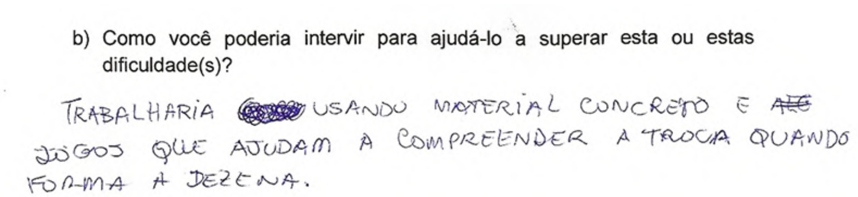

b) Como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?

TREINANDO A SUBTRAÇÃO.

Fonte: arquivo da pesquisa

Usar material concreto e explorar outros conteúdos que julgam terem interferido no procedimento:

Figura 13 - Usando material concreto

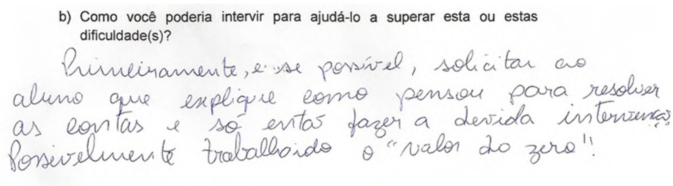

b) Como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?

TRABALHARIA USANDO MATERIAL CONCRETO E ~~AE~~ JOGOS QUE AJUDAM A COMPREENDER A TROCA QUANDO FORMA A DEZENA.

Fonte: arquivo da pesquisa

Apenas três professores do grupo dos 40 dizem que conduziriam o estudante à reflexão ou dariam um atendimento individualizado, com a finalidade de identificar o erro cometido. As figuras a seguir, ilustram falas de professores em relação ao modo como procederiam para proporcionar essa reflexão. Na Figura 14, o professor diz que solicitaria uma explicação sobre como o estudante pensou para resolver os cálculos numéricos:

Figura 14 - conduzir à reflexão a partir de explicação da ação realizada



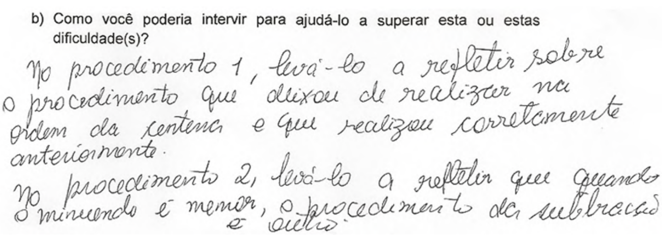
b) Como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?

Primeiramente, e se possível, solicitar ao aluno que explique como pensou para resolver as contas e só então fazer a devida intervenção. Possivelmente trabalhando o "valor do zero".

Fonte: arquivo da pesquisa

Já na Figura 15, o professor propõe-se a refletir sobre o procedimento que o estudante deixou de realizar na ordem da centena, sobre o que realizou corretamente e sobre o qual procedimento errou. Ou seja, propõe uma reflexão em três aspectos: ausência, presença conduzindo a acerto e presença conduzindo a erro.

Figura 15 - conduzir à reflexão a partir de explicação da ausência



b) Como você poderia intervir para ajudá-lo a superar esta ou estas dificuldade(s)?

No procedimento 1, levá-lo a refletir sobre o procedimento que deixou de realizar na ordem da centena e que realizou corretamente anteriormente.
No procedimento 2, levá-lo a refletir que quando o minuendo é menor, o procedimento da subtração é outro.

Fonte: arquivo da pesquisa

Considerações finais

Na etapa inicial do estudo, categorizamos dois padrões de procedimentos relacionados ao papel do zero como mantenedor de posição na resolução do algoritmo da subtração: pular o zero, ou seja, desconsiderar a ordem ocupada pelo zero e desagrupar a ordem imediatamente superior à posição ocupada pelo zero e retirar o maior do menor independente da posição. Dois procedimentos já identificados em pesquisas anteriores, no entanto, neste estudo ampliamos o olhar em relação ao algoritmo que envolve a decomposição do minuendo a partir do desagrupamento (e reagrupamento) no próprio minuendo. Método que requer compreensão de características do sistema de numeração decimal.

A partir destes dados, construímos subsídios para continuidade da pesquisa na perspectiva da interpretação que o professor faz destes erros cometidos pelos alunos, sob a ótica de Shulman (2005). Assim, ao analisarmos indícios que ajudam a caracterizar conhecimentos de conteúdos específicos e conhecimento pedagógico do conteúdo, de acordo com a categorização de Lee Shulman (2005), em 40 questionários respondidos por professores do 5º ano, tendo como foco algoritmo da subtração com o zero assumindo um papel de destaque, identificamos que a maioria (90%) dos professores não faz referência ou associa os erros cometidos pelos alunos ao papel do zero ou a dificuldades relacionadas a ele, o que gera uma preocupação ao pensarmos como "o zero" é tratado efetivamente no ensino: será que as propostas do livros didáticos contemplam o zero como mantenedor de posição? Será que os professores omitem este aspecto que pode gerar dificuldades em suas aulas de matemática?

Esta preocupação encontra respaldo no fato de ser consensual para a maioria dos pesquisadores em Didática da Matemática que um dos fatores que mais influencia na aprendizagem de conceitos matemáticos é o tratamento que o professor dá ao erro do aluno.

Por outro lado, os conhecimentos do conteúdo específico e pedagógicos do conteúdo são fundamentais para tomada de decisões do professor sobre como ensinar e quando ensinar cada conteúdo matemático, bem como avaliar as aprendizagens consolidadas e suas eventuais lacunas.

Para um estudo futuro, com estes mesmos dados, pretendemos analisar se aqueles sujeitos que conseguem identificar coerentemente o erro também apontam intervenções interessantes. Ou seja, se há alguma relação entre estes dois indicativos.

Referências

BARRETO, M.C. O Material Didático do telensino e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. In: FARIAS, I.S.; NUNES, J.B.C; CAVALCANTE, M.M.D. (Org.). *Telensino percurso e polêmicas.* Fortaleza: UECE, 2001.

BATISTA, C. G. Fracasso Escolar: análise de erros em operações matemáticas. *Revista Zetetikê.* Ano 3, n. 4,1995, p. 61-72. Disponível em http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2564/2308 Acessado em 20/06/2016 à 19h30.

BERTINI, L.F; PASSOS, C.L.B. Dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais. In: *Congresso de Leitura do Brasil –COLE, 16.* Campinas. Anais do 16º COLE, Campinas: Associação de Leitura do Brasil (ALB), 2007, p.01 -10. Disponível em: http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_02.pdf acessado em 20/06/2016 à 19h.

BORBA, R.E.S.R.; SANTOS, R.B. Investigando a resolução de problemas de estruturas aditivas por crianças de 3ª série. *Tópicos educacionais.* Recife, v.15.n.3, 1997, pp.125-140.

BOYER, C. *História da Matemática.* Tradução. Elza F. Gomide. Revisão Uta C. Merzbach. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 2009 (3ª edição)

CURI, E. e PIRES, C. M. C. Repensando a formação de professores de Matemática no Brasil. IN: *XII Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Actas, Vila Real, SIEM, 2001.

CURI, E. e PIRES, C. M. C. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. *Educação Matemática Pesquisa.* São Paulo, v.10, n.1, 2008, pp.151-189.

GITIRANA, V. CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S. e SPINILLO, A. *Repensando Multiplicação e Divisão. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* São Paulo: PROEM, 2014.

GROSSMAN, P. L.; WILSON, S. M.; SHULMAN, L. S. Profesores de Sustancia: El Conocimiento de la enseñanza. *Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado*: Granada, 2005. Disponível em http://www.ugr.es/~recfpro/Rev92.html>. Acesso em: 30 agosto de 2014.

MELLO, E. M. Análise de dificuldades de alunos do ensino fundamental com o uso do algoritmo da subtração. *Anais do SIPEMAT*, 2008. Disponível em: http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CD-ROM%202%20SIPEMAT/artigos/PO-20.pdf

MENDONÇA, M. C. D. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórico – estrutural: ou uma opção valiosa? *Revista Zetetiké*, Campinas, SP. V44, n.5, 1996, pp.55-76, jan./jun.

PIRES, C. M. C. *Educação Matemática: conversas com professores dos anos iniciais.* São Paulo: Zé-Zapt Editora, 2012.

QUEIROZ, S. e LINS, M. Aprendizagem de Matemática por Alunos Adolescentes na Modalidade Educação de Jovens e Adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. BOLEMA, Rio Claro (SP). V. 24, nº38, 2011, pp.75 a 96.

RAMOS, L. F. *Conversas sobre números, ações e operações. Uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos.* São Paulo: Ática, 2009.

RUIZ, E. R. e NASCIMENTO, R. A. Identificação e análise de erros cometidos por alunos de 5ª a 8ª série do 1º grau na resolução da subtração. In: *Tópicos Educacionais,* Recife, v. 11, n. ½, 1993.

SILVA, M. C. N. e BURIASCO, R. L. C. Análise da produção escrita em Matemática: algumas considerações. *Ciência & Educação,* v. 11, n. 3, 2005, p. 499-512.

SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review,* 57 (I), 1987, p. 1-22.

SHULMAN, L. S. Conocimiento y Ensenanza: Fundamentos de lanueva reforma. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado,* 9, 2005.

TELES, R. A. M, BELLEMAIN, P. M. B. e GITIRANA, V. A apropriação da escrita numérica no sistema de numeração decimal. In: GITIRANA, V.; TELES, R; BELLEMAIN, P.; CASTRO, A.; CAMPOS, I; LIIMA, P.; BELLEMAIN, F. (Orgs.). *Jogos com sucata na Educação Matemática.* Projeto Rede. Recife: NEMAT: Ed Universitária da UFPE, 2013.

TELES, R.A. M. Um estudo sobre algoritmo da subtração: um caso do zero!. In: X Encontro Capixaba de Educação Matemática. IN: *Anais do X Encontro Capixaba de Educação Matemática (ECEM).* Vitória/ ES: Instituto Federal do Espírito Santo. v. único, 2015. pp. 1-10.

TELES, R.A. M. Repetir, refletir ou omitir? O que dizem professores sobre erros de alunos no algoritmo da subtração. In: *Anais do VI*

Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Pirenópolis/GO: SBEM. v. único, 2015, pp. 1-12.

VERGNAUD, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986, pp. 75-90.

VIEIRA, F.; RIBEIRO, J; PESSÔA, K. *A escola é nossa.* Matemática. Vol 4. Editora Scipione. São Paulo, 2011.

PARTE 3

A TAREFA DE SARA E LAURA

Dividir R$ 3,30 para duas pessoas

por Rosinalda Aurora de Melo Teles

Essa história aconteceu em abril do ano de 2006, quando as primas Sara e Laura tinham, ambas, 8 anos de idade e estavam cursando a 3ª série (atualmente 2º ano do ensino fundamental). Elas receberam 3 reais e 30 centavos de gratificação por uma tarefa realizada para tia Rosa e precisavam dividir o montante entre as duas. Sara expõe de imediato a solução:

– Eita.... faz assim: dá um real de volta para tia. Aí cada uma fica com 1 real.
– E os 30 centavos? Perguntou Laura.
– A gente dá para Alice! (Alice é a irmã menor de Laura).

Esse diálogo ilustra a concepção de divisão do senso comum, na qual necessariamente dividir não precisa ser em partes iguais. Também instiga a discussão sobre o tratamento dado ao resto de uma divisão sob o ponto de vista das crianças, além de fortalecer a reflexão que virá nos próximos capítulos sobre dificuldades relacionadas à compreensão dos números racionais e das operações nesse domínio numérico.

Figura 1 - A dúvida de Sara e Laura

Fonte: https://www.numismaticatratofeito.com.br/8M5963Q2K--brasil-1real-2003

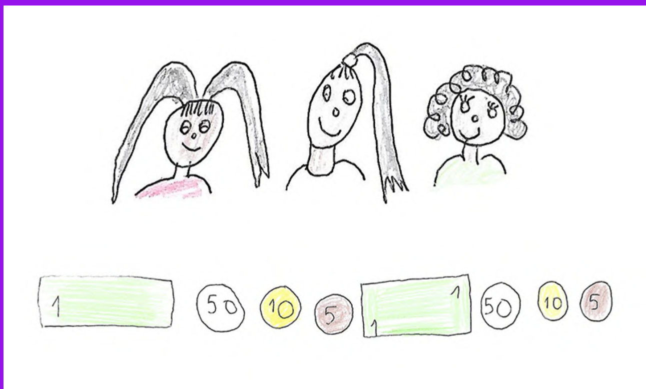
Tia Rosa, como boa educadora matemática, contra-argumenta:

– Ok! Mas se vocês quisessem também dividir este real (mostrando o real que as meninas haviam lhe devolvido)?
– Ah tia, cada uma fica com 50 centavos, diz Laura.
– Pronto tia, eu e Laura cada uma fica com 1 real e 50. Determina Sara.

Insiste a tia:

– E se a gente quisesse agora dividir os 30 centavos?
– Dá 15 centavos para cada uma! Interrompe a pessoa que ajuda nas tarefas domésticas da casa de Vovó Lia, que não era alfabetizada, colocando um ponto final em tão profícua discussão matemática.

Figura 2 - Conversa com Tia Rosa



O final desse episódio verídico também nos ajuda a pensar sobre como pessoas adultas, mesmo não alfabetizadas lidam bem com determinados aspectos da matemática, especialmente quando envolvem valores monetários, instigando-nos a pensar sobre como a matemática escolar poderia tirar mais proveito desse conhecimento social.

Passados 14 anos e na iminência de publicar essa crônica, Sara e Laura foram consultadas para saber se autorizavam a divulgação dessa história com os nomes reais das duas. Também perguntamos se lembravam do fato. Sara prontamente respondeu:

– Não lembro, não! Mas sei que a gente dividia o dinheiro assim mesmo: "Era igual para mim e Laura e, se sobrasse, a gente dava para Alice kkkkk (o kkkk são risos escritos no WhatsApp). Ela ainda completa:

– As moedas!

Ou seja, a lógica da divisão entre as primas não segue nenhum critério matemático, embora seja proporcional às idades de cada uma.

Brejão (PE), 2006.

CAPÍTULO 10

Pokémon e educação matemática: um estudo sob a perspectiva das estruturas aditivas e multiplicativas

Nadine Rodrigues da Silva, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Ana Beatriz Gomes Pimenta de Carvalho

Introdução

O universo Pokémon é uma obra ficcional de entretenimento criada em 1996 a partir de jogos eletrônicos pela empresa Nintendo. Após mais de vinte anos desde sua criação a franquia possui representações nos diversos meios midiáticos, como televisão, cinema, jogos eletrônicos, jogos de cartas, quadrinhos, dentre outros, o que proporciona um grande envolvimento de seus fãs. Uma característica inerente a esta franquia é que se apresentarem várias mídias de maneiras diferentes, permitindo que cada mídia interaja de maneira distinta com seus consumidores o que torna o universo Pokémon uma narrativa transmidiática. De acordo com Jenkins (2009) as narrativas transmidiáticas são consequências das convergências de mídias conceito e estão ancoradas em três fundamentos: a intertextualidade radical, a compreensão aditiva e a inteligência coletiva.

O universo Pokémon é composto por uma quantidade surpreendente de personagens, lugares e histórias, o que o torna possível de ser explorado de diversas maneiras. Neste sentido, realizamos uma pesquisa de mestrado (SILVA, 2018) cujo objetivo foi analisar a potencialidade educacional de um elemento midiático de uma obra transmidiática de entretenimento como o universo Pokémon no contexto das estruturas aditivas e multiplicativas. Para este estudo, escolhemos uma mídia dentre os diversos canais midiáticos que a franquia Pokémon se apresenta, o jogo de cartas Pokémon.

Neste artigo, nosso objetivo é apresentar uma das etapas desta pesquisa correspondente a um teste diagnóstico realizado a fim de descrever as contribuições do uso do jogo de cartas Pokémon na aprendizagem das estruturas aditivas e multiplicativas. Escolhemos trabalhar com esta mídia específica pois, na grande maioria das cartas do baralho Pokémon os comandos das jogadas, correspondentes aos ataques e defesas das personagens, envolvem situações matemáticas. Para finalizar sua jogada, o jogador precisa interpretá-las e resolvê-las, por meio da adição, subtração ou multiplicação, para obter o valor final de sua pontuação referente a cada rodada.

Para a coleta de dados, realizou-se um teste diagnóstico com estudantes do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual de Pernambuco, localizada na região metropolitana de Recife. Como embasamento teórico desta discussão utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais, sobre a qual discutiremos na próxima seção.

Teoria dos campos conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais foi criada pelo francês Gèrard Vergnaud e é de grande relevância para os estudos da Educação Matemática. Em sua teoria, Vergnaud (1986) define um campo conceitual como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações.

Para compreender os pontos chave desta teoria, é importante primeiramente compreender o que o teórico propõe como conceito e o que determina a sua construção. Vergnaud (1986) define que a construção de um conceito está fundamentada em três pilares, definidos por: *situações* (S) que dão significado ao conceito; *invariantes* (I) que correspondem ao conjunto de características (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e utilizados pelos sujeitos para analisar e dominar essas situações; *representações* (R) que correspondem ao conjunto de representações simbólicas que podem ser utilizadas para pontuar e representar esses invariantes e, deste modo, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles. Sendo assim, para compreender o desenvolvimento de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente.

No que diz respeito às situações que envolvem um campo conceitual, Vergnaud (1986) faz três considerações a serem destacadas. A primeira enfatiza que uma situação não evidencia todas as propriedades de um conceito. Isto significa que, se o professor espera que o estudante encontre todas as propriedades relevantes a um conceito, é necessário referenciar uma diversidade de classes de problemas. A segunda diz que quando um aluno se relaciona com um conceito apropria-se também de vários outros conceitos e consequentemente suas dificuldades envolvem a união destes conceitos. Finalmente, a terceira consideração ressalta que a formação de um conceito, em geral, demanda um longo período.

Na Matemática o saber forma-se a partir de situações a serem resolvidas. Portanto, para compreendermos um campo conceitual é importante entendermos primeiramente a definição de problema. Vergnaud (1986) define um problema como uma situação na qual se precisa descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, de hipóteses e de verificação, para produzir uma solução. Isto é, entende-se por problema situações que requerem solução. Neste sentido, é importante oferecer aos estudantes situações visando entender a significação do conceito por parte dos alunos, além de experimentar as competências e as concepções dos alunos.

Nesta perspectiva, o conhecimento matemático emerge a partir da resolução de problemas e perpassa pela ação do sujeito sobre a situação a qual almeja resolver. Portanto, é preciso que essa ação venha acompanhada também de uma reflexão, para que não se torne apenas uma competência adquirida (MAGINA, SANTANA, CAZORLA, 2018).

Outro elemento importante acerca da teoria dos campos conceituais refere-se às estratégias que o aluno precisa desenvolver para solucionar um problema. Para resolver um problema matemático, o indivíduo se utiliza de dois tipos de cálculo, o relacional e o numérico. O cálculo relacional corresponde à escolha adequada da operação que será a ferramenta para a resolução do problema, isto é, corresponde às relações estabelecidas para chegar ao melhor cálculo numérico para resolver um determinado problema matemático. Já o cálculo numérico corresponde à realização de procedimentos numéricos para a resolução de uma situação-problema.

A Teoria dos Campos Conceituais proporciona a compreensão das relações envolvidas entre o conceito matemático e sua compreensão. Como exemplo de campos conceituais na Matemática, destacam-se as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas. De acordo com Magina, Santos e Merlini (2010), para Vergnaud estes dois campos são os alicerces que sustentam os demais conceitos da Matemática.

Para discutirmos a relação entre Pokémon e Educação Matemática é importante refletirmos acerca dessas estruturas. Compreender as ideias centrais que envolvem as estruturas multiplicativas, assim como as estruturas aditivas, bem como reconhecer os tipos de problemas que envolvem as situações que correspondem a estes campos é de suma importância, visto que em alguns comandos do jogo de cartas é possível reconhecer alguns exemplos de situações-problema referentes a essas estruturas. Algumas cartas do jogo apresentam personagens cujos ataques e defesas abrangem situações matemáticas e para que o jogador consiga identificar sua pontuação ao final da jogada é necessário resolvê-las.

O jogo de cartas Pokémon e as estruturas aditivas e multiplicativas

De acordo com Vergnaud (1996), as estruturas aditivas compreendem o campo conceitual correspondente às situações que envolvem as operações de adição e/ou de subtração, ou ainda da combinação das duas. Estas operações fazem parte de um mesmo campo conceitual, pois são exemplos de conceitos que não podem ser estudados isoladamente. Já o campo conceitual das estruturas multiplicativas corresponde aos problemas de multiplicação e/ou divisão ou a combinação das duas. Assim como a adição e a subtração, estas duas operações não podem ser estudadas separadamente.

Em relação às estruturas multiplicativas, convergindo com as ideias de Vergnaud (1996) e Pessoa e Borba (2009), enfatizamos a importância do trabalho com situações-problema diversas, pois possibilitam novas aprendizagens aos estudantes com relação à significância do conceito. É claro que esta importância não se limita às estruturas multiplicativas, mas também envolve as estruturas aditivas, como também os conceitos referentes a outros campos conceituais da Matemática.

A respeito dos tipos de problemas aditivos, Magina e Campos (2004) destacam que as situações envolvendo as operações pertencentes a este campo conceitual podem ser classificadas como uma transformação ou como uma composição, sejam como problemas simples de relações parte e todo, problemas inversos, ou ainda como problemas comparativos, nos quais há uma relação entre duas partes, sejam como situações em que ambas as partes são conhecidas, pretendendo-se descobrir a relação entre as partes, sejam como situações em que se conhece uma das partes e a relação, desejando conhecer a outra parte.

Ainda a respeito dos problemas aditivos Magina, Santana, Carzola e Campos (2010), basearam-se em Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) e classificaram os problemas de caráter aditivo em três categorias. O Quadro 1, construído com base nas discussões das autoras, apresenta um esquema referente aos tipos de problemas aditivos.

Quadro 1 - Esquema dos tipos de problemas aditivos.

Composição	**Transformação**	**Comparação**
Problema simples: Ambas as partes iniciais conhecidas e parte final a descobrir. *Problema inverso:* Uma das partes iniciais e a parte final são conhecidas, e a outra parte inicial a descobrir.	*Problema simples*: Parte inicial e a transformação são conhecidas, a parte final a descobrir. *Problema inverso*: Parte final e transformação conhecidas, parte inicial a descobrir ou parte final e inicial desconhecidas e transformação a descobrir.	*Problema simples:* Parte inicial (referente) e relação conhecidas, parte final (referido) a descobrir. *Problema inverso:* Parte final (referido) e relação conhecidas, parte inicial (referente) a descobrir.

Fonte: Silva (2018, p.49).

A partir destas categorias, conclui-se que os problemas de adição e subtração podem se apresentar com níveis de complexidade diferentes, estes são chamados de extensões, enquanto os problemas mais simples são chamados de protótipos. Em consonância a esta classificação, proposta pelas autoras, descrevem e exemplificam os três tipos de problemas referentes às estruturas aditivas, contextualizando com o Universo Pokémon da seguinte forma:

1. Problema de composição – referem-se às situações nas quais duas partes se juntam para formar um todo, podendo a situação variar apresentando para a criança o total de uma das partes e perguntando sobre a outra parte.
   Exemplo: "Ash possui 4 Pokémon[1] do tipo Normal e 3 Pokémon do tipo Fogo. Quantos monstrinhos ele tem no total?"

2. Problema de transformação – correspondem àqueles que têm um estado inicial, uma transformação (positiva ou negativa) e um estado final.
   Exemplo: "Ash possuía 4 Pokémon. Em uma importante caçada, o garoto conseguiu capturar 3 espécies do tipo Terra. Quantos Pokémon Ash possui após a caçada?"

3. Problema de comparação – correspondem àqueles que apresentam uma relação estática entre duas partes.
   Exemplo: "Ash possui 10 Pokémon no total. Sabemos que ele tem 3 espécies a mais que sua amiga Misty. Quantos Pokémon ela tem?"

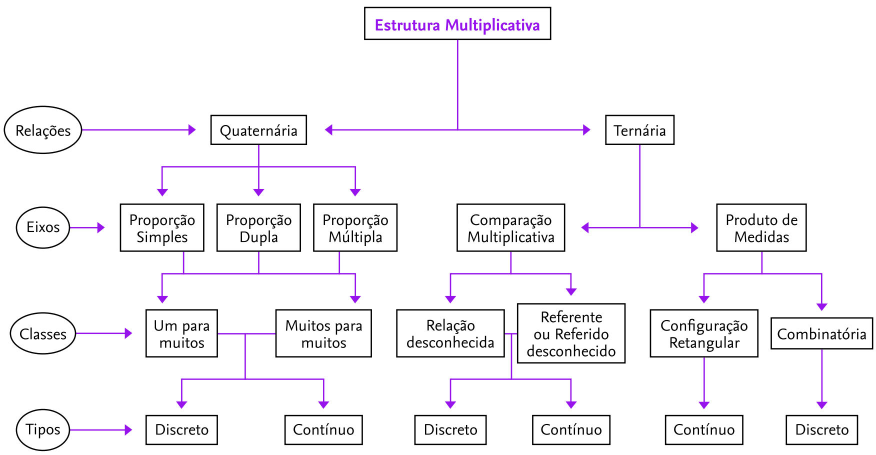
Em relação às estruturas multiplicativas, Magina, Santos e Merlini (2010) elaboraram um esquema referente às situações multiplicativas lineares. De acordo com os autores, há duas relações que abarcam este campo conceitual, as relações quaternárias e as relações ternárias.

As relações quaternárias estão divididas em três eixos, enquanto as ternárias são divididas em dois eixos, cada um deles é dividido em duas classes, que podem se apresentar de tipos diferentes. As relações quaternárias têm os eixos das proporções simples, duplas e múltiplas. Cada um destes eixos divide-se ainda em duas classes: a de correspondência um para muitos e a de correspondência muitos para muitos, que podem ser do tipo discreto ou contínuo. Nas relações

1 A palavra Pokémon não é colocada no plural, visto que é uma junção dos termos *pocket* e *monsters*, originários da língua inglesa.

ternárias têm-se os eixos de comparação multiplicativa e produto de medida. O eixo de comparação multiplicativa divide-se em duas classes: relação desconhecida e referente (ou referido) desconhecido, que podem ser do tipo discreto ou contínuo, enquanto que o eixo produto de medidas divide-se nas classes configuração retangular, que se apresenta no tipo contínuo, e combinatória, que se apresenta no tipo discreto (MAGINA, MERLINI, SANTANA, 2013). A Figura 1 representa o esquema elaborado pelas autoras referente à estrutura multiplicativa.

Figura 1 - Esquema do Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.



Fonte: Magina, Santos, Merlini (2016, p. 69)

As quaternárias correspondem às relações estabelecidas entre duas grandezas de natureza distinta, enquanto as relações ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza, que se compõem para formar um terceiro elemento.

Passaremos a descrever e exemplificar, contextualizando com o Universo Pokémon, que é o foco de nossa pesquisa, cada um dos eixos e suas referidas classes que compõem as relações ternárias e quaternárias, segundo Magina, Merlini e Santana (2013).

1. Proporção simples: Corresponde às relações entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo. A proporção simples pode ainda envolver uma proporção direta entre duas grandezas.
   Exemplo 1: Correspondência um para muitos: Para participar da Liga Pokémon Ash precisa vencer as batalhas em 8 ginásios, cada ginásio tem três treinadores. Quantos treinadores Ash terá que vencer no total?
   Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos: A cada cinco Pokébolas que o treinador compra na loja Pokémon, a loja oferece duas porções de cura de brinde. Se Broke comprar 15 Pokébolas, quantas porções ele ganhará?

2. Proporção dupla: Corresponde a um tipo particular de proporção simples. Na escola, esta relação é conhecida como Regra de três. Neste caso, há duas proporções simples compostas por três variáveis, sendo que duas delas se relacionam com a terceira, mas não entre si.
   Exemplo 1: Correspondência um para muitos: Uma enfermeira cura com sua máquina de cura 6 Pokémon em uma hora. Quantos Pokémon são curados por 4 enfermeiras em 3 horas?
   Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos: Um grupo de treinadores vai passar 28 dias num acampamento treinando seus 50 Pokémon. Eles precisam levar uma quantidade de poção de cura suficiente para suprir todos os Pokémon. Sabendo que a média de consumo de poção de cura por semana para 10 Pokémon é de 3 poções. Quantas poções de cura serão necessárias levar?

3. Proporção múltipla: Correspondem às relações de mais de duas grandezas relacionadas duas a duas.
   Exemplo 1: Correspondência um para muitos – Em um torneio Pokémon participam 16 treinadores. Cada treinador possui 6 Pokémon. Por sua vez, cada Pokémon possui 4 ataques. Quantos ataques poderão ser executados se todos os Pokémon de todos os treinadores forem utilizados durante o torneio?
   Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – Ash e mais cinco amigos decidiram passar 15 dias hospedados na cidade de Viridiana. O custo de duas diárias é de 90 Pokédolares por pessoa. Quantos Pokédolares gastou o grupo?

4. Comparação multiplicativa: Correspondem às comparações entre duas grandezas de mesma natureza.
   Exemplo 1: Relação desconhecida – Em uma caçada Ash capturou 12 Pokémon. Sua amiga Misty capturou 3 Pokémon. Quantas vezes a mais a quantidade de Pokémon do Ash é maior do que a quantidade da sua amiga Misty?
   Exemplo 2: Referido desconhecido – A resistência de ataque do Pokémon Ônix é 5 vezes maior que a do Pokémon Geodude que tem 30 pontos de resistência. Qual a resistência do Pokémon Ônix?

5. Produto de medidas: Essa classe é constituída por situações que envolvem a ideia de configuração retangular, em quantidades contínuas e situações que envolvem a ideia de combinatória, em quantidades discretas.
   Exemplo 1: Configuração retangular – Um campo de batalha Pokémon no formato retangular tem 10m de largura e 15m de comprimento. Qual a área deste campo de batalha?
   Exemplo 2: Combinatória – Em um torneio Pokémon, há seis espécies do tipo Fogo e 4 espécies do tipo Elétrico. Cada Pokémon Fogo deve batalhar com cada um dos Pokémon do tipo Elétrico

e cada Pokémon do tipo Elétrico deve batalhar com cada Pokémon do tipo Fogo. Quantas batalhas diferentes são possíveis de ocorrer neste torneio?

No jogo de cartas Pokémon é possível reconhecer algumas situações-problema, as quais o jogador precisa solucionar para completar sua jogada e verificar a pontuação ao final da rodada. De acordo com Magina, Santana e Cazorla (2018), o sujeito deve interagir com uma diversidade de situações. Sendo assim, quanto maior o número de situações diferentes que foram experienciadas pelo sujeito, mais amplo o significado deste conceito. É neste sentido que a experiência com o jogo de cartas Pokémon merece destaque, visto que ao jogá-lo o aluno está lidando com diversas situações favorecendo, portanto, a compreensão de um conceito.

Coleta de dados e teste diagnóstico

Dentre as etapas do percurso metodológico da pesquisa de mestrado a que trazemos para a discussão neste artigo é a etapa referente a um teste diagnóstico que foi realizado com estudantes do 6º ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual de Pernambuco. Para a composição do teste elaboramos questões referentes ao conhecimento das estruturas aditivas e multiplicativas. A justificativa para a escolha destes dois campos conceituais baseia-se no fato de que os comandos das jogadas do baralho Pokémon correspondem a situações matemáticas que elucida tanto o os problemas do tipo aditivo quanto multiplicativo. Destacamos que as questões do teste, no formato de situações-problema, foram contextualizadas a partir do Universo Pokémon.

O objetivo deste teste foi analisar a relação dos estudantes com estes tipos de problemas e identificar dificuldades com as possíveis estratégias para resolução dos mesmos, sejam referentes ao cálculo relacional, sejam referentes ao cálculo numérico. É importante destacar que os tipos de problemas que compunham o teste foram os mesmo que o jogador poderia encontrar durante uma partida.

Participaram desta coleta 33 estudantes de duas turmas, uma do turno da manhã e a outra do turno da tarde. Em cada turma o teste foi aplicado simultaneamente com todos os estudantes presentes e a professora de matemática da turma estava presente durante a aplicação apenas como observadora. A aplicação durou 50 minutos que é o tempo correspondente a uma aula.

O teste diagnóstico continha oito questões, destas, seis correspondiam aos problemas aditivos e dois aos problemas multiplicativos. Nos problemas aditivos foram abordadas situações de acréscimo e decréscimo envolvendo transformação, enquanto que os problemas multiplicativos apresentaram situações de proporção simples. O Quadro 2 apresenta cada uma das questões do teste e a situação matemática correspondente a cada questão.

Quadro 2 - Teste diagnóstico e situações matemáticas

Questão do teste	**Situação matemática correspondente**
Um Pokémon com certa quantidade de pontos de vida tomou uma poção que o deixou com 33 pontos a mais. Se o Pokémon ficou com 78 pontos de vida, quantos pontos ele tinha antes de tomar a poção?	Transformação – Situação de acréscimo com quantidade final e transformação conhecidas e quantidade inicial a descobrir
Venussauro possuía certa quantidade de pontos de vida no início de uma batalha Pokémon. Durante a batalha sofreu um ataque que lhe causou 25 pontos de danos. Sabendo que o Venussauro terminou a batalha com 30 pontos de vida, quantos pontos de vida ele tinha inicialmente?	Transformação – Situação de decréscimo com quantidade final e transformação conhecidas e quantidade inicial a descobrir

Questão do teste	Situação matemática correspondente
O Charizard recebeu uma poção de cura quando estava com 65 pontos de vida, sabendo que a poção de cura aumenta 30 pontos de vida, com quantos pontos de vida ele ficou após tomar a poção?	Transformação – Situação de acréscimo com quantidade inicial e transformação conhecidas e quantidade final a descobrir
O Bulbassauro tinha 93 pontos de vida. Levou um forte ataque que causava 40 pontos de dano. Com quantos pontos de vida ele ficou após o ataque?	Transformação – Situação de decréscimo com quantidade inicial e transformação conhecidas e quantidade final a descobrir
Um Pokémon tinha 65 pontos de vida. No meio da batalha ele sofreu um ataque muito forte, deixando este Pokémon com 12 pontos de vida. Quanto valia o ataque que ele sofreu?	Transformação – Situação de acréscimo com quantidade inicial e final conhecidas e transformação a descobrir
O Pikachu estava com 24 pontos de vida. Seu treinador lhe deu uma poção de cura fazendo com que o Pikachu ficasse com 75 pontos de vida. Quantos pontos valia esta poção de cura?	Transformação – Situação de decréscimo com quantidade inicial e final conhecidas e transformação a descobrir
A pontuação de um Pokémon aumenta 17 pontos para cada energia que ele tiver. Se o Pokémon possui 3 energias, em quantos pontos sua vida aumentará?	Situação envolvendo uma proporção simples
O ataque de um Pokémon fica 21 vezes mais forte para cada energia que ele tiver. Se este Pokémon possuir 4 energias, quanto será o ataque dele?	Situação envolvendo uma proporção simples

Fonte: Silva (2018, p 61).

As questões apresentadas no teste diagnóstico foram baseadas nos tipos de problemas proposto por Magina, Santos & Merlini (2016) para estruturas multiplicativas e Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001), citada por Magina, Santos e Merlini (2010), para as estruturas aditivas, todos baseados nas classificações de Vergnaud. Com os resultados deste teste foi realizada uma categorização do desempenho dos alunos.

Resultados e discussões

Os resultados do teste permitiram uma análise pertinente do nível de desempenho dos estudantes por meio de categorias que foram criadas a partir de suas respostas. As categorias de análise criadas foram: muito baixo desempenho (pertencia a esta categoria o aluno que acertou 0, 1, 2 ou 3 questões), baixo desempenho (pertencia a esta categoria o aluno que acertou quatro questões), desempenho médio (pertencia a esta categoria o aluno que acertou cinco questões), desempenho alto (pertencia a esta categoria o aluno que acertou 6 ou 7 questões) e desempenho excelente (pertencia a esta categoria o aluno que acertou 8 questões).

Vale ressaltar que os intervalos numéricos entre as categorias não foram equivalentes, pois utilizamos como parâmetro a nota 6,0 que é a que as escolas da rede estadual utilizam como média para os alunos. Desta forma, ao trabalharmos com o total de oito questões consideramos que, em um contexto escolar, cada uma valeria 1,25 pontos. Portanto, o estudante que acertaria até três questões estaria muito abaixo da média, o que acertaria quatro questões estaria um pouco abaixo da média, o que acertaria cinco questões estaria um pouco acima da média, o que acertaria seis ou sete questões estaria acima da média, e o que acertaria as oito questões estaria estritamente acima da média, com valor máximo.

De acordo com nossa categorização em relação ao nível de desempenho dos alunos, em nosso teste diagnóstico temos que do total de 33 estudantes participantes, sete apresentaram desempenho excelente, acertando todas as questões do teste, oito apresentaram alto desempenho, quatro apresentaram médio desempenho, seis apresentaram baixo desempenho, oito apresentaram muito baixo desempenho como nos mostra a Tabela 1.

Tabela 1 - Quantidade de alunos por nível de desempenho

Nível de desempenho	Quantidade de estudantes
Muito baixo	8
Baixo	6
Médio	4
Alto	8
Excelente	7

Fonte: elaboração das autoras.

Com relação aos erros cometidos pelos estudantes, estabelecemos duas categorias: erros de cálculo relacional e erros de cálculo numérico. A Tabela 2 apresenta a quantidade de erros, sejam de cálculos relacionais ou numéricos, e a quantidade de questões deixadas em branco pelos alunos, de acordo com o nível de desempenho.

Tabela 2 - Nível de desempenho X Tipo de erros

Nível de desempenho	Quantidade de erros de cálculo relacional	Quantidade de erros de cálculo numérico	Quantidade de questões em branco
Muito baixo	20	5	20
Baixo	13	2	5
Médio	7	3	1
Alto	8	2	2
Excelente	0	0	0

Fonte: Silva (2018, p.77).

Entre os testes dos oitos estudantes classificados como de muito baixo desempenho tivemos 20 erros de cálculo relacional, cinco erros de cálculo numérico e 20 questões em branco. As questões mais deixadas em branco pelos sujeitos pertencentes a este nível de desempenho foram as três últimas, as quais se referiam a um problema de transformação, com situação de decréscimo com quantidade inicial e final conhecida e transformação a descobrir e dois problemas de proporção simples. Um dos estudantes não respondeu a nenhuma das oito questões apresentadas no teste.

Estes dados mostram que os estudantes desta categoria de desempenho apresentam maior dificuldade no que diz respeito ao cálculo relacional e isto se evidencia nos problemas de proporção simples. Isto significa que os estudantes com desempenho muito baixo apresentam dificuldade no reconhecimento da operação mais adequada para resolver uma situação matemática referente às estruturas multiplicativas. Os estudantes que deixaram este tipo de problema em branco provavelmente não conseguiram refletir sobre o problema de modo que pudessem identificar qual tipo de operação deveria ser utilizada para resolvê-lo. Suas dificuldades podem estar associadas à transformação da linguagem escrita para a linguagem matemática.

Nos testes dos seis estudantes categorizados com baixo desempenho, identificamos treze erros de cálculo relacional, dois de cálculo numérico e cinco questões em branco. Assim como os sujeitos categorizado como de muito baixo desempenho, a maior parte dos erros dos estudantes pertencentes a esta categoria está nas questões que dizem respeito à transformação e proporção simples. O erro de cálculo relacional mais frequente foi na segunda questão do teste, que corresponde a um problema de transformação simples com situação de decréscimo com quantidade final e transformação conhecidas e quantidade inicial a descobrir. Os estudantes que cometeram erro de cálculo relacional neste problema efetuaram a subtração 30 – 25 = 5.

No entanto, o cálculo correto para solucionar esta questão seria a adição 30 + 25 = 55. Destacamos que em todos os casos, a maior quantidade de erros é no cálculo relacional. Isto indica a dificuldade de grande parte dos estudantes em interpretar o que o problema propõe.

