Rute E. de S. Rosa Borba
Juliana Azevedo Montenegro
Jaqueline A. F. Lixandrão Santos
(ORG.)

INVESTIGAÇÕES EM ENSINO E EM APRENDIZAGEM

Uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração)

Editora UFPE

Rute E. de S. Rosa Borba
Juliana Azevedo Montenegro
Jaqueline A. F. Lixandrão Santos
(ORG.)

INVESTIGAÇÕES EM ENSINO E EM APRENDIZAGEM

Uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração)

Editora UFPE
RECIFE
2021

Universidade Federal de Pernambuco
Reitor: Alfredo Macedo Gomes
Vice-Reitor: Moacyr Cunha de Araújo Filho

Editora UFPE
Diretor: Junot Cornélio Matos
Vice-Diretor: Diogo Cesar Fernandes
Editor: Artur Almeida de Ataíde

Editoração
Revisão de texto: os autores
Projeto gráfico: Adele Pereira

EDITORA ASSOCIADA À
Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

Catalogação na fonte
Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

I62 Investigações em ensino e em aprendizagem [recurso eletrônico] : uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração) / organizadoras : Rute E. de S. Rosa Borba, Juliana Azevedo Montenegro, Jaqueline A. F. Lixandrão Santos. – Recife : Ed. UFPE, 2021.

Vários autores
Inclui referências.
ISBN 978-65-5962-107-1 (online)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Pesquisa. 3. Aprendizagem. 4. Probabilidades – Estudo e ensino. I. Borba, Rute, 1958- (Org.). II. Montenegro, Juliana Azevedo (Org.). III. Santos, Jaqueline A. F. Lixandrão (Org.).

510.7 CDD (23.ed.) UFPE (BC2021-071)

Esta obra está licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional.

SUMÁRIO

10 anos pesquisando o ensino e a aprendizagem de Combinatória e de Probabilidade

Rute E. de S. Rosa Borba
Juliana Azevedo Montenegro
Jaqueline A. F. Lixandrão Santos

PARA QUE E PARA QUEM ESCREVEMOS ESTE LIVRO?

O Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração) foi criado, oficialmente, em 2009, sendo, devidamente, registrado no Diretório de Grupos de Pesquisa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Desde então, o grupo tem estudado e investigado os processos de ensino e de aprendizagem da *Combinatória* e da *Probabilidade* sob diferentes olhares: de professores, de estudantes, de documentos oficiais, de materiais curriculares e de outros recursos voltados a esses conteúdos.

As linhas de pesquisa do Geração são: *Análise e produção de recursos*; *Avaliação de conhecimentos*; *Desen-*

volvimento cognitivo; *Educação inclusiva*; *Formação de professores*; e *Intervenções pedagógicas*. Realizaram os estudos e as investigações docentes do Ensino Superior, professores da Educação Básica, estudantes de pós-graduação, de graduação e de Ensino Médio. As trocas entre os membros do grupo são muito profícuas, pois há ideias, conhecimentos e experiências de naturezas variadas, as quais se completam ou se contrapõem, possibilitando avanços no que se pensa e no que se sabe sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, em particular, da *Combinatória* e da *Probabilidade*.

Após pouco mais de uma década de estudos e pesquisas, desejamos reunir e divulgar, neste livro, as nossas produções. Já temos divulgado resultados de investigações em eventos científicos diversos – locais, estaduais, nacionais e internacionais –, em capítulos de livros e em periódicos científicos, mas o propósito do livro é reunir em uma obra única o que temos aprendido sobre o ensino e a aprendizagem da *Combinatória* e da *Probabilidade*. Nosso aprendizado se deu a partir de análises de currículos e de livros didáticos, por meio de sondagens de concepções e conhecimentos de professores e de alunos, por intermédio de propostas de ensino a estudantes de diferentes níveis e modalidades, e, mais recentemente, a partir de investigações com viés inclusivo – em propostas de interação com aprendizes com deficiência visual.