Nos testes dos estudantes considerados de médio desempenho identificamos sete erros de cálculo relacional, três de cálculo numérico e uma questão em branco. Isto significa que os sujeitos pertencentes a esta categoria, apresentam mais dificuldades em identificar a operação correta para resolver o problema do que ao efetuar o cálculo para solucioná-lo. Grande parte dos erros relacionais está na sétima questão, um problema de transformação que envolve uma situação de decréscimo com quantidade inicial e final conhecidas e transformação a descobrir, o que é considerado um problema complexo por estudos anteriores (PESSOA, 2004; VERGNAUD, 1986). Com respeito ao cálculo numérico, alguns erros apareceram nos problemas de transformação simples e outros nos problemas de proporção simples.

Os resultados dos testes dos estudantes cujo nível de desempenho foi considerado alto, de acordo com a nossa categorização, apresentaram oito erros de cálculo relacional, dois de cálculo numérico e duas questões em branco. O erro de cálculo relacional desta categoria foi mais frequente nas duas últimas questões. Tais questões correspondiam a problemas de proporção simples.

Os estudantes classificados como de excelente desempenho responderam corretamente todos os problemas propostos no teste. Isto pode significar que estes alunos desenvolvem muito bem os cálculos relacionais e numéricos no que diz respeito aos problemas aditivos de transformação e os problemas multiplicativos de proporção simples. Estes estudantes conseguiram identificar corretamente qual cálculo iriam utilizar para solucionar cada situação proposta, além de armar e efetuar corretamente as contas seja de adição, de subtração ou de multiplicação.

Ao analisarmos os testes de todos os sujeitos da pesquisa foi possível fazer ainda um levantamento relacionando o tipo de erro cometido e o tipo de problema de cada questão do teste. A Tabela 3 apresenta estas informações mais detalhadamente. É importante enfatizar que as discussões e reflexões a partir desta tabela são a respeito da relação tipo de problema e tipo de erro, e não consideramos o nível de desempenho como na análise da tabela anterior.

Tabela 3 - Tipos de problemas x Tipos de erros

Tipo de problema	Erros de cálculo relacional	Erros de cálculo numérico	Questões em branco
Situação de acréscimo com quantidade final e transformação conhecida e quantidade inicial a descobrir.	5	0	1
Situação de decréscimo com quantidade final e transformação conhecida e quantidade inicial a descobrir.	8	3	2
Situação de acréscimo com quantidade inicial e transformação conhecida e quantidade final a descobrir.	1	0	1
Situação de decréscimo com quantidade inicial e transformação conhecida e quantidade final a descobrir.	2	2	2
Situação de acréscimo com quantidade inicial e final conhecida e transformação a descobrir.	3	2	3
Situação de decréscimo com quantidade inicial e final conhecida e transformação a descobrir.	14	2	4
Problema de proporção simples.	14	1	8
Problema de proporção simples.	7	4	8

Fonte: Silva (2018, p.79).

De acordo com a Tabela 3, a primeira questão do teste referente a um problema de transformação simples, envolvendo uma situação de acréscimo com quantidade final e transformação conhecida e quantidade inicial a descobrir apresentou cinco erros de cálculo relacional e nenhum erro de cálculo numérico. Além disso, apenas um dos estudantes deixou-a em branco. Isto pode significar que os estudantes apresentaram pouca dificuldade nesta questão.

A segunda questão do teste referia-se a um problema de transformação com situação de decréscimo com quantidade final e transformação conhecida e quantidade inicial a descobrir. A Tabela 3 nos indica que esta questão apresentou oito erros de cálculo relacional, três erros de cálculo numérico e foi deixada em branco por três estudantes.

Nesta questão a maior parte dos erros encontrados foi de cálculo relacional. Ao tentar resolver o problema, os estudantes utilizaram uma operação matemática que não era adequada para solucioná-lo, porém, o cálculo numérico da operação escolhida foi efetuado corretamente. Isto pode significar que estes estudantes não conseguiram compreender corretamente o tipo de problema de transformação simples que a questão apresentava, mas podem ter facilidade em manipular as operações matemáticas de adição e subtração.

A terceira questão do teste correspondia a um problema de transformação simples com situação de acréscimo com quantidade inicial e transformação conhecidas e quantidade final a descobrir. Nesta questão, encontramos um erro de cálculo relacional, nenhum erro de cálculo numérico e apenas um dos estudantes deixou esta questão em branco.

Com relação à quarta questão do teste, que correspondia à situação de decréscimo com quantidade inicial e transformação conhecidas e quantidade final a descobrir, tivemos dois erros de cálculo relacional, dois erros de cálculo numérico e dois estudantes deixaram esta questão em branco, como mostrado na Tabela 3.

A quinta questão correspondia a um problema de transformação simples com situação de acréscimo com quantidade inicial e final conhecida e transformação a descobrir. Tivemos três erros de cálculo relacional e dois erros de cálculo numérico. Três estudantes deixaram este problema em branco.

Com respeito à sexta questão, correspondente a um problema aditivo de transformação simples com situação de decréscimo com quantidade inicial e final conhecidas e transformação a descobrir, tivemos quatro erros de cálculo relacional, dois erros de cálculo numérico e foi deixada em branco por quatorze estudantes.

As questões sete e oito apresentavam problemas multiplicativos do tipo proporção simples. De acordo com a Tabela 2, a sétima questão nos permitiu identificar quatorze erros de cálculo relacional, um erro de cálculo numérico e oito do total de alunos deixaram esta questão em branco. Já na oitava questão, houve sete erros de cálculo relacional, quatro erros de cálculo numérico e foi deixada em branco por oito estudantes.

A partir destes dados é possível concluir que os alunos apresentam mais dificuldade com os problemas de proporção simples do que com os problemas de transformação simples. Com relação às questões em branco, podemos supor que os alunos não responderam estas questões porque não compreenderam o problema proposto ou compreenderam o problema, mas não conseguiram identificar qual operação adequada para resolver tal problema.

Os dados expostos na Tabela 3 nos mostram quantas vezes cada questão foi deixada em branco. O aluno simplesmente não respondeu e isto pode ter variados motivos, inclusive porque ele não tinha interesse em solucionar os problemas propostos. Destacamos que um dos alunos participantes deixou todas as questões em branco, contudo, não podemos afirmar que este aluno não compreendeu nenhum dos problemas do teste.

Ainda de acordo com a Tabela 3, a maior parte dos acertos foi nas questões que envolviam problemas aditivos, cujas ferramentas de resolução eram as operações de adição ou subtração. Com relação aos erros, destacamos que a maior parte deles foi nas questões envolvendo problemas multiplicativos cuja principal ferramenta de resolução é a operação multiplicação. Destacamos que estes problemas também poderiam ser respondidos através da operação de adição, no entanto, esta estratégia não foi utilizada por nenhum dos alunos participantes do teste.

Considerações finais

De maneira geral, os resultados do teste diagnóstico nos mostram que os sujeitos desta pesquisa apresentaram maiores dificuldades com respeito ao campo conceitual das estruturas multiplicativas do que com o campo das estruturas aditivas.

A respeito dos tipos de problemas aditivos, presentes nas seis primeiras questões do teste, é possível concluir que os estudantes têm grande dificuldade com relação à interpretação deste tipo de situação, principalmente no que diz respeito à identificação da operação adequada para encontrar a solução do problema. As maiores dificuldades são com problemas do tipo transformação simples. Em relação aos tipos de problemas multiplicativos, correspondentes às duas últimas questões do teste, os resultados nos indicam que as dificuldades dos sujeitos aparecem em evidência com os problemas de proporção simples.

A partir deste estudo acreditamos que o trabalho com o jogo de cartas Pokémon poderá ajudar no processo de interpretação e resolução de problemas matemáticos, sejam aditivos ou multiplicativos. Ao jogá-lo o estudante pode apropriar-se das operações matemáticas e conseguir resolver os problemas ao lidar com cálculo numérico e, principalmente com cálculo relacional. Isto se deve ao fato de que para que o jogador identifique sua pontuação ao final da rodada é necessário realizar operações de adição e multiplicação.

É neste viés nossa pesquisa pode trazer contribuições, visto que ao estimular os estudantes a solucionarem problemas matemáticos de maneira lúdica torna a compreensão do conceito mais simples, o que pode favorecer a aprendizagem destes estudantes.

Referências

JENKINS, H. *Cultura da convergência.* 2. Ed. São Paulo: Aleph, 2009.

MAGINA, S; CAMPOS, T; NUNES, T; GITIRANA, V. *Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* PROEM, São Paulo, 2001.

MAGINA, S; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos da resolução de problemas aditivos: Um estudo diagnóstico. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 2004, v. 6, n. 1, p. 53-71.

MAGINA, S; SANTOS, A; MERLINI, V. Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM TEIA)*, v.1, p.1-23. 2010.

MAGINA, S; SANTANA, E; CARZOLA, I; CAMPOS, T. As Estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. In: *ZETETIKÉ* – Cempem – FE – Unicamp – v. 18 n. 34 – jul/dez – 2010.

MAGINA S; MERLINI, V; SANTANA, E. Situações-problema das estruturas multiplicativas sob a ótima do professor que ensina matemática. *Anais do VII CIBEM*. Montevidéu – Uruguai. 2013.

MAGINA, S; SANTOS, A; MERLINI, V. A estrutura multiplicativa à luz da teoria dos campos conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. Castro Filho, Jose; Barreto, Marcília; Barguil, Paulo; Maia, Dennys; Pinheiro Joserlene (Eds.) *Matemática, Cultura e Tecnologia: perspectivas internacionais.* Curitiba: CRV, p. 65-82, 2016.

MAGINA, S; SANTANA, E; CAZORLA, I. As Estruturas Multiplicativas e a formação de professores que ensinam Matemática na Bahia: um projeto de larga escala. *Com a palavra o professor.* Vitória da Conquista - BA, v.3, n. 7, set/dez 2018.

PESSOA, C. Interação social: Uma análise de seu papel na superação de dificuldades em resolução de problemas aditivos. In: *Infocus*– Faculdade Salesiana do Nordeste – ano 2, n 04. Março 2004.

PESSOA, C. BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. In : *ZETETIKÉ*– Cempem – FE – Unicamp – v. 17, n. 31 – jan/jun – 2009.

SANTOS, A; MAGINA, S; MERLINI, V. O campo conceitual das estruturas multiplicativas: análise comparativa entre prognostico dos professores e o desempenho dos estudantes. *Anais do VII CIBEM*. Montevidéu – Uruguai. 2013.

SILVA, N. *O uso do jogo de cartas do universo transmidiático Pokémon sob a perspectiva das estruturas aditivas e multiplicativas.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). 2018. Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. *Didáctica das matemáticas.* Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155-191.

CAPÍTULO 11

A divisão e seus algoritmos: uma análise da interpretação de professores sobre os erros de estudantes

Jailson Cavalcante de Araújo, José André Bezerra da Cruz, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Desenvolvemos a presente pesquisa explorando aspectos relacionados à divisão por verificarmos na prática docente que alguns estudantes chegam nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio apresentando dificuldades para a resolução de cálculos numéricos, seja mobilizando algoritmos pessoais ou convencionais, especialmente ao realizar divisões. Muitas vezes esse quadro se estende até mesmo ao ensino superior, uma vez que essas aprendizagens não vêm sendo garantidas da forma que são previstas nos documentos de orientação curricular. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) aponta nas expectativas para os anos iniciais do ensino fundamental que, ao final dessa etapa, os estudantes possam resolver "problemas com números naturais e decimais envolvendo diferentes significados das operações", bem como "tenham desenvolvido diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e por cálculo mental" (p. 270). Nas habilidades, é destacado que no terceiro ano do ensino fundamental devem ser incluídos os “problemas de multiplicação (parcelas iguais ou configuração retangular) e no quarto e no quinto anos “é importante a inclusão de problemas envolvendo a noção de proporcionalidade” (BRASIL, 2017, p. 270). Vale mencionar que a divisão deve ser explicitamente trabalhada nesses dois últimos anos e que o ensino e a aprendizagem das operações devem se apoiar em situações de interesse dos estudantes.

Em relação à divisão, a primeira habilidade é evidenciada no 3° ano do ensino fundamental, sendo destacada a importância de “resolver e elaborar problemas de divisão em partes iguais (por 2, 3, 4, 5 e 10), com resto e sem resto, com o suporte de imagem ou material manipulável, utilizando estratégias e registros pessoais, incluindo as ideias de metade, terça parte e quarta parte”; para o 4° ano “resolver e elaborar problemas de divisão (com resto e sem resto), envolvendo os significados de partição e de medida, utilizando estratégias diversas, entre elas o cálculo por estimativa, o cálculo mental e podendo incluir o cálculo por algoritmos”; e para o 5° ano “resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e decimais (com multiplicador e divisor natural)” (BRASIL, 2017, p. 277). As estratégias previstas para esta etapa são semelhantes às anteriores.

Optamos por trazer o que é preconizado na BNCC para os anos iniciais para enfatizar que o conteúdo em estudo é visto desde os primeiros anos de escolaridade e, mesmo assim, verificamos em sala de aula estudantes com dificuldades em resolver tarefas que envolvam a divisão.

Vale salientar que no presente estudo, ao utilizarmos o termo algoritmo, concordamos com Usiskinj (1998) ao apontar que um algoritmo pode ser considerado como um procedimento ou sequência de procedimentos, com um número finito de passos, destinado a executar uma dada tarefa que se deseja realizar. Dentre os vários algoritmos utilizados na divisão, utilizaremos o americano, o euclidiano longo e curto, e um procedimento pessoal, os quais serão brevemente descritos a seguir e aprofundados na seção seguinte.

O algoritmo americano é também conhecido como "método de divisão por estimativas" ou "método das subtrações sucessivas". O algoritmo euclidiano é o mais utilizado na sala de aula pelos professores, tendo o processo longo e o processo breve. O primeiro tipo é aquele em que a subtração é indicada no algoritmo. Já no processo breve só é representado o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor.

Diante do exposto, nossa questão de pesquisa é: como professores dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio interpretam erros de estudantes no processo de divisão utilizando os algoritmos americano, euclidiano longo e curto, e um procedimento pessoal? Acreditamos que a compreensão das interpretações de professores de matemática sobre os erros e estratégias utilizadas pelos estudantes pode fornecer informações importantes em relação ao ensino e à aprendizagem da divisão nas salas de aula, abrindo caminhos para elaboração de sequências didáticas e formações na tentativa de amenizar as possíveis dificuldades verificadas.

No intuito de conseguir respostas sobre essa questão de pesquisa, destacamos como objetivo[1] geral entender como professores dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio interpretam os erros de estudantes no processo de divisão utilizando os algoritmos americano, euclidiano longo e curto, e um procedimento pessoal. De forma mais específica, identificar as percepções dos professores em relação aos diversos procedimentos utilizados por estudantes ao resolverem

1 Uma outra análise dos dados discutidos no presente texto foi publicada no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática – EPEM, no ano 2017.

problemas de divisão e analisar as justificativas dos professores para os erros cometidos pelos estudantes.

No decorrer deste artigo, fruto de um trabalho de conclusão da disciplina Números e Operações, ministrada pelas professoras Cristiane Pessoa e Rosinalda Teles no EDUMATEC, apresentamos o referencial teórico adotado, a metodologia, a análise dos resultados e as referências que serviram de suporte para esta pesquisa.

Fundamentação teórica

Iniciamos com um percurso, ainda que breve, da parte histórica do conteúdo da divisão, em especial dos algoritmos utilizados por diversas gerações. Boyer e Merzbach (2012) apontam que na Índia as operações de adição e multiplicação eram realizadas de modo muito parecido ao que utilizamos nos dias atuais, só que tudo indica que os indianos parecem ter preferido escrever os números com unidades menores à esquerda. Dessa maneira, trabalhavam da esquerda para direita e utilizavam para isso pequenas lousas com tinta removível branca ou uma tábua coberta de areia ou mesmo farinha.

Em relação à operação de divisão, Boyer (1974) evidencia que ela era realizada no Egito por meio de sucessivas "duplicações", isso fundamentado no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências. O ganho desse processo é evidenciado por Eves (1995, p. 73) ao afirmar que "o processo egípcio de (multiplicação e divisão) não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda tanto ao ábaco que pendurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois".

Salvador (2012), em seu livro denominado "Dividindo histórias e opiniões: compartilhando e polemizando a operação de divisão", traz um exemplo desse método, conforme mostramos abaixo.

Figura 1 - Divisão pelo método das "duplicações"

Quero dividir 1311 por 69. Dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos 138 (69 x 2), depois 276 (138 x 2), a seguir 552 (276 x 2) e, finalmente, 1104 (552 x 2). Sabemos que o dobro de 1104 ultrapassa 1311.

Temos 1104 + 138 + 69 = 1311. Então, como 1104 é 16 vezes o 69 e 138 é duas vezes, o quociente será 16 + 2 + 1 = 19.

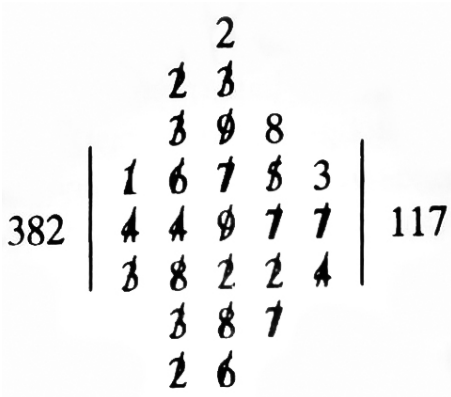
Fonte: Salvador (2012, p. 8).

Outro método de divisão utilizado na história da matemática era o *método do galeão*, no qual Boyer (2003), dialogando sobre o tema aponta que:

> Os árabes (e através deles os europeus mais tarde) parecem ter adotado a maior parte de seus métodos aritméticos da Índia, e por isso é provável que o esquema de divisão conhecido como "método de riscar" ou "método do galeão" (por sua semelhança com um navio) também venha da Índia. (BOYER, 2003, p. 148).

Tendo em vista ilustrar esse método, Boyer (2003) indica a seguinte divisão: suponhamos que se queira dividir 44.977 por 382. A figura abaixo mostra essa operação pelo método do galeão.

Figura 2 - Divisão pelo método do galeão



Fonte: Boyer (2003, p. 148)

Com vista a compreender tal método, Salvador (2012) explicita as seguintes etapas para a divisão de 44.977 por 382, que estão elencadas a seguir:

I - Escreva o divisor à esquerda do dividendo, como mostra abaixo. Obtenha, de maneira habitual, o primeiro algarismo do quociente (449: 382), que é 1, e escreva-o à direita do dividendo.

382 | 44977 | 1

II – Escreva o produto de 1 x 382, que é 382, abaixo de 449. Depois faça mentalmente 4 – 3 = 1. Risque o 4 e o 3 e escreva 1 acima do primeiro 4.

Como não podemos subtrair 8 de 4, agrupe o 1, que escreveu acima, com o 4 e faça mentalmente 14 – 8 = 6.
Risque o 1, e o 4 e o 8 e escreva 6 acima do segundo 4. Faça mentalmente 9 – 2 = 7. Risque o 9 e o 2 e escreva 7 acima do 9. Dessa maneira, o esquema fica o seguinte:

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & \cancel{1}67 & \\
382 & \cancel{4}\cancel{4}\cancel{0}77 & 1 \\
 & \cancel{3}\cancel{8}\cancel{2} &
\end{array}
$$

III – O dividendo resultante da etapa II é 6777, que são os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna central. Obtenha o próximo algarismo do quociente (677 : 382), que é 1.

Escreva o produto de 1 x 382, que é o próprio 382, colocando o 3 abaixo do 8, o 8 abaixo do 2 e o 2 abaixo do 7.

Faça mentalmente 6 – 3 = 3. Risque o 6, o 3 e escreva 3 acima do 6.

Como não podemos subtrair 8 de 7, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e realize mentalmente 17 – 8 = 9. Risque o 7 e o 8 e escreva 9 acima do 7.

Faça mentalmente 7 – 2 = 5. Risque o 7 e o 2 e escreva 5 acima do 7.

$$
\begin{array}{c|c|c}
 & 2 & \\
 & \cancel{3}9 & \\
 & \cancel{1}\cancel{6}\cancel{7}5 & \\
382 & \cancel{4}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{7}7 & 11 \\
 & \cancel{3}\cancel{8}\cancel{2}\cancel{2} & \\
 & \cancel{3}\cancel{8} &
\end{array}
$$

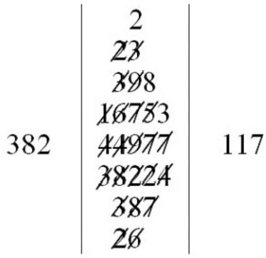
IV – O dividendo resultante da etapa III é o número 2957, que é formado pelos os algarismos não riscados, lidos de cima para baixo, na coluna central. Dessa maneira, obtenha o próximo algarismo do quociente (2957 : 382), que é 7.

Escreva o produto de 7 x 382, que é igual 2674, colocando o 2 abaixo do 3, o 6 abaixo do 8, o 7 abaixo do 2 e o 4 abaixo do 7.

Faça mentalmente 2 – 2 = 0. Risque os dois números 2. Novamente faça mentalmente 9 – 6 = 3. Risque o 9 e o 6 e escreva o 3 acima do 9.

Como não podemos subtrair 7 de 5, risque o 3 e escreva 2 acima do 3 e realize mentalmente 15 – 7 = 8. Risque o 5 e o 7 e escreva 8 acima do 5.

Faça mentalmente 7 – 4 = 3. Risque o 7 e o 4 escreva 3 acima do 7.



Assim chegamos ao quociente 117 e o resto 283.

Dessa maneira, percebe-se também que no método do galeão a posição em uma dada coluna é significativa, o que não ocorre com a posição em uma determinada linha.

De acordo com o exposto, percebe-se que durante a história da matemática diferentes civilizações construíram procedimentos (algoritmos), com vista a encontrar soluções para os problemas que surgiam em sua época. Todavia, com o passar dos tempos esses procedimentos deram espaço para outros que são mais utilizados atualmente no ambiente escolar, como o algoritmo americano e o algoritmo euclidiano longo e curto.

Para Souza (2010), o algoritmo americano parte basicamente da ideia que as crianças fazem quando repartem igualmente dados objetos, isto é, quando vão repartindo um a um, dois a dois, três a três até que não haja mais objetos para serem divididos, ou até que se perceba que não será mais possível repartir igualmente. Mesmo que no início os cálculos se tornem mais longos e demorados, Nhoncance (2006) aponta que tal processo permite que os estudantes determinem o quociente e o resto da divisão com total compreensão, uma vez que ao obterem êxito, eles fazem estimativas com aproximações maiores, vindo a atingir o resultado desejado de forma mais rápida, e assim eliminar etapas do processo. Vejamos, na figura a seguir, dois exemplos de diferentes estimativas realizadas na divisão de 275 por 5.

Figura 3 - Algoritmos pelo método americano ou método das estimativas

275	5
-100	20
175	+20
-100	10
75	5
-50	55
25	
-25	
00	

275	5
-250	50
025	+ 5
-25	55
00	

Fonte: elaboração dos autores

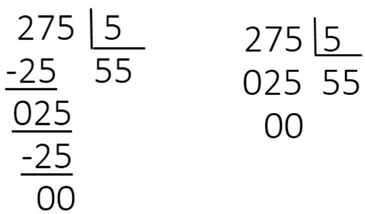
Como podemos observar, no caso do lado esquerdo, estimamos que a divisão de 275 por 5 seria 20. Fizemos 5 vezes 20 e encontramos 100 como resultado. Ao subtrairmos 275 – 100, obtivemos 175. E continuamos a estimar até finalizar a divisão. Depois somamos as estimativas que fizemos para chegar ao resultado. No caso do lado direito, o procedimento foi mais econômico porque a primeira estimativa foi mais próxima do valor esperado como solução da tarefa, ou seja, 50 estava mais próximo de 55 do que 20.

É importante frisar que o processo americano é um pouco menos comum no ensino da divisão. Contudo, tal processo parece ser bastante eficaz para ser ensinado em sala de aula, tendo em vista que representa o pensamento inicial das crianças quando repartem objetos igualmente, além do final desse processo representar o início do processo euclidiano.

Toledo (1997, p. 152), discursando sobre o algoritmo euclidiano, define-o como “processo longo aquele em que a subtração é indicada no algoritmo, aparecendo o produto do quociente pelo divisor”. Enquanto, “no processo breve, só se representa o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor”. Assim, o segundo tipo exige do estudante uma maior habilidade com o cálculo mental para desenvolver tal algoritmo.

Na figura abaixo, ilustramos dois exemplos desses processos na divisão de 275 por 5. Do lado esquerdo tem o processo considerado longo e, do lado direito, o breve ou curto.

Figura 4 - Processos do algoritmo euclidiano longo e curto



Fonte: elaboração dos autores

Cabe ressaltar que o método curto é uma “abreviação” do método longo. Dessa maneira, recomenda-se que primeiro o estudante deve compreender as etapas do processo longo, para depois poder se utilizar do processo breve, uma vez que, possivelmente, já terá desenvolvido sua autoconfiança dominando o processo de divisão, sem precisar explicitar todas as subtrações realizadas como no caso do lado esquerdo.

Diante dos fatos mencionados, fica nítido que são vários os procedimentos (algoritmos) para resolução de problemas com divisão. Contudo, a forma como os professores analisam sua construção, bem como a utilização desses procedimentos ou mesmo outros pessoais, é fundamental para que possam dar um retorno para seus estudantes, com vista a sanar possíveis lacunas no processo de ensino e aprendizagem da divisão.

Metodologia

Este estudo se enquadra em um tipo de pesquisa qualitativa, a qual prioriza a essência do estudo, porém não despreza o seu aspecto numérico, quantitativo. Nesse sentido, concordamos com Chizzotti (2003, p. 78-79) quando afirma que:

> A abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito.

De acordo com o objetivo deste estudo, podemos considerá-lo como uma pesquisa de cunho descritivo, pois "tem como objetivo primordial a descrição de fatos tal qual eles se encontram e também descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los, analisá-los e interpretá-los, sem que o pesquisador lhes faça qualquer interferência" (LEÃO, 2009, p. 164).

Os sujeitos da pesquisa foram professores de matemática que atuam nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio de escolas públicas e privadas. Possuem licenciatura em Matemática, sendo três professores de cidades do Agreste Meridional e três professores da Zona da Mata Norte do Estado de Pernambuco, escolhidos por conveniência. Na análise dos resultados, a fim de manter em anonimato a identidade de cada professor (P) pesquisado, codificamos os participantes de P1 a P6.

Para alcançar os objetivos traçados na presente pesquisa, foram elaborados quatro protocolos que representam procedimentos diversos da divisão (cálculos utilizando os algoritmos americano, euclidiano longo e curto, e procedimento pessoal) realizados por estudantes fictícios, cuja escolha levou em consideração controlar os procedimentos que pretendíamos que os professores sujeitos da pesquisa analisassem. Tais protocolos abarcaram a maioria dos erros cometidos pelos estudantes em sala de aula, visando verificar como nossos participantes interpretam os diferentes erros e analisam as estratégias utilizadas.

O enunciado geral para cada protocolo era o seguinte: Prezado professor, analise cada protocolo abaixo, destacando se as estratégias utilizadas foram adequadas ou inadequadas, bem como se a resposta dada em cada problema está correta ou incorreta. Justifique sua resposta, descrevendo a(s) estratégia(s)/percurso(s) e erros ou acertos cometidos pelos alunos em cada protocolo.

Figura 5 - Protocolo 1

Protocolo 1: João pretende dividir 25 bombons entre seus dois sobrinhos Lucas e Raul. Quantos bombons deve receber cada um?

Resposta dada pelo aluno:

Lucas	Raul		
$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ \underline{2} \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 5 \\ \underline{2} \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{+\ 12} \\ 24 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{-24} \\ 01 \end{array}$

12 + 1 = 13 Resposta: 13

Fonte: elaboração dos autores

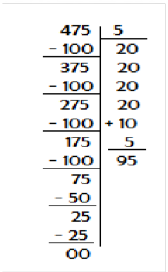
Classificamos a estratégia utilizada por esse estudante fictício como pessoal, na qual ele vai dividindo igualmente até quando não dá mais para dividir. Dessa maneira, o problema desse protocolo é o tratamento que o estudante dá ao resto. A resposta correta do problema é 12,5 bombons para cada, ou mesmo 12 bombons para cada e sobra 1.

Vejamos o protocolo 2.

Figura 6 - Protocolo 2

Protocolo 2: Na busca de arrecadar dinheiro para a formatura os alunos, começaram a vender rifas, cada rifa custava R$5,00. Ao final do mês os alunos arrecadaram R$ 475,00. Quantas rifas foram vendidas?

Resposta dada pelo aluno:



Resposta: 95

Fonte: elaboração dos autores

Com relação a este protocolo, a estratégia utilizada pelo estudante é o algoritmo americano, no qual vai fazendo estimativas até não ser mais possível dividir o dividendo, isto é, o estudante sempre multiplica sua estimativa pelo divisor e o resultado subtrai do dividendo. No final ele soma suas estimativas chegando ao quociente 95 que é a resposta correta do problema. Vale evidenciar que esse protocolo é o único que contém a resposta correta, tendo em vista que pretendemos verificar se os participantes observam também os acertos dos estudantes, ou seja, não focam apenas nos seus erros.

Análise do protocolo 3.

Figura 7 - Protocolo 3

Protocolo 3: Seu José tinha R$ 621,00 e dividiu esse dinheiro entre seus seis filhos. Quanto cada um recebeu?

Resposta dada pelo aluno:

```
 621 |6
- 6    1035
 021
 - 18
  30
 - 30
  00
```

Resposta: 1035

Fonte: elaboração dos autores

Este protocolo traz a utilização do algoritmo euclidiano longo, em que aparece na operação a subtração do produto do quociente pelo divisor. Cabe ressaltar que a dificuldade desse protocolo se encontra também no tratamento dado ao resto pelo estudante. Ele acrescenta o zero ao resto três da divisão ficando agora com trinta décimos, porém divide como se o resto fosse trinta unidades, não aparecendo desta maneira a vírgula no quociente. O resultado correto da divisão é 103,5.

Análise do protocolo 4.

Figura 8 - Protocolo 4

Protocolo 4: Paulo comprou uma motocicleta por R$ 7.680,00. Ele pagou a mesma em 32 parcelas iguais e sem juros. Quanto ele pagou em cada parcela?

Resposta dada pelo aluno:

```
7680 |32
128   24
 000
```

Resposta: 24

Fonte: elaboração dos autores

Neste protocolo destacamos a utilização do algoritmo euclidiano curto, no qual o estudante faz as subtrações entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor mentalmente, ou seja, essas subtrações não aparecem na operação, explicitando-se apenas os resultados delas. A dificuldade no protocolo acima encontra-se na não divisão do zero por trinta e dois, isto é, foi baixado um zero e o outro que foi baixado também era zero, ou seja, estaremos dividindo zero unidade para trinta e dois, então o resultado só pode ser zero. Isso não aparece na resolução do estudante. Dessa maneira, a resposta correta é 240 reais.

As respostas dos professores aos protocolos serão analisadas levando em consideração suas compreensões a respeito dos procedimentos utilizados, se foram adequados ou inadequados, se as respostas são corretas ou incorretas, e se conseguiram descrever o procedimento/percurso realizado pelos estudantes.

Análise e discussão dos resultados

Nesta etapa da pesquisa, apresentamos as respostas atribuídas pelos professores a cada um dos protocolos elaborados, seguidas da nossa análise.

O quadro a seguir traz as respostas dos professores ao protocolo[2] 1:

Protocolo 1: João pretende dividir 25 bombons entre seus dois sobrinhos Lucas e Raul. Quantos bombons deve receber cada um?

Resposta dada pelo aluno:

Lucas	Raul		
5	5	12	25
+ 5	+ 5	+ 12	-24
2	2	24	01
12	12		

12 + 1 = 13 Resposta: 13

2 Embora pareça repetitivo, achamos pertinente apresentar novamente, agora em tamanho menor e sem identificação como realizado no capítulo anterior, os respectivos protocolos para facilitar a compreensão das respostas e para que o leitor não precise retornar à metodologia para visualizá-los quando achar necessário.

Quadro 1 - Quantitativo das respostas dadas pelos professores para o protocolo 1

Estratégia(s) utilizada(s): adequada ou inadequada.	**Resposta do protocolo: correta ou incorreta.**
5 adequadas/ 1 inadequada	2 corretas/ 4 incorretas

Fonte: elaboração dos autores

Vejamos o que fala o P1 sobre a resposta dada pelo estudante:

> *A resposta está incorreta. O método utilizado não foi adequado. Seria mais adequado a utilização do método de chave, onde pegaria o 25 que é o dividendo, o divisor seria 2, o quociente seria 12 e restaria 1. Esse seria o método simples, rápido e adequado para resolver problemas dessa natureza* (Resposta do P1 para o protocolo 1, 2016).

Notamos que na análise feita pelo P1, ele considera a resposta dada pelo estudante como errada e o procedimento como inadequado. Além disso, propõe um método a ser utilizado, o qual denomina de método de chave, que se trata provavelmente do algoritmo euclidiano longo ou curto. É importante destacar que a fala do professor remete que ele só ensina por meio do método da chave, conforme o próprio denominou, e essa dificuldade pode ser decorrente de não conhecer outros procedimentos para a divisão, ou seja, provavelmente só conhece esse.

O P4 respondeu assim:

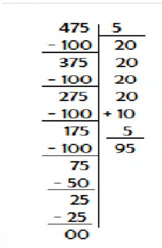
> *A resposta está correta, embora o aluno não tenha especificado quem receberia os treze bombons. Supondo que os 25 serão divididos igualmente, algum teria que receber 13. Achei o método de resolução interessante, embora não saiba nomeá-lo. Eu chamaria de "método de comparação".* (Resposta do P4 para o protocolo 1, 2016).

Diferentemente do P1, esse considera a resposta correta e a proposta adequada. Contudo, percebemos que não evidencia a importância da divisão decimal, pois para ele, um sobrinho teria que ganhar 13 bombons, ou seja, não poderia ser o número decimal 12, 5. Outro ponto observado é que ele chega até a nomear o procedimento utilizado pelo estudante de "método de comparação".

A seguir analisaremos as respostas e as justificativas de alguns dos professores pesquisados relativas ao segundo protocolo.

<u>Protocolo 2:</u> Na busca de arrecadar dinheiro para a formatura os alunos, começaram a vender rifas, cada rifa custava R$5,00. Ao final do mês os alunos arrecadaram R$ 475,00. Quantas rifas foram vendidas?

Resposta dada pelo aluno:



Resposta: 95

Quadro 2 - Quantitativo das respostas dadas pelos professores para o protocolo 2

Estratégia(s) utilizada(s): adequada ou inadequada.	**Resposta do protocolo: correta ou incorreta.**
5 adequadas/ 1 inadequada	6 corretas/ 0 incorreta

Fonte: elaboração dos autores

O P2 responde:

> *A resposta está correta, porém eu não aconselharia o meu aluno a resolver dessa maneira, pois não sei se funciona sempre ou funciona para tudo. O*

correto seria o método mencionado na questão anterior. Porém não deixa de está correta a resposta encontrada nesta questão. (Resposta do P2 para o protocolo 2, 2016).

Como podemos perceber, esse professor considera a resposta correta e a estratégia inadequada. Observamos que ele não conhece o algoritmo americano, chegando a dizer "*não sei se funciona sempre ou funciona para tudo*", apontando ainda o método correto que o estudante deveria utilizar que, de acordo com sua resposta, se trata de uma estratégia pessoal.

O P6 responde:

A resposta está correta. Acredito que o aluno tenha mais afinidade com múltiplos de 10, 100, 50, 20... ele sabe que ao multiplicar uma quantidade pelo preço da rifa, ele vai se aproximar do total arrecadado. Então, segue adicionando e multiplicando quantidades até zerar o valor arrecadado. Ao término soma as quantidades e obtém o resultado final. (Resposta do P6 para o protocolo 2, 2016).

Observamos que esse professor considera a resposta correta e a estratégia adequada. Parece que ele compreende o algoritmo americano chegando a explicar de forma satisfatória a estratégia utilizada pelo estudante.

No que se refere ao terceiro protocolo, vejamos:

<u>Protocolo 3:</u> Seu José tinha R$ 621,00 e dividiu esse dinheiro entre seus seis filhos. Quanto cada um recebeu?

Resposta dada pelo aluno:

```
 621 |6
- 6    1035
 021
 - 18
   30
 - 30
   00
```

Resposta: 1035

Quadro 3 - Quantitativo das respostas dadas pelos professores para o protocolo 3

Estratégia(s) utilizada(s): adequada ou inadequada.	**Resposta do protocolo: correta ou incorreta.**
6 adequadas/ 0 inadequada	1 correta/ 5 incorretas

Fonte: elaboração dos autores

O P3 responde:

> *Correto o Protocolo 3, pois o aluno fez a resolução correta da questão e só não percebeu por conta imagino de alguma aula de números decimais que não foi dada ou que faltou, mas que seus procedimentos estão corretíssimos.* (Resposta do P3 para o protocolo 3, 2016).

Na fala desse professor, percebemos que ele considera a resposta correta e a estratégia adequada. Ele coloca que o erro é decorrência de alguma aula de números decimais que não foi dada ou que o estudante faltou. Contudo, mesmo que não seja dada alguma aula de números decimais ou ainda que o estudante a falte, ele pode aprender o processo de divisão decimal, pois esse ensino não é realizado em apenas uma ou duas aulas.

O P5 respondeu assim:

> *A estratégia utilizada pelo aluno foi adequada, porém sua resposta não foi correta pois: na divisão o algoritmo tem-se uma regrinha básica: no resto quando a quantidade do número é maior que o divisor acrescenta-se um zero no quociente e baixa a próxima casa, e se resto se repetir infinitamente, significa que o número é irracional.* (Resposta do P5 para o protocolo 3, 2016).

Esse professor entende que a resposta está errada e a estratégia foi adequada. Percebemos ainda no seu discurso que ele aponta uma "regrinha básica" para a divisão, evidenciando assim, uma possível forma de como realiza o ensino dessa operação em sala de aula que, provavelmente, é por meio de regras.

Quanto ao quarto e último protocolo, vejamos:

Protocolo 4: Paulo comprou uma motocicleta por R$ 7.680,00. Ele pagou a mesma em 32 parcelas iguais e sem juros. Quanto ele pagou em cada parcela?

Resposta dada pelo aluno:

$$\begin{array}{r|l} 7680 & 32 \\ \hline 128 & 24 \\ 000 & \end{array}$$

Resposta: 24

Quadro 4 - Quantitativo das respostas dadas pelos professores para o protocolo 4

Estratégia(s) utilizada(s): adequada ou inadequada.	**Resposta do protocolo: correta ou incorreta.**
6 adequadas/ 0 inadequada	0 correta/ 6 incorretas

Fonte: elaboração dos autores

A resposta dada pelo P2 foi a seguinte:

> *A estratégia está correta, o resultado está errado. O aluno armou o algoritmo, mas não desenvolveu corretamente, também houve uma confusão entre conceito de dezena e unidade.* (Resposta do P2 para o protocolo 4, 2016).

Notamos que o P2 considera a resposta errada e a estratégia adequada. Ele destaca que o erro é decorrente do não desenvolvimento correto do algoritmo, bem como uma confusão entre o conceito de dezena e unidade.

O P3 responde:

> *Já no Protocolo 4, o aluno também fez a resolução da questão correta, pois a justificativa é só a não colocação do algarismo 0 (zero) ao lado do número 24,*

pois o número 0 quando descer do DIVIDENDO *para o* RESTO *é imprescindível ele ser colocado no* QUOCIENTE, *mas uma vez imagino que o discente não assistiu essa aula ou faltou.* (Resposta do P3 para o protocolo 4, 2016).

Podemos constatar que para o P3 a resposta está incorreta e a estratégia é adequada. Verificamos ainda em seu discurso a existência de uma certa "regrinha": "*o número 0 quando descer do* DIVIDENDO *para o* RESTO *é imprescindível ele ser colocado no* QUOCIENTE", e a procura de se isentar da culpa do erro, "*mas uma vez imagino que o discente não assistiu essa aula ou faltou*".

Considerações finais

A partir da análise das respostas dadas pelos professores, participantes desta pesquisa, podemos verificar a existência de dificuldades no processo de ensino da divisão por parte desses docentes, afirmando não saber, por exemplo, se o algoritmo americano vale em todas as situações, bem como focam o ensino da divisão apenas em uma estratégia adotada por eles, ou seja, possivelmente aquela que sabem ou têm mais domínio. Dessa maneira, não valorizam as estratégias pessoais utilizadas por seus estudantes, encaminhando-os para utilização dos procedimentos que utilizam em suas aulas, isto é, as estratégias convencionais (os algoritmos). Vale destacar também que alguns, provavelmente, ensinam a divisão por meio de "regrinhas básicas". Podemos constatar que muitos professores buscam se isentar dos erros cometidos pelos estudantes, chegando até mesmo a apontar que a culpa da não aprendizagem é decorrente de uma possível aula que o estudante faltou.

Diante do exposto, destacamos a importância de outras pesquisas serem realizadas na temática, a fim de verificar como o ensino das operações está sendo realizado nas salas de aula, e também identificar os fatores que desencadeiam as dificuldades dos estudantes nas operações fundamentais.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BOYER, C. B. *História da matemática.* Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. – 2. ed. – São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

BOYER, C. B. *História da matemática.* Revista por Uta C. Merzbach; tradução Helena Castro. – 3. Ed – São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular:* BNCC 2016, 3ª versão revista. Brasília, 2017.

CHIZZOTTI, A. *Pesquisas em ciências humanas e sociais.* São Paulo: Cortez, 2003.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*/ Howerd Eves; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 1995.

LEÃO, L. M. *Metodologia do ensino superior: construção do conhecimento científico* / Lourdes Meireles Leão. Recife: UFRPE, 2009.

NHONCANCE, L. *O algoritmo da divisão: O "método americano" da divisão e os resultados obtidos com alunos da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.* 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SALVADOR, H. F. *Dividindo histórias e opiniões:* compartilhando e polemizando a operação de divisão. Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática. Universidade Severino Sombra. Vassouras, Rio de Janeiro, 2012.

SOUZA, K. N. V. *As operações de multiplicação e divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental.* Disponível em <www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/viewFile/272/258> Acesso em: 15 nov. 2017.

TOLEDO, M. *Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

USISKINJ, Z. *Paper-and-Pencil Algorithms in a Calculator-and-Computer Age*. In The Teaching and Learning of algorithms in School Mathematics, 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, editado por Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, pp. 7 – 20. NCTM, Reston, Virginia.

CAPÍTULO 12

Análise de respostas apresentadas por estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental ao resolverem problemas de divisão

Flavia Gomes Silva do Nascimento, Amanda Maria da Silva, Rosinalda Aurora de Melo Teles e Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Introdução

Ao longo dos anos, a Matemática tem sido julgada como uma disciplina complexa e de difícil compreensão por inúmeros estudantes em relação aos conteúdos vivenciados em sala de aula e em especial às operações aritméticas. Apesar de saber que ela evoluiu em vários aspectos, e que houve modificações nos métodos de ensino, mesmo assim, diversas pessoas relacionam uma visão negativa à Matemática. Para facilitar a compreensão, o papel do professor é de suma importância. Segundo Brito,

> o objetivo dos professores de matemática deverá ser o de ajudar as pessoas a entender a matemática e encorajá-las a acreditar que é natural e agradável continuar a usar e aprender matemática. Entretanto, é essencial que ensinemos de tal forma que os estudantes vejam a matemática como uma parte sensível, natural e agradável (BRITO, 2001, p. 43).

1 Trabalho ampliado a partir do artigo publicado na I Semana de Matemática do IFPE Campus Pesqueira, no ano de 2017.

Diante do exposto, percebe-se que o papel do professor é de desmistificar a visão negativa da Matemática por meio de uma metodologia eficiente, capaz de propiciar condições de aprendizagens significativas aos estudantes para que possam construir o conhecimento de forma prazerosa.

Para que aconteça a construção do conhecimento em determinados conteúdos, as operações aritméticas são de grande importância para resolver muitos problemas corriqueiros. Em se tratando da operação de divisão, nota-se que, apesar de ser cobrada sua abordagem em sala de aula no ensino fundamental pelas bases legais, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), muitos estudantes apresentam dificuldades ao operar com a divisão durante toda a educação básica. Outro fator inquietante é que se o estudante não aprende a operação de divisão, em grande parte dos casos, outros conteúdos que envolvam este conceito e devem ser abordados em sala de aula poderão ter sua aprendizagem comprometida.

Atrelado a isso existe o fato de que, ao se deparar com um problema de divisão, alguns estudantes podem buscar diferentes estratégias de resolução. Logo, é importante que o professor conheça as estratégias usadas pelos estudantes para resolver problemas que envolvam essa operação, uma vez que os procedimentos usados por eles se sustentam nas noções que os estudantes construíram sobre este conceito matemático (NICOLODI, 2009).

A divisão é uma operação complexa porque nem sempre ela é exata, o quociente nem sempre é o resultado, podem haver restos diferentes de zero e a divisão, como regra operatória, nem sempre é o inverso da multiplicação. Além disso, a operação de divisão pode estar relacionada a duas ideias diferentes: partição ou quota (VERGNAUD ,1991).

Diante do exposto, surgiu o interesse por este tema de modo a responder a seguinte indagação: Quais estratégias de resolução de problemas com divisão, que envolvam partição ou quotição, são utilizadas por estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental? Há diferenças entre as estratégias usadas nos anos iniciais e finais do ensino fundamental?

A opção por analisar as diferenças de estratégias possíveis entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental reside no fato de que, nos anos finais, os estudantes possam ter uma ampliação deste conceito mais formal do que nos anos iniciais.

O objetivo geral desta pesquisa foi analisar as respostas apresentadas por estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental ao resolverem problemas de divisão, que envolvam quotição e partição, segundo a Teoria dos Campos Conceituais. Os objetivos específicos foram: verificar as estratégias usadas pelos estudantes ao resolver problemas com divisão, que abordem quotição e partição; identificar as diferenças de estratégias entre os estudantes dos anos iniciais e finais.

Esta pesquisa foi desenvolvida levando-se em consideração os estudos realizados por Selva (1998), Pessoa e Borba (2009) e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud (1996). Utilizaremos como aporte teórico para nosso estudo a Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente, a noção de cálculo relacional e numérico. O instrumento de coleta de dados foi um teste diagnóstico que foi aplicado individualmente.

A presente pesquisa se justifica porque é importante que sejam observadas as estratégias dos estudantes ao resolverem problemas de divisão, visto que ao concluírem o ensino fundamental eles já deveriam, de acordo com os documentos de orientação curricular, dominar as operações, para assim utilizar esse conhecimento na vivência dos demais conteúdos. Por outro lado, a intervenção do professor nas dificuldades apresentadas pelos estudantes é de suma importância para favorecer o processo de ensino e aprendizagem.

Operações aritméticas nos anos iniciais e finais do ensino fundamental

Nos anos iniciais escolares a criança encontra-se aprendendo as operações básicas, tais como adição, subtração, multiplicação e divisão, como também as diversas possibilidades de resoluções de problemas, conforme preconiza um dos objetivos dos PCN (BRASIL, 1997) acerca do estudante ser capaz de

> resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, compreendendo também diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais (BRASIL, 1997, p.37).

Os PCN (BRASIL, 1997) falam a respeito do cálculo mental como facilidade para domínio do cálculo aritmético, como também associá-lo a diferentes maneiras de encontrar solução para um problema.

Com relação aos anos finais do ensino fundamental, espera-se, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), que os estudantes possam

> resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
>
> selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta;
>
> expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
>
> utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Desta forma, espera-se que nos anos iniciais as operações aritméticas sejam realizadas, sugerindo que os estudantes possam ampliar os conceitos anteriormente trabalhados. Logo, é importante compreender como eles podem ser formados.

Atualmente, podemos fazer uso da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), a qual afirma que os estudantes são protagonistas capazes de desenvolver os conhecimentos, as competências e habilidades na educação básica. Há uma subdivisão por áreas do conhecimento neste documento, dentre elas, a área de Matemática, que apresenta cinco unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Números, Grandezas e Medidas e Probabilidade. Sobre a unidade temática Números, a orientação para o ensino fundamental nos anos iniciais é de que:

> (...) os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p.268).

Assim sendo, espera-se que os estudantes, através da capacidade de abstração, possam desenvolver estratégias, utilizando diferentes caminhos, fazendo uso do algoritmo, cálculo mental, estimativa, dentre outros, para a resolução de situações-problema. Quanto à resolução de problemas, Dante (2010) diz

> que ensinar a resolver problemas é “mais complexo” do que ensinar um algoritmo e a postura do professor ao ensinar um algoritmo é de um orientador que dá instruções, mas, quanto à resolução de problemas, o professor deve ser um incentivador e um moderador das ideias geradas pelos estudantes. Ao resolver de diversas formas possíveis, gera ideias produtivas, de maneira contextualizada, crítica e prazerosa (DANTE, 2010, p. 56).

Diante do exposto, destacamos a importância da resolução de problemas a partir de diferentes recursos e de diferentes tipos de cálculo e o importante papel do professor no processo de ensino. Ainda na perspectiva de resolução de problemas, na próxima seção, discutiremos sobre o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

A Teoria dos Campos Conceituais e o campo conceitual multiplicativo

A formação dos conceitos ocorre a partir da relação entre diferentes conceitos, os quais formam campos conceituais. Isto porque a aprendizagem de um conceito de forma isolada não apresenta nenhum sentido (VERGNAUD, 1986).

Um campo conceitual, por sua vez, é definido como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (VERGNAUD, 1986, p. 10).

Na ótica na TCC, destacamos dois pontos extremamente importantes, quais sejam, o cálculo relacional e o cálculo numérico. Os cálculos relacionais envolvem as operações do pensamento que são necessárias para a compreensão dos relacionamentos envolvidos nas situações. Já o cálculo numérico são as resoluções numéricas propriamente ditas (PESSOA; BORBA, 2009).

A variedade de situações oferecidas aos estudantes leva-os a refletirem, buscarem estabelecer relações e construírem novas aprendizagens. Também são interessantes pesquisas que percebam as estratégias desses estudantes para resolverem certos problemas (PESSOA; BORBA, 2009).

Entre os diversos campos conceituais, destacamos o campo conceitual multiplicativo. Este campo, por sua vez, consiste nas situações que podem ser analisadas como proporções, no qual (em geral) precisa-se multiplicar e/ou dividir (VERGNAUD, 1991). Por esse motivo, as situações que envolvem o nosso objeto de estudo, mais especificamente, as tarefas que abordam a operação de divisão, fazem parte deste campo conceitual.

Esta pesquisa optou por analisar as estratégias usadas pelos estudantes ao resolverem problemas de divisão, sobre os quais existem dois tipos básicos: partição e quotição. Nos problemas de partição conhece-se o total de elementos em um conjunto e este deverá ser distribuído igualmente em um número de partes pré-determinado. Neste caso, segundo Selva (1998), objetiva-se encontrar o número de elementos em cada parte. Como exemplo pode-se considerar o problema a seguir como de partição: Mariana fez 15 *cupcakes* para dividir igualmente entre três crianças. Quantos *cupcakes* serão dados a cada criança? Como já se sabe o número de *cupcakes* (total de elementos) e de crianças (número de partes), deseja-se, então, calcular a quantidade de *cupcakes* por criança (número de elementos em cada parte), o que consiste em calcular o resultado de 15÷3.

Já nos problemas de quotição, de acordo com Selva (1998), o conjunto, que é conhecido, deve ser dividido em partes de grandeza previamente estabelecidas. Então, calcula-se o número de partes que serão obtidas. O problema a seguir é de quotição: Mariana fez 15 *cupcakes* e quer distribuir 3 *cupcakes* para algumas crianças. Quantas crianças ganharão *cupcakes*? Tal justificativa reside no fato de que se tem a quantidade de *cupcakes* (número total do conjunto) e quanto deve ser dado a cada criança (partes de grandeza, ou seja, número de elementos em cada parte), sendo calculado a quantidade de crianças (número de partes). O resultado é obtido também efetuando-se 15÷3.

Dessa forma, é importante que os docentes possam levar em conta a existência desses tipos de problemas ao abordar o conceito de divisão e estarem atentos às diferentes estratégias que seus estudantes utilizam ao resolverem problemas que envolvem esta operação.

Metodologia

Os participantes da pesquisa foram 20 estudantes de anos iniciais e finais do ensino fundamental (escolhidos de forma aleatória) de duas escolas públicas. Foram tomados cinco estudantes de cada um dos 4º, 5º, 6º e 7º anos. Os dos 4º e 5º anos eram de uma escola pública municipal de Moreno-PE. Já os dos 6º e 7º anos eram de uma escola pública estadual do município de Camaragibe-PE. Os municípios para realização deste estudo foram escolhidos por conveniência de acesso.

O instrumento de coleta de dados foi um teste diagnóstico, aplicado de forma individual. Cada estudante usou em média uma hora para responder o questionário.

Para atender aos objetivos desta pesquisa, realizaram-se os seguintes procedimentos metodológicos:

- Seleção de problemas presentes em livros didáticos do ensino fundamental sobre divisão com quotição e partição;
- Construção de um teste diagnóstico envolvendo problemas de divisão;
- Aplicação do teste de forma individual, com os sujeitos da pesquisa;
- Análise dos resultados obtidos.

Buscando atender aos objetivos propostos, dividimos a pesquisa em duas etapas. Na primeira etapa, foram pesquisados problemas de divisão, que envolvam partição e quotição, presentes em livros didáticos do ensino fundamental.

Na segunda etapa da pesquisa, fez-se a construção de um teste diagnóstico, com o objetivo de analisar as estratégias de resolução apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa. Este teste foi um questionário composto de seis questões que foram retiradas de Dante (2001) e Dante (2015).

As três primeiras questões eram problemas de divisão com partição e as outras três eram divisão com quotição. Os problemas do questionário estão descritos a seguir:

- Questão 1 Partição (Q1P): Se 448 balas forem divididas igualmente em 4 caixas. Cada caixa ficará com quantas balas?

- Questão 2 Partição (Q2P): Mauricio deu 5 voltas em uma pista e com isso percorreu 940 metros. Qual é a extensão dessa pista?
- Questão 3 Partição (Q3P): De quantas notas de R$2,00 eu preciso para ter R$72,00?
- Questão 4 Quotição (Q4Q): Uma empresa de turismo usa micro-ônibus para 25 passageiros em suas excursões. Para transportar 100 pessoas, quantos micro-ônibus serão necessários?
- Questão 5 Quotição (Q5Q): Rosa vai ao supermercado comprar bebidas. Ela vai levar 18 garrafas. Para carregá-las, separou algumas cestas. Em cada cesta cabem 6 garrafas. Quantas cestas serão necessárias?
- Questão 6 Quotição (Q6Q): Quantas caixas de 6 ovos podemos completar com 24 ovos?

Após a aplicação deste questionário, efetuou-se a análise e discussão dos resultados, levando em conta as estratégias apresentadas pelos participantes da pesquisa aos resolverem o questionário e observando o que foi dito em cada resposta descrita; as estratégias usadas entre os sujeitos dos anos iniciais e finais do ensino fundamental, fazendo um comparativo entre os anos escolares dos participantes da pesquisa; os cálculos relacionais e numéricos presentes nas resoluções, a partir da resposta descrita pelos estudantes, de acordo com a aplicação do questionário.

Para melhor identificar as estratégias encontradas, foram adaptadas as que se apresentam no estudo de Pessoa e Borba (2009), que são:

> *Em branco* – não se pode, nestes casos, saber se o aluno não respondeu porque não sabia, porque não se interessou, porque não quis fazer ou se considerou o problema de difícil resolução.
>
> *Apenas resposta incorreta* – o aluno dá apenas a resposta errada para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.

> *Apenas resposta correta, sem explicitação de estratégia* – o aluno dá apenas a resposta certa para o problema proposto, embora seja possível, muitas vezes, inferir qual a operação por ele realizada.
>
> *Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação (incompreensão do problema)* – o aluno apresenta uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios de relação com a questão proposta.
>
> *Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação (apresenta certa compreensão do problema)* – o aluno erra a resposta; entretanto, sua estratégia de resolução é válida para o que é solicitado, mantém uma relação com a lógica do problema. Na maioria das vezes, porém, neste caso, o aluno não consegue esgotar todas as possibilidades para o tipo de problema proposto.
>
> *Resposta correta com explicitação de estratégia* – O aluno consegue compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta, encontrando formas de esgotar todas as possibilidades (PESSOA; BORBA, 2009, p. 131-132).

A seguir encontra-se a listagem das estratégias usadas na presente pesquisa:

- E1: Não respondeu: quando o estudante não respondeu ou colocou respostas do tipo "não sei";
- E2: Apenas a resposta incorreta: quando o estudante não diz ou descreve a estratégia usada e coloca a resposta final errada;
- E3: Resposta incorreta com estabelecimento de estratégia não válida: quando o estudante erra a resposta, mas deixa explícita qual estratégia usou e esta não seria uma estratégia válida para resolver o problema;
- E4: Resposta incorreta com estabelecimento de estratégia válida: quando o estudante erra a resposta, mas deixa explícita qual estratégia usou e esta seria uma estratégia válida para resolver o problema;
- E5: Apenas a resposta correta: quando o estudante não diz ou descreve a estratégia, mas acerta a resposta;

- E6: Resposta correta com estabelecimento de estratégia: quando o estudante responde corretamente e descreve ou diz que estratégia usou.
- E7: Realiza operações de adição, subtração e multiplicação utilizando valores do enunciado podendo chegar ou não a resposta correta do problema;
- E8: Utiliza cálculo mental chegando ou não a resposta correta;
- E9: Relaciona o problema à uma divisão armando a conta corretamente.

Resultados e Discussão

O Quadro 1 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do questionário.

Quadro 1 - Resultados obtidos com a aplicação dos questionários.

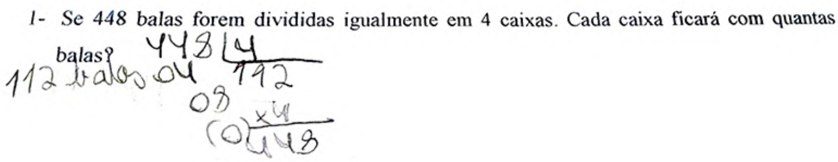
Questão	Anos	Estratégias usadas em cada questão								
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Q1P	Iniciais	0	0	3	1	0	6	2	1	4
	Finais	1	0	0	0	0	9	0	0	9
Q2P	Iniciais	2	2	6	0	0	0	4	0	0
	Finais	1	3	0	3	0	3	2	2	2
Q3P	Iniciais	0	3	2	0	3	2	4	3	0
	Finais	1	1	0	1	0	7	3	4	1
Q4Q	Iniciais	0	2	3	0	2	3	5	3	0
	Finais	1	3	0	0	0	6	1	1	4

Questão	Anos	Estratégias usadas em cada questão								
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
Q5Q	Iniciais	0	1	2	0	4	3	3	5	1
	Finais	1	0	0	1	0	8	0	2	6
Q6Q	Iniciais	1	2	2	0	1	4	3	3	1
	Finais	1	1	2	3	0	3	3	1	2

Fonte: elaboração das autoras

Com relação à questão Q1P, notou-se que nos anos iniciais os alunos apresentaram um bom desempenho respondendo em sua maioria as questões corretamente. Os que acertaram, utilizaram a estratégia E6 e E9. A Figura 1 apresenta o registro feito por um dos estudantes dos anos iniciais, em que alcançou a resposta correta e apresentou como estratégia de resolução a armação de uma conta de divisão.

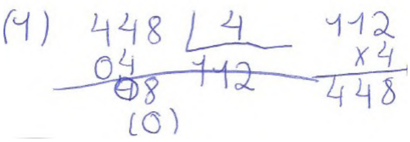
Figura 1 - Resposta do estudante A para a questão 1.



Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, nove dos estudantes resolveram corretamente e deixaram explícita a estratégia usada. Não houve erros nesta questão. Dos 10 estudantes dos anos finais, nove optaram pela estratégia E6 e E9, e apenas um deles não respondeu. Um dos participantes da pesquisa dos anos finais acertou toda a conta e a resposta final, usou a operação de divisão, mas descartou logo em seguida a conta. A Figura 2 apresenta o registro feito por ele.

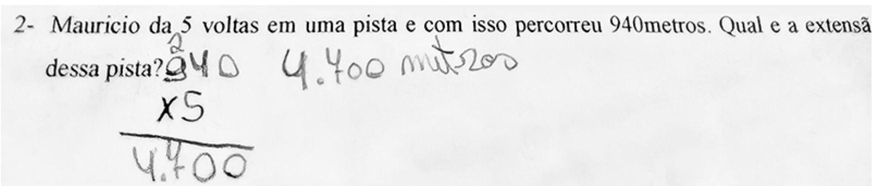
Figura 2 - Resposta do estudante B para a questão 1.



Fonte: acervo da pesquisa

Na questão Q2P foi observado que nos anos iniciais não houve nenhuma resposta correta, utilizaram as estratégias E1, E2, E3 e E7. A Figura 3 mostra o cálculo realizado por um estudante, o qual errou a resposta. À luz da Teoria dos Campos Conceituais, os erros foram decorrentes tanto do cálculo relacional quanto do numérico.

Figura 3 - Resposta do estudante C para a questão 2.

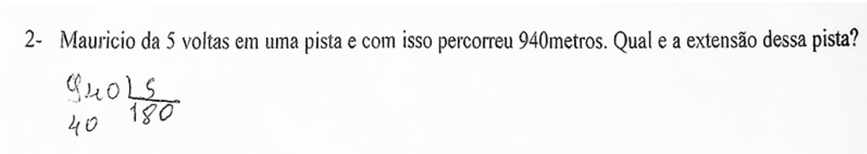


Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, apenas um aluno não respondeu; três optaram pela estratégia E2; três sujeitos colocaram a resposta incorreta, apesar de estabelecer uma estratégia que seria válida (uso da estratégia E4); três sujeitos deram a resposta correta, utilizando uma estratégia válida

(E6). Dos seis estudantes que explicitaram as estratégias, dois fizeram operações como adição, subtração e multiplicação (E7), dois usaram cálculo mental (E8) e outros dois armaram e fizeram uma conta de divisão (E9). Um dos estudantes dos anos finais que optou pela estratégia E9 efetuou o cálculo numérico de forma incorreta. A Figura 4 apresenta o registro de sua resposta.

Figura 4 - Resposta do estudante D para a questão 2.



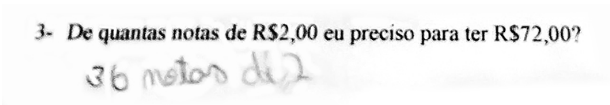
2- Mauricio da 5 voltas em uma pista e com isso percorreu 940metros. Qual e a extensão dessa pista?

940 | 5
40   180

Fonte: acervo da pesquisa

Na questão Q3P foi observado que nos anos iniciais a maioria dos alunos acertou a questão utilizando estratégias diferentes, tais como E8 e E7.

Figura 5 - Resposta do estudante E para a questão 3.



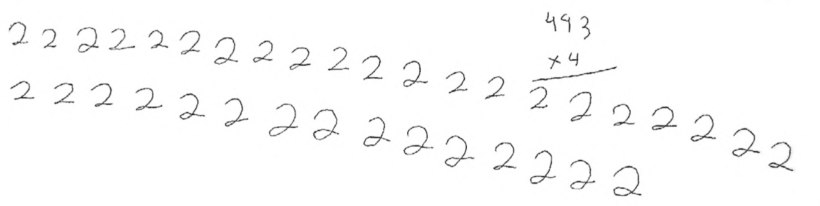
3- De quantas notas de R$2,00 eu preciso para ter R$72,00?

36 notas de 2

Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, um estudante não respondeu; um optou pela estratégia E2; um participante utilizou a estratégia E4; sete responderam de forma correta, utilizando uma estratégia válida (E6). Além disso, três fizeram operações como adição, subtração e multiplicação (uso da estratégia E7); quatro usaram cálculo mental (E8) e apenas um armou a conta de divisão (E9). Nesta questão foi possível detectar que um dos alunos dos anos finais conseguiu resolver o problema utilizando a adição. A Figura 6 expressa esta resposta.

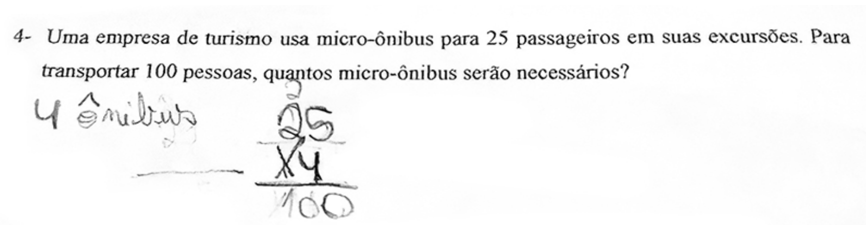
Figura 6 - Resposta do estudante F para a questão 3.



Fonte: acervo da pesquisa

Na questão Q4Q foi observado que nos anos iniciais os estudantes acertaram as questões em sua maioria e utilizaram as estratégias E8 e E7. A Figura 7 mostra a resposta de um estudante que respondeu usando a operação de multiplicação.

Figura 7 -Resposta do estudante G para a questão 4.



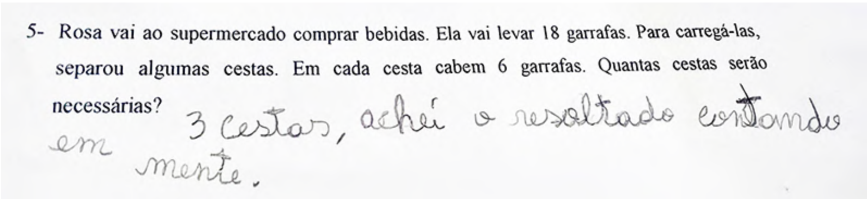
Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, um aluno usou a estratégia E1; três usaram a estratégia E2 e seis sujeitos responderam utilizando a estratégia E6.

Notou-se que um fez operações como adição, subtração e multiplicação (estratégia E7), um único estudante usou cálculo mental (E8) e quatro armaram a conta de divisão (E9).

Na questão Q5Q foi observado que nos anos iniciais sete sujeitos acertaram a questão, cinco utilizaram a estratégia E8 e dois a estratégia E7. A Figura 8 apresenta a resposta de um estudante dos anos iniciais que resolveu corretamente, usando cálculo mental.

Figura 8 - Resposta do estudante H para a questão 5.

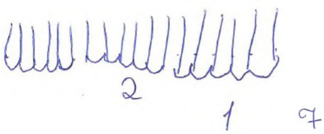


5- Rosa vai ao supermercado comprar bebidas. Ela vai levar 18 garrafas. Para carregá-las, separou algumas cestas. Em cada cesta cabem 6 garrafas. Quantas cestas serão necessárias? 3 cestas, achei o resultado contando em mente.

Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, um estudante não respondeu; um usou a estratégia E4 e oito utilizaram a estratégia E6. Destes oito, dois resolveram por cálculo mental e seis armaram a conta de divisão. Observou-se nesta questão que um estudante dos anos finais tentou responder o problema desenhando traços e agrupando-os, mas não acertou a resposta. A Figura 9 mostra essa resposta.

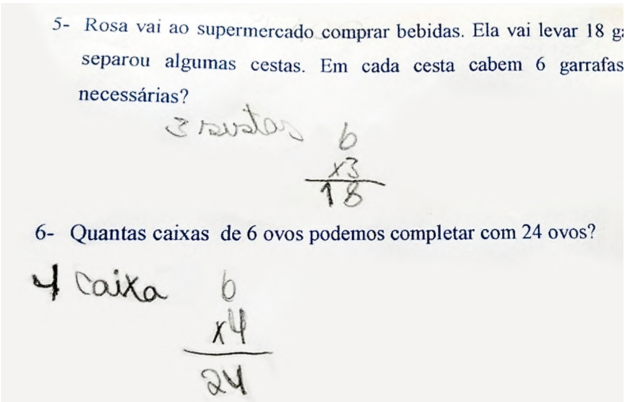
Figura 9 - Resposta do estudante I para a questão 5.



Fonte: acervo da pesquisa

Na questão Q6Q foi observado que nos anos iniciais seis alunos acertaram a questão e utilizaram as estratégias E7, E8 e E9 com acertos. A Figura 10 apresenta uma resposta correta, feita com a operação de multiplicação.

Figura 10 - Resposta do estudante J para a questão 6.



Fonte: acervo da pesquisa

Nos anos finais, um aluno não respondeu, um usou a estratégia E2, dois utilizaram a estratégia E3, três usaram a estratégia E4, três usaram a estratégia E6, três resolveram pela estratégia E7, um por cálculo mental e dois armaram a conta de divisão.

As estratégias mais usadas nos anos iniciais foram E6, E7 e E8. Já nos anos finais foram E6, E8 e E9.

Nos anos iniciais e finais a maioria dos estudantes optou por fazer a armação das contas de divisão e o cálculo mental. A maior quantidade de erros ocorreu na resolução de problemas de divisão com partição (nos anos iniciais). Nos anos finais não foi detectada grande diferença de erros entre os problemas de divisão com partição e quotição. As estratégias que mais conduziram aos acertos no cálculo numérico e relacional foram E6, E7 e E9 (Ex.: Figuras 1 e 2).

Notou-se que alguns estudantes alcançaram êxito no cálculo relacional ao usar operações como adição, multiplicação e divisão, mas erraram o resultado do cálculo numérico (Ex.: figuras 3, 4 e 9).

Conclusões

A finalidade desta pesquisa foi analisar as respostas apresentadas por estudantes dos anos iniciais e finais do ensino fundamental ao resolverem problemas de divisão que envolvem quotição e partição, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.

De maneira geral, pode-se concluir que foram atingidos os objetivos da pesquisa. Foi observado que alguns estudantes, tanto dos anos iniciais quanto dos anos finais, ainda apresentam dificuldades em resolver problemas com divisão, tanto de tipo partição quanto de quotição. Ocorreram momentos em que foram expressos apenas os resultados da conta (às vezes correto, outras vezes incorreto).

Verificou-se também que, ao serem ditas ou descritas as estratégias usadas para se chegar ao resultado da conta, apesar dos problemas propostos envolverem a operação de divisão, outras operações (como adição, subtração e multiplicação) foram utilizadas. Em alguns momentos estas operações conduziram ao resultado correto. Em outros casos, estratégias não eficientes para resolver o problema foram usadas, levando ao valor incorreto para a resposta do problema.

As estratégias mais comuns usadas nas respostas dos estudantes dos anos iniciais e finais foram E6 – Resposta correta com estabelecimento de estratégia: quando o estudante responde corretamente e descreve ou diz que estratégia usou; e E8 – Utiliza cálculo mental chegando ou não a resposta correta. Uma terceira estratégia mais usada nos anos iniciais foi E7 – Realiza operações de adição, subtração e multiplicação, utilizando valores do enunciado, podendo chegar ou não à resposta correta do problema; a terceira estratégia mais utilizada nos anos finais foi E9 – Relaciona o problema a uma divisão, armando a conta corretamente.

Assim, é necessário considerar que algumas estratégias ensinadas em anos anteriores acompanham os estudantes ao longo dos anos seguintes. Nos anos iniciais, as operações de adição, subtração e multiplicação são usadas com frequência. Já nos anos finais, a operação de divisão se apresenta em grande parte das resoluções de problemas.

Os problemas de partição geraram maiores erros nos anos iniciais. Nos anos finais não há muita diferença entres os erros encontrados nestes tipos de problemas.

Os resultados apontam a importância de serem trabalhados diversos tipos de situações do campo conceitual multiplicativo, em especial nos anos iniciais, a fim de serem superadas as dificuldades na compreensão do enunciado e na escolha da operação matemática para a resolução da situação-problema.

Portanto, diante do exposto, ressaltamos que, ao trabalhar problemas de divisão em sala de aula, é importante atentar-se para os tipos de problemas existentes e as estratégias que os estudantes possam apresentar ao resolvê-los.

Referências

BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 1ª a 4ª Série. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 5ª a 8ª Série. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular. Brasília*: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: 07 de julho de 2020.

BRITO M. R. F. (org). *Psicologia da educação matemática:* teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001.

DANTE, L. R. *Matemática.*Vivência e Construção. V. 1. São Paulo: Ática, 2001.

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.* 1. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, L. R. *Matemática.* Ensino Fundamental - anos iniciais 4º e 5º Ano. São Paulo: Ápis 2ª ed., 2015

NICOLODI, J. E. O conhecimento dos alunos de primeira série do ensino fundamental sobre divisão. In: IX Congresso Nacional de Educação. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 26-29 outubro 2009. PUCPR. *Anais:* IX Congresso Nacional de Educação. III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 2009.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª à 4ª série. *Zetetiké.* V. 17, n. 31. Jan/jun. Campinas: Faculdade de educação/UNICAMP, 2009.

SELVA, A. C. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In: SCHLIEMANN, A. L.; CARRAHER, D. *A compreensão de conceitos Aritméticos.* São Paulo: Papirus, 1998.

VERGNAUD, Gérard. El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica.* V.1. 1986. p. 75-90.

CAPÍTULO 13

Abordagem da divisão de números naturais em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC

Luciana Ferreira dos Santos, André Pereira da Costa, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Os resultados de avaliações oficiais em larga escala, tais como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA[1] (BRASIL, 2018a), apontam que a maioria dos estudantes brasileiros que participaram do PISA 2018 se encontra no nível 1 ou abaixo dele (68,1%)[2]. Os índices revelados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB (BRASIL, 2017) são semelhantes aos do PISA. Tal fenômeno pode ser verificado na proficiência média nacional (224,1) em Matemática no 5º ano do ensino fundamental. Isso significa que os estudantes provavelmente são capazes de, por exemplo, resolver problemas do cotidiano envolvendo adição de pequenas quantias; localizar informações,

1 O termo original é "*Programme for International Student Assessment* (PISA)".

2 Isso significa que os estudantes são capazes apenas de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas. Além disso, conseguem identificar informações e executar procedimentos rotineiros, de acordo com instruções diretas, em situações explícitas, realizando ações que são, quase sempre, óbvias e que decorrem diretamente dos estímulos dados.

relativas ao maior ou menor elemento, em tabelas ou gráficos. Essas habilidades estão aquém dos patamares considerados satisfatórios para estudantes que terminam essa etapa da escolarização (os anos iniciais do ensino fundamental).

Ao compararmos os índices apresentados pelos PISA e SAEB com as expectativas da Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2017), percebemos que temos um longo e difícil caminho a trilhar, posto que a BNCC apresenta como expectativa de aprendizagem para unidade temática Números:

> [...] que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p. 270).

Observamos que a BNCC (BRASIL, 2017) está centrada em dois princípios para a abordagem da unidade temática Números: o significado das operações e o cálculo. Esses princípios serão fundamentais para entendermos a abordagem da divisão de números naturais nos anos iniciais do ensino fundamental. Além disso, estudos educacionais têm dado indícios de que estudantes dessa etapa escolar apresentam dificuldades ao trabalhar com situações que abordam a divisão.

Pesquisadores como Cunha (1997) e Benvenutti (2008) apontaram ser o conceito de medida pouco desenvolvido nos anos iniciais de escolarização, e que os professores e alunos demonstraram dificuldades em diferenciar ideias de partição e de medida. Outros resultados foram verificados em Lima (2012), que teve como questão central "quais estratégias de solução os alunos utilizaram em problemas de divisão nas ideias de partição e medida". Nessa pesquisa, os dados revelaram que esses alunos dos anos iniciais apontaram diferentes procedimentos para uma mesma situação numérica.

No que diz respeito ao cálculo, Wallauer (2006), ao trabalhar com dois grupos de crianças, identificou que o conjunto de estudantes que utilizou estratégias inventadas, antes ou ao mesmo tempo em que os algoritmos convencionais foram apresentados, demonstrou mais compreensão do que o contingente de discentes que começou usando apenas os algoritmos. A pesquisadora chegou à conclusão de que

> ao aprender os algoritmos, os alunos deixam de refletir sobre as relações entre as variáveis envolvidas, preocupando-se apenas com o registro automático, quando poderiam estar desenvolvendo a habilidade que envolve estimativa, distribuição, proporção (WALLAUER, 2006, p. 196).

Em pesquisa desenvolvida com livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental, Pereira da Costa, Santos, Teles e Pessoa (2018) analisaram seis coleções de livros didáticos e identificaram que mais de 84% das atividades exploravam o processo do algoritmo convencional. Os pesquisadores identificaram que os algoritmos da divisão começam a ser explorados a partir do 3º ano, geralmente, por meio de divisão exata e processos longos que envolvem a estimativa e subtração sucessiva. Algumas coleções apresentavam atividades que estimulavam a construção de argumentos e reflexão sobre as estratégias utilizadas com o uso de algoritmos alternativos pelos estudantes, assim como reflexão sobre o sistema de numeração decimal. Esse resultado é muito positivo, pois indica que o algoritmo não está sendo trabalhado de forma precoce e por meio de diversas estratégias de cálculo.

No entanto, deve-se considerar que a BNCC (BRASIL, 2017) é um documento de caráter normativo para as instituições e redes de ensino públicas e privadas, além de nortear livros didáticos de Matemática. De acordo com o *Guia do livro didático* (BRASIL, 2018b), pela primeira vez, as coleções submetidas à avaliação buscaram se ajustar às competências e habilidades matemáticas presentes na BNCC, respeitando a progressão do conhecimento matemático das crianças a partir da consolidação de suas aprendizagens anteriores.

Sendo assim, surgem as seguintes perguntas: *Qual é a abordagem da divisão de números naturais dos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC (2017)? Essa abordagem atende as recomendações desse documento?*

Na busca por responder essas questões, temos como objetivo analisar a abordagem da divisão de números naturais dos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC (BRASIL, 2017). Para tanto, discutiremos a divisão a partir da Teoria dos Campos Conceituais (TCC), visto que é um quadro teórico que visa contribuir para o alcance do objetivo proposto.

A Teoria dos Campos Conceituais e o ensino da divisão

Uma opção teórica que pode contribuir para a análise do desenvolvimento cognitivo acerca do conceito de divisão de números naturais é a Teoria dos Campos Conceituais, proposta pelo psicólogo francês Gerard Vergnaud (1987). O autor propôs que os diferentes conceitos não se encontram isolados e que é importante compreendê-los a partir de campos em que tais conceitos se relacionam. Assim, Vergnaud (1990) apresenta um conceito como formado como uma trinca de conjuntos indissociáveis (S, I, R).

> S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência);
>
> I: conjunto dos invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas (significado); R: conjunto das formas linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1990, p. 145).

Nesse sentido, o estudo de um conceito deve considerar ao mesmo tempo: "o plano das situações, o dos invariantes operatórios e o das representações simbólicas. Não há em geral bijeção entre seus significantes e significados, nem entre [esquema] invariante e situações" (FRANCHI, 1999, p. 173).

No caso da divisão, essa operação faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas, juntamente com a multiplicação, função linear, fração, número racional, entre outros. Vergnaud (1987) considera que para compreensão de divisão como outras operações é necessário realizar a distinção de dois tipos de cálculos presentes quando resolvemos os problemas em Matemática: cálculo numérico e cálculo relacional.

O cálculo relacional é voltado para os procedimentos anteriores ao cálculo propriamente dito, em que o aluno busca a melhor opção para a resolução do problema a ele apresentado, ou seja, a melhor operação. Diz respeito às relações envolvidas no problema. Já o cálculo numérico se refere ao cálculo que temos efetivamente que fazer, considerando-se os dados do problema para chegar à resposta. Esse tipo de cálculo é relativo aos conhecimentos operacionais matemáticos, mais precisamente relacionados à execução de algoritmos (VERGNAUD, 1991).

Voltando para a resolução dos problemas de divisão: *Como a diferença entre cálculo numérico e cálculo relacional pode ajudar a compreender as dificuldades inerentes a essa operação?*

Em sua discussão sobre a resolução de problemas matemáticos, os pesquisadores Queiroz e Lins (2011) ventilam que Vergnaud fornece uma teorização que nos permite analisar a natureza do erro do aluno. Ou seja, o entendimento do que o aluno pensa e faz para chegar à resposta do problema, pois, ao buscar resolver um problema, o aluno passa por um momento de reflexão.