O livro é voltado a acadêmicos de instituições superiores de ensino e, também, a professores do Ensino Básico. Os docentes de Ensino Superior podem utilizar os resultados que apresentamos como fontes de discussão junto a graduandos – em especial de Licenciaturas em Pedagogia e em Matemática – sobre modos de ensino e de aprendizagem da *Combinatória* e da *Probabilidade*. Pesquisadores também podem se valer das informações contidas no livro para atestarem o que já foi pesquisado e o que ainda pode ser investigado nas duas áreas abordadas nesta obra. De modo muito especial, esperamos que o livro tenha grande utilidade para professores da Educação Básica, auxiliando-os no planejamento de atividades de ensino dos conteúdos-foco desta obra, bem como no reconhecimento dos conhecimentos que os estudantes possuem e das dificuldades que enfrentam no desenvolvimento de seus raciocínios combinatório e probabilístico.

Com um grupo bem heterogêneo de membros do Geração, há pesquisas desenvolvidas em curso de graduação (Trabalho de Conclusão de Curso – TCC) e em programas de pós-graduação (dissertações de mestrado e teses de doutorado no Programa de Pós-graduação em Educação – PPGE, e no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, ambos do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE). O objetivo das investigações realizadas é o de se pensar e repensar o ensino e a aprendizagem de *Combinatória* e de *Probabilidade* em diferentes níveis e modalidades de ensino. Apresentamos, assim, o que pesquisamos, os resultados que foram obtidos, as conclusões que tiramos e as implicações educacionais que julgamos advirem das investigações realizadas. Ressaltamos que, na presente obra, estão contidos um estudo de TCC, diversas pesquisas de mestrado e um estudo de pós-doutoramento – desenvolvidos na primeira década do Geração. Pesquisas de doutoramento do grupo, concluídas ou em andamento, não constam do livro, mas são indicadas para os leitores que desejarem se aprofundar nas temáticas aqui tratadas.

Em termos estruturais, o livro está organizado em três blocos de estudos, respectivamente intitulados de "Estudos com professores sobre conhecimentos referentes ao ensino de Combinatória e de Probabilidade", "Pesquisas com estudantes da Educação Básica – em distintas modalidades e níveis de ensino – sobre recursos voltados para a aprendizagem da Combinatória e da

Probabilidade" e "Propostas de educação inclusiva para a aprendizagem de Combinatória e de Probabilidade".

O primeiro bloco, com três pesquisas realizadas, envolveu professores da Educação Básica; nele, foram levantados conhecimentos referentes ao ensino e à aprendizagem de *Combinatória* e de *Probabilidade*. O primeiro capítulo desse bloco, de autoria de Cristiane Rocha e Rute Borba, relata uma investigação realizada junto a seis professores (dois de cada nível de ensino – anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), os quais analisaram protocolos de resolução de estudantes; a partir das análises realizadas, buscou-se verificar conhecimentos dos professores sobre os problemas combinatórios, sondar como analisam erros e dificuldades dos estudantes, como compreendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, ainda, identificar as propostas que sugerem para a superação das dificuldades apresentadas. O segundo capítulo desse bloco, de autoria de Michaelle Santana e Rute Borba, discute noções básicas de *probabilidade* evidenciadas por quatro professores dos anos iniciais e quatro professores dos anos finais do Ensino Fundamental. As evidências foram observadas por meio da discussão dos professores quanto a atividades selecionadas de livros didáticos dos dois níveis de ensino, relevando suas noções quanto à percepção do acaso, ideias quanto a experiências aleatórias, entre outras noções relativas à *probabilidade*. O último capítulo desse bloco, de autoria de Ana Paula Lima e Rute Borba, envolveu professores que atuavam nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O foco da pesquisa relatada é o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), buscando-se investigar conhecimentos dos professores de Matemática de como o PFC pode ser usado na resolução de problemas combinatórios variados e servir de base para a construção de fórmulas da *Combinatória*.