Na perspectiva euclidiana, a divisão é conceituada como o ato de dividir um número por outro em partes iguais de maneira que o resto seja menor que o divisor ou igual a zero (TELES, 2007). A divisão de números naturais pode ser expressa pela expressão matemática "$a = q \times b + r$", na qual r é menor que b (SANTOS; REZENDE, 1996; TOLEDO; TOLEDO, 1997; SANTOS, 1997; CARRAHER,1998).

Desse modo, qualquer número natural pode ser expresso como um múltiplo de qualquer outro número natural b, sendo $b \neq 0$. Assim, a definição científica formal de divisão é dada como a distribuição de um dividendo por um divisor, a partir do qual resultará um quociente, que acarretará numa parte restante ou não. Caraça (1989, p. 22) salienta que se trata de estabelecer-se uma relação fundamental em que, num caminho inverso, obtemos: "Dividendo = divisor x quociente + resto".

A seguir discutiremos a abordagem da divisão nos anos iniciais do ensino fundamental.

Abordagem da divisão nos anos iniciais do ensino fundamental

De acordo com Vergnaud (1996), a aquisição do conhecimento se dá por meio de situações e problemas com os quais o aluno tem uma familiaridade e pode lidar por toda a vida, com menor e maior grau. Ocorre pelo fato de as crianças usarem conhecimentos desenvolvidos em experiências anteriores e, quando defrontados com o novo, procuram adaptá-los.

A abordagem da divisão nos anos iniciais do ensino fundamental contém dois tipos de ideias: repartir em partes iguais e de medida. Por exemplo, se precisamos distribuir 60 bolas de gude entre três crianças (nós temos duas grandezas de tipos diferentes: bolas de gude/crianças) e precisamos determinar a quantidade de bolas de gude por criança. Essa situação-problema é chamada de divisão por partição ou partitiva ou equitativa ou como partilha (TOLEDO; TOLEDO, 1997; FERREIRA, 2005; JESUS, 2005), isso porque conhecemos o número total de elementos – 60 bolas de gude – que serão distribuídas em um número de partes iguais para as três crianças, devendo ser calculado o tamanho de cada parte (20 bolas de gude).

Devemos considerar, nessa situação, três elementos: por exemplo, 60 bolas de gude (o todo) e 3 crianças para receber (3 partes) e 20 bolas de gude por criança (o tamanho das partes). Assim, a criança precisa relacionar estas três variáveis: o número total de bolas de gude, o número de crianças e o número de bolas de gude por criança.

No entanto, se nós temos 60 bolas de gude e queremos distribuir 10 bolas de gude para cada criança (mesma grandeza: bolas de gude), temos outra situação real. Nesse caso é preciso determinar o número de crianças que irão receber as bolas de gude. Essa divisão é uma outra situação, que é chamada de medida ou quantos cabem ou quotativa (TOLEDO; TOLEDO, 1997; FERREIRA, 2005; JESUS, 2005). Aqui temos o todo conhecido – 60 bolas de gude – dividido em subconjuntos, previamente estabelecidos – 10 bolas de gude – devendo-se calcular quantas vezes esse subconjunto está contido no todo – quotas.

A quota indica que seis crianças receberão 10 bolas de gude cada uma, ou seja, cada criança recebe a mesma quota, isto é, a mesma quantidade. Selva (1998) enfatiza que o professor deve iniciar propondo problemas de partição – em que o tamanho das partes deve ser encontrado – porque envolve a ação de repartir elementos em partes iguais. Contrapondo-se a essa ideia, Maldaner (2011), apoiado em Dickson, Brown e Gibson (1984), considera que os problemas de medida – em que deve ser calculado o número de partes em que o todo foi dividido, sabendo-se a medida ou a quota a ser retirada de cada vez do todo – podem ser compreendidos mais facilmente pelas crianças.

A BNCC (BRASIL, 2017) traz também como recomendação trabalhar problemas envolvendo significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décimo com a divisão. Contudo, é consensual entre esses pesquisadores que a criança precisa vivenciar uma variedade de situações de divisão antes da apresentação do algoritmo.

Segundo Jesus (2005, p. 97), “criar e explorar os seus próprios processos de resolver problemas prepara os alunos para uma aprendizagem significativa dos algoritmos estandardizados”.

Com relação às estratégias de cálculo, a BNCC (BRASIL, 2017) traz a proposta de abordar a divisão tendo-se enfoque em diferentes estratégias de cálculo. O documento se afasta da compreensão comum nas aulas de Matemática de identificar o ensino da divisão trabalhando apenas com um algoritmo em particular (como acontece também com as outras operações).

De certa forma, essa compreensão fazia sentido se considerarmos que há pouco tempo não havia acessibilidade de instrumentos de cálculo (calculadoras, computadores etc.) como os quais contamos nos dias de hoje. Assim, cabe nos perguntarmos se hoje há sentido na proposta de que a escola siga insistindo em colocar o foco apenas no ensino da conta de dividir. Isso nos leva a pensar sobre o que entendemos hoje com “ensinar a dividir”. Correa e Spinillo (2004, p. 105) consideram que limitar a aritmética ao ensino do algoritmo:

> [...] reduz a matemática a cálculo ou execução de algoritmos, ignorando que a matemática fornece modelos para a representação e compreensão do mundo em que vivemos. Em segundo lugar [...] porque o algoritmo se refere a um conjunto de procedimentos que leva à execução de uma dada operação, enquanto a operação implica em transformações realizadas sobre números, quantidades, grandezas e medidas.

Assim como as autoras, compreendemos que o ensino da divisão deve possibilitar a percepção das relações dessa operação com as demais operações, o que permite ao estudante desenvolver estratégias mais flexíveis de cálculo. Nos anos iniciais do ensino fundamental, é realmente produtivo, em termos de formação dos estudantes, que sejam capazes de reconhecer quando é necessário usar a divisão, em que campo de problemas está inserido esse conceito, quando não é possível aplicar e que disponham de múltiplos recursos de cálculo (e não apenas do algoritmo convencional) para encontrar resultados exatos ou aproximados.

Para Selva (2009), desde o início da escolaridade, é possível propor às crianças diversos problemas, mesmo que não disponham dos recursos mais econômicos e perfeitos de cálculo. Sabemos que é possível resolver um problema de divisão por meio de diversas estratégias, desde desenhos ou esquemas até cálculos de adição, subtração e multiplicação. Nessa lógica, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 270) considera que os estudantes "desenvolvam diferentes estratégias para obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além dos algoritmos e uso da calculadora".

As estratégias de cálculo que envolvem estimativa e cálculo mental estimulam a aprendizagem da propriedade distributiva. No que tange à divisão, a propriedade distributiva em relação à adição oferece diversas possibilidades de cálculo. Afinal, essa propriedade possibilita que, em uma divisão, possa-se decompor o dividendo em parcelas e dividir pelo mesmo divisor cada uma dessas parcelas separadamente, obtendo-se resultados parciais. A soma desses resultados será o quociente da divisão.

Por exemplo, 119:11, observe que o número 110 é múltiplo de 11. Portanto, nesse caso, é interessante fazer 119 = 110 + 9 x 110: 11 = 10 – como 9 é um número menor do que 11, já é o resto. O resultado da divisão é, logo, quociente 10 e resto 9. A decomposição mobiliza, inclusive, o cálculo mental. A propriedade distributiva da divisão pode promover problematizações interessantes com relação à subtração, fazendo a decomposição do dividendo e facilitando os cálculos. Para dividir, por exemplo, 585 por 5, podemos arredondar 585 = 600 – 15. Então 585: 5 = (600 – 15): 6 = 600:5–15 :5 = 120–3 = 117. Esse tipo de estratégia também favorece o cálculo mental.

Com relação aos algoritmos, é inegável que essa é uma estratégia de cálculo eficaz, mas que não deve estar restrita à memorização que geralmente ocorre após as crianças terem aprendido adição e subtração (NUNES; BRYANT, 1997).

No que diz respeito ao algoritmo da divisão, é uma estratégia de cálculo utilizada para dividir um número por outro, obtendo-se um quociente como resultado e, algumas vezes, um resto. Segundo Mandarino (2005, p. 157)

> o algoritmo da divisão é, sem dúvida, o mais difícil e o mais complexo dentre os algoritmos das quatro operações, pois envolve, além do sistema de numeração, dos fatos básicos e do conceito de operação, a utilização das outras operações (adição, subtração e multiplicação) e a propriedade distributiva da divisão em relação à adição.

Por isso, Toledo e Toledo (1997), Silva (2014), Nunes e Bryant (1997) consideram interessante que algoritmos das subtrações sucessivas sejam apresentados antes dos outros dois métodos chamados de curto e longo, pois possibilitam uma compreensão mais eficiente da operação que se está efetuando. Outra vantagem desse método é que o aluno tem condições de visualizar as etapas do algoritmo, além de desenvolver a capacidade de estimar. De acordo com Loureiro (2004), nesse algoritmo é fundamental se ter a ideia da ordem da grandeza do quociente, ou seja, saber estimar um resultado que consiste em se ter uma perspectiva do resultado possível para um determinado cálculo.

Com relação ao algoritmo convencional (euclidiano), também conhecido como método-chave, é uma estratégia eficaz para realizar divisões de algarismo a algarismo. Diferente do algoritmo das subtrações sucessivas e estimativa no processo breve ou curto, a subtração não está explícita, porque somente o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente é registrado (TOLEDO; TOLEDO, 1997).

A seguir descrevemos o nosso percurso metodológico.

Percurso metodológico

Esta pesquisa foi realizada com o objetivo de analisar a abordagem da divisão de números naturais nos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC (BRASIL, 2017). Optamos por realizar uma abordagem qualitativa a partir de uma análise documental. Para tanto, nosso percurso metodológico incide em dois momentos: mapeamento dos objetos de conhecimento e habilidades propostas na BNCC acerca da divisão de números naturais; e análise dos livros didáticos acerca da abordagem do conteúdo da divisão.

A escolha pela BNCC (BRASIL, 2017) justifica-se porque é o documento que determina as competências (gerais e específicas) e as habilidades e aprendizagens mínimas que os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica. Desse modo, não deve ser vista como um currículo, mas como um conjunto de orientações que norteiam as equipes pedagógicas, currículos de estados e municípios e materiais didáticos (livros didáticos) utilizados nas escolas. No Quadro 1, podemos observar os objetos de conhecimento e habilidades referentes à divisão proposta pela BNCC.

Conforme apresentado no quadro acima, identificamos que são destinados quatro objetos de conhecimento acerca do estudo dos números naturais, desdobrados em cinco habilidades a serem desenvolvidas durante os anos iniciais do ensino fundamental.

Os objetos de conhecimento e habilidades presentes na BNCC guiaram nosso olhar sobre as três coleções de livros didáticos dos anos iniciais aprovados pelo PNLD de 2019 (BRASIL, 2018b), totalizando 15 obras. As coleções foram escolhidas aleatoriamente e identificadas neste estudo pelas letras A, B, e C.

Quadro 1 - Objetos de conhecimentos e habilidades da BNCC

Objetos de conhecimento	Habilidades	Anos Iniciais				
		1º	2º	3º	4º	5º
Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.		x			
Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de *divisão* de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.			x		
	(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.				x	
Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.			x		
Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.					x

Fonte: elaboração dos autores.

Todas as obras fornecem materiais de apoio para o desenvolvimento das atividades propostas, como jogos, materiais manipuláveis (em papel destacável), material dourado, baralho, calculadora, dinheiro, palito de picolé e cartazes. Em todas elas, há manual para o professor em forma impressa. Assim, nossas categorias analíticas foram construídas a partir da BNCC (BRASIL, 2017), mas também a partir dos dados extraídos dos livros didáticos apresentadas no quadro a seguir:

Quadro 2 - Categorias analíticas com base na BNCC

Categorias	**Subcategorias**
Significados das operações	Repartir em partes iguais
	Medida (quantos cabem?)
	Metade, terça parte, quarta parte, quinta parte, décima
	Outros contextos
Estratégias de cálculo	Algoritmos convencional
	Algoritmos por subtrações
	Desenhos
	Cálculo mental
	Reta numérica
	Cálculo por estimativa
	Arredondamento
	Decomposição
	Calculadora

Fonte: elaboração dos autores

Na próxima seção, apresentaremos a discussão dos resultados resultante da análise dos conteúdos manifestos.

Discussão dos Resultados

Tendo como um dos objetivos desta pesquisa analisar a abordagem da divisão em livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC (BRASIL, 2017), discutiremos nesta seção os dados obtidos e algumas análises referentes às atividades identificadas nas coleções.

Observamos que todas as três coleções discutiam os significados das operações e estratégias de cálculo referentes à divisão, conforme o sugerido pela BNCC (BRASIL, 2017). Percebemos diferenças em relação à quantidade de atividades[3] apresentadas entre as coleções. Na Coleção A, encontramos 137 atividades, seguida pela Coleção B, com 140 atividades, e Coleção C, que tem 132 atividades. Na Tabela 1, apresentamos a frequência dessas atividades por volume.

Tabela 1 - Frequência de atividades de divisão por volume

Coleções pesquisadas	Volume 1	Volume 2	Volume 3	Volume 4	Volume 5	Total
Coleção A	0	15	47	46	29	137
Coleção B	0	3	47	51	39	140
Coleção C	0	9	39	71	18	132
Total	**0**	**27**	**133**	**168**	**86**	**409**
%	**0**	**6,5**	**32,5**	**41**	21	100

Fonte: elaboração dos autores.

Identificamos que a abordagem da divisão nos livros didáticos inicia-se a partir do volume 2, totalizando 6,6% das atividades, conforme

3 Consideramos as questões referentes à divisão. Os itens não foram contados.

o recomendado pela BNCC (BRASIL, 2017), no volume 3, identificamos 32,5%, no volume 4, 41% e diminuição no volume 5 (21%). A coleção com maior frequência é a B, com 34,2% das atividades; a coleção C teve a menor frequência identificada com 32,2% cada. A quantidade de atividades de uma coleção para a outra é praticamente a mesma.

Contrapondo-se à pesquisa, Selva (1998) aponta que as crianças na educação infantil conseguem resolver situações de divisão com as ideias de partição e quotição. Os livros didáticos dos anos iniciais, seguindo as recomendações curriculares, iniciam a abordagem do conceito a partir do 2º ano do ensino fundamental.

Quanto à frequência dos significados das operações presentes nos livros didáticos, identificamos, a partir do volume 2 de todas as coleções, três tipos de significados, conforme apontado pela BNCC (BRASIL, 2017): repartição em partes iguais (RI), em 138 atividades (33,8%), 96 atividades (23,4%) com Medidas (M), 59 atividades (14,4%) com ideias de metade e terça parte(Mt), e 116 atividades (28,4%) referentes a outros contextos (Oc), como observa-se na Tabela 2.

Os resultados revelam que 71,6% das situações propostas nos livros didáticos priorizam os significados das operações. Observa-se que a abordagem inicia-se no 2º ano por situações que passam a ideia de metade e terça parte, quarta parte, quinta parte etc. Sobre os significados das operações, estudos e documentos curriculares anteriores, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), recomendam esse tipo de abordagem. Identificamos que as ideias de metade, terça parte, quinta parte etc. relacionando-se à divisão surgem como uma novidade. Outra mudança diz respeito à nomenclatura dos termos partição e quotição, que antes eram apresentados pelos PCN (BRASIL, 1997) e em Vergnaud (1996) como repartição de partes iguais e medida.

Com relação às estratégias de cálculo, a BNCC (BRASIL, 2017), destaca a importância de trabalhar com diversas formas de calcular divisões como o cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Observa-se que os livros didáticos de Matemática para os anos iniciais apresentam um número maior de estratégias de cálculo do que foi proposto no documento.

Tabela 2– Significados das operações presentes nos livros didáticos

Coleções e Volumes		Significados das operações				subtotal	total
		Ri	**M**	**Mt**	**Oc**		
A	V2	4	1	10	0	15	133
	V3	24	5	6	12	47	
	V4	12	19	0	15	46	
	V5	8	4	1	16	29	
B	V2	0	0	3	0	3	148
	V3	18	14	11	4	47	
	V4	18	19	0	14	51	
	V5	11	12	4	12	39	
C	V2	0	0	9	0	9	125
	V3	11	11	9	3	34	
	V4	26	9	6	30	71	
	V5	6	2	0	10	18	
Total		**138**	**96**	**59**	**116**	**409**	**409**
%		**33,8**	23,4	14,4	28,4	100	100

Fonte: elaboração dos autores

(Legenda: Ri – repartição em partes iguais, M - Medidas, Mt - Metade, terça parte, (Oc) outros contextos)

Observamos que o algoritmo convencional – AC (34,8%) é a estratégia de cálculo mais utilizada nos livros didáticos; seguida pelo uso das estratégias de operações inversas – OI (14,1%); e do desenho – D (9%). As estratégias sugeridas pela BNCC (BRASIL, 2017) cálculo por estimativa – E e cálculo mental foram abordadas respectivamente em 2,2% e 3,4% das atividades. Já as estratégias de cálculo algoritmo por subtrações sucessivas (AS), decomposição (DEC), reta numérica (RN) e calculadora (C) somam (8,4%) das estratégias. Identificamos que 28,1% não explicitam a estratégia de cálculo (NEC) que os alunos devem utilizar para resolver as situações-problemas. A tabela 3, apresenta a frequência das estratégias de cálculo presentes nos livros didáticos de Matemática analisados.

Tabela 3 - Estratégias de cálculo de divisão mais recorrentes nos livros didáticos

Coleções e volume		**Estratégias de cálculo**											**Sub total**	**Total**
		D	**E**	**A**	**AC**	**AS**	**CM**	**OI**	**DEC**	**RN**	**C**	**NEC**		
A	V2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	10	133
	V3	3	2	0	6	0	2	7	3	0	1	20	44	
	V4	0	5	0	6	2	5	5	0	0	0	23	46	
	V5	0	0	0	7	0	1	4	3	0	0	18	33	
B	V2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	148
	V3	8	0	0	20	0	0	0	0	0	0	24	52	
	V4	7	0	0	40	0	0	5	0	0	4	0	56	
	V5	0	0	0	29	0	2	0	0	0	0	7	38	
C	V2	1	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	7	125
	V3	8	0	0	0	0	2	20	0	5	0	13	48	
	V4	5	0	3	25	5	2	9	0	4	0	0	53	
	V5	0	2	2	9	0	0	2	0	0	2	3	20	
Total		**37**	**9**	**5**	**142**	**7**	**14**	**58**	**6**	**9**	**7**	**115**	**409**	**409**
%		**9,0**	**2,2**	**1,2**	**34,8**	**1,8**	**3,4**	**14,1**	**1,4**	**2,2**	**1,8**	**28,1**	**100**	**100**

Fonte: elaboração dos autores

(Legenda: D – desenho, E – estimativa, A – arredondamento, AC- Algoritmo convencional, AS- Algoritmo por subtração sucessiva, CM – Cálculo Mental, OI- operação inversa, DEC- decomposição, RN- reta numérica, C- Calculadora, NEC- Não explícita a estratégia de cálculo)

Observamos que os livros didáticos têm abordado o ensino da divisão por meio de múltiplas estratégias de cálculo. As atividades que sugerem o uso de estimativa, arredondamento, decomposição e cálculo mental trabalham com a propriedade distributiva da divisão. Observamos também o uso das operações inversas como estratégias, mas predomina o uso do algoritmo convencional (usual), principalmente nas coleções B e C. Enquanto o algoritmo por subtrações sucessivas (algoritmo americano) é abordado nas coleções A e C em pouquíssimas atividades.

Contudo, os resultados mostram que a abordagem da divisão de números naturais tende a seguir as recomendações da BNCC (BRASIL, 2017), as quais categorizamos da seguinte maneira:

- *Significados das operações*: metade, terça parte, quarta parte, quinta parte, décima e repartir em partes iguais, medida e outros contextos.
- *Estratégias de Cálculo*: operações inversas, decomposição, cálculo mental, desenho, algoritmos por subtrações e estimativa e algoritmos convencionais.

A seguir, fazemos uma análise da abordagem de cada subcategoria identificada nas coleções.

Significados das operações

Na realidade, uma situação-problema pode envolver diferentes conceitos, e um mesmo conceito pode estar imbricado em diferentes situações (VERGNAUD, 1994). Essa perspectiva ilustra a relação em rede estabelecida entre os conceitos, e entre eles e as situações. Para VERGNAUD (1994), as concepções dos estudantes se desenvolvem com o passar do tempo por meio de experiências com muitas situações. Identificamos nas coleções analisadas diferentes situações que atribuíam significado às operações, subcategorizadas nesse estudo como: metade, terça parte, quarta parte, quinta parte, décima, repartir em partes iguais (partição), medida (quotição) e outros contextos.

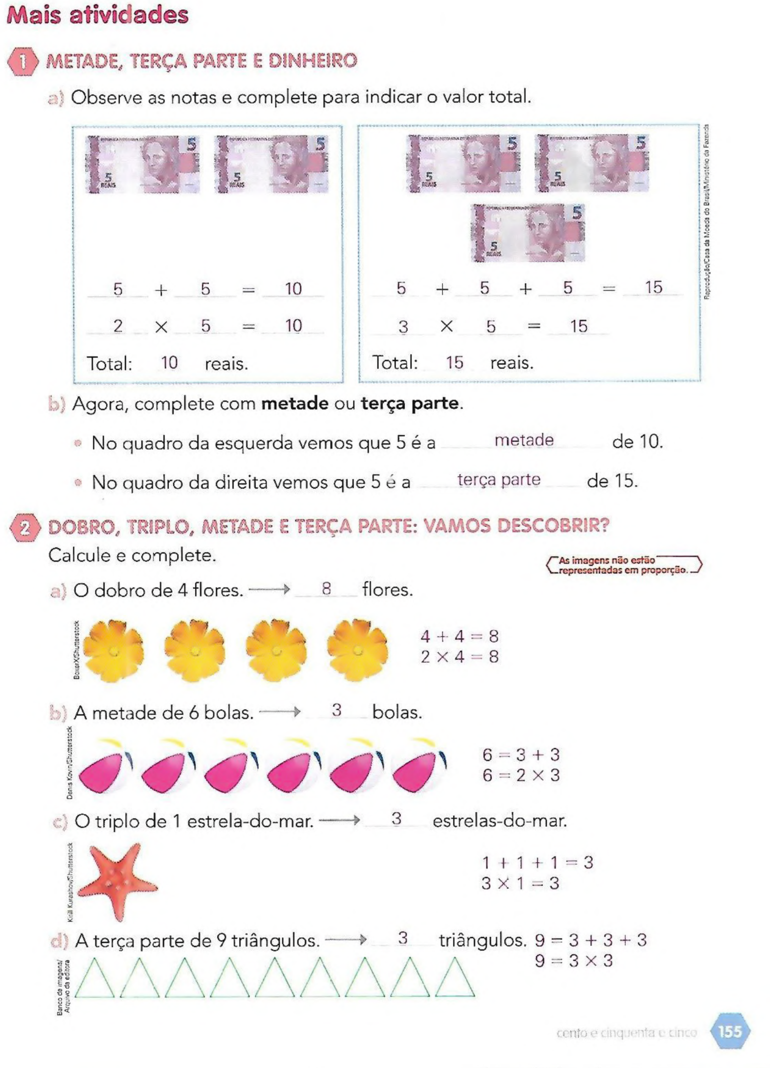
A *ideia de metade e terça parte* relacionada à divisão é proposta pela BNCC (BRASIL, 2017), no 2º e 3º anos do ensino fundamental. Identificamos que essa ideia tem sido utilizada para introduzir a discussão de divisão nas três coleções analisadas. A Figura 1 ilustra a abordagem.

As atividades supracitadas trabalham metade e terça parte de quantias. No item A, os estudantes têm que observar as notas para indicar os valores realizando soma e multiplicação. No item b, têm que completar com as palavras metade de 10 e terça parte de 15. Observa-se que, com perguntas como essas, eles relacionam intuitivamente a terça parte e triplo como ideias inversas. Na segunda atividade, identificamos a intenção de relacionar dobro à metade e triplo à terça parte das quantidades de flores, bolas, estrelas-do-mar e triângulos, utilizando a estratégia de fazer desenhos. Observamos que a atividade traz como suporte as imagens e materiais manipuláveis (quantia de dinheiro) e estimula estratégias pessoais por meio da representação simbólica (desenho), tal como possibilita que os estudantes explicitem seus conhecimentos de forma simbólica.

A BNCC (BRASIL, 2017, p. 282) propõe para o 2º e 3º ano "resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais". Contudo, identificamos que a abordagem dessa ideia começa no 2º ano e em algumas coleções vai até o 5º ano.

Na *repartição (partição)*, está explícita a ideia de repartir equitativamente os elementos de um dado conjunto. Percebe-se a abordagem da divisão exata, com relação ao símbolo da divisão com a língua escrita (natural) – representação simbólica. Também identificamos o uso da multiplicação como "prova" da divisão, sendo utilizada como apoio para encontrar a resposta correta. É o que podemos observar na Figura 2.

Figura 1 - Ideias de metade e terça parte.



Mais atividades

1 METADE, TERÇA PARTE E DINHEIRO

a) Observe as notas e complete para indicar o valor total.

5 + 5 = 10	5 + 5 + 5 = 15
2 × 5 = 10	3 × 5 = 15
Total: 10 reais.	Total: 15 reais.

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

b) Agora, complete com **metade** ou **terça parte**.

- No quadro da esquerda vemos que 5 é a metade de 10.
- No quadro da direita vemos que 5 é a terça parte de 15.

2 DOBRO, TRIPLO, METADE E TERÇA PARTE: VAMOS DESCOBRIR?

Calcule e complete.

As imagens não estão representadas em proporção.

a) O dobro de 4 flores. ⟶ 8 flores.

BoxerX/Shutterstock

4 + 4 = 8
2 × 4 = 8

b) A metade de 6 bolas. ⟶ 3 bolas.

Denis Kovin/Shutterstock

6 = 3 + 3
6 = 2 × 3

c) O triplo de 1 estrela-do-mar. ⟶ 3 estrelas-do-mar.

Kirill Kurashov/Shutterstock

1 + 1 + 1 = 3
3 × 1 = 3

d) A terça parte de 9 triângulos. ⟶ 3 triângulos.

9 = 3 + 3 + 3
9 = 3 × 3

Banco de imagens/Arquivo da editora

cento e cinquenta e cinco 155

Fonte: Dante (2017, v. 2, p. 155).

Figura 2 - ideia de repartição

Ideias da divisão

Repartir igualmente

1 PROBLEMA

Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.
Quantos bombons ela vai colocar em cada caixa?

Bombons.

Compreender

O que você sabe: Helena fez 18 bombons e vai reparti-los igualmente em 3 caixas.

O que você quer saber: quantos bombons devem ficar em cada caixa.

Planejar

Como Helena quer distribuir igualmente 18 bombons em 3 caixas, ela deve efetuar a operação de **divisão**, dividindo 18 por 3.

Indicamos: 18 ÷ 3. Lemos: Dezoito dividido por três.

Executar

Podemos colocar 1 a 1 os bombons em cada caixa até acabarem.

Caixas de bombons.

Complete.

Número total de bombons: 18

Número de caixas: 3

Número de bombons em cada caixa: 6

Divisão correspondente: 18 ÷ 3 = 6

Verificar

Como são 3 caixas e 6 bombons em cada uma delas, temos 3 × 6 = 18, que era a quantidade inicial de bombons. Assim, 18 ÷ 3 = 6 e o cálculo está correto.

Responder

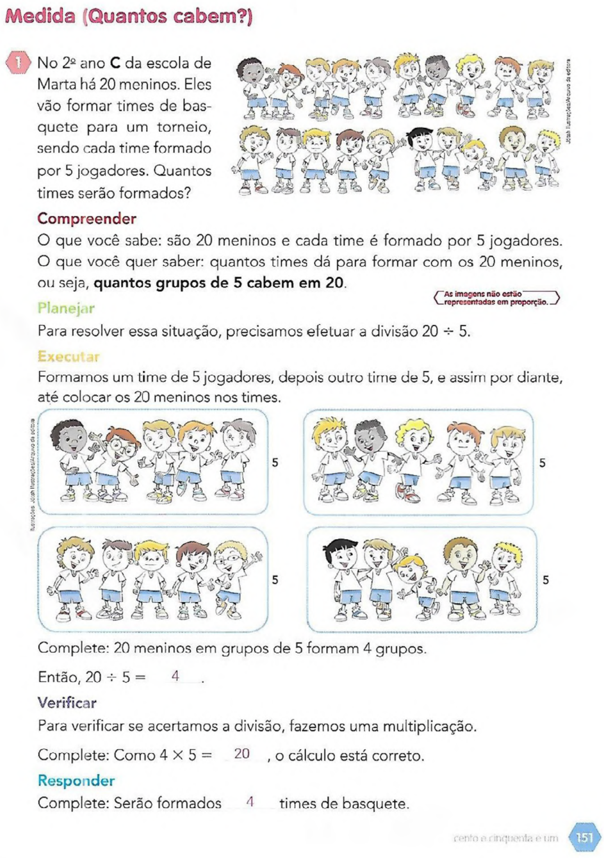
Complete: Helena vai colocar 6 bombons em cada caixa.

cento e quarenta e nove 149

Fonte: Dante (2017, v. 3, p.149).

É possível identificar que a criança, para responder a essa questão, precisa relacionar três variáveis: o número total de bombons, o número de caixas e o número de bombons por caixas. Nas situações que envolvem *ideia de medida (quotição)* também identificamos a abordagem da divisão exata, com relação ao símbolo da divisão com a língua escrita (natural) – representação simbólica. Vemos também a multiplicação como “prova” da divisão sendo utilizada como apoio para encontrar a resposta correta. Na Figura 3, apresentamos as situações relacionadas à medida:

Figura 3 - Ideia de Medida (quotição)



Medida (Quantos cabem?)

1 No 2º ano **C** da escola de Marta há 20 meninos. Eles vão formar times de basquete para um torneio, sendo cada time formado por 5 jogadores. Quantos times serão formados?

Compreender

O que você sabe: são 20 meninos e cada time é formado por 5 jogadores.
O que você quer saber: quantos times dá para formar com os 20 meninos, ou seja, **quantos grupos de 5 cabem em 20**.

As imagens não estão representadas em proporção.

Planejar

Para resolver essa situação, precisamos efetuar a divisão 20 ÷ 5.

Executar

Formamos um time de 5 jogadores, depois outro time de 5, e assim por diante, até colocar os 20 meninos nos times.

5 5 5 5

Complete: 20 meninos em grupos de 5 formam 4 grupos.

Então, 20 ÷ 5 = 4.

Verificar

Para verificar se acertamos a divisão, fazemos uma multiplicação.

Complete: Como 4 × 5 = 20, o cálculo está correto.

Responder

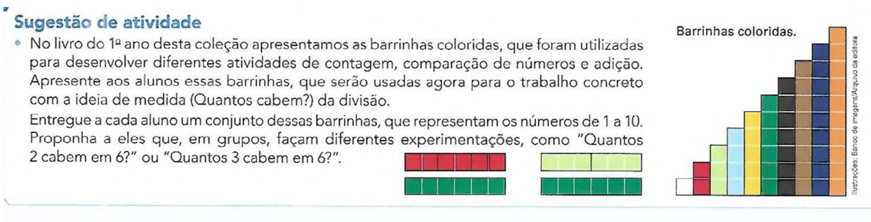
Complete: Serão formados 4 times de basquete.

cento e cinquenta e um 151

Fonte: Dante (2017, v. 3, p. 151).

Aqui temos o todo conhecido – 20 meninos – dividido em subconjuntos, previamente estabelecidos – 5 jogadores –, devendo-se calcular quantas vezes esses subconjuntos estão contidos no todo – quotas. Podemos observar que os problemas de repartição (partição) e medida (quotição) são de divisão e requerem uma forma de raciocínio diferente da que está imbricada na situação, reforçando a ideia de que existem diferentes situações que envolvem um mesmo conceito (VERGNAUD, 1996). Observa-se que as ideias de repartição (partição) e medida (quotição) são abordadas em diversas formas de representações simbólicas. Na Figura 4 a seguir, identificamos uma sugestão de atividade com barrinhas coloridas:

Figura 4 - Barrinhas coloridas



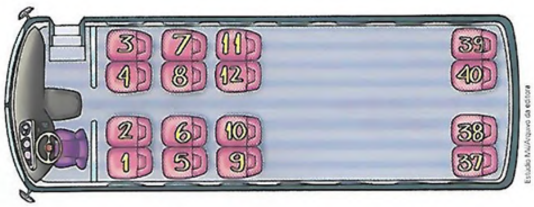
Fonte: Dante (2017, v. 3, p. 152).

Podemos observar nessa sugestão de atividades com barrinhas coloridas que está explícita a intenção de trabalhar com a ideia de medida, na qual os estudantes terão que fazer diversas experimentações. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), as ideias referentes a repartição e medida estão presentes no 3º, 4º e 5º ano do ensino fundamental por meio de estratégias e registros pessoais. Observamos que os livros didáticos, nesse item, tendem a seguir as recomendações do BNCC.

Com relação a outros contextos que dão significado às operações, identificamos jogos, atividades em malhas (quadriculadas, triangulares, hexagonais), dobraduras, sugestões de livros de literatura, contas armadas para que a criança exercite o algoritmo, ou situações-problemas que não estão relacionadas às ideias já supracitadas. A seguir, apresentaremos na Figura 5 uma situação que tem como finalidade abordar as regularidades da divisão:

Figura 5 - regularidades da divisão

Caíque é muito esperto e observa todos os números ao redor dele. Ele percebeu que a disposição da numeração dos assentos em um ônibus era como a desta imagem.



Durante a viagem, em um dos percursos, a luz do Sol batia do lado do motorista. Como Caíque queria viajar na sombra e na janela, ele comprou a passagem para o assento número 19.

$$\begin{array}{r|l} 19 & 4 \\ \hline -16 & 4 \\ \hline 03 & \end{array}$$

a) Como ele chegou a esse número?

Exemplo de resposta: Ele precisava escolher um número que, dividido por 4, desse resto 3, ou seja, tinha de ser um número da sequência $3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots, 39$.
$+4$ $+4$ $+4$ $+4$ $+4$

b) Que outros números de assentos ele poderia pedir?

3, 7, 11, 15, 23, 27, 31, 35 e 39.

156 cento e cinquenta e seis

Fonte: Dante (2017, v. 4, p. 156).

Na atividade acima, espera-se que os estudantes percebam a regularidade nas divisões com restos iguais. Para isso, precisaria escolher os números e dividi-los por quatro. Esse tipo de situação-problema difere das ideias de repetição, medida e metade e terça parte, pois trabalham um aspecto pontual.

Verificamos uma tendência das coleções de livros didáticos de seguir as recomendações da BNCC (BRASIL, 2017) ao proporem diferentes significados das operações. Ressaltamos que, esse aspecto também é consensual entre os pesquisadores Selva (1998) e Vergnaud (1982, 1990, 1994), que consideram que a criança precisa vivenciar uma variedade de situações de divisão antes da apresentação do algoritmo. De acordo com Jesus (2005, p. 97), "criar e explorar os seus próprios processos de resolver problemas prepara os alunos para uma aprendizagem significativa dos algoritmos estandardizados".

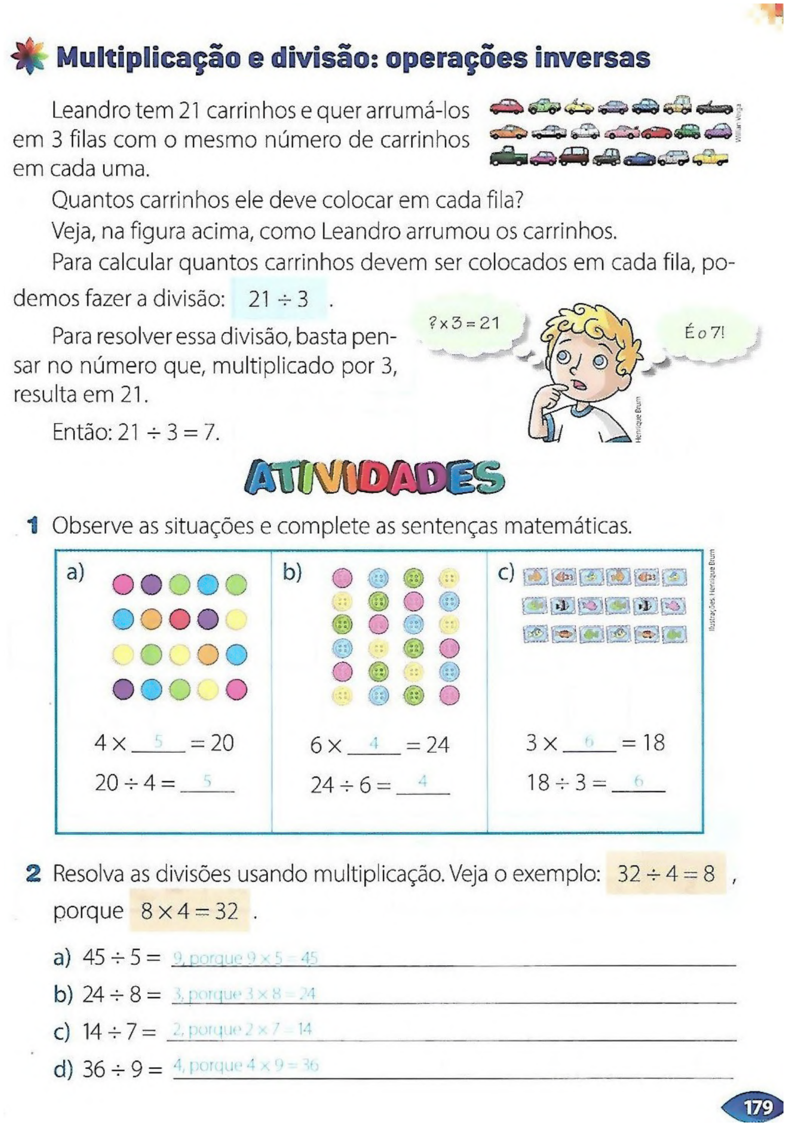
A seguir, discutiremos as diversas estratégias de cálculo identificadas nas coleções analisadas.

Estratégias de cálculo identificadas nas coleções analisadas

As operações inversas estão presentes em todas as coleções. Nesse tipo de estratégia, há a finalidade de fazer com que o aluno perceba que a multiplicação e a divisão são operações inversas (campo multiplicativo), explorando bastante as representações simbólicas, como podemos observar na Figura 6.

A decomposição é uma estratégia de cálculo que possibilita a reflexão sobre a propriedade distributiva em relação à adição, oferecendo diversas possibilidades de cálculo. Afinal, essa propriedade possibilita que, em uma divisão, possa-se decompor o dividendo em parcelas e dividir pelo mesmo divisor cada uma dessas parcelas separadamente, obtendo resultados parciais. A soma desses resultados será o quociente da divisão. Na Figura 7, podemos observar esse aspecto.

Figura 6 - atividade com operação inversa



Multiplicação e divisão: operações inversas

Leandro tem 21 carrinhos e quer arrumá-los em 3 filas com o mesmo número de carrinhos em cada uma.

Quantos carrinhos ele deve colocar em cada fila?

Veja, na figura acima, como Leandro arrumou os carrinhos.

Para calcular quantos carrinhos devem ser colocados em cada fila, podemos fazer a divisão: $21 \div 3$.

Para resolver essa divisão, basta pensar no número que, multiplicado por 3, resulta em 21.

Então: $21 \div 3 = 7$.

ATIVIDADES

1 Observe as situações e complete as sentenças matemáticas.

a) $4 \times$ 5 $= 20$
$20 \div 4 =$ 5

b) $6 \times$ 4 $= 24$
$24 \div 6 =$ 4

c) $3 \times$ 6 $= 18$
$18 \div 3 =$ 6

2 Resolva as divisões usando multiplicação. Veja o exemplo: $32 \div 4 = 8$, porque $8 \times 4 = 32$.

a) $45 \div 5 =$ 9, porque $9 \times 5 = 45$

b) $24 \div 8 =$ 3, porque $3 \times 8 = 24$

c) $14 \div 7 =$ 2, porque $2 \times 7 = 14$

d) $36 \div 9 =$ 4, porque $4 \times 9 = 36$

179

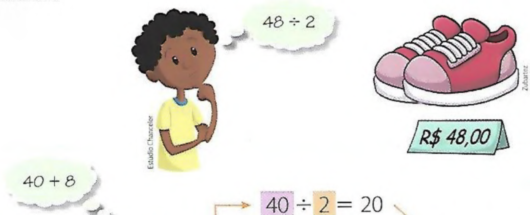
Fonte: Bordeaux *et al.* (2017, v.3, p. 179).

Figura 7 - divisão por decomposição

Decompondo o dividendo para dividir

Lucas comprou um par de tênis que custa R\$ 48,00 e pagou em 2 parcelas iguais.

Para calcular o valor de cada parcela, sem usar lápis e papel, Lucas pensou assim:



$48 \div 2 \rightarrow \begin{cases} 40 \div 2 = 20 \\ 8 \div 2 = 4 \end{cases} \rightarrow 20 + 4 = 24$

O valor de cada parcela é R\$ 24,00.

ATIVIDADES

1 Faça agora os cálculos do mesmo modo que Lucas fez.

a) $64 \div 2 =$ $64 \div 2 =$ $60 \div 2 = 30$; $4 \div 2 = 2$; $30 + 2 = 32$	c) $77 \div 7 =$ $77 \div 7 =$ $70 \div 7 = 10$; $7 \div 7 = 1$; $10 + 1 = 11$
b) $69 \div 3 =$ $69 \div 3 =$ $60 \div 3 = 20$; $9 \div 3 = 3$; $20 + 3 = 23$	d) $84 \div 4 =$ $84 \div 4 =$ $80 \div 4 = 20$; $4 \div 4 = 1$; $20 + 1 = 21$

193

Fonte: Bordeaux *et al*. (2017, v.3, p. 191).

Observamos na atividade, uma situação de repartição de parcelas iguais, na qual o valor R$ 48,00 é decomposto em parcelas iguais, dividindo-se pelo mesmo divisor 2 cada uma dessas parcelas separadamente, obtendo-se resultados parciais. Depois, esses resultados foram somados, obtendo-se o quociente. A atividade que segue propõe que se realize o mesmo procedimento. Percebemos que essas atividades que envolvem as estratégias de decomposição evidenciam a articulação entre o campo multiplicativo e o aditivo.

A estratégia de cálculo mental foi identificada nas três coleções analisadas. Esse tipo de estratégia, por vezes, solicita dos sujeitos a decomposição e a aproximação. O cálculo mental envolve um conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Na Figura 8, podemos observar uma atividade de divisão de dezenas exatas.

Na atividade, observa-se uma situação de repartição que envolve o cálculo mental de divisão de dezenas exatas que introduz a discussão. Depois, no primeiro quesito, o cálculo de dezenas exatas. No segundo quesito, o estímulo ao cálculo por aproximação e quociente e depois a proposta de ligar cada divisão ao seu resultado. Diferente das situações anteriores, no segundo quesito os resultados não serão exatos, apenas aproximados. Percebemos que a atividade possibilita desenvolver e sistematizar procedimentos de cálculo por aproximação e estratégias de verificação e controle de resultados.

O cálculo mental também é muito perspicaz na mobilização de conhecimentos sobre as propriedades do sistema de numeração e as quatro operações básicas, justamente por envolver decomposições e arredondamentos. Observamos que a BNCC (BRASIL, 2017) recomenda o uso dessa habilidade de cálculo nos anos iniciais do ensino fundamental.

Figura 8 - Estratégia cálculo mental

CÁLCULO MENTAL

Divisão de dezenas exatas

Marisa quer distribuir igualmente entre seus 3 sobrinhos a quantia de R$ 60,00. Ela tem 6 notas de R$ 10,00. Logo, ela fará a distribuição da seguinte maneira:

Fotos: Banco Central do Brasil

Ela também pode fazer assim:
60 ÷ 3 é o mesmo que 6 dezenas divididas por 3 (6 D ÷ 3);
6 D ÷ 3 = 2 D, que é igual a 20 unidades.
Cada sobrinho receberá R$ 20,00.

Veja como podemos fazer 40 ÷ 4:
40 ÷ 4 é o mesmo que 4 D ÷ 4 = 1 D ou 10 U.

ATIVIDADES

1 Calcule:

a) 60 ÷ 2 = 30 c) 40 ÷ 2 = 20 e) 60 ÷ 3 = 20

b) 50 ÷ 5 = 10 d) 60 ÷ 6 = 10 f) 90 ÷ 3 = 30

2 Calcule aproximadamente o quociente de cada uma das divisões abaixo e depois ligue cada divisão ao seu resultado.

a) 89 ÷ 3 — 30
b) 38 ÷ 4 — 10
c) 91 ÷ 2 — 45
d) 41 ÷ 2 — 20

191

Fonte: Bordeaux *et al.* (2017, v.3, p. 191).

> No ensino fundamental – anos iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e *cálculo mental*, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p. 268, grifo nosso).

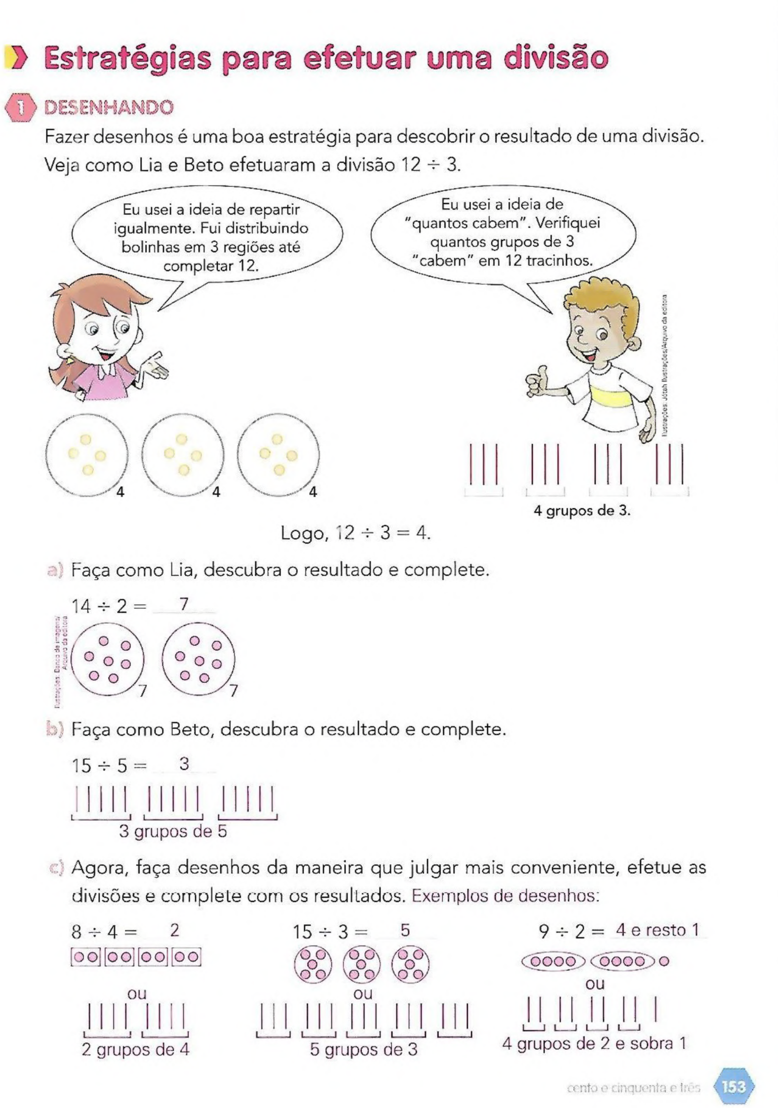
Nessa direção, concordamos com Sequerra e Marincek (2001), ao destacarem que o cálculo mental valoriza a importância e utilidade das medições e cálculos aproximados em determinadas situações da vida cotidiana, para desenvolver estratégias pessoais.

Neste estudo, a estratégia de cálculo desenho foi encontrada em todas as coleções. O desenho é uma forma de representação simbólica de conceitos e conhecimentos matemáticos. Na Figura 9, é possível identificar uma situação de repartição, cuja estratégia demonstrada é pictográfica (traços e bolinhas, que são distribuídos igualmente).

Observamos na atividade que o desenho é utilizado como recurso que nos permite perceber quais significados atribuir aos conceitos aprendidos e resolver os problemas que nos são propostos. Vergnaud (1982, p. 53) apresenta duas vantagens do uso das representações simbólicas: "1° ajudar os estudantes a resolver as situações-problema; 2° ajudar os estudantes a diferenciar várias estruturas e categorias de situações-problema".

Os algoritmos convencional ou por subtrações sucessivas também são formas de representação simbólica muito presentes nos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental. O algoritmo de divisão por subtrações sucessivas também é conhecido por algoritmo americano. É um método que se apoia no cálculo por estimativa. Tentamos dar certo número de elementos para cada um; se não for possível, tentaremos uma quantidade menor, e assim por diante. Podemos observar a estratégia na Figura 10.

Figura 9 - Estratégia de cálculo desenho



Estratégias para efetuar uma divisão

1 DESENHANDO

Fazer desenhos é uma boa estratégia para descobrir o resultado de uma divisão. Veja como Lia e Beto efetuaram a divisão 12 ÷ 3.

Logo, 12 ÷ 3 = 4.

a) Faça como Lia, descubra o resultado e complete.

14 ÷ 2 = 7

b) Faça como Beto, descubra o resultado e complete.

15 ÷ 5 = 3

c) Agora, faça desenhos da maneira que julgar mais conveniente, efetue as divisões e complete com os resultados. Exemplos de desenhos:

8 ÷ 4 = 2

15 ÷ 3 = 5

9 ÷ 2 = 4 e resto 1

cento e cinquenta e três 153

Fonte: Dante (2017, v. 3, p. 153).

Figura 10 - Algoritmos por subtração sucessiva ou estimativa

Divisão por subtrações sucessivas com estimativa

No fim de semana, os três garçons do restaurante Q-Delícia tinham 254 reais na caixinha para ser repartidos igualmente entre eles.

Veja como eles fizeram a divisão:

254	3	
− 150	50	→ 1ª distribuição: 50 reais para cada um Quantia retirada: 150 reais. 254 − 150 = 104 Ainda sobram 104 reais.
104		
− 60	20	→ 2ª distribuição: 20 reais para cada um Quantia retirada: 60 reais. 104 − 60 = 44 Ainda sobram 44 reais.
44		
− 30	10	→ 3ª distribuição: 10 reais para cada um Quantia retirada: 30 reais. 44 − 30 = 14 Ainda sobram 14 reais.
14		
− 12	4	→ 4ª distribuição: 4 reais para cada um Quantia retirada: 12 reais. 14 − 12 = 2 Ainda sobram 2 reais.
2		
	84	→ Total que cada garçom recebeu: 50 + 20 + 10 + 4 = 84.

Verificando:

84 → para o 1º garçom
84 → para o 2º garçom
84 → para o 3º garçom
\+ 2 → sobraram
254

Deu certo!

153

Fonte: Bordeaux *et al* (2018, v. 4, p. 153).

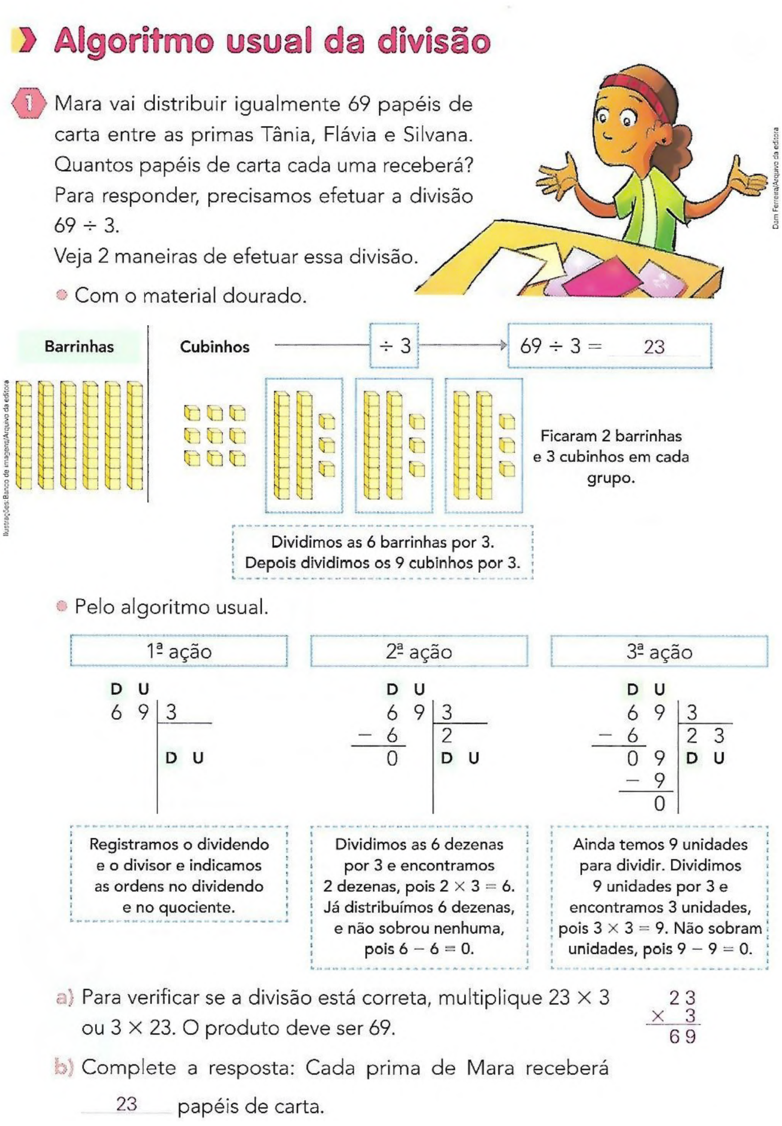
Na atividade acima, 254 ÷ 3, é possível efetuarmos o algoritmo por subtrações sucessivas com diferentes estimativas, obtendo o mesmo resultado. Em alguns casos, a operação exige que se façam reagrupamentos das ordens, "desagrupar ou transportar". No quociente, são gerados resultados parciais à medida que o algoritmo vai se desenvolvendo. Esse método exige que a operação de adição seja utilizada nos resultados parciais registrados no quociente, a fim de chegarmos ao resultado.

Segundo Silva (2014), o método por subtrações sucessivas está relacionado à operação de subtração reiterada de parcelas. Esse método exige do aluno a capacidade de estimar, além de ser necessário o conhecimento das tabuadas. Ao mesmo tempo em que o estudante faz a estimativa, ele precisa multiplicar, em seguida, subtrair e, finalmente, efetuar a adição. Silva (2014) recomenda que, depois que os estudantes conhecerem diversas maneiras de realizar a divisão, utilizando estratégias não convencionais e tiverem compreendido a operação, apresentemos o método das subtrações sucessivas.

Com relação ao algoritmo convencional, identificamos que é apresentado nas coleções, em sua maioria, por demonstrações e situações-problema, nas quais são fornecidas dicas para facilitar a identificação dos termos. E os procedimentos são desenvolvidos passo a passo, como nos exemplos ilustrados na Figura 11.

Observamos que a atividade aborda o algoritmo euclidiano, expõe princípios e formas de organização do Sistema de Numeração Decimal (SND), como a ordem de classe; decomposição de centenas em dezenas; valor posicional; explica o porquê de escrever o zero no quociente. Observamos nessa condução do algoritmo que os livros didáticos se apoiam nas regras do SND e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações. O método curto é uma "abreviação" do longo.

Figura 11 - Algoritmo convencional (usual)



Algoritmo usual da divisão

1 Mara vai distribuir igualmente 69 papéis de carta entre as primas Tânia, Flávia e Silvana. Quantos papéis de carta cada uma receberá? Para responder, precisamos efetuar a divisão $69 \div 3$.

Veja 2 maneiras de efetuar essa divisão.

- Com o material dourado.

Barrinhas | Cubinhos → $\div 3$ → $69 \div 3 =$ 23

Ficaram 2 barrinhas e 3 cubinhos em cada grupo.

Dividimos as 6 barrinhas por 3.
Depois dividimos os 9 cubinhos por 3.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dam Ferreira/Arquivo da editora

- Pelo algoritmo usual.

1ª ação	2ª ação	3ª ação
$\begin{array}{cc\|l} D & U & \\ 6 & 9 & 3 \\ \hline & & D\ U \end{array}$	$\begin{array}{cc\|l} D & U & \\ 6 & 9 & 3 \\ -6 & & 2 \\ \hline 0 & & D\ U \end{array}$	$\begin{array}{cc\|l} D & U & \\ 6 & 9 & 3 \\ -6 & & 2\ 3 \\ \hline 0 & 9 & D\ U \\ & -9 & \\ \hline & 0 & \end{array}$
Registramos o dividendo e o divisor e indicamos as ordens no dividendo e no quociente.	Dividimos as 6 dezenas por 3 e encontramos 2 dezenas, pois $2 \times 3 = 6$. Já distribuímos 6 dezenas, e não sobrou nenhuma, pois $6 - 6 = 0$.	Ainda temos 9 unidades para dividir. Dividimos 9 unidades por 3 e encontramos 3 unidades, pois $3 \times 3 = 9$. Não sobram unidades, pois $9 - 9 = 0$.

a) Para verificar se a divisão está correta, multiplique 23×3 ou 3×23. O produto deve ser 69.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 69 \end{array}$$

b) Complete a resposta: Cada prima de Mara receberá 23 papéis de carta.

Fonte: Dante (2017, v. 4, p. 159).

Silva (2014) considera que é necessário que o estudante compreenda primeiro as etapas envolvidas no processo do método longo. Quando o aluno tem confiança em proceder, autonomamente, na escolha do método, é possível que ele próprio decida o momento de empregar o método curto, quando estiver dominando o processo de divisão.

Considerações finais

Esta pesquisa teve por objetivo analisar a abordagem da divisão de números naturais dos livros didáticos de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental pós-BNCC (BRASIL, 2017). Para tanto, discutimos a divisão a partir da teoria dos campos conceituais (TCC) desenvolvida por Vergnaud (1982).

Os dados do estudo evidenciaram que a divisão com números naturais é abordada a partir do 2º ano do ensino fundamental, que equivale ao final do ciclo de alfabetização, conforme a BNCC (BRASIL, 2017). Em geral, nesse ciclo, os estudantes trabalham com a divisão a partir de partes correspondentes, sem restos, e por meio de agrupamentos.

Notamos que o algoritmo convencional é a estratégia de cálculo para divisão mais presente nos livros didáticos analisados, seguida pela utilização de operações inversas e desenho. Contudo, a BNCC (BRASIL, 2017) destaca o uso de cálculo por estimativa e cálculo mental. Tais estratégias foram identificadas com baixa frequência em todas as coleções consideradas.

Constatamos que as três coleções exploram os significados das operações a partir do 2º ano do ensino fundamental. Foram identificados três tipos de significados: repartição em partes iguais, com medidas e com ideias de metade e terça parte. Tal abordagem também é recomendada pela BNCC (BRASIL, 2017), no entanto, deve ser atrelada à valorização das estratégias de cálculo. Além disso, esse trabalho é destacado por pesquisadores como Selva (1998) e Vergnaud (1982; 1990;

1994), os quais recomendam a diversidade de situações de divisão pelas crianças, antes de serem introduzidas ao uso do algoritmo.

A partir dos dados analisados, resgatamos as considerações da pesquisa de Wallauer (2006), ao destacar que a utilização de estratégias pessoas ou elaboradas pelos estudantes pode contribuir com a aprendizagem da divisão. Logo, o autor não recomenda o uso de algoritmos formais de forma precoce.

Ao longo dos anos iniciais do ensino fundamental, a divisão é trabalhada em diferentes situações cotidianas semelhantes às vividas pelos estudantes em sua realidade. Esse fenômeno é relevante, visto que tais situações dão significado ao conceito trabalhado em sala de aula.

Concluímos que os achados deste estudo sinalizam que há uma aproximação entre a abordagem da divisão evidenciada nos livros didáticos e as orientações da BNCC (BRASIL, 2017), o que pode justificar a aprovação das coleções no PNLD de 2020 para uso e distribuição nas escolas que ofertam os anos iniciais do ensino fundamental.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília, DF: MEC, 2017.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. *PISA 2018*: Relatório Nacional. Brasília, DF: INEP, MEC, 2018a.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *PNLD 2019*: Matemática – guia de livros didáticos. Brasília, DF: MEC, 2018b.

BRASIL. Secretária de Educação Básica. *Relatório SAEB 2017*. Brasília, DF: INEP/MEC, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental*: Matemática. Brasília, DF: MEC, 1997.

BENVENUTTI, L. C. *A operação divisão*: um estudo com alunos de 5ª série. 2008. 61 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina, Itajaí, 2008.

BORDEAUX, A. L. *et al. Bem-me-quer*: Matemática. São Paulo: Editora Brasil, 2017. v. 3.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. 9. ed. Lisboa: Sá da Costa, 1989.

CARRAHER, D. W. Relações entre razão, divisão e medida. *In*: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. W. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos*: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998. p. 73-94.

CORREA, J.; SPINILLO, A. G. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. *In*: PAVANELLO, R. M. (Org.). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*: a pesquisa e a sala de aula. São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, 2004. (Coleção SBEM, v. 2, p. 103-127).

CUNHA, M. C. C da. *As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries*. 1997. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 1997.

DANTE, L. R. Ápis Matemática. São Paulo: Editora Ática, 2017. v. 2, v. 3, v. 4.

DICKSON, L.; BROWN, M.; GIBSON, O. *Children learning mathematics*. Londres: Cassel for the Schools Council, 1984.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 1999.

FERREIRA, E. Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º ciclo. *In*: GTI (Org.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 2005.

GIOVANNI JÚNIOR. J. R. *Conquista da matemática*. São Paulo: FTD, 2018. v. 4.

JESUS, A. M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. *In*: GTI (Org.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 2005. p. 91-111.

LIMA. R. R de. *Campo Multiplicativo*: estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió. 2012. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2012.

LOUREIRO, C. Em defesa da utilização da calculadora: Algoritmos com sentido numérico. *Educação e Matemática*, Lisboa, APM, n. 77, p. 22-29, 2004.

MANDARINO, M. C. F. Números naturais: conteúdo e forma. Rio de Janeiro. Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.

MALDANER, A. *Educação Matemática*: fundamentos teórico-práticos para professores dos anos iniciais. Porto Alegre: Mediação, 2011.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, L. TELES, R.; PESSOA, C. Abordagem de algoritmos da divisão em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais. *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 2, n. 4, p. 57-80, jan./abr. 2018.

QUEIROZ, S.; LINS, M. A aprendizagem de Matemática por alunos adolescentes na modalidade Educação de Jovens e Adultos: analisando as dificuldades na resolução de problemas de estrutura aditiva. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 75- 96, abr. 2011.

SANTOS, V. M. P. dos. *Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática*: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SANTOS, V. M. P.; REZENDE, J. F. R. *Números*: linguagem universal. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1996.

SELVA, A. C. V. A resolução de problemas de divisão: o que já sabemos? Como podemos contribuir para sala de aula? *In*: GUIMARÃES, G.; BORBA, R. (Org.). *Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização*. Recife: SBEM, 2009.

SELVA, A. C. V. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. *In*: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. W. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos*: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998.

SEQUERRA, M. L.; MARINCEK, V. *Aprendendo Matemática resolvendo problemas*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SILVA, A. L. M. *A apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental*. 2014, 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

TELES, R. A. M. *Imbricações entre os campos conceituais na Matemática*: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Teoria e prática de Matemática*: como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *In*: CARPENTER, T., MOSER, J. ROMBERG, T. *Addition and subtraction*: A cognitive perspective. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982. p. 39-59.

VERGNAUD, G. A. A Teoria dos Campos conceituais. *In*: BRUN, J. *Didáctica das matemáticas*. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. A. *El niño, las matemáticas y la realidad*: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. A. La théorie des champs conceptuels. *Recherchesen Didactiquedes Mathématiques*, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. A. Multiplicative conceptual field: what and why? *In*: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Ed.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. A. Problem solving and concept development in the learning of mathematics. *E.A.R.L.I.*, Second Meeting. Tübingen. 1987.

WALLAUER, A. *Reflexões sobre a construção da operação de divisão em crianças de 1ª e 2ª série de classes multisseriadas*. 2006. 205 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

PARTE 4

QUERO APENAS AS UNIDADES DE MILHAR!

Quando a linguagem matemática invade a vida real

por Rosinalda Aurora de Melo Teles

Essa história se passa na década de 1980. O Brasil vivia um cenário de hiperinflação que durou entre a década de 1980 e 1990. A inflação estava em níveis elevados desde antes do regime militar brasileiro (1964-1985), gerado principalmente pela expansão monetária e a crise do petróleo. Ao final do regime militar, a média de inflação anual foi de 69,89% ao ano, com pico de 235% em 1985.

Nessa época muitas pessoas, especialmente donos de imóveis, agricultores e pecuaristas, venderam seus bens e investiram o dinheiro na poupança. A alta inflação gerava a falsa ilusão que o dinheiro estava rendendo, multiplicando-se ao ser aplicado na caderneta de poupança e as pessoas optaram por *viver de renda*, ou *dos juros*, como se dizia na época.

Uma jovem, desfrutando a alegria do seu primeiro emprego, depositava suas economias na caderneta de poupança. Era uma economia com finalidade de consumo futuro: guardava o dinheiro, que rendia juros, e quando atingia um determinado montante, ela retirava do banco e adquiria um bem de consumo, geralmente era algo necessário, não apenas desejado.

Essa jovem também era estudante dos primeiros períodos da Licenciatura em Matemática. A inserção nos estudos universitários lhes trouxe a percepção das lacunas em relação a conhecimentos elementares da Matemática oriundas da educação básica. Como forma de preencher essas lacunas, resolveu organizar um curso de reforço da matemática básica do *ginásio*, ou do *1º grau maior* (atualmente anos finais do Ensino Fundamental). Esse episódio se passa justamente quando o assunto estudado no curso de reforço era *ordens e classes no Sistema de Numeração Decimal.*

Certo dia, nossa personagem vai ao banco saber o saldo da sua caderneta de poupança, com o objetivo de retirar parte do montante para gastar.

– Bom dia! Disse ela ao caixa do banco.
– Gostaria de saber o saldo da minha caderneta de poupança, por favor!

Continuou entregando ao caixa um documento.

– Cinquenta e dois mil e trezentos cruzados. Informa o funcionário do banco.
– Então, me dê todas as dezenas de milhar e pode deixar o resto depositado.

Diz ela. O rapaz arregala os olhos e diz:

– Hein??? Quanto?

Ela percebe o espanto do moço, reflete que até ele precisava das aulinhas de matemática, e traduz o pedido feito em linguagem matemática para a linguagem da vida real:
– Eu quero retirar 50 mil e deixar depositados dois mil e trezentos cruzados.

Esse episódio nos ajuda a refletir como conhecimentos da vida real são ancorados em conhecimentos matemáticos, no entanto, as linguagens, as formas de representação são diferentes, como amplamente discutido em um dos clássicos da Educação Matemática: Na Vida 10, na Escola Zero, de autoria de Terezinha N. Carraher, David W. Carraher e Analúcia D. Schliemann, publicado pela Editora Cortez, em 1988.

Embora a moral dessa história seja um pouco diferente do que relata esse livro, do ponto de vista do ensino de números nos ajuda a pensar que o tema ordens e classes do SND está presente no ensino, nos livros didáticos, mas também é necessário que o conhecimento do professor seja ainda mais amplo, precisa compreender as propriedades e características do SND, para ajudá-lo a fazer escolhas didáticas e pedagógicas que ajudem seus estudantes a compreender o sistema e serem capazes de escrever qualquer número, bem como operar com eles.

Brejão, 1986

CAPÍTULO 14

Números racionais: a relação entre documentos oficiais e livros didáticos

Juscelandia Machado Vasconcelos, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

A noção de números racionais tem início no 4º ano do ensino fundamental e se estende para os demais anos dessa etapa de ensino. Esse objeto de conhecimento surge principalmente para que os estudantes percebam que o conjunto dos números naturais é insuficiente para resolver problemas do cotidiano. Mesmo com a possibilidade de aplicação deste conhecimento no dia a dia, os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem dos racionais.

Tomando como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), bem como pesquisas realizadas sobre o assunto, buscamos analisar como esse conteúdo é apresentado em livros didáticos do 6º e 7º anos do ensino fundamental e se eles abrangem os significados de relação parte/todo; quociente; razão ou operador; localização na reta numérica; análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema propostos pelos PCN e pela BNCC para esse conteúdo. Constatamos que as coleções analisadas atendem ao que é sugerido nos documentos oficiais, muito embora alguns dos significados citados fiquem aquém do desejado e outros são enfatizados em demasia, daí a importância de escolher com cautela o livro didático, pois este se configura, em muitos casos, como a principal ferramenta didática do professor.

O livro didático

O livro é uma ferramenta educacional "adotado nas escolas oficiais desde 1854", (RIBEIRO, 2003, p. 55), muito embora eram poucas as pessoas que a ele tinham acesso, pois até mesmo a escola era privilégio de uma pequena parcela da população.

Conforme Witzel (2002), na década de 1930, foi criada uma proposta de regulamentação para a produção e distribuição de livros didáticos nas escolas.

> Foi nessa época, pois, que se consagrou o termo 'livro didático' entendido até os dias de hoje como sendo, basicamente, o livro adotado na escola, destinado ao ensino, cuja proposta deve obedecer aos programas curriculares escolares. A definição desse termo se deu pela primeira vez no Decreto-Lei nº 1.006 de 30 de dezembro de 1938 – Art. 2 (WITZEL, 2002, p. 11).

Esse mesmo documento também criou a Comissão Nacional do Livro Didático, a qual tinha a competência de:

> a. examinar os livros didáticos que lhe forem apresentados, e proferir julgamento favorável ou contrário à autorização de seu uso;
> b. estimular a produção e orientar a importação de livros didáticos;
> c. indicar os livros didáticos estrangeiros de notável valor, que mereçam ser traduzidos e editados pelos poderes públicos, bem como sugerir-lhes a abertura de concurso para a produção de determinadas espécies de livros didáticos de sensível necessidade e ainda não existentes no país;
> d. promover, periodicamente, a organização de exposições nacionais dos livros didáticos cujo uso tenha sido autorizado na forma desta lei (BRASIL, 1939).

Como essa comissão foi criada no período do Estado Novo, marcado pelo espírito de nacionalidade, esse fato influenciava no aspecto de escolha destes livros. De acordo com Witzel (2002), os critérios para as avaliações dos livros valorizavam muito mais aspectos político-ideológicos do que pedagógicos.

Nosso intuito não é fazer um histórico sobre o livro didático, mas fizemos questão de resgatar esses dois momentos históricos para situar o leitor que este recurso está presente nas escolas há muito tempo e a criação do Decreto mencionado se configura na primeira tentativa de regulamentar a política nacional do livro didático no país[1], a qual se faz presente até os dias de hoje, com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que é um programa dos mais antigos, voltado à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino no Brasil.

Atualmente, o objetivo do PNLD é a distribuição gratuita não só de livros, mas também de materiais didáticos que atendam todos os componentes curriculares, para as instituições públicas brasileiras que englobam a educação básica, desde a Educação Infantil ao ensino médio.

Feito este preâmbulo, queremos nos voltar ao livro didático de Matemática, pois dentre os mais variados recursos que podem ser utilizados em sala de aula, este ainda se constitui como o principal recurso utilizado pelo professor para o ensino deste componente curricular. Os PCN fazem alusão à importância deste recurso, mas sugerem que ele deve ser usado com cuidado.

> Dentre os diferentes recursos, o livro didático é um dos materiais de mais forte influência na prática de ensino brasileira. É preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e a eventuais restrições que

1 Ao leitor interessado na história do livro didático no Brasil e suas reformas, sugerimos a leitura de Witzel (2002) e histórico do PNLD, disponível em: http://www.fnde.gov.br.

> apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos. Além disso, é importante considerar que o livro didático não deve ser o único material a ser utilizado, pois a variedade de fontes de informação é que contribuirá para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 96).

Por mais que o livro didático seja importante, defendemos que o professor deve usá-lo sempre aliado a outros recursos, para este não incorrer em um mero "legitimado e institucionalmente autorizado a manejar o livro didático" (WITZEL, 2002, p. 20). Afinal de contas, por mais que o PNLD faça uma ampla consulta aos professores nas escolas para escolha do material didático, ainda pode ocorrer de o material escolhido apresentar lacunas no que se refere à composição da obra, à forma de abordagem e aos métodos de apresentação dos conteúdos a serem ensinados.

A respeito dos conteúdos de Matemática, resolvemos analisar os números racionais devido à sua importância no que se refere à aplicação destes no nosso dia a dia, e também porque esse conteúdo "costuma trazer grandes dificuldades aos alunos, até para aqueles dos anos finais do ensino fundamental e mesmo para os do ensino médio. As dificuldades aparecem nas diferentes formas de representação dos números racionais" (TOLEDO; TOLEDO, 2010, p. 163)

Nosso trabalho teve como objetivo verificar como os números racionais são abordados em obras aprovadas pelo PNLD, à luz de documentos oficiais, em relação aos seus significados de: relação parte/todo; quociente; razão ou operador; localização na reta numérica; análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema. A escolha por livros do componente curricular de Matemática, aprovados pelo PNLD, ocorreu em virtude dessas obras passarem pela avaliação de uma comissão, no que se refere à qualidade dos livros, desde a parte gráfica, manual do professor e principalmente, a abordagem, trabalho e exploração dos conteúdos; além disso, a coleção por nós escolhida está entre as mais distribuídas pelos PNLD de 2017 e 2020.

Números racionais

O surgimento dos números racionais está intimamente relacionado à ideia de medida, quando no Egito Antigo os medidores das margens do Rio Nilo perceberam que os números inteiros

> eram insuficientes para exprimir bem as medidas, isto é, o mais aproximado possível do real. Para obter uma maior aproximação da medida real da grandeza (comprimento, área etc.) foi forçoso subdividir a unidade num certo número de partes iguais. Têm-se aí frações da unidade (LIMA, 1988, p. 82).

O trabalho com o conteúdo dos números racionais tem início no 4º ano do ensino fundamental. Os PCN de Matemática assinalam que "a abordagem dos números racionais no segundo ciclo tem como objetivo principal levar os alunos a perceberem que os números naturais, já conhecidos, são insuficientes para resolver determinados problemas" (BRASIL, 1997, p. 67). Apesar dessa insuficiência dos números naturais para resolver certos problemas, passar de um conjunto numérico para outro requer certo tempo para compreender os elementos desse conjunto.

Para começar um trabalho com novos conjuntos numéricos, é necessária uma abordagem que ajude o estudante a compreender esse novo universo que lhe é apresentado, pois do contrário essa transição pode acarretar obstáculos. Entendemos, na visão de Brousseau (1998, p. 119, apud IGLIORI, 2015, p. 125) "como um obstáculo à aprendizagem da Matemática constitutivo por um saber mal adaptado".

Alguns dos obstáculos que os estudantes podem enfrentar na aprendizagem dos números racionais, citados pelos PCN (1997), são a associação dos números racionais aos números naturais. Uma característica destes últimos é associar a cada número uma quantidade, por sua vez, nos números racionais, essa associação já não é tão clara e, muitas vezes, o estudante quer raciocinar sobre os racionais como se estivesse raciocinando sobre os naturais. Para o documento essa situação gera vários obstáculos, a saber:

a. nos naturais há somente uma forma de escrever um número, já nos racionais há infinitas;
b. a comparação entre números racionais é diferente da comparação entre números naturais, por exemplo, $5 < 7$, mas $1/5 > 1/7$;
c. nos números naturais, a quantidade de algarismos que se utiliza para escrever um número nos ajuda a decidir se ele é maior que outro, nos racionais isso não acontece;
d. quando multiplicamos nos naturais, o resultado é um número maior que os dois fatores, isso não ocorre nos racionais;
e. a ideia de sucessor não existe nos racionais.

Esses são alguns dos obstáculos que enfrentamos quando introduzimos os números racionais em sala de aula. Compreendemos que os números racionais são a extensão dos naturais, no entanto sua manipulação é mais complexa, isso requer do professor uma maior habilidade ao trabalhar com o estudante a construção do conceito. Concordamos com Fernandes, Bellemain, Figueiredo e Teles (2008) quando afirmam que

> a aquisição plena de um dado conceito matemático exige o seu reconhecimento em diversas situações e em diversos contextos. A construção do conceito de número racional em sua totalidade exige explorá-lo em várias situações e contextos, trabalhando assim, seus diversos significados (FERNANDES et al, 2008, p. 4).

Para entender como e quando as crianças iniciam o contato escolar com os números racionais, amparamo-nos nos PCN e na BNCC. No primeiro documento, o conteúdo supracitado tinha início no 3º ciclo do ensino fundamental, ou seja, 5ª e 6ª séries, o que corresponde hoje ao 6º e 7º ano do ensino fundamental. O segundo documento determina que a partir do 4º ano os estudantes iniciem os estudos deste conteúdo, quando apresenta na unidade temática Números os objetos de conhecimento *números racionais*: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100), como também a representação decimal para escrever valores do sistema monetário brasileiro. Podemos perceber que, de acordo com a BNCC, os estudantes devem iniciar os estudos dos números racionais um ano antes, devido ao ensino de nove anos, e já devem ter o primeiro contato com as duas formas de representação: a fracionária e a decimal.

A seguir apresentamos um quadro com as principais diferenças entre os PCN e a BNCC em relação aos objetivos de ensino dos números naturais para o 3º ciclo (5ª e 6ª séries), bem como do 6º ano, uma vez que analisaremos os conteúdos propostos em livros do 6º e 7º ano de PNLD anteriores e posteriores à BNCC.

Quadro 1 - Diferenças entre PCN e BNCC

PCN	**BNCC**
Conceitos e procedimentos	Habilidades e Competências
Compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos *números racionais* na forma decimal.	Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.
Reconhecimento de *números racionais* em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador. Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.	Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

PCN	BNCC
Conceitos e procedimentos	Habilidades e Competências
Reconhecimento de *números racionais* em diferentes contextos - cotidianos e históricos - e exploração de situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador. Localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações.	Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Análise, interpretação, formulação e resolução de situações problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números [...] *racionais*, reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema.	Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) envolvendo operações - com números [...] racionais -, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizando a calculadora para verificar e controlar resultados.	

Fonte: elaboração das autoras

Os PCN apresentam os números racionais tendo seus objetivos marcados pelos procedimentos com foco na resolução de situação-problema. A BNCC, por sua vez, trata esse conteúdo com objetivos marcados pelas habilidades envolvendo a resolução de problemas, mas também trata de outras habilidades que são importantes para que o estudante possa chegar à aprendizagem esperada, isso está explicitado nos verbos apresentados no documento, como por exemplo, quando usa os verbos: compreender, reconhecer, resolver e elaborar. No nosso entendimento, esse documento deixa claro que o estudante não deve apenas resolver uma situação-problema, mas deve ser capaz de perceber que a Matemática e seu conjunto de conteúdos vão muito além de cálculos numéricos, e enfatiza a importância da Matemática na vida.

Já no 4º ciclo (7ª e 8ª séries - atuais 8º e 9º anos), os PCN apresentam os números racionais com foco na ampliação e consolidação do conteúdo, a partir de contextos sociais e matemáticos, reforça a resolução de situações-problema com uso das operações básicas e os procedimentos de cálculo. A BNCC, para o 7º ano, apresenta uma progressão das habilidades dos números racionais, a saber: a resolução de problemas através de diferentes algoritmos; reconhecimento de resoluções de mesma estrutura e procedimentos; representação dos passos de uma resolução; resolução de problemas a partir da associação dos números racionais na forma de razão e fração, utilizando a ideia do todo.

Na próxima seção, apresentamos a metodologia da pesquisa realizada.

Metodologia

Tomamos como referência para nosso trabalho os PCN que deram subsídios, junto com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a elaboração da BNCC. Este documento foi criado pelo Governo

Federal em 1998 e mesmo não sendo obrigatório, desde então vinha direcionando a elaboração e revisão dos currículos escolares no país; a formação de professores, tanto inicial como continuada; as orientações didáticas e pedagógicas; a produção de livros e materiais didáticos e as avaliações no Brasil. Como o próprio nome diz, os *parâmetros* acabaram tendo sua importância no cenário educacional, mas como não eram obrigatórios, acabaram se tornando apenas uma referência para os professores e gestores. Com a implantação da BNCC em 2017, eles caíram em desuso, mas ainda são referenciados devido à sua importância ao longo de mais de duas décadas.