O segundo bloco de estudos relatados é composto de sete pesquisas realizadas junto a estudantes da Educação Básica em distintas modalidades e níveis de ensino. Algumas dessas investigações também se voltam para a análise de recursos pensados para a aprendizagem da *Combinatória* e da *Probabilidade*. O primeiro capítulo desse bloco, de autoria de Glauce Martins e Rute Borba, relata a análise de 19 livros didáticos destinados a estudantes jovens e adultos em início de alfabetização. Foram analisadas a apresentação de situações combinatórias de variados tipos, as representações simbólicas utilizadas e solicitadas para a resolução dos problemas, bem como a adequação dos contextos ao público da EJA. No segundo capítulo, de autoria de Juliana Montenegro e Rute Borba, discute-se uma pesquisa realizada junto a 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Na investigação, dois grupos construíram árvores de possibilidades – estratégia recomendada no ensino de *Combinatória* –, um grupo a partir do uso de um *software* (Diagramas de Árbol) e outro grupo por meio de construções em lápis e papel. Os desempenhos de dois outros grupos, que não construíram árvores de possibilidades, foram comparados aos dois primeiros grupos, verificando o impacto dessa estratégia no desenvolvimento do raciocínio combinatório. O terceiro capítulo desse bloco trouxe uma nova variável que pode ter influência no desempenho de estudantes ao resolverem problemas de *Combinatória*: o número de etapas de escolha de elementos. Esse capítulo, de autoria de Danielle Vega e Rute Borba, relata uma pesquisa com 128 estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, na qual os participantes responderam testes variados, controlando-se o número de etapas de escolha e a ordem de grandeza dos resultados dos problemas nos diferentes tipos de problemas combinatórios. Rita Batista e Rute Borba, autoras do quarto capítulo desse bloco, discutem um estudo realizado com 36 estudantes – de 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental –, em que foram investigadas compreensões intuitivas da *probabilidade* das crianças. A investigação se deu por intermédio de um jogo, no qual foram exploradas compreensões referentes à *aleatoriedade*, ao *espaço amostral* e à *comparação de probabilidades*. As autoras do quinto capítulo, Ewellen Lima e Rute Borba, tratam da articulação da *Combinatória* com a *Probabilidade*. No estudo relatado, 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) resolveram problemas combinatórios (de *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*) e problemas probabilísticos (referentes à construção de *espaço amostral*, ao entendimento de *aleatoriedade* e à *comparação de probabilidades diferentes*). Metade dos alunos responderam primeiro aos problemas de *Combinatória*, e a outra metade iniciou pelos problemas de *Probabilidade*. Essa organização objetivou verificar o impacto das revisitações (dos problemas combinatórios à luz dos probabilísticos, e vice-versa). O sexto capítulo, de autoria de Ariedja Carvalho e Rute Borba, relata um estudo realizado com 20 crianças da Educação Infantil. Metade das crianças trabalhou com material de manipulação para representar os elementos do problema e para levantar as possibilidades de combinação dos elementos solicitadas, e a outra metade representou os elementos e os agrupou a partir de desenhos. Na pesquisa objetivou-se observar noções de relações combinatórias, antes e depois de uma sessão de ensino, e avaliar o impacto do uso dos recursos (material de manipulação e desenhos) no desenvolvimento do raciocínio combinatório das crianças. O sétimo e último capítulo desse bloco, de autoria de Dacymere Gadelha, Rute Borba e Juliana Montenegro, trata de uma pesquisa junto a 36 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. As crianças foram divididas em três grupos para a resolução de problemas combinatórios com uso do *software* Pixton©, de cartões ilustrativos ou sem recurso específico. Investigou-se o impacto do uso dos referidos recursos no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes participantes da pesquisa.

O terceiro e último bloco do livro trata de propostas de educação inclusiva. O primeiro capítulo do bloco, de autoria de Flávia Braz e Rute Borba, relata a construção de materiais para trabalho com *Combinatória*, testados com um estudante cego do 4º ano do Ensino Fundamental. Os materiais permitiram ao estudante resolver os problemas combinatórios a partir dos sentidos do tato e do olfato. O segundo estudo desse bloco, de autoria de Jaqueline Santos e Rute Borba, foi realizado com um estudante cego quando cursava os anos finais do Ensino Fundamental. Observou-se, a partir de intervenções pedagógicas (mediação) e de instrumentos adequados (ferramentas materiais), quais construtos da *probabilidade* haviam sido desenvolvidos pelo estudante.