Também utilizamos em nosso estudo a BNCC, documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino do país, bem como as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas da educação básica em todo o Brasil.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento (BRASIL, 2017, p. 7).

Nosso estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa com foco na análise documental, a qual "tem-se como fonte documentos no sentido amplo, ou seja, não só de documentos impressos, mas sobretudo de outros tipos de documentos, tais como jornais, fotos, filmes, gravações, documentos legais" (SEVERINO, 2007, p. 122). Analisamos o PNLD referente aos anos de 2017 e 2020, para verificarmos como eles apresentam os números racionais em relação aos seus significados, em seguida fizemos a classificação das questões sobre o assunto e verificamos de que forma eles atendem ao que os PCN sugeriam e ao que a BNCC determina para o ensino deste objeto de conhecimento. Tivemos como revisão de literatura, os estudos de Behr et al (1983), Witzel (2002), Vallilo (2018), entre outros.

Em nossas análises, para resguardar a identidade, chamamos de C1 a coleção aprovada no PNLD de 2017 e C2 a coleção aprovada no PNLD de 2020, salientamos que se trata da mesma coleção, que em sua última versão teve o título alterado e foi adaptada à BNCC para o PNLD de 2020. Conforme o guia do livro didático, esta coleção pertence a uma das editoras mais adotadas no país.

Resultados e discussões

A C1 é uma obra coletiva publicada pela Editora Moderna no ano de 2014. Os exemplares utilizados para esta pesquisa foram os do 6º e 7º ano do ensino fundamental, selecionados pelo PNLD – triênio 2017, 2018 e 2019. A C2 é uma obra organizada pela mesma editora, tendo sua primeira edição em 2018. A obra contém recurso áudio visual e material digital. Utilizamos na pesquisa os mesmos exemplares correspondentes à C1.

O Guia de livros didáticos de 2014 apresentava uma visão geral da C1, a saber:

> O uso de conhecimentos extraescolares, a interação entre estudantes e professor e as discussões sobre questões de interesse social são características que se destacam na coleção. [...] De modo geral, as sistematizações dos conteúdos são feitas com base em exemplos. Algumas demonstrações são, em geral, adequadas à etapa escolar a que se destina a obra, entretanto o aspecto dedutivo não é o ponto forte da obra. Em diversas páginas dos livros, há excesso de informações textuais e de imagens que podem dificultar a compreensão de alguns conceitos. O Manual do Professor destaca-se na obra. Nele, há muitas orientações para as unidades e sugestões de textos e atividades que, de fato, podem contribuir para o enriquecimento do processo de ensino, além de colaborar para o desenvolvimento profissional do professor (BRASIL, 2016, p. 92).

A organização do conhecimento matemático nos livros desta coleção está exposta da seguinte forma:

> blocos de conteúdos, denominados Partes, que se iniciam com textos e questões cujo objetivo é motivar os estudantes para um dos temas trabalhados em seguida. Os blocos de conteúdos dividem-se em unidades, nas quais são explorados os conceitos e procedimentos e desenvolvidas atividades (BRASIL, 2016, p. 93).

Em relação ao ensino dos números racionais, o livro do 6º ano da C1 é composto de seis partes – sendo uma destinada aos números decimais e operações – e dezoito unidades, das quais quatro abordam os números racionais, como podemos ver abaixo:

- Unidade 9 – Frações: ideias, registros, leitura, números mistos, equivalência;
- Unidade 10 – Operações com frações: adição e subtração, multiplicação, divisão, porcentagem – possibilidades;
- Unidade 11 – Números decimais: representação, comparação – pictogramas;
- Unidade 12 – Operações com números decimais: adição e subtração, multiplicação, divisão, potenciação; porcentagem.

O livro do 7º ano da C1 é composto também por seis partes – sendo uma destinada aos números racionais – e quinze unidades, das quais três abordam o conteúdo em questão, são elas:

- Unidade 6 – Números racionais: conceituação, representação, módulo;
- Unidade 7 – Números racionais: adição e subtração;
- Unidade 8 – Números racionais: multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada.

Pode-se observar que no primeiro ano da última etapa do ensino fundamental, o trabalho com os números racionais se constitui como uma retomada destes conteúdos trabalhados nos anos anteriores. Nos livros analisados, os números racionais aparecem após a abordagem dos números naturais, sendo contemplados os conteúdos de frações e números decimais, junto com outros conteúdos de Matemática como por exemplo: múltiplos e divisores e números primos. Enquanto que no 7º ano o conteúdo é abordado de maneira mais aprofundada, abordando também a raiz quadrada nos racionais e traz uma parte específica dedicada ao conteúdo em questão.

Em relação à C2, há uma pequena variação na nomenclatura, essa coleção está dividida em unidades e capítulos, nas obras analisadas haviam quatro unidades e doze capítulos tanto nos livros do 6º como do 7º ano. O guia de livros didáticos de 2020 a apresenta da seguinte forma:

> A coleção contextualiza as indicações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), se apresenta em quatro volumes destinados aos alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental na área de Matemática. São apresentados três materiais a eles associados: Livro do Estudante (LE), Manual do Professor (MP) e Material do Professor Digital (MPD). Os volumes da coleção apresentam diferentes contextos para relacionar a Matemática com situações da vida real, seja na abertura das Unidades, seja no interior dos Capítulos. Em cada volume estão contempladas as seções: Estatística e Probabilidade, Atividades Complementares, Compreender um texto, Educação Financeira, Problemas para resolver, Trabalho em Equipe, Para finalizar e Informática e Matemática. Esta dinâmica possibilita uma visão panorâmica da obra e pode facilitar a organização do trabalho pedagógico do professor e o gerenciamento das tarefas de estudos pelo estudante. A articulação entre Matemática e as demais áreas do conhecimento são desenvolvidas no decorrer de todos os volumes da coleção (BRASIL, 2019, p. 104).

A C2 é composta do manual do professor impresso e digital e livro do estudante, sendo este apresentado da seguinte forma:

> [...] seção "Conheça o seu livro", com imagens, breve texto de introdução e algumas questões sobre os assuntos que serão desenvolvidos no capítulo. Ao longo dos capítulos, encontram-se as seguintes seções ou boxes: Atividades, que propõe diferentes atividades e situações-problema para resolver, desenvolvendo os conceitos abordados. Algumas atividades vêm assinaladas com ícones indicando: cálculo mental, resolução oral ou

> conversa em grupo, uso de calculadora ou a existência de material audiovisual relacionado ao tema ou conteúdo abordado (BRASIL, 2019, p. 147).

Percebe-se que a coleção atende ao que normatiza a BNCC, pois evidencia muitas situações de exploração, experimentação, verificação e sistematização dos conteúdos expostos. As habilidades que são as "aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos" (BRASIL, 2017, p. 29), são facilmente identificadas nos livros, como por exemplo, a leitura, a escrita e a compreensão de texto, os quais revelam a Matemática em diferentes contextos do cotidiano, numa busca de tornar esse componente curricular mais acessível aos estudantes. É proposto o uso de diversas ferramentas, entre elas: os jogos e o uso da tecnologia, com indicação da calculadora e softwares livres. Existe uma sessão ao final dos capítulos que faz uma revisão dos conteúdos e os procedimentos estudados que, ao nosso ver, pode permitir ao estudante a progressão por meio da consolidação do que foi trabalhado.

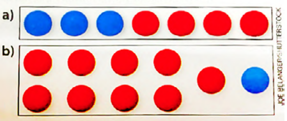
No tocante ao ensino dos números racionais, a C2 aborda em seu livro do 6º ano cinco capítulos sobre esse assunto, são eles:

- Capítulo 1 – Números naturais e sistemas de numeração;
- Capítulo 5 – Frações;
- Capítulo 6 – Operações com frações;
- Capítulo 8 – Números decimais;
- Capítulo 9 – Operações com números decimais.

Já o livro do 7º ano da C2, contempla apenas um capítulo destinado aos números racionais. A principal diferença desta coleção, se comparada à anteriormente apresentada, é que ela aprofunda o trabalho com pictogramas, os quais são apresentados como parte da unidade temática *Probabilidade e estatística*, com o objetivo de construir pictogramas com base em dados organizados em tabelas. Outro assunto abordado neste capítulo destinado aos números racionais são as expressões numéricas que trazem todas as operações com os números racionais que foram trabalhadas até o momento com os estudantes.

Buscamos nos livros analisados, questões que trabalhassem os significados dos números racionais, tais como: relação parte/todo; quociente; razão ou operador; localização na reta numérica e análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, constantes nos PCN e na BNCC. Sendo assim, para situar melhor o leitor, apresentamos no Quadro 2 uma breve definição destes significados que encontramos nos livros pesquisados, bem como ilustramos algumas destas questões.

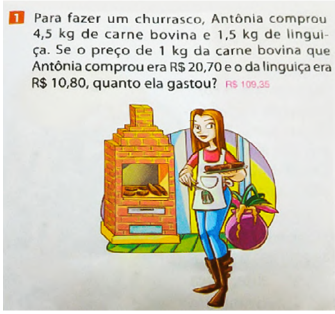
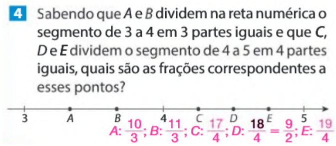
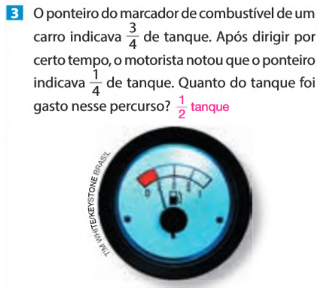
Quadro 2 - Diferentes significados dos números racionais

Significado	Definição	Questão
Razão[2]	Comparação entre grandezas do mesmo tipo.	**7** Na classe de Vanessa, $\frac{2}{3}$ dos alunos vão participar do campeonato de futebol da escola. Os alunos serão divididos em 4 equipes. Que fração dos alunos da classe representará cada equipe? $\frac{1}{6}$
Parte-Todo[3]	Representa em quantas partes um inteiro foi dividido.	**6** Em cada caso, com relação ao total de bolinhas, escreva a fração correspondente à quantidade de bolinhas azuis e a fração correspondente à quantidade de bolinhas vermelhas. a) b) 
Quociente[4]	O número racional é visto como uma divisão de dois números.	**3** Determine: a) $\frac{2}{5}$ de 15 bolinhas; 6 bolinhas b) $\frac{1}{3}$ de 12 passos; 4 passos c) $\frac{1}{10}$ de 30 alunos. 3 alunos

2 Figura 5 – 6º ano - Fonte: Gay e Silva (2018, p. 145)

3 Figura 6 – Fonte: Gay (2014, v. 6, p. 147)

4 Figura 7 – Fonte: Gay e Silva (2018, v.6, p. 125)

Operador[5]	O número racional modifica outro número, atua como função.	
Reta Numérica[6]	Localização do número racional na reta numérica.	
Análise e Situação-Problema[7]	Os números racionais são colocados em situações do dia a dia.	

Fonte: elaboração das autoras

Doravante, vamos apresentar o quantitativo de questões relacionadas aos números racionais que encontramos na C1 e na C2, para cada um dos significados que levamos em consideração no Quadro 2.

5 Figura 8 – Fonte: Gay (2014, v. 7, p. 117)

6 Figura 9 – Fonte: Gay e Silva (2018, v. 6 p.127)

7 Figura 10 – Fonte: Gay e Silva (2018, v. 6 p. 139)

Observamos que os PCN orientavam trabalhar os significados de: relação parte/todo; quociente; razão ou operador; localização na reta numérica; análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema para os números racionais nas suas duas formas. Já a BNCC limita boa parte destes significados apenas ao trabalho com as frações e ao trabalho com questões relacionadas à reta numérica, restringindo os números racionais, na sua forma decimal. A seguir iremos apresentar os resultado da C1, que é uma coleção aprovada pelo PNLD de 2017. Por esse motivo, fizemos sua análise à luz dos PCN.

Tabela 1 - Livros de Matemática da C1

Ano	Significado dos Números Racionais					
	Razão	**Parte - Todo**	**Quociente**	**Operador**	**Reta Numérica**	**Análise e Situação Problema**
6º ano	30	50	10	4	8	55
7º ano	16	15	1	1	10	21
Total	46	65	11	5	10	76

Fonte: elaboração das autoras

A C1 aborda os números racionais, no 6º ano, sem mencionar diretamente que são números racionais, trata-os em partes separadas no livro e chama-os de frações e decimais, enquanto que no livro do 7º ano, a mesma coleção apresenta uma parte dedicada aos números racionais, os quais são abordados após o estudo dos números inteiros. Acreditamos que essa abordagem acontece dessa forma porque "os significados de cada operação com frações são os significados para as operações com números inteiros. Operações com frações devem começar aplicando-se esses mesmos significados a partes fracionárias" (VAN DE WALLE; LOVIN, p. 66, 2006 apud VALLILO, p. 117, 2018).

Nos livros analisados observamos que há mais questões relacionadas ao significado de *análise e situação-problema*, no 6º ano encontramos 35,03% e no 7º ano 32,81%, corroboramos com o pensamento de Santos Filho (2015) ao afirmar que

> quando as frações e os números racionais são aplicados a problemas do mundo real e são olhados a partir de um ponto de vista pedagógico, assumem várias "personalidades". Do ponto de vista da investigação e do desenvolvimento curricular, o problema é descrever estas personalidades – que são os subconstrutos – em detalhe e clareza suficiente para que a organização de experiências de aprendizagem para as crianças tenha uma base teórica firme (SANTOS FILHO, 2015, p. 27).

É a partir das situações-problema que o estudante tem a oportunidade de fazer uso do pensamento lógico, raciocinar e utilizar o melhor procedimento para resolver um problema. É nesse tipo de situação que o estudante tem a chance de fazer a aplicação da Matemática.

Em relação à *parte todo*, no 6º ano encontramos 31,85% das questões e no 7º ano, 23,44%. Conforme Behr et al (1983),

> A interpretação parte todo de um número racional, depende diretamente da capacidade de particionar uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos em subpartes ou conjuntos de mesmo tamanho. Este subconstruto é fundamental para todas as interpretações posteriores e é considerado por Kieren (1981) como uma importante construção geradora de linguagem (p. 93, *tradução nossa*).

Supomos que esse tipo de questão aparece em grandes quantidades nos livros por permitir a representação e percepção visual, e as situações ensinadas são facilmente encontradas no cotidiano do estudante, como por exemplo: a partilha de uma pizza.

Sobre *razão* nos deparamos com 19,11% de questões no livro do 6º ano e 25% no do 7º ano. As questões sobre esse significado dos racionais normalmente apresentam "uma relação entre duas quantidades de uma mesma grandeza, ou seja, indica um índice comparativo entre essas duas quantidades da mesma grandeza" (FERNANDES et al, 2008, p. 5).

No tocante aos racionais com o significado de *quociente*, no 6º ano a coleção apresentou 6,37% das questões, no entanto no 7º ano a quantidade de questões ficou muito aquém do desejado com apenas 1,56%, acreditamos que essa ausência de questões pode ser prejudicial para a aprendizagem dos estudantes, pois

> considerando os números racionais como quocientes envolvemos pelo menos dois níveis de sofisticação. Por um lado, 8/4 ou 2/3 podem ser interpretados como uma divisão, resultando em uma equivalência de 8/4 e 2, ou 2/3 e 0,666. Mas, números racionais também podem ser considerados como elementos de um quociente e, como tal, pode ser usado para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades de uma perspectiva puramente dedutiva (BEHR et al, 1983, p. 95, *tradução nossa*).

Outro aspecto negativo que constatamos na C1 foi a quantidade de questões relacionadas ao significado de *operador*, no 6º ano encontramos 2,55% das questões e no 7º apenas 1,56%, dado que esse conhecimento é fundamental para que os estudantes façam "a interpretação do operador do número racional é particularmente útil no estudo de frações equivalentes e na operação de multiplicação" (Ibidem, p. 96). Acreditamos que a discrepância no quantitativo de questões referente aos significados de operador na coleção analisada pode levar os estudantes a obstáculos futuros ao progredir com o estudo dos números racionais, tais como: frações equivalentes; o estudo de grandezas proporcionais, ao estudarem os racionais com a ideia de medida, e porcentagem.

Verificamos uma melhor distribuição na coleção abordando os números racionais na *reta numérica*, com 5,09% no 6º ano e 15,63% no 7º ano. Vemos que essa quantidade de questões pode ajudar os estudantes a compreender que nem sempre é possível usar a unidade para medir, sendo assim, supomos ser fundamental exercitar esse conhecimento.

Observamos ainda que na coleção C1, tanto no livro do 6º como do 7º ano, há uma quantidade suficiente de exercícios que abordavam as diferentes formas de escrever um número racional e como realizar as operações de porcentagem, os mesmos traziam problemas com contextos do dia a dia, o que a nosso ver ajuda na compreensão do conceito deste conteúdo. Também havia uma boa quantidade de exercícios que exploravam a leitura e a escrita do número, sempre levando em consideração situações vivenciadas no cotidiano.

A seguir apresentaremos os resultados da coleção C2, conforme fizemos com a C1. A C2 trata-se do mesmo título analisado, é uma coleção aprovada pelo PNLD de 2020, portanto, fizemos sua análise à luz da BNCC.

Tabela 2 - Livros de Matemática da C2

Ano	Significado dos Números Racionais					
	Razão	Parte - Todo	Quociente	Operador	Reta Numérica	Análise e Situação Problema
6º ano	11	32	17	14	3	69
7º ano	1	3	2	1	9	23
Total	12	35	19	15	12	92

Fonte: elaboração das autoras.

Pelos números apresentados na Tabela 2, percebemos que a coleção C2 deu grande ênfase nas questões que envolvem *análise e* *situação-problema*, pois nos deparamos com 47,26% das questões que envolvem esse significado no 6º ano e 58,97% no 7º ano. Diante desses índices, percebe-se que a coleção está alinhada à BNCC, pois a mesma realça bastante as habilidades de resolver e elaborar problemas. O documento supracitado, em articulação com as competências gerais da educação básica, apresenta como uma das competências específicas para o ensino de Matemática no ensino fundamental: "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2017, p. 267).

As questões sobre o significado de *parte todo* na C2, ocuparam 21,91% no 6º ano e 7,69% no 7º ano. Isso nos leva a crer que, com o avançar dos anos questões desse tipo vão desaparecendo, presume-se de antemão que o estudante já possui a habilidade de "compreender, comparar e ordenar as frações associada às ideias de parte de um inteiro e resultado de uma divisão" (Ibidem, p. 301), em anos anteriores de escolarização. Pelos índices encontrados, acreditamos que o mesmo acontece com as questões relacionadas a *quociente*, a C2 apresentou 11,64% no 6º ano e 5,12% no 7º ano.

Em relação ao significado de *operador*, encontramos 9,59% de questões no livro do 6º ano e apenas 2,56% no 7º ano. Neste caso, apesar de a BNCC trazer uma habilidade específica na unidade temática números no 7º ano, que envolve esse significado, as questões que traziam esse tipo de conhecimento na coleção e encaixaram melhor em situação e análise de problemas, por isso esse número tão baixo. Verificamos que o mesmo aconteceu com as questões relacionadas à *razão* e *reta numérica*, entretanto, sobre este último significado, as questões ficaram mais equilibradas entre o 6º e o 7º ano, e estavam de acordo com o que a BNCC indica "comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração" (Ibidem, p. 307).

Tecendo algumas considerações

Podemos inferir que a escolha do livro didático deve ser feita com muita cautela, pois uma coleção pode privilegiar determinados conteúdos em detrimento de outros, no caso dos números racionais observamos que algumas representações ocupam maior espaço nas questões abordadas nos livros analisados. Na C1, no livro do 7º ano, nas questões relacionadas a quociente e operador, nas coleções analisadas, encontramos apenas uma questão de cada tipo, enquanto os significados de análise e resolução de problemas e parte e todo foram muito bem trabalhados. Já na C2, as questões menos trabalhadas no livro do 7º ano foram as relativas ao conhecimento de razão e operador.

Em ambas as coleções verificamos que a distribuição das questões que envolvem os diferentes significados dos números racionais apresenta uma disparidade, ou seja, não são abordadas de maneira uniforme. No entanto, acreditamos que alguns significados como: razão, parte todo, quociente e operador, não aparecem muito em questões específicas no 7º ano, pois espera-se que este conteúdo já tenha sido concretizado em anos anteriores.

Observamos que na C1 todas as questões sobre números racionais se encaixaram nos significados de: relação parte/todo; quociente; razão ou operador; localização na reta numérica; análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, propostos pelos PCN, documento vigente à época. Contudo, a C2 apresentou questões que classificamos com os significados citados, mas como a mesma está alinhada à BNCC, também englobava questões a mais que as da Tabela 2 que trabalhavam as habilidades propostas pela Base. No livro do 6º ano, encontramos dezesseis questões sobre: leitura e escrita de racionais, reconhecimento destes nas suas formas fracionárias e decimais, trazendo também exercícios para compreender, comparar e ordenar números racionais. Já no livro do 7º ano, encontramos trinta e sete questões a mais, relacionadas à representação por meio de fluxograma dos passos para resolução de problemas; comparação e ordenação de frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado de divisão, razão e operador; e sobre compreensão e utilização da multiplicação e divisão de racionais e suas propriedades operatórias.

Apesar de alguns significados dos racionais serem apresentados em menor número nas coleções, acreditamos que este não seja um fator negativo, pois como observamos esse fato apenas nos livros do 7º ano, acreditamos que os autores entendem que tais conhecimentos já estavam consolidados pelos estudantes, haja vista que o trabalho com os números racionais inicia no 4º ano do ensino fundamental. Por outro lado, o trabalho com a resolução de problemas foi o que mais se destacou em ambas as coleções, demonstrando que os estudantes necessitam adquirir habilidades e competências de resolução de problemas, nas mais diversas situações do contexto escolar e, especialmente, na vida.

Referências

BEHR, M., LESH, R., POST, T., & SILVER E. Rational Number Concepts. In R. LESH & M. LANDAU (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York: Academic Press, p. 91-125, 1983.

BRASIL. Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. Rio de Janeiro: Diário Oficial da União, 05 jan. 1939. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html; acesso em 10 jun. 2020, às 12h10.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - introdução aos parâmetros curriculares nacionais. – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *PNLD 2017*: Matemática – Ensino fundamental anos finais/Ministério da Educação – Secretaria de Educação SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Educação é a base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf; acesso em 18 ago. 2019, às 11h30

BRASIL. Ministério da Educação. *PNLD 2020*: Matemática – guia de livros didáticos/Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação, 2019.

FERNANDES. Nicole Rodrigues, BELLEMAIN, Paula, FIGUEREDO, Maurício, TELES, Rosinalda. *Número Racional e seus diferentes significados Anais...* 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife: UFRPE, 2008.

GAY, M. R. G. (Org.). *Projeto Araribá*: Matemática – 6º ano. – 4. ed. – São Paulo: Moderna, 2014.

GAY, M. R. G. (Org.). *Projeto Araribá*: Matemática – 7º ano. – 4. ed. – São Paulo: Moderna, 2014.

GAY, G.; SILVA, W.R. *Araribá Mais*: Matemática. V. 6º ano. – 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

GAY, G.; SILVA, W.R. *Araribá Mais*: Matemática. V. 7º ano. – 1 ed. – São Paulo: Moderna, 2018.

IGLIORI, S. B. C. A Noção de "Obstáculo Epistemológico" e a Educação Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. – 3 ed. revisada, 3 reimpr. – São Paulo: EDUC, 2015.

LIMA, J. M. de F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, T. N. *Aprender Pensando*. Petrópolis: Vozes, 1988.

RIBEIRO, M. L. S. *História da Educação Brasileira*: a organização escolar. – 19ª ed. – Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SANTOS FILHO, J. F. dos. *Investigando como Professores dos Anos Iniciais Julgam Propostas de Ensino para o Trabalho com os Números Racionais*. 2015. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. – 23. ed. rev. e atual. – São Paulo: Cortez, 2007.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Teoria e Prática de Matemática:* como dois e dois. – 1. ed. – São Paulo: FTD, 2010.

VALLILO, S. A. M. *A Linguagem Matemática no Estudo de Números Racionais*: uma abordagem através da resolução de problemas. 2018. 237f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de

Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", *Campus* Rio Claro.

WITZEL. G. Z. *Identidade e Livro Didático: Movimentos Identitários do Professor de Língua Portuguesa*, 2002. 181 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, UME, Maringá, 2002.

CAPÍTULO 15

O erro na multiplicação de racionais: afinal, qual caminho seguimos?

Glaucia Milena Vieira, Suedy Santos de Azevedo, Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Resolver operações matemáticas envolvendo multiplicação de racionais é, sem sombra de dúvidas, um desafio. Com base em nossa experiência como professores e em oportunas discussões ao cursarmos a disciplina Números e Operações, fomos inquietados sobre diversas perspectivas, as quais precisamos estar atentos, ao trabalhar com objetos do conhecimento da unidade temática Números, seja em sua dimensão conceitual, metodológica ou curricular.

Assim, para afunilar nosso objeto de pesquisa, observamos que diversos pesquisadores, dentre os quais destacamos para esse trabalho Santos (2015) e Santos Filho (2015) têm apontado sobre a importância de se discutir o erro como ferramenta para a análise e possíveis avanços dentro do ambiente escolar. Na certeza de que o universo do campo numérico é vasto, restringimos nossa pesquisa aos números racionais e, em comum com os dois últimos pesquisadores citados, buscamos investigar qual é a percepção de professores sobre erro na aprendizagem dos racionais na forma decimal.

Diante disso, estabelecemos como objetivo geral compreender como professores que lecionam Matemática no 6º ano do ensino fundamental em escolas da rede pública de ensino de Pernambuco analisam erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas de multiplicação de números decimais por naturais e entre decimais e as estratégias utilizadas para elucidar os problemas encontrados. Especificamente, buscamos verificar a maneira como professores apresentam as operações de multiplicação entre decimais e naturais e entre decimais, assim como atitudes deles mediante possíveis erros de alunos em sala de aula e quais encaminhamentos são indicados quando se deparam com essas dificuldades.

Posto que analisaremos a discussão sobre o erro em racionais sob a ótica do professor, utilizamos como referencial teórico Ball, Thames e Phelps (2008), que discorreremos mais adiante neste texto.

Este capítulo está organizado, primeiramente discutindo os números racionais nos documentos oficiais, em sequência o referencial teórico alicerçado em Ball, Thames e Phelps (2008), depois apresentaremos o percurso metodológico aplicado no estudo, em seguida a análise dos dados por meio do levantamento dos protocolos e, por fim, as considerações finais.

Números racionais e documentos oficiais

Nesta sessão discutiremos sobre o trabalho com esse conjunto numérico em sala de aula e as dificuldades dos estudantes, nas falas de Santos Filho (2015) e Romanatto (1999), e como o ensino dos números racionais deve estar pautado conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

O ensino dos números racionais é motivo para discussões e recorrentes pesquisas, na tentativa de compreender as dificuldades que permeiam sua conjuntura. Quando direcionamos nosso olhar para a maneira como os números racionais são apresentados em sala de aula e as dificuldades dos discentes em compreendê-los, observamos que existe uma valorização de certos aspectos conceituais em detrimento de outros, conforme afirma Santos (2015, p.12): "essas dificuldades têm se revelado em todas as representações dos números racionais (fracionária, decimal e percentual), bem como nos significados das representações fracionárias (parte/todo, quociente, razão etc.)".

Coadunando com nosso estudo e baseando-se na investigação de outros pesquisadores sobre números racionais, Santos Filho (2015, p.28) afirma que "para esses pesquisadores, o fracasso na aprendizagem dos números racionais é consequência de se priorizar, no ensino desse conteúdo matemático, procedimentos, em detrimento dos aspectos relacionados à compreensão do seu conceito".

Dito isto, podemos ratificar que as dificuldades na compreensão de números racionais estão centradas nas abordagens das diferentes ideias das representações fracionárias, no pouco investimento nas equivalências de escritas fracionária, decimal e percentual, além do aspecto operatório. Concordamos com Romanatto (1999, p. 40), ao afirmar que "o número racional, para a sua efetiva compreensão, deveria ser visto como uma teia de relações nele incidente ou dele emergente".

A discussão sobre números racionais também está presente em documentos oficiais que são norteadores de proposta de trabalho dos professores.

Nos PCN (BRASIL, 1998), para os terceiro e quarto ciclos existe uma discussão acerca de como é necessário um trabalho com números racionais nesses anos, haja vista que os alunos chegam nessa etapa de ensino com algumas fragilidades.

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que

> os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p.100).

Por vezes, o trabalho com conjunto dos números racionais é realizado como uma extensão do campo dos naturais, estando internalizado na fala dos professores, porém, não ainda na dos alunos, o que ocasiona profundos problemas, sobretudo na parte das operações, objeto de nossa pesquisa.

Além disso, conforme propõe a BNCC, o ensino precisa ser pautado na resolução de problemas, visando ao letramento matemático. Essa perspectiva sugere que, para trabalhar com cada objeto de conhecimento, é preciso pensar no seu desenvolvimento ocorrendo com situações-problema bem construídas e articuladas com o mundo, para além das paredes da escola. Dessa forma, trabalhar com as diferentes representações, ideias, operações, sem perder de vista os erros cometidos pelos estudantes, como processos para aprendizagem, é condição sem a qual não há avanço.

A BNCC também aponta sobre o trabalho com racionais que

> Com referência ao *ensino fundamental – anos finais*, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos (BRASIL, 2017, p.265).

Com base nos documentos norteadores do ensino no âmbito nacional, é interessante considerarmos que os números racionais propiciam várias abordagens em sala de aula. Entretanto, observamos que a abordagem decimal e sua relação com os processos de ensino e aprendizagem precisam de atenção, além de apresentarem campo fértil para pesquisa.

Referencial Teórico

Nesta seção, preocupados com o conhecimento Matemático necessário ao professor, posto que investigamos como docentes analisam possíveis erros dos alunos, utilizaremos como fundamentação teórica Ball, Thames e Phelps (2008). Estes autores definem, para o ensino de Matemática, três tipos de conhecimento de conteúdo e três tipos de conhecimento pedagógico de conteúdo totalizando seis dimensões de conhecimento. Os três tipos de conhecimento de conteúdo são o conhecimento comum de conteúdo (aquele que, em princípio, qualquer pessoa, mesmo não sendo professor, poderia responder), o conhecimento especializado de conteúdo (conhecimentos e habilidades exclusivas para ensinar, seja relacionada ao conteúdo, seja relacionada à parte pedagógica do ensino) e o conhecimento horizontal do conteúdo (o conhecimento do que o estudante aprendeu antes e do que aprenderá futuramente sobre determinado conteúdo matemático). Os três tipos de conhecimento pedagógico de conteúdo são o conhecimento do conteúdo e aluno (conhecer o que os estudantes, de um modo geral, sabem sobre o conteúdo, quais erros são mais frequentes, quais estratégias mais usam, por exemplo), o conhecimento do conteúdo e ensino (saber como ensinar determinado conteúdo)e o conhecimento de currículo (como determinado conteúdo está posto e discutido no currículo).

De acordo com o que fora citado acima, é de suma importância conhecer o conteúdo a ser lecionado, verificar as ferramentas que vão ser utilizadas e observar os erros cometidos pelos estudantes, pois, em algumas situações, a aprendizagem de um determinado conteúdo torna-se difícil quando o próprio docente não o conhece. É fundamental, também, ter a perspicácia de compreender a linha de raciocínio utilizada pelos discentes na tentativa de responder os problemas de multiplicação com os números racionais.

No tocante aos conhecimentos necessários aos professores, com vista ao que será explicado de forma mais ampliada no método de nosso trabalho, pretendemos observar, com base em Ball e colaboradores (2008), o conhecimento docente sobre números racionais, especialmente sobre a multiplicação com estes números. Ao solicitarmos aos entrevistados para que apontem sugestões de formas de ensinar para desenvolver a atividade proposta em sala de aula – e, posteriormente, analisar erros cometidos por alunos, como por exemplo, respostas erradas indicadas nos protocolos (erros comuns entre os estudantes) –, mostramos a nossa preocupação com o conhecimento e o método de ensino, observando como os entrevistados identificam as regularidades de erros dos estudantes e, a posteriori, qual caminho adotar para saná-los.

Método

Visando atender aos objetivos propostos desta pesquisa, que são: compreender como professores analisam os erros cometidos por estudantes na resolução de problemas de multiplicação de números decimais por naturais e entre decimais e quais estratégias são tomadas para elucidar essas dificuldades; verificar a maneira como os entrevistados apresentam este conteúdo em sala de aula e quais são os encaminhamentos indicados, buscamos desenvolver uma análise qualitativa por meio de protocolos aplicados com dez professores que lecionam Matemática no 6º ano do ensino fundamental em escolas da rede pública de ensino de Pernambuco.

O protocolo criado contém duas situações-problema envolvendo multiplicação, a primeira com apenas números decimais e naturais e a segunda com números decimais. Esta escolha advém do entendimento de que a operação entre os números racionais na forma decimal por naturais e por decimais sempre é tratada como uma extensão das regras aprendidas na multiplicação de números naturais, o que acarreta erros. Além disso, verificamos em nossa prática de ensino e nas justificativas dos entrevistados que nas operações com decimais, ou a vírgula é confundida, assumindo o papel do ponto em separar classes, ou é totalmente desprezada. Os protocolos foram enviados por e-mail, tendo em vista a viabilização do tempo, considerando que os entrevistados deram uma devolutiva em tempo hábil.

Desta forma, refletimos porque, com os números racionais – como já apontamos em momentos supracitados –, operar os problemas de multiplicação de números racionais na forma de decimal por naturais e entre racionais, ainda é de difícil compreensão por parte dos alunos do ensino fundamental nos anos finais.

Quanto à reflexão dos possíveis erros dos discentes, esperou-se verificar se os professores entrevistados conseguem ou não discutir tal temática e, em ambas as questões, objetivando o domínio do professor sobre as regras do Sistema de Numeração Decimal (SND) e sobre as justificativas no algoritmo das operações de multiplicação e divisão.

Na atividade, solicitamos aos professores entrevistados para apontarem sugestões de formas de ensinar para desenvolver o exercício em sala de aula e, mais à frente, analisar erros cometidos por alunos quando se deparam com tal problemática. Com o intuito de querer ter um maior controle nos resultados, optamos em construir um protocolo que já continha questões embasadas nas dificuldades enfrentadas em atividades anteriormente trabalhadas em sala de aula, apontadas em documento oficiais, como nos PCN (BRASIL, 1998), sobretudo com aspectos que precisam ser fundamentados pelo SND.

Para uma melhor interpretação dos resultados, temos a seguir o protocolo utilizado. Nele é possível verificar primeiro a resposta hipotética de alunos e ao lado a forma correta da resolução. Abaixo, na Figura 1, encontra-se a questão 1, e na Figura 2, a questão 2.

Figura 1 - Questão 1 do protocolo

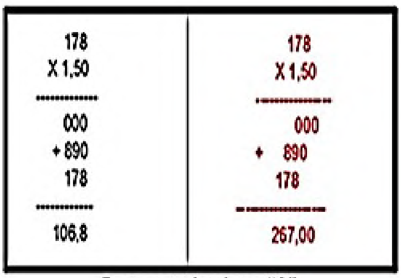
Professor,

Agradecemos por responder esse instrumento de pesquisa.
Os dados coletados a partir destes questionários serão analisados como propósito de compreender como ocorrem os estudos sobre números racionais. Logo, garantimos sigilo e total anonimato dos respondentes.

Professor, abaixo há duas questões que tratam de multiplicação de números racionais na forma decimal por números naturais e por racionais na forma decimal para sua análise.

Questão 1

Pedro gostava de colecionar selos. Ele comprou selos pelo valor de R$ 1,50 cada. Se sua coleção tem 178 selos diferentes, quanto ele já pagou por ela?



Resposta do aluno "A"

a) Professor, como o senhor costuma abordar o conteúdo multiplicação?
b) Analisando essa primeira questão, quais são os erros cometidos pelo aluno "A" ao respondê-la?
c) Quais possíveis encaminhamentos poderiam ser tomados no trabalho com esse aluno a fim de ajudá-lo a superar essa dificuldade?

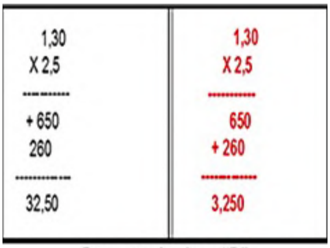
Fonte: elaboração dos autores

A seguir, apresentamos a Figura 2, referente à questão 2 do protocolo.

Figura 2 - Questão 2 do protocolo

Questão 2

Dona Severina foi ao mercado e comprou 2,5 kg de farinha a granel. Se o preço do quilo dessa mercadoria é R$ 1,30, quanto ela pagou por essa farinha?



Resposta do aluno “B”

a) Analisando a segunda questão, quais são os erros cometidos pelo aluno “B” ao respondê-la?
b) Os alunos “A” e “B” estão com a mesma dificuldade ou com dificuldades diferentes?
c) Quais possíveis encaminhamentos poderiam ser tomados no trabalho com o aluno “B” a fim de ajudá-lo a superar esse obstáculo?
d) Quais os erros cometidos e quais são as dificuldades do aluno “B”?

Fonte: elaboração dos autores

Análise dos dados

Para análise dos protocolos, com base em Ball, Thames e Phelps (2008), buscamos observar nas respostas dos entrevistados o conhecimento do conteúdo e pedagógico do conteúdo dos professores, sendo assim, consideramos alguns critérios: na questão 1: a abordagem dos conteúdos, erros do aluno “A” detectados na questão pelos professores e que estratégias são sugeridas para auxiliar o aluno na aprendizagem. Na questão 2 os critérios de observação foram: quais erros os professores percebem no aluno “B”, se as dificuldade dos alunos “A” e “B” são iguais ou diferentes, quais encaminhamentos a serem tomados para auxiliar o aluno “B” e a compreensão sobre a relação entre os erros cometidos e dificuldades com SND. Por meio das respostas dos entrevistados, percebemos o uso de seus recursos e métodos de ensino, averiguando a percepção dos professores sobre os erros dos estudantes, buscando assim a solução para sanar essas dificuldades. Desta forma, nomeamos os entrevistados de A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Abaixo analisaremos as respostas dos entrevistados no Quadro 1, referente à atividade 1.

Quadro 1 - análise dos protocolos - questão 1

Análise dos protocolos - referentes à questão 1	
CATEGORIA 01 Abordagem do conteúdo	Os professores *B*, *C* e *H* utilizam situações do cotidiano como os de natureza financeira a partir de atividades com números naturais. Os professores *F* e *G* iniciam pelo processo de multiplicação por meio do valor posicional, sinalizando a importância de colocar a vírgula corretamente para definir o resultado final. Os professores *E* e *J* iniciam pela multiplicação de decimais por natural. Os professores *I*, *E* e *D* iniciam pelo conceito de racionais por meio do sistema de numeração decimal com números naturais.
CATEGORIA 02 Erros cometidos pelos alunos	A resposta dos professores pesquisados foi unânime: o erro cometido pelo aluno “A” era a não compreensão do valor posicional na organização das casas decimais, destacam que o aluno não compreende que a adição vem do resultado da multiplicação, que a regra da multiplicação não deve ser confundida com a regra da adição simples.
CATEGORIA 03 Como ajudar o aluno a superar esses obstáculos	Os professores recomendam retomar os conteúdos anteriores utilizando exemplos básicos do sistema monetário, trabalhar regularidades do SND e também o uso do ábaco. Eles afirmam que muitos estudantes chegam ao 6º ano do ensino fundamental sabendo pouco de adição e subtração e ainda confusos em relação à multiplicação e à divisão.

Fonte: elaboração dos autores

Ao observarmos a categoria 1 da primeira atividade, identificamos que existem três perspectivas distintas sobre a abordagem proposta pelos professores. Pelos diversos caminhos para abordagem ao conteúdo proposto na atividade, em relação ao domínio do conteúdo apresentado em nosso referencial teórico e considerando que o conhecimento comum do conteúdo é o que alguém, mesmo com outra formação possui, podemos considerar que os entrevistados apresentam sugestões de percurso, como sistema monetário ou mesmo valorizando características do sistema de numeração decimal, o que nos leva a crer que, além do conhecimento comum do conteúdo, os docentes têm conhecimento especializado e, sobretudo, conhecimento de conteúdo e ensino, destacando aspectos importantes para o ensino dos números racionais.

Prosseguindo com a análise, na categoria 2, observamos que foi unânime a percepção em relação ao erro cometido pelo aluno A, levando-nos a compreender que os professores também denotam conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento de conteúdo e aluno.

Na categoria 3, ao sugerirem retomar conteúdos que podem servir como base para a aprendizagem de multiplicação com números racionais, os professores sinalizam um conhecimento horizontal do conteúdo e, além deste, sinalizam também conhecimento de conteúdo e aluno, quando apontam o que, de um modo geral, os estudantes erram ao trabalharem com este conteúdo.

Observamos que a maior parte dos entrevistados afirma trabalhar os racionais na forma decimal através de situações-problema. Entretanto, apenas dois professores descreveram claramente como fazem para trabalhar este conteúdo, ilustrando o conhecimento especializado do conteúdo, como podemos ver nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 - Resposta do Professor C à abordagem do conteúdo referente à questão 1

a) Professor, como o senhor costuma abordar o conteúdo multiplicação de racionais na forma decimal por naturais?

Costumo abordar esse conteúdo a partir de situações práticas que possam ser vivenciadas pelos(as) alunos(as) em sala de aula. As mais fáceis são situações de natureza financeira, tendo em vista que se trata de algo corriqueiramente vivenciado pelos(as) alunos(as). Contudo, é possível trabalhar também de forma articulada em outros conteúdos e campos matemáticos como frações e com as grandezas e medidas, por exemplo. É possível propor uma situação em que os estudantes efetuem alguma medição utilizando algum instrumento construído pelo professor de maneira que os resultados das medições não sejam sempre exatos. Esse instrumento pode ser um pedaço de barbante marcado em partes iguais, onde cada parte será uma unidade, uma régua diferente sem graduação etc. A figura a seguir mostra dois instrumentos.

O primeiro instrumento trata-se do barbante marcado com tinta ou fita colorida. O segundo é uma régua não graduada.

O professor pode pedir para que o(a) aluno(a) escolha cinco objetos presentes na sala de aula ou fora dela (a critério do proponente da atividade), efetue a medição utilizando a régua e o barbante e preencha uma tabela semelhante a que segue:

Objeto	Medida

Ao efetuar as medições, os(as) alunos(as) sentirão dificuldades de registrar os valores, tendo em vista que alguns resultados não serão exatos. Muitas perguntas surgirão: "Professor(a), a medição do comprimento da mesa deu 5 e um bocado, posso colocar 6" ou "O meu resultado deu 3 e dois dedinhos, como eu escrevo?", etc. aplicando *esta atividade, já vi alunos(as) utilizarem termos como: "pouquinho" "tiquinho", "bocadinho", "muitão", entre outros em seus registros.*

A partir dessa dificuldade, o professor pode sistematizar como efetuar esse tipo de medição mostrando a importância dos números racionais decimais. O professor pode dividir uma unidade do instrumento em 10 partes, explicando que cada uma se trata de um décimo ou 0,1. Assim, os alunos poderiam efetuar novamente as medições, dessa vez utilizando a ideia de números racionais decimais. Com isso, 5 e um bocado vira 6, 7, 3 e dois dedinhos passam a ser 3, 4 e etc.

Fonte: dados da pesquisa

Figura 4 - Resposta do Professor G à abordagem do conteúdo referente à questão 1

Resposta do aluno "A"

a) Professor, como o senhor costuma abordar o conteúdo, multiplicação de racionais na forma decimal por naturais?

Nas minhas abordagens com os alunos sobre os conteúdos de multiplicação de racionais na forma decimal por naturais, mostro aos alunos como deve ser feita a estrutura após cada multiplicador. Onde deve ser feita, após a primeira, no caso a segunda sequência de multiplicação, devemos iniciar sempre abaixo do segundo número da primeira multiplicação, seguindo essa regra para as seguintes.

Logo após as multiplicações chegamos à parte mais importante para definirmos a localização da vírgula para definir o resultado. Tomando como base o exercício corrigido acima, a soma dos três parcelas resultou em dois 26700. Observando que após a vírgula do multiplicador, de acordo com a quantidade de números situado à direita da vírgula definiu no resultado. No caso temos o valor de 267,00 como o resultado final da multiplicação.

Fonte: dados da pesquisa

Na resposta do professor C, podemos observar que ao apresentar o racional, ele faz referência inicialmente ao sistema monetários e em seguida a ideia do medir, e da limitação imposta pela grandeza discreta naquela situação, até deparar-se com a grandeza contínua. Já na resposta do professor G, observamos que ele opta por um caminho mais respaldado na parte mais algorítmica.

É verdade que as conduções anunciadas ao problema são distintas entre C e G, no entanto não é nossa intenção adentrar nesse raciocínio, mas sim observar que indicam, em suas falas, conhecimento de conteúdo e ensino e conhecimento de conteúdo de alunos, além do conhecimento especializado do conteúdo, pois apontam estratégias de ensino pertinentes ao conteúdo, indicam que os estudantes poderão aprender a partir de determinadas abordagens e de elementos mais contextualizados e demonstram saber como explorar o conteúdo tratado.

A seguir vamos analisar o Quadro 2, referente à questão 2 do protocolo.

Quadro 2 - Análise dos protocolos - questão 2

Análise dos protocolos - referentes à questão 2	
CATEGORIA 01 Quais os erros cometidos pelos alunos?	Localização da vírgula, alterando o resultado. Perceberam que o aluno compreende o posicionamento na adição dos resultados parciais da multiplicação, passando a considerar o posicionamento dos números racionais nos fatores (multiplicando e multiplicador).
CATEGORIA 02 Os alunos "A" e "B" têm as mesmas dificuldades ou diferentes?	Há percepção da diferença das dificuldades, no entanto, os professores *A*, *D*, *F*, *H* e *I* afirmam que o aluno "A" tem mais dificuldades, pois não compreende a estrutura da multiplicação. Os demais professores, *B*, *C* e *G*, ressaltam que o aluno "B" erra na localização da vírgula na casa decimal.
CATEGORIA 03 Encaminhamentos que poderiam ser tomados.	Rever estudos com números racionais, propondo atividades com questões do cotidiano, explicar o motivo da diferença do resultado por meio das regularidades do SND atentando para o uso da vírgula na casa decimal correta.

Análise dos protocolos - referentes à questão 2	
CATEGORIA 04 Relação entre os erros cometidos e dificuldades com SND.	Os entrevistados apontam dificuldade também do próprio professor, por não dominar o conteúdo. Muitas vezes, pela forma como o professor apresenta esses conteúdos, os alunos não conseguem fazer paralelo entre o conceito e a estrutura de como os resultados devem ficar posicionados na multiplicação de racionais na forma de decimais.

Fonte: elaboração dos autores

Ao considerarmos a categoria 1 da questão 2, identificamos que os professores apontam o equívoco dos estudantes. Reiterando o que apontamos na análise da questão acima. Observamos que os professores apresentam conhecimento de conteúdo e aluno, conhecimento de conteúdo e conhecimento especializado de conteúdo, ao identificarem as respostas incorretas dos alunos e ao conhecerem o conteúdo tratado.

Na categoria 2, observamos que três professores apenas constatam o erro que já estava explícito, no entanto, os outros quatro professores avaliam que um aluno possui mais dificuldades do que o outro, porém não conseguem qualificar essa maior dificuldade, tampouco observam que são de naturezas distintas.

Analisando a categoria 3, é possível observar que ao refletirem sobre a dificuldade que leva ao erro, os professores identificam, de maneira geral, os encaminhamentos que precisam ser seguidos. Coadunamos com Santos Filho (2015), quando afirma que:

> Compreendemos o erro como uma estratégia didática, que pode contribuir significativamente na construção da aprendizagem, pois, saber como o aluno erra revela pistas importantes que contribuem para a intervenção pedagógica. É a partir dos erros que o professor deve desenvolver o processo de mediação com os alunos (SANTOS FILHO, 2015, P.17).

Na categoria 4, outra consideração feita sobre erros cometidos e dificuldades do SND. Alguns docentes reconhecem que, além de os discentes, os professores, do mesmo modo, nem sempre dominam o conteúdo, de forma que não é construída uma possibilidade de melhor estruturar os conceitos. No último tópico, eles põem em xeque o próprio conhecimento, abrindo margem para que o conhecimento especializado do conteúdo, antes apresentado como sólido, agora apresente algumas lacunas.

Diante do exposto, observamos que existe a necessidade de outros estudos que possam contribuir mais na tentativa de compreender o estudo da multiplicação de racionais e os conhecimentos docentes sobre este conjunto numérico.

Considerações Finais

A partir da análise dos dados, pudemos refletir sobre como o trabalho com números racionais é repleto de ideias e relações, sobretudo no processo multiplicativo que destacamos e que precisa ser bem estudado, aprofundado e compreendido.

Estabelecemos como objetivo compreender como professores que lecionam Matemática no 6º ano do ensino fundamental, em escolas da rede pública de ensino de Pernambuco analisam erros cometidos por alunos na resolução de problemas de multiplicação de números decimais por naturais e entre decimais e as estratégias utilizadas para elucidar os problemas encontrados.

Percebemos que mesmo os que menos detalharam as respostas no protocolo, apontaram com coerência os erros nele contido, explicaram seus métodos e sugestões de trabalho com este conceito e demonstraram preocupação não apenas com a aprendizagem dos alunos do 6º ano, mas sinalizaram grandes problemáticas que são passadas nos anos seguintes através das dificuldades não sanadas, demonstrando conhecimento horizontal de conteúdo, neste caso específico.

Na análise e categorização pudemos identificar, tanto na primeira, como na segunda questão, que os professores dão indícios de que possuem o conhecimento comum e o conhecimento especializado do conteúdo, além dos conhecimentos de conteúdo e ensino e de conteúdo e aluno, seja através das propostas de encaminhamentos ou pela identificação dos equívocos dispostos no protocolo. Ainda assim, na quarta categoria do segundo protocolo, alguns professores põem em xeque seu conhecimento especializado, ratificando que, muitas vezes, a dificuldade reside no próprio professor ou na forma como os conceitos são apresentados.

Apesar disso, foram apontadas as dificuldades que os alunos tinham em compreender o SND e a relação entre sua compreensão e a aprendizagem de operações com números racionais. Enfatizamos que os professores se propuseram a adaptar seus planos de aula e retornar os conteúdos com novos métodos de ensino para auxiliar seus alunos.

Desta forma, compreendemos que a partir desta pesquisa poderão surgir ideias para novas produções acadêmicas fundamentadas na análise de erros e na análise de quais encaminhamentos o professor propõe quando comprova as problemáticas relacionadas ao SND.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. 3. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* BNCC. MEC, 2017. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192> Acesso em 03 jul. 2020.

ROMANATTO, M. C. *Número Racional: Uma teia de relações.* ZETETIKÉ – CEMPEM – FE/UNICAMP – V.7 – n 12, p. 37 – 49 – Jul/dez, 1999.

SANTOS, J.K.J. *A compreensão do professor sobre os erros dos alunos, em itens envolvendo expectativas de aprendizagem dos números racionais, nos anos iniciais do ensino fundamental.* 2015, 184 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

SANTOS FILHO, J. F. *Investigando como professores dos anos iniciais julgam propostas de ensino para o trabalho com os números racionais.* 2015, 131f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2015.

CAPÍTULO 16

Conhecimentos mobilizados por professores ao analisarem dificuldades e erros de estudantes na comparação de números decimais

André Pereira da Costa, Larisse Vieira de Melo Vilaça, Luciana Ferreira dos Santos, Marcel Muniz Vilaça e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Este artigo tem como enfoque o conhecimento de professores de Matemática sobre os números racionais na sua representação decimal. Utilizaremos como teorização a noção de conhecimento matemático para o ensino e as habilidades necessárias para os professores, desenvolvidas por Ball e colaboradores (2008). Destacamos a importância do psicólogo educacional Lee Shulman que, desde 1986, vem pesquisando e produzindo trabalhos que alertam para necessidade de investigar os conhecimentos mobilizados pelos professores para compreender melhor os fatores relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem.

O modelo teórico, *knowledge base*, desenvolvido por Shulman (1986) apresenta três categorias de conhecimento do professor:

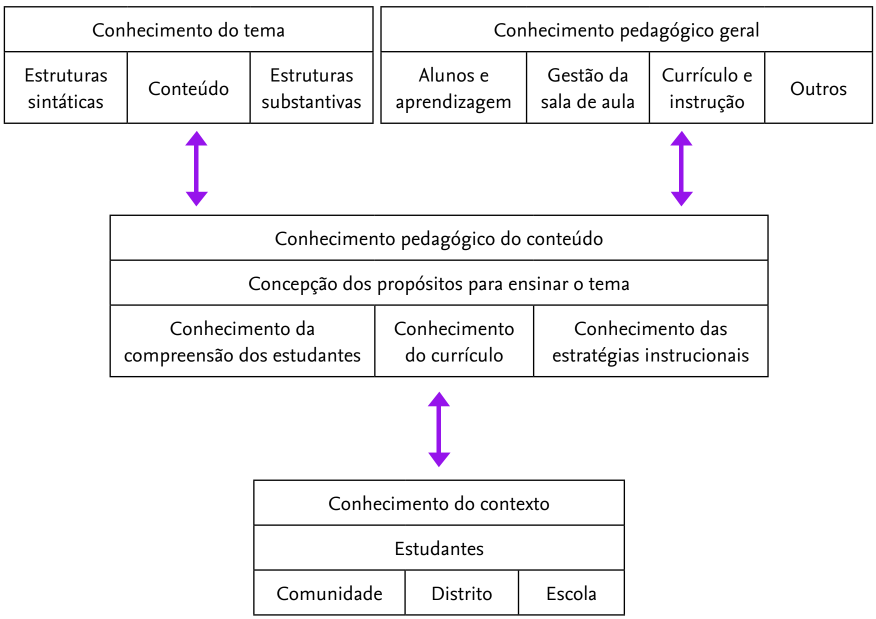
- Conhecimento do conteúdo específico: dominar o que vai ensinar;
- Conhecimento pedagógico da matéria: que são os princípios ou estratégias de gestão e organização de classe, úteis para ensinar o conteúdo;

- Conhecimento curricular: referente ao conhecimento do professor para selecionar e organizar os programas, bem como os meios que dispõe para isso. Em trabalho posterior, no texto *Knowledge and teaching: foundation sof a new reform* de 1987, Shulman realizou uma revisão das categorias mencionadas, propondo novas categorias subdivididas em três grupos de conhecimento, mantendo as propostas originais de 1986, são elas:
    - Conhecimento do aluno: quem você ensina;
    - Conhecimento dos contextos educacionais: ambiente de trabalho, região e características culturais da comunidade;
    - Conhecimento dos fins educacionais: valores sociais, propósitos e bases filosóficas e históricas;
    - Conhecimento pedagógico do conteúdo: que é uma "amálgama" ou combinação especial entre conteúdo e pedagogia, típico do professor.

O autor destaca a singularidade do conhecimento pedagógico do conteúdo, também denominado de PCK *Pedagogical Content Knowledge*, diante das outras categorias e propõe esta categoria como a mais provável para distinguir entre o conhecimento do conteúdo de um especialista de uma determinada área e o conhecimento de um professor nesta mesma área. Grossman (1990), orientanda de Shulman, apresenta em seu estudo a estruturação das categorias de conhecimento do professor. Na Figura 1 é possível perceber como se relacionam.

No modelo de Grossman (1990) observamos que o conhecimento do conteúdo específico é substituído por Conhecimento do Tema. Para a pesquisadora (1990), o termo Conhecimento do Tema traduz melhor o entendimento do próprio Shulman, pois engloba não somente o conhecimento do conteúdo específico, como também o conhecimento das estruturas sintáticas e substantivas do conteúdo. Para a autora, a compreensão do professor requer ir além dos fatos e conceitos intrínsecos da disciplina, pressupõe o conhecimento das formas as quais os princípios fundamentais de uma área do conhecimento estão organizados, a compreensão dos processos de sua produção, representação e validação epistemológica. Espera-se que o professor possua a compreensão do porquê de um determinado tópico ser primordial para uma disciplina, enquanto outros têm importância secundária.

Figura 1 - Modelo de conhecimento de professores.

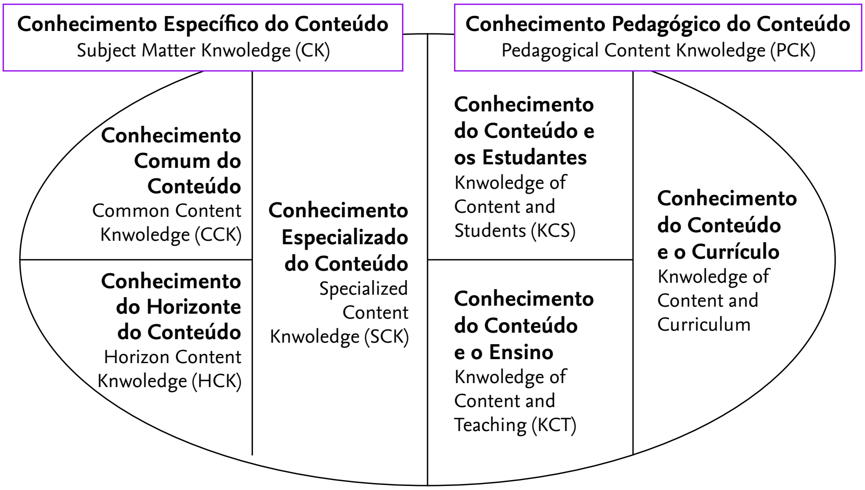


Fonte: Grossman (1990, p. 5. Tradução nossa).

Como foi dito anteriormente, esse modelo serviu de base para que Deborah Ball e colaboradores (2008) desenvolvessem o *Mathematical*

Knowledge for Teaching (MKT) no qual classificam o conhecimento matemático em seis domínios. Os autores aglutinam o conhecimento curricular com o conhecimento didático do conteúdo de Shulman (1986), obtendo, assim, apenas dois grandes domínios que se encontram, por sua vez, subdivididos em três subdomínios como podemos observar no diagrama a seguir:

Figura 2 - Domínio do conhecimento matemático para o ensino



Fonte: adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008)

Dessa forma, o conhecimento específico do conteúdo é constituído por:

- Conhecimento Comum do Conteúdo, o conhecimento matemático usado em contextos além do ensino;
- Conhecimento especializado do Conteúdo, ou seja, o conhecimento matemático vinculado unicamente ao ofício do ensino de Matemática. É um tipo de conhecimento matemático que normalmente não é usado para outros fins além do ensino;

- Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, o conhecimento matemático que possibilita ao professor saber como os tópicos matemáticos são construídos conceitualmente ao longo do currículo.

Enquanto que o conhecimento pedagógico do conteúdo é formado por:

- Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes engloba o conhecimento sobre os estudantes e sobre o fato de saber Matemática. Os professores devem, por exemplo, ser capazes de antecipar o que os estudantes estão propensos a pensar e o que – e quando – eles encontrarão dificuldades acerca de um determinado conteúdo;
- Conhecimento do Conteúdo e do Ensino combina o saber sobre o ensino e sobre Matemática. Muitas das tarefas Matemáticas de ensino exigem um conhecimento matemático da organização dos conteúdos específicos para o ensino;
- Conhecimento do Conteúdo e do Currículo.

Salientamos que esses dois conjuntos, como apontam os próprios autores do modelo teórico, dialogam entre si e os seis domínios necessitam ser encaradas como formas de organização dos conhecimentos que circulam nos processos de ensinar e aprender Matemática, e não como uma tipologia sem vínculo com a prática docente.

Observa-se que, diferente de Shulman (1986; 1987), Ball e seus colaboradores (2008) acrescentam o domínio o conteúdo comum de ensino, que seria um conhecimento matemático que um professor utiliza ou qualquer outro profissional que use a Matemática. Sobre essa afinidade entre as contribuições dos autores supracitados, Teles (2018, p. 83) afirma que

> Todos os estudiosos concordam que é relevante o conhecimento matemático para a elaboração do planejamento de aula e para a melhoria dos

> processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Por exemplo, quando o docente antecipa e analisa o erro do aluno e o porquê desse erro, justificando de forma coerente e buscando estratégias e procedimentos para ajudar nas dificuldades desses estudantes, está desenvolvendo esse conhecimento.

Diante do apresentado, por questões de delimitação, nesse estudo, teremos o enfoque no conhecimento do professor sobre o conteúdo e estudante e de suas características (conceitos mobilizados pelos estudantes durante a abordagem dos números decimais[1]). Esse tipo de conhecimento é característico de professores devido ao fato de apresentar algo que vai além de ter propriedade sobre um conteúdo, pois também envolve fatores relacionados ao modo como os estudantes poderão compreender, ou não, determinados temas. Ball e colaboradores (2008) descrevem esse conhecimento como aquele que os professores mobilizam ao antecipar possíveis erros e concepções equivocadas dos estudantes, interpretar os seus pensamentos incompletos e prever situações que possam ocorrer perante tarefas propostas para o auxiliar a compreender o que será interessante e desafiante para os estudantes.

Neste artigo[2], produto da disciplina *Números e Operações,* cursada no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE (EDUMATEC), ministrada pelas professoras doutoras Rosinalda Teles e Cristiane Pessoa no segundo semestre de 2016, centramos a nossa atenção nos números racionais, especificamente nos números decimais. Entre outros motivos, por ser um tema matemático em que os estudantes apresentam dificuldades durante o processo

1 Importante não confundir números decimais com números racionais. Há números racionais que não são decimais. Do mesmo modo, há números decimais que não são racionais. Apenas os decimais periódicos e os decimais exatos pertencem ao conjunto dos números racionais.

2 Este artigo é fruto de ampliação da discussão e análise de um trabalho apresentado no VII Encontro Pernambucano de Educação Matemática, realizado em 2017.

de ensino e de aprendizagem fazendo com que professores sintam-se desafiados a constituírem uma prática que promova uma aprendizagem significativa e de natureza conceitual (DAMICO, 2007; MAGINA, CAMPOS, 2008).

Em uma breve revisão de literatura, identificamos alguns estudos que discutem o conhecimento de professores sobre os números racionais. Damico (2007) realizou uma pesquisa com estudantes de Matemática (calouros e veteranos) e os formadores desses discentes com a finalidade de investigar fatores relacionados ao processo de ensino dos números racionais. Os resultados apontam para um desequilíbrio entre o conhecimento conceitual[3] e processual[4], com prevalência do processual. Ou seja, há conhecimento de como se fazer, de como desenvolver algumas situações envolvendo o ensino dos números racionais, mas essa é uma prática desvinculada do conhecimento sobre números racionais. Não há uma compreensão sobre o porquê dos procedimentos.

Damico (2007) também observou baixo nível de conhecimento didático relacionado às formas de representação do conteúdo normalmente ensinado no Ensino Fundamental que versam sobre números racionais. Esse fator, relacionado ao apresentado no parágrafo anterior, reflete um cenário que evidencia um conhecimento de como resolver situações envolvendo os números racionais, dos procedimentos de resolução. Entretanto, esse conhecimento é desprovido de compreensão, de argumentos que o justifiquem e, também, de metodologias e abordagens que possam ser utilizadas para ensiná-lo a alguém.

3 Conhecimento conceitual está relacionado, como o próprio nome já diz, ao conceito. É o conhecimento sobre algo.

4 Conhecimento processual está relacionado ao conhecimento do processo, ao conhecimento de como fazer alguma coisa.

Resultado semelhante foi encontrado na pesquisa de Perfeito (2015) sobre o conhecimento do professor do primeiro ciclo em relação aos números racionais. A autora (ibidem) identificou que a maioria dos professores não possui conhecimentos sólidos sobre os números racionais, precisando do aprofundamento e esclarecimento de alguns conceitos. As principais dificuldades manifestaram-se nas operações com frações, ao nível conceitual. A análise que os professores fazem sobre o próprio conhecimento não corresponde, em alguns casos, ao seu desempenho nas tarefas, mostrando estar pouco conscientes das suas dificuldades. Segundo os professores, o trabalho com os números racionais apresenta dificuldades inerentes conhecimento sobre os estudantes, ao próprio conhecimento do conteúdo e conhecimento sobre o currículo no que se refere aos recursos didáticos e materiais de apoio para o ensino dos números decimais.

Percebe-se, nessa situação, que os próprios professores apresentam dificuldades ao trabalhar com os números racionais. Esse fator gera um *efeito bola de neve*: Como ensinar o que eu mesmo não domino completamente? Essa situação acarreta maiores dificuldades, pois as inseguranças em trabalhar com o conteúdo que não dominam interferem diretamente nas situações criadas por esses professores ao lidar com esse conteúdo em sala de aula.

Na pesquisa desenvolvida por Ferreira e Ponte (2014), apresenta um estudo de caso cujo objetivo era compreender o conhecimento de futuros professores do 2º ciclo sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no momento de sua prática supervisionada. Analisando os resultados de uma das entrevistadas na pesquisa, identificou-se que a futura professora, na sua primeira experiência de prática supervisionada, mobilizou conhecimento do conteúdo (nem sempre de natureza conceitual) e conhecimento didático, nomeadamente sobre os estudantes (dificuldades e estratégias possíveis na resolução de problemas). Além disso, reconhece que durante a sua prática letiva, a estudante mobilizou conhecimentos e melhorou a forma de explicitar as suas ações e as dos estudantes. Essa pesquisa evidencia que, mesmo diante de dificuldades, ao lidar com situações relacionadas aos números racionais, é possível que o professor encontre alternativas para superá-las desde que reconheça suas limitações e esteja disposto a superá-las.

Com relação ao conhecimento sobre o estudante, Ponte, Quaresma e Branco (2012), em convergência com estudo de Ball e colaboradores (2008), afirmam que é importante que os professores sejam capazes de antecipar os erros e equívocos comuns dos estudantes. Tal autor também destaca a necessidade de docentes preverem resoluções dos estudantes em tarefas específicas e, ainda, o que estes podem considerar desafiante e interessante ou, pelo contrário, o que pode ser confuso.

Diante deste cenário, tecemos o seguinte questionamento: *Quais os conhecimentos mobilizados por professores ao analisarem dificuldades e erros de estudantes na comparação de números decimais?*

Com base nesta questão, estruturamos o presente texto, que tem como objetivo geral: *analisar* os conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores ao analisarem uma atividade com números racionais na representação decimal extraída de um livro didático de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. E objetivos específicos: *identificar* quais as possíveis dificuldades que os estudantes poderiam ter ao comparar dois números decimais (48,2 e 48,18) e *identificar* os conhecimentos mobilizados pelos professores ao antecipar possíveis erros ou concepções equivocadas dos estudantes.

Partilhando da ideia de Teles (2018), acreditamos que investigar os conhecimentos mobilizados pelos professores oferece indícios para melhor compreender como está sendo estruturado o processo de ensino e de aprendizagem envolvendo os números racionais, uma vez que o planejamento, as intervenções didáticas e as avaliações preparadas pelos professores estão fortemente relacionadas ao conhecimento sobre a temática em questão. Quanto melhor se compreende esse processo, haverá possibilidade de maiores subsídios para preparar materiais e propostas adequadas para a formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Sobre esse tipo de pesquisa em Educação Matemática, Teles (2018, p. 90) apresenta que elas contribuem para sinalizar "[...] fragilidades relacionadas ao conhecimento matemático tanto de estudantes, quanto de profissionais que já estão atuando em nossas escolas". Segundo a autora, essas pesquisas também contribuem para reforçar a necessidade em se investir na formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Desse modo, antes de apresentar elementos que se constituem indícios relevantes para responder ao questionamento central de nossa pesquisa, apontaremos um breve embasamento sobre a abordagem dos números racionais na representação decimal.

Abordagem dos números racionais na representação decimal: olhares para o currículo e para a literatura acadêmica

Os números racionais podem ser definidos como todo número que pode ser representado por uma fração de dois números inteiros, um numerador e um denominador não nulos, ou seja, a razão de dois inteiros a e b, sendo $b \neq 0$. O conjunto dos números racionais pode ser expresso do seguinte modo:

$$Q = \{a/b;\ a \text{ e } b \in Z \text{ e } b \neq 0\}$$

O símbolo Q deriva da palavra inglesa "*Quotient*" que pode ser traduzido como quociente e que apareceu a primeira vez no livro Algèbre, de Bourbaki (BOURBAKI, 1998).

Segundo Caraça (1951), o conjunto dos números racionais, ou campo racional, compreende o conjunto dos números inteiros e o formado pelos números fracionários. Um número racional pode assumir diferentes representações: fracionária, decimal e percentagem. Silva (2013, p. 26), com base em pesquisas de diversos autores, apresenta que, de modo simples, pode-se afirmar que "números racionais são quocientes, por definição". Nessa situação, vale reforçar que o dividendo deve ser diferente de zero para que se tenha um quociente. Ao falar dos números racionais, tão importante quanto sua definição, é considerar suas diferentes formas de representação e seus diferentes significados.

Neste estudo, temos como enfoque o número racional na sua representação decimal. Os números decimais têm origem nas frações decimais. Na realidade, esses números são frações decimais, porém "escritos" de modos diferentes. Existiram muitas formas de separar a parte inteira da parte decimal, mas foi John Napier, matemático escocês, que sugeriu o uso de um ponto ou de uma vírgula para separar a parte inteira da parte decimal (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2013).

Com relação ao ensino-aprendizagem dos números decimais na Educação básica, não tem sido uma tarefa fácil. Muitas são as dificuldades acerca deste tema e, por isso, os números decimais são alvos a muitos anos de discussão e investigações por vários autores, como Lerner (1995), Stacey *et al.* (2001), Silva (2006), Padovan (2000). Eles afirmam que, entre outros fatores, essas dificuldades existem devido à ruptura dos racionais em relação às regras válidas no conjunto dos números dos naturais, especialmente para comparação de decimais.

Com relação às dificuldades de aprendizagem dos números decimais os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997), e autores como Fernandes, Bellemain, Lima e Teles (2008), indicam que o conhecimento sobre número inteiro gera dificuldades na apropriação do conceito de números racionais. Ainda pontuam esses obstáculos conceituais:

> No conjunto dos números naturais o tamanho da escrita numérica é um bom indicador da ordem de grandeza, no entanto, nos números racionais isso não é possível de se verificar.
>
> Se nos naturais cada número só pode ser representado por uma única combinação de algarismos, nos racionais é possível representar o mesmo número de diferentes formas;
>
> Multiplicar um número racional por outro e obter um número menor, parece contraditório para criança.
>
> Não é possível discutir a existência de sucessor e antecessor com os números racionais (diferente do que ocorre com os naturais), pois entre dois números desse conjunto existem infinitos números (o que torna impossível determinar sucessor e antecessor) (p.2-3).

Além do conhecimento sobre as dificuldades do estudantes, é fundamental que o professor possibilite aos mesmos uma efetiva compreensão do conceito de número racional. É necessário, que os professores sejam conhecedores dos diferentes aspectos do conteúdo que pretendem abordar, das suas diferentes formas de representação e de formas de os explorar e abordar em contexto. Nesse sentido, caberá ao professor, não apenas o conhecimento elementar que permita responder às questões do nível dos estudantes, mas também um conhecimento que lhe permita levar os estudantes a atribuir sentido e significado ao que fazem e o porquê fazem (PINTO; RIBEIRO, 2013). Ou seja, é necessário que o professor possua um conhecimento sobre o ensino que lhe permita realizar a adaptação, a transformação e a implementação do conhecimento do conteúdo a ser ensinado, de modo a torná-lo compreensível e ensinável aos estudantes (SHULMAN, 1986).

Em seu estudo, Grando e Vieira (2006) apontam que as principais dificuldades dos estudantes sobre o número decimal estão relacionadas às diferentes formas de representação do número decimal e no domínio do Sistema de Numeração Decimal. As autoras (ibid.) também destacam que os estudantes apresentam dificuldade em passar o número decimal para sua representação gráfica. Toledo e Toledo (2009, p.198) afirmam que os estudantes sentem muita dificuldade em compreender, por exemplo, ao comparar os decimais "0,5 é maior que 0,35. Mesmo tendo visto que é possível retirar ou acrescentar zero a direita do último algarismo significativo de um número decimal sem alterar seu valor, quase nunca se lembra de aplicar essa regra".

Sobre suas representações, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) sugere que devem ser trabalhadas, desde os anos iniciais do ensino fundamental, tanto a representação decimal, quanto a fracionária. Sobre os significados, inclusive, não há um consenso entre os pesquisadores que se delimitam ao tema. Entretanto, considerando as recomendações preconizadas nas BNCC (BRASIL, 2017), temos o trabalho com os significados[5] de quociente, parte-todo, razão e operador.

O documento também trabalha com o significado de número, embora não tenha explicitado diretamente. O trabalho com os números racionais inicia, de modo discreto, no 2° ano no trabalho com o sistema monetário brasileiro e a identificação de cédulas e moedas. No 3° ano é introduzida a ideia de valores equivalentes, reforçando, assim, o trabalho com a representação decimal de valores do sistema monetário brasileiro. No 4° ano, a ideia de fração é apresentada como resultado da divisão entre dois números (quociente). No 5° ano, acrescenta-se o significado de parte-todo e vai até o 6° ano trabalhando com esses significados, tanto na representação decimal, quanto na fracionária. Já no 7° ano, são introduzidos dois novos significados: razão e operador.

Em relação ao ensino dos números racionais a BNCC (BRASIL, 2017) sugere que é importante propor aos estudantes tarefas envolvendo medições, nas quais os números naturais não são suficientes para

5 Interessados em melhor compreender sobre os significados dos números racionais ler Silva (2013).

resolvê-las. Dessa forma, é possível evidenciar a necessidade da utilização dos números racionais na forma decimal e fracionária.

Não apenas em situações envolvendo medições em que os números racionais são mobilizados. Mas em momentos nos quais se trabalhe com o sistema monetário, como por exemplo, o real há uma ênfase no trabalho com números decimais, pois existem quantias que não podem ser apresentadas utilizando o reais. Há casos em que se faz necessário trabalhar com os centavos para que seja possível representar diferentes quantias.

Outra situação bastante comum no cotidiano são as receitas culinárias. É bastante comum encontrarmos frações para representar a quantidade de determinados ingredientes durante a preparação de algum alimento. Esses fatores, além de vários outros, servem para reforçar a necessidade e a relevância social em compreender e utilizar os números racionais.

Corroborando para apresentar essa relevância social, Silva (2013), em sua pesquisa de doutorado, para investigar o significado e as representações dos números racionais utilizadas no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, no período de 1998 a 2011, evidencia um aumento na quantitativo de questões que utilizam representações dos números racionais ao longo dos anos. Para justificar esse aumento, a autora pontua que "Isso nos leva a levantar a hipótese de que o crescimento no número de itens que envolve o conceito de números racionais, pode estar relacionado com a importância dada a esse conhecimento não só no cotidiano das pessoas, mas na vida acadêmica" (SILVA, 2013, p.138).

Lerner (1995) realizou um estudo sobre os decimais com crianças da terceira e quinta série (atualmente quarto e sexto ano), na qual abordou o valor posicional. A pesquisadora (ibidem) identificou que as crianças liam os decimais estabelecendo estreitas correspondências entre o que se dizia e os elementos que apareciam escritos. Algumas crianças realizavam a escrita de forma convencional, outras não escreviam e tinham algumas que escreviam como números inteiros. Todavia, todas as crianças foram capazes de interpretar decimais quando se referiam a dinheiro. Quando estava em outro contexto, a diferença estabelecida pela vírgula não era suficiente para saber que trata-se de um número decimal. A autora (ibidem) concluiu que as interpretações corretas que os alunos fazem dos números decimais estejam vinculadas ao seu uso extraescolar mais do que ao ensino.

Desse modo, diante da possibilidade de trabalhar os números racionais e seus diferentes significados e formas de representação, vale ressaltar que o foco de nossa pesquisa é o trabalho com a representação decimal. Com base nesse aspecto, analisaremos os conhecimentos mobilizados por professores ao analisarem dificuldades e erros de estudantes na comparação de números decimais

A seguir apresentaremos uma discussão acerca dos conhecimentos mobilizados pelos professores ao anteciparem dificuldades e erros dos estudantes ao compararem números decimais.

Conhecimentos mobilizados por professores ao analisarem dificuldades e possíveis erros de estudantes ao compararem números decimais

Nesse tópico, vamos realizar uma discussão sobre os conhecimentos sobre o conteúdo e estudantes que os professores devem mobilizar ao ensinar os números racionais, especificamente, para ensinar os números decimais. Foi realizado um estudo por Stacey, Helme, Baturo e Bama (2001), com 522 estudantes de Pedagogia em quatro universidades na Austrália e Nova Zelândia. Buscavam identificar a percepção dos estudantes de Pedagogias sobre as dificuldades dos alunos aos compararem números decimais.

Os participantes foram solicitados para responder um teste de compreensão decimal, no qual tinham que marcar itens que achavam difíceis para os estudantes e justificaram o porquê. Os pesquisadores (ibidem) partiram da premissa de que os números decimais são fonte de dificuldade para aprendizagem e para o ensino. Sendo assim, buscou-se identificar a natureza das dificuldades na conceitualização do decimal no tocante do conhecimento do conteúdo e do estudante.

As indagações que nortearam o estudo foram: *quanto os professores sabem sobre o número decimal? Até que ponto estes professores estão conscientes de sua dificuldade? O que os professores pensam e o que fazem as comparações decimais difíceis para os estudantes? Quais as características das explicações dos professores sobre as dificuldades dos alunos?* Para análise dos itens do teste os pesquisadores tomaram a variável "como o professor pensava em decimais", considerando os diferentes tipos de erros apresentados. Quatros aspectos foram identificados:

- A maior quantidade de números para a criança quer dizer maior número, sem considerar que ele é maior no valor. Por exemplo: 1,570>1,8;
- A maior quantidade – a criança também pensa que o número decimal simples seria considerado maior que um com vários números decimais. Assim 0,4 > 0,476;
- Na comparação a presença do digito zero, desconsidera o zero, admitindo que não altera o valor numérico. Por exemplo: 3,72 < 3,073.

Os pesquisadores Stacey *et al.* (2001) apontam quatro características que fazem as comparações com decimais difíceis: tamanho, comparação com o zero; presença do zero como dígito e similaridade entre os números. Observou-se que os erros dos professores são indicativos de um conhecimento conceitual frágil sobre números decimais. Dos participantes da pesquisa, 13% erraram ao comparar os números decimais com zero, mostraram evidências do não entendimento da lógica decimal quando pensavam que maior número de casa decimais é menor e outros pensavam que mais curto é menor, considerando apenas o número de dígitos. Cerca de 52% dos participantes não conseguiam identificar o lugar do número. Esses pesquisadores destacam a necessidade de uma discussão conceitual do número em seus diferentes aspectos na formação de professores em Pedagogia.

Em um estudo desenvolvido por Esteves e Souza (2012), com professores de uma escola municipal de Campo Grande/MS, teve como objetivo investigar os conhecimentos de um grupo de educadores do 5º ano do ensino fundamental sobre números decimais e a relação com sua prática pedagógica. Como aporte teórico para a organização dos dados foi utilizado o modelo teórico desenvolvido por Lee Shulman sobre a base de conhecimentos para o ensino, focando em três vertentes: o conhecimento do conteúdo específico, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

Para a coleta de dados foram realizados observação das aulas de Matemática e cinco sessões de atividade com os professores sobre números decimais. A análise de documentos, como cadernos de alguns alunos e caderno de plano de aula dos professores, e entrevistas semiestruturadas foram também realizadas.

Embora a pesquisa de Esteves e Souza (2012) tenha um número de participantes muito menor que o estudo desenvolvido por Stacey, Helme, Baturo e Bama (2001), os resultados identificados apresentam muita semelhança. Por exemplo, utilizaram as regras do conjunto dos números naturais para comparar os números decimais chegando a afirmar que 0,103 é maior que 0,7. Consideravam o tamanho do número. Os resultados revelam a existência de lacunas no conhecimento específico sobre números decimais desses professores, as quais interferem em seu conhecimento pedagógico do conteúdo e em seu conhecimento curricular, e tendem a influenciar a forma como organizam o processo de ensino e aprendizagem dos números decimais em sala de aula.