Mais informações sobre o Geração e, em especial, sobre as publicações dos membros do grupo, podem ser obtidas através do link http://geracaoufpe.blogspot.com. No blog do grupo, podem ser encontrados os estudos relatados neste livro, desenvolvidos nos primeiros 10 anos de sua existência, como também estudos posteriores, muitos deles em continuidade aos anteriormente realizados, a partir de novas questões de pesquisa que surgiram como consequência dos resultados inicialmente obtidos.

Ressalta-se que os 12 capítulos deste livro relatam estudos desenvolvidos utilizando métodos diversos e referenciais teóricos variados. Há pesquisas de sondagem de conhecimentos de estudantes e de professores, há análises de livros didáticos e de uso de recursos didáticos variados e, também, há intervenções de ensino – sendo alguns desses estudos experimentais. Os pressupostos teóricos comuns aos estudos, e que serão discutidos a seguir, são: *conhecimentos docentes essenciais, em particular para o ensino de Matemática*;

dimensões do desenvolvimento do raciocínio combinatório; *demandas cognitivas implícitas na compreensão da probabilidade*; e *pressupostos de educação inclusiva considerados em estudos sobre Combinatória e sobre Probabilidade*.

QUAIS OS NOSSOS PRESSUPOSTOS TEÓRICOS BÁSICOS?

Como já anunciado, as pesquisas relatadas neste livro possuem como bases alguns referenciais teóricos em comum. Discutimos, nas seções que seguem, os quatro blocos de pressupostos teóricos utilizados pelos estudos – em função do foco dos mesmos.

O primeiro desses blocos trata dos estudos de Lee Shulman e de Deborah Ball e colaboradores e se referem a conhecimentos docentes que esses estudiosos consideram essenciais ao exercício eficiente do magistério. Shulman trata dos conhecimentos docentes de modo mais geral – comuns a todas as áreas do conhecimento – e Ball e colaboradores discutem, mais especificamente, os conhecimentos docentes necessários ao ensino de Matemática. Nós apresentaremos os pressupostos centrais defendidos por esses autores e exemplificaremos com situações combinatórias e probabilísticas.

O segundo bloco de pressupostos trata da *Teoria dos Campos Conceituais*, anunciada por Gérard Vergnaud, e das dimensões que esse teórico aponta como essenciais a serem consideradas para o desenvolvimento cognitivo, em particular ao desenvolvimento do raciocínio matemático. Também são apresentadas, nessa seção, situações combinatórias, propriedades e relações comuns e diferenciadoras das mesmas, bem como simbologias que podem ser usadas em suas representações – como discutido por Rute Borba.

Na terceira seção de pressupostos teóricos, discutimos o que Peter Bryant e Terezinha Nunes nos apresentam como demandas cognitivas da *probabilidade*. Esses pesquisadores resgataram estudos anteriores em *probabilidade* e, a partir da análise dos mesmos, apresentam quatro exigências necessárias ao desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Na última seção de base teórica, apresentamos pressupostos de Lev Vygotski[1], que tratam de educação inclusiva. Embora esses pressupostos não abordem, exclusivamente, a *Combinatória* ou a *Probabilidade*, apresentaremos questões que se aplicam a essas duas áreas da Matemática.

Quais conhecimentos docentes são essenciais para o ensino de Matemática?

Shulman (1986; 1987), a partir da análise de exames aplicados a professores norte-americanos, como meio de avaliar seus conhecimentos, e por intermédio da análise de práticas de ensino de professores, novatos e experientes, construiu uma proposta de base de conhecimentos necessários para eficientes processos de ensino e, consequentemente, eficazes processos de aprendizagem. Esse teórico buscou, a partir de suas análises e propostas, responder ao questionamento: que conhecimentos docentes são essenciais para que o ensino e a aprendizagem ocorram da melhor maneira possível em sala de aula? O que professores conhecem ou precisam conhecer que permite que ensinem eficientemente?