De acordo com as pesquisadoras (2012), as lacunas no conhecimento do conteúdo específico dos professores comprometem sua compreensão acerca dos números decimais, o que pode ser confirmado pela dificuldade enfrentada por eles na identificação de tópicos relevantes desse conteúdo. A maioria dos professores julgou ser fundamental a realização de cálculos escritos com os números decimais, desconsiderando que o conceito e o trabalho com as diferentes representações dos números racionais (fração, decimal, porcentagem) são ideias chaves a serem exploradas, antes mesmo do ensino das técnicas de cálculo (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999).

Esteves e Souza (2012) afirmam que as lacunas no conhecimento do conteúdo específico tornam o conhecimento dos professores muito próximo aos conhecimentos dos alunos. Essa proximidade com os conhecimentos dos alunos limita as ações do professor no processo de ensino e aprendizagem, trazendo implicações importantes em como e o que os professores ensinam sobre determinado conteúdo (GROSSMAN; WILSON; SHULMAN, 1989).

Ao olharem para o conhecimento pedagógico do conteúdo mobilizados pelos professores, Esteves e Souza (2012) observaram a opção por trabalhar separadamente as diferentes representações (fracionária e decimal) dos números racionais; priorizar mais o trabalho com as frações do que com os números decimais; ensinar os números decimais sem o estabelecimento de relações com o Sistema de Numeração Decimal; focar, principalmente, nos números decimais no sistema monetário, abordando pouco seu uso em outros contextos; além de priorizar o trabalho com as operações de adição, subtração e multiplicação, através de técnicas algorítmicas.

Do mesmo modo, em relação aos conhecimentos curriculares, os dados analisados revelam que esses professores demonstram conhecer pouco as atuais propostas curriculares, tendo como maior referência o currículo do tempo em que estudavam. Assim como não conheciam os recursos didáticos que poderiam ser utilizados no ensino dos números decimais e as principais relações que se estabelecem entre os números decimais e outros conteúdos.

Esteves e Souza (2012) apontam para imbricação de todos esses conhecimentos – do conteúdo específico, do conteúdo pedagógico e do conteúdo curricular -, influenciando suas escolhas sobre o que e como ensinar números decimais. Por fim, as autoras, destacam a necessidade de reestruturação dos conhecimentos matemáticos básicos, necessários nos cursos de formação inicial e continuada para professores que atuam na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Esses estudos serviram de base para análise dos dados coletados nessa pesquisa. Apresentaremos, na sequência, nosso percurso metodológico.

Percurso metodológico

A pesquisa, de cunho qualitativo, toma como base os pressupostos de Bogdan e Biklen (1994) ao afirmarem que em uma pesquisa qualitativa devem ser estabelecidos estratégias e procedimentos que permitam considerar as experiências do ponto de vista dos sujeitos pesquisados. Assim, buscamos *identificar* os conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores ao analisarem uma atividade com números racionais na representação decimal extraída de um livro didático de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental.

Para atingir o objetivo proposto, aplicamos um teste com oito professores que ensinam Matemática, sendo quatro atualmente lecionando nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. Os outros quatro professores já atuaram nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, no entanto, estão afastados da sala de aula para estudos em nível de mestrado e de doutorado na área de Educação Matemática e Tecnológica. Antes da aplicação do teste, realizamos uma breve entrevista, na qual coletamos informações profissionais e acadêmicos dos professores participantes deste estudo. Os dados foram sistematizados no Quadro 1, veja:

Quadro 1 - Informações profissionais e acadêmicas dos professores participantes do estudo

Professores Participantes	**Ano de Escolaridade que Atua/Atuava**	**Formação**	**Experiência Profissional em anos**
Professor A	Todos os anos do Ensino Médio	Licenciatura em Matemática	10 anos
Professor B	Educação Infantil, e Educação de Jovens e Adultos	Licenciatura em Pedagogia	05 anos
Professor C	6° ano do Ensino Fundamental	Licenciatura em Matemática	01 ano
Professor D	Anos Iniciais do Ensino Fundamental	Licenciatura em Pedagogia	05 anos
Professor E	Educação de Jovens e Adultos	Licenciatura em Pedagogia	01 ano
Professor F	7°, 8° e 9° anos do Ensino Fundamental e Todos os anos do Ensino Médio	Licenciatura em Matemática	10 anos
Professor G	Anos Finais do Ensino Fundamental	Licenciatura em Matemática	07 anos
Professor H	Todos os níveis da educação básica	Magistério e Licenciatura em Matemática	18 anos

Fonte: elaborado pelos autores.

Além da coleta das informações profissionais, solicitamos que os sujeitos respondessem um item que diz respeito à comparação de números decimais e dificuldades dos estudantes em resolver as questões. Na figura 1 é possível observar a situação-problema que serviu de base para que os professores refletissem sobre os possíveis erros e dificuldades dos estudantes.

Figura 3 - Comparação de números decimais

4. Leia e responda. **Ao passar por uma farmácia, Sílvia e Júnior resolveram se pesar. Sílvia disse que a balança indicou 48,2 kg. Júnior falou que, na sua vez, a balança marcou 48,18 kg. Qual dos dois tem maior massa? Justifique.**

Fonte: Sanchez (2013, v. 5, p.71)

Reflita:

> *Questão 1: Em relação ao conjunto dos números racionais representados na forma decimal, quais seriam as dificuldades para estabelecer a comparação entre 48,2 e 48,18?*
>
> *Questão 2: Que respostas errôneas os estudantes poderiam produzir? Por quê?*

Para cada questão apresentada acima realizamos uma análise *a priori* acerca dos possíveis conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores ao responderem as questões.

A situação-problema extraída do livro didático que serviu de base para discussão apresentava as seguintes características: situação cotidiana que envolvia comparação da grandeza massa. Massa é uma grandeza escalar, ou seja, é definida por ser composta por um único valor numérico, associado a uma única unidade de medida. No entanto, os autores do livro didático também fazem associação entre massa e peso. Esta associação não é correta, posto que, o peso de um objeto ou pessoa resulta da interação gravitacional entre sua massa e um campo gravitacional. Sob o ponto de vista físico e conceitual, massa e peso são diferentes.

No que diz respeito à comparação de dois números decimais (48,2 e 48,18), identificamos que as partes inteiras são iguais, restando a comparação das casas decimais. Com isso, é necessário mobilizar o conhecimento que os números decimais são não inteiros expressos por vírgulas e que possuem casa decimais, que as casas decimais são contadas a partir da vírgula, por exemplo, 48,2 e 48,18 possui duas casa decimais, sendo que 48,2 o zero não é apresentado. Essa representação decimal solicita a compreensão sobre o sistema de numeração decimal, principalmente com relação ao valor posicional.

Na questão 1: *Em relação ao conjunto dos números racionais representados na forma decimal, quais seriam as dificuldades para estabelecer a comparação entre 48,2 e 48,18*? Apresentamos a seguir a análise *a priori* da questão:

- Apontar dificuldade com relação à compreensão do sistema de numeração decimal no que se refere ao valor posicional das casas decimais;
- Indicar dificuldades em perceber o zero como mantenedor de posição;
- Indicar dificuldades dos estudantes em estabelecer relações entre os conjuntos números racionais e números naturais.

Na questão 2: *Que respostas errôneas os estudantes poderiam produzir? Por quê?* A seguir apresentamos a análise *a priori* da questão:

- Apontar que 48,18 é maior por considerar o tamanho da escrita numérica como um bom indicador da ordem de grandeza;
- Apontar que 48,18 é maior devido à ausência do zero;

Os dados obtidos através de todos esses procedimentos foram analisados e categorizados, com suporte da análise de conteúdo (BARDIN, 1977), a partir dos conceitos que envolvem os números decimais e seu ensino. Como referência para a organização dos dados, utilizamos o modelo teórico desenvolvido por Ball e colaboradores (2008), com enfoque no domínio de conhecimento do conteúdo e do estudante. Assim, criamos categorizações a partir das respostas dos professores acerca das possíveis dificuldades conceituais de aprendizagem que os estudantes podem apresentar ao comparar números decimais que são apresentadas no quadro 2 a seguir:

Quadro 2 - Categorias de análise

Categorias analíticas	Subcategorias construídas a partir dos dados empíricos
Antecipar dificuldades ao estabelecer a comparação entre 48,2 e 48,18.	Valor posicional
	Papel do zero
	Estabelecer relação entre conjunto dos racionais e inteiros
Antecipar possíveis erros ou concepções equivocadas dos estudantes.	Tamanho
	Zero
	Grandeza

Fonte: elaborado pelos autores

A seguir apresentaremos a análise e discussão dos resultados obtidos.

Análise dos conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores que ensinam matemática sobre os números decimais

Como apontado anteriormente, nossa análise e discussão dos resultados, parte das categorias analíticas descritas no quadro 2, buscou-se estabelecer relações entre o domínio de conhecimento do conteúdo e do estudante, elencado por Ball e colaboradores (2008), e as categorias analíticas construídas no estudo empírico. Ball e colaboradores (ibidem) descrevem esse conhecimento como aquele que os professores mobilizam ao antecipar possíveis erros e concepções equivocadas dos estudantes, interpretar os seus pensamentos incompletos e prever situações perante tarefas propostas interessante e desafiante para os estudantes.

Antecipar dificuldades ao estabelecer a comparação entre 48,2 e 48,18

A primeira questão tinha como *objetivo identificar quais as possíveis dificuldades que os estudantes poderiam enfrentar ao comparar dois números decimais (48,2 e 48,18).* No total, foram apontadas pelos docentes três dificuldades que os estudantes poderiam ter ao resolver a situações-problema: Valor Posicional, Zero como mantenedor de posição e Quantidade de casas decimais. Na tabela 1 a seguir é possível identificar a frequência.

Tabela 1 - Frequência dos conhecimentos mobilizados sobre a comparação de números decimais

Conhecimentos mobilizados pelos professores	**Quantidade**
Valor posicional	01
Zero como mantenedor de posição	02
Estabelecimento de relações entre os conjuntos números racionais e números inteiros	05
Total	08

Fonte: elaborado pelos autores

Observamos na tabela que somente um professor se referiu, explicitamente, a uma possível não compreensão do *valor posicional* dos algarismos como esperávamos *a priori*.

Ao apontar esse aspecto como uma possível dificuldade, o professor indica que o estudante pode não ter compreendido o sistema de numeração decimal, como ilustra o protocolo a seguir.

Figura 4 - Protocolo do professor A

Em relação ao conjunto dos números racionais representados na forma decimal, quais seriam as dificuldades para estabelecer a comparação entre 48,2 e 48,18?

– Pode-se não enxergar o 48,2 como 48,20 e achar que 0,18 é maior que 0,2 porque 18 é maior que 2. Muitos não percebem o valor posicional.

Fonte: dados da pesquisa.

Verificamos que o professor indica que o estudante pode não ter o conhecimento que as representações do número 48,2 e 48,20 representam a mesma quantidade. Desta forma, o professor mobiliza conhecimento sobre a representação decimal, pois na escrita decimal à esquerda da vírgula se localiza a parte inteira do número, enquanto ao lado direito da vírgula se localizam as subdivisões das quantidades inteiras: décimos, centésimos, milésimos e assim por diante. Esse resultado é diferente do estudo desenvolvido por Esteves e Souza (2012), em que os professores não estabeleceram as relações entre os números decimais e o Sistema de Numeração Decimal.

Observamos, também, que dois professores indicam que a ausência do zero nas escritas apresentadas no problema pode causar dificuldade e alegaram a necessidade de colocar um zero para igualar a quantidade de casas decimais, o que pressupõe a compreensão das relações entre décimos, centésimos e milésimos. O protocolo do Professor B ilustra este aspecto.

Figura 5 - Protocolo do professor B

A dificuldade do estudante se constitui a partir do momento em que ele não percebe que 48,2 = 48,20, ou seja, a ausência do zero faz com que o estudante pense que Júnior (48,18 kg) é mais "pesado" do que 48,2 de Sílvia.

Fonte: dados da pesquisa

Observamos que o professor aponta que a ausência do zero faz com que o estudante pense que 48,18 é maior que 48,2 indicando uma possível influência dos conhecimentos construídos sobre os inteiros como destacado pelo PCN (BRASIL, 1997). Além disso, está implícito que o professor mobiliza o conhecimento em que nesse sistema o zero posicionado à esquerda de uma representação numérica não altera a quantidade representada. Diferente do estudo de Stacey et al (2001) em que os professores desconsideram a presença ou ausência do zero.

Figura 6 - Protocolo do professor C

Os alunos podem observar primeiramente o número em si, e acabar considerando que a maior massa corresponde a quem apresenta "mais números" (no caso, 48,18), desconsiderando o fato de que este é um número decimal e não inteiro. Mesmo que se atentem ao fato deste ser um número decimal, regras de arredondamento podem passar despercebidas, fazendo que com estes considerem que 48,18 kg seja maior (já que 18 é maior que 2), portanto estes podem ser os equívocos e possíveis respostas dos alunos.

Fonte: dados da pesquisa

Identificamos que o professor ressalta que o arredondamento pode passar despercebido pelo estudante fazendo com que este considere 48,18 maior que 48,2. Assim como constatado nos estudos por Lerner (1995), Stacey et al (2001) e Esteves e Souza (2012), os professores apresentaram como justificativa que os estudantes utilizam uma regra válida no conjunto dos números naturais (a quantidade de algarismos define a magnitude de um número, ou seja, quanto mais algarismos um número possuir, maior será seu valor relativo).

Observamos que as respostas dos professores estão relacionadas ao tamanho da escrita numérica como indicador da ordem de grandeza. Nunes e Bryant (1997) apontam que, muitas vezes, há tendência de raciocinar sobre os números racionais como se fossem naturais realizando uma "transferência" das propriedades de um tipo de número para o outro, causando, assim, problemas na aprendizagem.

Conforme o esperado *a priori* os professores participantes de nosso estudo apontam dificuldades com relação a compreensão do Sistema de Numeração Decimal no que se refere ao valor posicional das casas decimais; a percepção do zero como mantenedor de posição e dificuldades dos estudantes em estabelecer relações entre os conjuntos dos números racionais e números naturais. Todos esses aspectos indicam para necessidade de se trabalhar a relação entre os números decimais e o Sistema de Numeração Decimal pelos professores.

Em síntese, as dificuldades apontadas pelos professores se baseiam no olhar e na compreensão que eles tinham sobre o conteúdo e o estudante. Contudo, eles também mobilizaram outros domínios do conhecimento docente como, por exemplo, o conhecimento do conteúdo especializado ao reconhecer o que está envolvido no uso de uma representação decimal. Isso indica que os domínios de conhecimentos de professores de Matemática estão imbricados.

Antecipar possíveis erros ou concepções equivocadas dos estudantes

Nesta seção, objetivamos identificar os conhecimentos mobilizados pelos professores ao antecipar possíveis erros ou concepções equivocadas dos estudantes. Nossa questão era: Que respostas errôneas os estudantes poderiam produzir? Por quê? Observou-se que os professores mobilizaram conhecimentos a partir das subcategorias: *tamanho da escrita numérica, ausência do zero e grandeza*. A seguir apresentamos a análise dos trechos extraídos da coleta de dados.

Percebemos que, assim como o estudo de Stacey et al (2001), os professores apontam a análise equivocada do tamanho da escrita do número decimal como um possível erro dos estudantes. Esse aspecto pode ser confirmado ao lermos os trechos a seguir:

> *Poderiam pensar que Júnior é mais pesado, pois 18 é maior que 2. Assim Júnior seria 0,16 mais pesado.*
>
> *Os estudantes poderiam achar que 18 é maior que 2, pois não igualaram a quantidade de casas decimais.*
>
> *Os estudantes podem considerar apenas o valor absoluto dos algarismos após a vírgula e considerar que 18 é maior que 2.*
>
> *Também pela comparação, pois 18 é maior que 2.*
>
> *Pode errar devido às regras de arredondamento. Fazendo com que considere 48,18 seja maior do que 48,2, pois 18 é maior que 2.*

Observamos que os professores, ao anteciparem os erros dos estudantes, pensam nas regras do conjunto dos naturais para comparar os números decimais. Embora destaquem aspectos como valor relativo e absoluto, pensar estratégias de arredondamento, entre outros aspectos, o erro mais indicado é o fato dos alunos utilizarem o conhecimento dos números naturais sobre a magnitude do número para responder à questão.

Moreira e David (2007, p. 76-77), ao tratar das características do conjunto dos números racionais, apontam que esse transporte – das regras dos naturais para comparação de decimais – é muito comum entre os alunos. Os estudos de Padovan (2000) e Silva (2006) confirmam esse fato, mostrando que, para muitos alunos do ensino fundamental, a comparação de números decimais é feita com base nas mesmas ideias.

É possível identificar que apenas um professor aponta a *ausência do zero* como um aspecto que pode induzir ao erro do estudante. O professor mobiliza o conhecimento que diz que, ao compararmos um número decimal, o zero colocado à direita não altera seu valor. E que se a parte inteira for igual, será maior o número que tiver maior parte decimal. Na escrita a seguir podemos interpretar tais regras:

> *[...] outra dificuldade poderia estar relacionada com a ausência do zero, não igualando a quantidade de casas decimais e fazendo com que o estudante considere que 48,18 é maior que 48,2, pois se tivesse igualado a quantidade de casas decimais o estudante poderiam identificar que 20 é maior que 18.*
> (fala do professor, 2016)

Toledo e Toledo (2009) também consideram que os estudantes sentem muita dificuldade em compreender a utilização do zero nas casas decimais, porque mesmo sabendo que é possível retirar ou acrescentar zero a direita do último algarismo significativo de um número decimal sem alterar seu valor, quase nunca se lembra de aplicar essa regra. Ou seja, os estudantes apresentam dificuldades ao lidar com situações em que é preciso acrescentar ou retirar zero(s) para igualar a quantidade de "casas" decimais, pois envolve a compreensão das relações entre décimos, centésimos e milésimos na escrita decimal.

Outro aspecto identificado na escrita dos professores não está relacionado aos erros sobre os números decimais, mas a grandeza massa. Podemos observar na escrita a seguir:

> *Na pergunta da situação tem-se o valor da "massa" os estudantes poderiam apresentar dificuldade em compreender qual a grandeza que está sendo abordada na questão.*
> (fala do professor, 2016)

Está implícito na resposta do professor como a grandeza massa pode induzir o estudante ao erro. *Seria porque o termo é menos familiar ao estudante?* Contudo, observa-se que o professor não identifica um erro conceitual e físico presente na questão. Conforme, apontamos na análise *a priori* da situação-problema, ao utilizar a terminologia "peso" os autores do livro didático também fazem associação entre massa e peso. Esta associação não é correta, posto que o peso de um objeto ou pessoa resulta da interação gravitacional entre sua massa e um campo gravitacional. Sob o ponto de vista físico e conceitual, massa e peso são diferentes. Esperávamos observações sobre este erro conceitual presente em uma questão de livro didático, mas nenhum dos participantes desse estudo prestaram atenção nesse fato.

Em síntese, as escritas dos professores revelaram conhecimentos significativos sobre o conteúdo e o estudante que denotam a compreensão de muitos temas envolvidos na questão, tais como, a grandeza massa e a noção de arredondamento. Em alguns casos foi possível observar a utilização da expressão "mais números". Ao utilizar esse termo, os professores apresentam um obstáculo em distinguir número de algarismo. Já o termo "grandezas", utilizado com o intuito de diferenciar gramas e quilogramas, os professores confundiram unidades de medida diferentes com grandezas diferentes.

Os dados apresentados confirmam a importância do professor ter conhecimento sobre o conteúdo e o estudante, posto que, neste momento o docente antecipa possíveis erros e concepções erradas dos estudantes interpretar os seus pensamentos incompletos e prever o que é provável que os estudantes façam perante tarefas propostas e o que, para eles, será interessante ou desafiante Ball e colaboradores

(BALL, *et al.* 2008). Além disso, Shulman (1987) salienta que o professor deve saber como transformar o seu conhecimento em conhecimento para os estudantes, saber como apoiá-los, identificar o conhecimento que devem aprender, as suas dificuldades quando aprendem, e as orientações curriculares para o ensino do conteúdo.

Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo analisar os conhecimentos do conteúdo e do estudante mobilizados pelos professores, ao analisarem uma atividade com números racionais na representação decimal, extraída de um livro didático de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para isso, utilizamos o modelo teórico desenvolvido por Ball e colaboradores (2008), com foco no domínio de conhecimento do conteúdo e do estudante.

Percebemos que uma parte dos professores participantes do estudo apresentou estratégias adequadas sobre os números racionais, concordando com resultados de pesquisas desenvolvidas por Fávero e Neves (2012) e por Fernandes e colaboradores (2008). Nessas pesquisas, os autores notaram respostas coerentes em situação de comparação de números racionais.

Com relação aos obstáculos acerca dos números racionais para a aprendizagem, os resultados do estudo admitem atributos verificados no estudo de Nunes e Bryant (1997). Em tal investigação, os pesquisadores observaram crianças raciocinando de forma a considerar os números racionais como números naturais, fazendo uma “transposição” equivocada do significado de cada uma dessas classes de números.

Tal fenômeno pode gerar erros na solução de problemas com números racionais, visto que se trata de uma abordagem com conjuntos numéricos que diferentes naturezas conceituais. Esse erro surge de um conhecimento considerado como correto para os números naturais, contudo não é válido em situações cujo contexto é imerso no campo dos números racionais.

Ainda, em certos cenários, foram reconhecidas dificuldades e imprecisões indicadas pelos professores acerca da abordagem dos números racionais na atividade proposta. Tal contexto pode se agravar, tendo em vista que o docente não apresenta evidência coerente do conhecimento em jogo, tal fato, possivelmente contribuirá para o estudante não aprender o conceito explorado em sala de aula.

Os professores que conseguem perceber tal problemática, indicam que possuem conhecimento sobre o conteúdo do estudante. Logo, apresentam entendimento sobre as diferentes estratégias mobilizadas na solução de tarefas, bem como prever e superar erros dos estudantes.

Referências

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education.* v.59 n.5 pp. 389-407, 2008.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental.* Matemática. Brasília, 1997.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação Qualitativa em Educação.* Portugal: Porto, 1994.

BOURBAKI, N. *Elements de Mathématique:* Algebre. Reimpresso como Elements of mathematics: Algebra I. Berlin, Alemanha: Springer, 1998.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgarg Blucher, 1974.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC).* Educação é a Base. Brasília, 2017.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Tipo gráfica Matemática, 1951.

DAMICO, A. *Uma investigação sobre formação inicial de professores de Matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.* 2007, 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ESTEVES, A. K.; SOUZA, N. M. *Números decimais na sala de aula:* os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, no. 1, p. 188-205, mai. 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br.

FÁVERO, M. H.; NEVES, R. S. P. *A divisão e os racionais*: revisão bibliográfica e análise. *Zetetiké*–FE/Unicamp–v. 20, n. 37–jan/jun 2012.

FERREIRA, N.; PONTE, J. P. O conhecimento de futuros professores do 2.ºciclo sobre números racionais: O caso de Maria. In: MARTINHO, M. H. *et al. Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Braga: APM, 2014, p. 343–356.

FERNANDES, N. R.; BELLEMAIN, P. M. LIMA, J. M. F.; TELES, R. A. M. Número racional e seus diferentes significados. 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEMAT, *Anais*... Recife, 2008.

GRANDO, N. I.; VIEIRA, G. B. Números decimais: dificuldades conceituais. In: GRANDO, N. I. *Pesquisas na Educação Matemática*: contribuições para o processo de ensino- aprendizagem. 1 ed. Passo fundo: Universidade de passo fundo, 2006, v.1, p. 110-135.

GROSSMAN, P. L.; WILSON, S. M.; SHULMAN, L. Teachers of Substance: subject matter knowledge for teaching. In: *Knowledge Base for the Beginning Teacher*. Ed Maynard C. Reynolds. For the American Association of Colleges for Teacher Education. Nova Yorque: Pergamon Press, 1989. p.23-36.

GROSSMAN, P. L. *The making of a teacher*: teacher knowledge and teacher education. New York: Teachers College Press, 1990.

LERNER, D. *A Matemática na escola:* aqui e agora. Porto alegre: Artes Médicas, 1995.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, pp. 23-40, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PADOVAN, D. M. F. *Números decimais:* o erro como caminho. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: USP, 2000.

PERFEITO, M. J. *Conhecimento do professor do 1º ciclo sobre números racionais*. 2015, 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa, 2015.

PINTO, H.; RIBEIRO, C. M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, v.3, n.1, p. 80-98.2013.

PONTE, J. P., QUARESMA, M., BRANCO, N. Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances em Investigaciónen Educación Matemática*, v.1, p. 65-86, 2012.

SANCHEZ, M. M. *Buriti:* Matemática. São Paulo: Editora Moderna, 2013. v.5.

SILVA, V. L. *Números Decimais:* no que os saberes de adultos diferem dos de crianças? 2006, 202f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal de Pernambuco, Recife: UFPE.

SILVA, F. A. F. *Significados e representações dos números racionais abordados no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM*. 2013, 153f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências). Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE. Recife.

SHULMAN, L. S. Those who understand: the knowledge growth. *Teaching, Educational Researcher,* p.4-14, fev. 1986.

SHULMAN, L. S. *Harvard Educational Review,* v. 57, n. 1, p. 1-27, 1987.

STACEY, K. HELME, S.; BATURO, A.; IRWIN, K.; BANA, J. Preservice teacher's knowledge of dificulteds in decimal numeration. In. *Jornal of Mathematies Theacher Education*, 4, p. 205-225, 2001.

TELES, R. A. M. Conhecimentos Docentes x Decisões Didáticas: possíveis reflexões no processo de avaliação da aprendizagem. *Anais VIII Encontro Mineiro de Educação Matemática.* Ituiutaba – MG, 11 a 14 de outubro de 2018. p. 82-92.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Didática de Matemática:* como dois e dois: a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 2009.

PARTE FINAL

EU SOU RUIM DE MATEMÁTICA

Faz 20 anos que terminei o segundo grau...

por André Pereira da Costa

Essa história se passa no ano de 2020. O país vive uma crise sanitária em decorrência da pandemia da COVID-19. Um cenário de incertezas se instaura. Em algumas regiões, os governantes declararam isolamento social obrigatório, com fechamento de comércio e funcionamento apenas de serviços essenciais. Em outras, o contrário ocorre, ou seja, lojas e serviços mantidos, tudo funcionando "normalmente". Entre estabelecimentos fechados e abertos, não há consenso entre a própria população, que lota ruas, praças, praias, avenidas e bares, parecendo que vive em um universo paralelo.

Parafraseando meu conterrâneo Ariano Suassuna, aparentemente a humanidade está dividida em dois grupos: os que não foram para a Disney e os que já foram. Assim, a partir da fala do pai do Auto da Compadecida, analisando o cenário da pandemia no Brasil, verificamos dois grupos: o primeiro formado pelas pessoas que ficam em casa, em isolamento social, e o segundo composto por aquelas que andam nas ruas, caminham em parques e tomam banho de praia.

Além disso, a pandemia tem gerado crise econômica, pois com as medidas de isolamento, pequenas empresas tiveram que "passar o ponto", fechar as portas, demitindo funcionários, o que tem feito o Brasil disparar em número de desempregados. "Enganchado" na burocracia e na crise política, o governo não tem conseguido disponibilizar crédito rápido suficiente para essas empresas, o que tem dificultado ainda mais suas sobrevivências.

Nesse contexto, um senhor em torno de 40 anos, que perdeu o emprego em uma grande cidade brasileira, se vê obrigado a se arriscar na informalidade para sobreviver, visto que não conseguiu receber auxílio financeiro emergencial com a pandemia. Preocupado, pois "Dona Análise" ainda não liberou o seu auxílio, visto que ela não está conseguindo dar conta da quantidade de solicitações de acesso ao benefício. Então, o homem de 40 (fazendo analogia com a música do cantor Roberto Carlos) decide vender produtos de alimentação funcional para os vizinhos e conhecidos do seu bairro.

Certo dia, nosso personagem foi pagar uma dívida com um vizinho, com o qual compra perfumes e sabonetes. Além disso, o vizinho é seu cliente, então, ambos "vendem fiado" um para o outro. E no final ou início do mês, pagam as dívidas. Ao "acertarem as contas", o homem de 40 retorna para a casa, porém, ficou "quebrando a cabeça", sem saber se não foi "enganado" pelo vizinho. Então, decide tirar a dúvida com uma irmã, que julga ser "boa em matemática":

– Bom dia. Deixa eu perguntar uma coisa para você. Eu fiz uma conta aqui de negócio de dinheiro e não sei se está certo.
– Eu fui pagar um homem que eu estava devendo 79 reais. Dei 80. Desses 80, ele tinha que me dar um real. Só que aí, ele estava me devendo sete reais. Desses 80 que dei, ele me devolveu 10 reais. Aí, ele falou que eu tinha que dar de volta dois reais. Essa conta está certa? Esse troco está certo? Estou achando que o homem foi me enrolar. Ele ficou com dinheiro a mais, né? Ele ficou com 82... Não sei...
– Mesmo que eu tivesse descontado os sete reais, pois eu estava devendo 79... Eu tinha que dar para ele... 75... É isso? Não. É menos. É 73. Faz essa conta aí, pois fiquei confuso.
– Se você estava devendo 79 reais para o homem e ele estava te devendo sete reais. Então, você já poderia ter feito o desconto aí, em cima dos 79. Assim, reduzindo sete desse valor, era para ter pago 72 reais. Como você deu 80, então, ele deveria ter voltado oito reais de troco. Mas ele te deu 10 reais, aí, você teria que dar dois reais de volta... aí você fica com oito reais de troco (*explicou a irmã*).
– Entendi (*afirma o homem de 40*). Que bom que o vizinho não me enganou. Pensei que ele tinha ficado com dinheiro a mais. Eu sou ruim de matemática, faz 20 anos que terminei o segundo grau....

Esse episódio nos provoca reflexões de como a Matemática é importante para análise de situações do cotidiano e de vivências práticas que envolvem dinheiro. Mobilizou conhecimento de números, suas operações, em especial, subtração. Verificamos como o cálculo mental é importante para compreensão de problemas que envolvem valor monetário, e, assim, por exemplo, no pagamento de uma conta, percebemos se fomos enganados ou se a dívida foi quitada corretamente. Esse tipo de cálculo deve ser estimulado desde os anos iniciais do ensino fundamental, não sendo, portanto, um conteúdo previsto no currículo do ensino médio.

Outro aspecto verificado é a crença que existe em torno da Matemática, de ser um bicho de sete cabeças, a ponto de alguém dizer que não nasceu para estudar tal saber. Será que a Matemática só surge em situações reais que envolvem dinheiro? Nosso personagem demonstrou que não teve uma boa vivência com o cálculo mental em sua vivência na escola, fazendo com que ele não conseguisse fazer as operações necessárias para resolver o problema da dívida. Assim, nos questionamos sobre o ensino de Matemática que ocorre hoje na escola e a importância que nós, professores, damos em valorizar situações de cálculo mental.

Guarulhos (SP), 07 de julho de 2020.

Biografia dos autores

Organizadores

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Licenciada em Matemática pela Universidade de Pernambuco. Mestrado e Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Professora Associada III da UFPE/DMTE. Docente do EDUMATEC. Coordenou o PIBID Pedagogia. Coordena o Grupo de Estudos e Pesquisa SEMEAR. Atualmente é Diretora da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional Pernambuco (Gestão 2020-2023).

Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa

Doutora em Educação, professora e pesquisadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec), professora da área de Ensino de Matemática do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino, no curso de Pedagogia da Universidade Federal de Pernambuco e coordenadora do Grupo de Estudos em Desenvolvimento e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica – GREDAM/UFPE.

André Pereira da Costa

Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. Professor da Universidade Federal do Oeste da Bahia e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino (PPGENS) e do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT). Associado aos grupos de pesquisa: Pró-Grandezas/UFPE, NUMEP/UFPE, LIPEM/UFOB e GPolC-Diferença/UFOB. Colaborador no GPAM/UFRJ e no FDCM/UFPE.

Luciana Ferreira dos Santo

Formada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco (2007). Doutora em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (2019). Professora alfabetizadora nos anos iniciais do Ensino Fundamental nas redes pública de ensino das cidades de Olinda e Paulista. Participa dos Grupos de Pesquisa e estudo SEMEAR e Pró-Grandezas, ambos da UFPE.

Demais autores

Amanda Maria da Silva

Mestra em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação na área de Fotogrametria, do Centro de Tecnologias e Geociências (CTG) da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE (2014). Possui Especialização em Gestão Educacional e Coordenação Pedagógica pela UFPE (2012). Graduada no curso de Licenciatura Plena em Matemática - UPE

(2009). Professora efetiva na Prefeitura Municipal do Jaboatão dos Guararapes nos anos finais do Ensino Fundamental. Atua em Matemática e Educação Matemática.

Amanda Regina dos Santos Andrade

niciou sua trajetória com o curso de Radiologia no IFPE. Depois, o desejo de mudar leva à conclusão do segundo curso, Pedagogia na UFPE. Pós-graduação na FAFIRE. Ingressou no Mestrado no EDUMATEC-UFPE e participa Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental.

Ana Beatriz Gomes Pimenta de Carvalho

Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino (DMTE/CE) e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - PPGE/Edumatec, da Universidade Federal de Pernambuco. Tem doutorado em Educação (Universidade Federal da Paraíba) e coordena o grupo de pesquisa Mídias Digitais e Mediações Interculturais.

Anaelize dos Anjos Oliveira

Doutoranda e mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e pedagoga pela mesma instituição. Professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental da cidade do Recife, Pernambuco, Brasil. Integrante do Grupo de Estudos em Desenvolvimento e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica – GREDAM/UFPE.

Ana Quele Gomes de Almeida

Pedagoga pela Universidade de Pernambuco. Mestra em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) pela UFPE. Professora Brailista

(CAP-PE). Atualmente é pedagoga no Núcleo de Acessibilidade da UFPE e professora da Educação Básica na rede pública de ensino do Ipojuca. Participa dos Grupos de Pesquisas GPEMCE e GPEME da UFPE.

Arlam Dielcio Pontes da Silva

Doutorando e Mestre em Educação Matemática e Tecnológica (CE/UFPE). Licenciado em Pedagogia (UFRPE). Atualmente desenvolve pesquisas ligadas à Educação Financeira Escolar, tendo realizado o estudo da dissertação com os anos iniciais do Ensino Fundamental, e desenvolvendo estudos da tese com a Educação de Jovens e Adultos. É membro do GREDAM.

Cláudia de Albuquerque Nascimento Ignácio

Pedagoga pela Universidade Católica de Pernambuco. Mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC). Atualmente é professora da Educação Básica na Rede Municipal de Ensino do Recife.

Dayse Cosme da Cruz Miranda

Pedagoga pela UFPE (2017). Pesquisadora PIBID – Pedagogia (2017). Pós-graduanda em Gestão Educacional e Coordenação Pedagógica (CE/UFPE). Atua como professora no município de Paulista-PE.

Emilly Rayane Moura Diniz Santos

Pedagoga (UFPE) e Mestranda em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC/UFPE). Docente dos anos iniciais do Ensino Fundamental e integrante do Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino

Fundamental (Gref), coordenado por Gilda L. Guimarães e José Ivanildo F. Carvalho. Pesquisadora dos campos de Probabilidade, Estruturas Aditivas e Multiplicativas (Combinatória).

Ewellen Tenorio de Lima

Professora de Matemática na rede estadual da Paraíba, atuando com o Ensino Médio. Licenciada em Matemática pela Universidade de Pernambuco (2016). Mestra e doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (2018; em andamento). Pesquisando possibilidades de articulação entre Combinatória e Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental.

Flavia Gomes Silva do Nascimento

Graduada em Pedagogia pela UPE (2010), com Especialização em Gestão Pública Municipal - UFRPE (2012). Possui cursos de formações na área de Educação Matemática. Fez parte da equipe de Ensino do Laboratório de Ensino de Matemática em Moreno - LEMAM. Participa do Grupo de Pesquisa Grandezas e Medidas – UFPE. Professora efetiva anos iniciais do Ensino Fundamental na Prefeitura Municipal do Moreno.

Glaucia Milena Vieira

Especialista em Educação e Gestão da Cultura Organizacional (UFPE). Licenciada em Expressão Gráfica (UFPE).

Jailson Cavalcante de Araújo

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de Pernambuco (UPE). Especialista em Ensino de Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barros

(FADIMAB). Mestre e doutorando em Educação Matemática e Tecnológica na Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC-UFPE).

José André Bezerra da Cruz

Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade de Pernambuco (UPE). Especialista em Ensino Matemática pelo Instituto Federal de Pernambuco (IFPE). Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC--UFPE). Professor de Matemática do Estado de Pernambuco e da Prefeitura Municipal de Águas Belas.

Juliana dos Santos do Espírito Santo Silva

Graduada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco - UFPE e pós-graduada em Processos Educacionais e Gestão de Pessoas pelo Centro Universitário da Vitória de Santo Antão – UNIVISA. Atualmente trabalhando como consultora comercial do Sistema GGE de Ensino.

Juscelandia Machado Vasconcelos

Graduada em Pedagogia e Matemática, especialista em Educação Matemática, mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco. Atualmente é docente no Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Regional do Cariri e membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da URCA (GPEMU).

Larisse Vieira de Melo

Mestra em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC (UFPE, 2018), especialista em Ensino de Matemática (IFPE, 2016) e licenciada em Matemática (UPE, 2014). Atualmente é professora de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e desenvolve pesquisas na área de Educação Matemática.

Marcel Muniz Vilaça

Licenciado em Matemática (UPE, 2014), especialista em Ensino de Matemática (IFPE, 2016) e Mestre em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC (UFPE, 2018). Atua como professor de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e desenvolve pesquisas na área de Educação Matemática.

Maria Mayara Araújo da Costa

Graduada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco (2019). Possui experiência na área de Educação Matemática pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no qual apresentou trabalhos e publicou artigos sobre experiências com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental acerca dos conhecimentos matemáticos.

Nadine Rodrigues da Silva

Mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco, licenciada em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Professora de Matemática do Ensino Médio da rede estadual de Pernambuco e participante do grupo de pesquisa Mídias Digitais e Mediações Interculturais, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC – UFPE.

Regina de Lima Silva

Pedagoga pela Fundação de Ensino Superior de Olinda. Mestra em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (EDUMATEC). Atualmente é professora da Educação Básica nas redes municipais de ensino de Recife e do Cabo de Santo Agostinho. Integrante dos grupos de pesquisa em Educação Matemática Pró-Grandezas e SEMEAR.

Suedy Santos de Azevedo

Mestre em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC-UFPE). Integrante do Grupo de Estudos em Desenvolvimento e Aprendizagem da Matemática na Educação Básica (GREDAM), pesquisando Educação Financeira. Licenciado em Matemática pela UFPE. Trabalha como coordenador de Matemática no Instituto Qualidade no Ensino, formando professores das redes públicas de educação. Professor dos Ensinos Fundamental e Médio.

Tânia de Melo Oliveira

graduada em Pedagogia, pela Universidade Federal Rural de Pernambuco/UAG (atualmente UFAPE). Participou do projeto de extensão "A Cidade e o Cidadão: Estímulo à participação social no processo de construção da cidade". Faz parte do grupo de estudos e pesquisas em Matemática e Ciências (SEMEAR).

Waleska Stefany Moura Diniz

Pedagoga pela UFPE, mestranda em Educação Matemática e Tecnológica no EDUMATEC/UFPE, professora de Educação Infantil e integrante do Grupo de Pesquisa Gref, coordenado por Gilda L. Guimarães e

José Ivanildo F. Carvalho. Pesquisa na área de Educação Matemática, especificamente sobre Estatística, Estruturas Aditivas e Multiplicativas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Título Se 18 > 2, então 48,18 > 48,2? Pesquisas e reflexões sobre o ensino de números

Organizadores Rosinalda Aurora de Melo Teles
Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa
André Pereira da Costa
Luciana Ferreira dos Santos

Revisão Os autores

Leitores críticos Ana Beatriz Gomes Pimenta de Carvalho, Anaelize dos Anjos Oliveira, Arlam Dielcio Pontes da Silva, Ewellen Tenorio de Lima, Jailson Cavalcante de Araújo, Marcel Muniz Vilaça e Sérgio Abranches

Capa e projeto gráfico Adele Pereira

Tipografia Program, Nexus Serif e Sans Pro