---

1 Diferentes grafias são utilizadas para o nome "Vygotski". Ao longo do texto, ela será adotada da forma como se apresenta nas diferentes obras referenciadas. No entanto, em momentos em que nos referirmos ao autor, por suas concepções apresentadas em várias obras, utilizaremos a forma "Vygotski". Nesse caso, também não utilizaremos data da obra, por não estar nos referindo a uma obra específica e, sim, a seus pressupostos básicos.

Nos exames municipais aplicados aos professores, e por ele analisados, Shulman (1986) verificou que a maioria seguia o mesmo padrão. Cerca de 90% das questões tratavam de *conhecimento de conteúdo específico*. Presumia-se, portanto, que, nesses exames, o mais importante era o domínio dos conteúdos que se ensina em sala de aula e outros conhecimentos possuíam um papel secundário nas qualificações esperadas dos professores. Ele questionou, entretanto, se os conhecimentos de conteúdo seriam suficientes para o ensino e a aprendizagem em sala de aula. Nessa linha, podemos questionar: basta aos professores terem um bom domínio matemático, por exemplo, da *Combinatória* e da *Probabilidade* para que um eficiente ensino nessas áreas ocorra?

Mesmo no que diz respeito ao domínio dos conteúdos a serem ensinados, não basta que o professor seja capaz de apresentar, de modo claro, aos estudantes os conceitos que se deseja desenvolver. O professor também precisa explicar os princípios e regras associados aos conceitos, além de saber justificar porque o conhecimento de determinado conceito é necessário, tanto teoricamente, quanto na prática, e como determinado conceito se relaciona a outros conceitos – dentro da mesma área de conhecimento e fora dela (SHULMAN, 1986).

Desse modo, o conhecimento do conteúdo é mais amplo do que pode aparentar ser. Esse conhecimento do conteúdo do professor possui aspectos necessários a ele, mesmo que não seja necessário a outros profissionais que se utilizam dos conceitos que ele ensina. O professor deve saber que um conceito se aplica em determinada situação – como o fazem outros profissionais usuários do conceito – mas, também, porque se aplica, como se justifica o seu uso.

Além disso, é desejável que o professor entenda porque um conteúdo específico é central, ou periférico, à área que ele leciona. Esse conhecimento o permite compreender como se dá a distribuição dos conteúdos no currículo – a ordem de apresentação dos mesmos e o aprofundamento deles ao longo da escolarização. Desse modo, Shulman (1986) ressalta um outro domínio de conhecimento docente: o *conhecimento do conteúdo e currículo*. Nesse domínio, incluem-se: programas de ensino dos conteúdos em diferentes níveis de ensino e materiais instrucionais que atendam aos programas. O ensino eficiente dos conteúdos perpassa também por esse conhecimento docente e, no caso dos tópicos do presente livro, é preciso que o professor conheça como estão postos a *Combinatória* e a *Probabilidade* no currículo para que estimule o desenvolvimento dos estudantes em ambas essas áreas.

Shulman (1986) acrescenta, ainda, um terceiro conhecimento indispensável ao exercício da docência: *o conhecimento pedagógico do conteúdo*, ou seja, como tornar *ensinável* um determinado conteúdo. Para isso, o professor precisa conhecer variadas formas de representação dos conceitos envolvidos nos conteúdos, as mais potentes analogias, ilustrações, exemplificações, explanações e demonstrações – que tornem o conteúdo compreensível ao grupo de estudantes com os quais se está trabalhando. Esse conhecimento pedagógico também envolve o entendimento do que torna um conteúdo mais fácil ou mais difícil, o saber dos possíveis conhecimentos anteriores dos alunos e de concepções errôneas que possuem, bem como o possuir de estratégias diversificadas para auxiliar os estudantes na superação de suas dificuldades.

Em suma, Shulman (1986; 1987; 2005) defende que ensinar envolve o domínio conceitual e operacional dos conteúdos a serem ensinados, bem como o entendimento do que precisa ser aprendido e como pode ser ensinado. O ensino precisa ser flexível e adaptável às características do grupo de aprendizes ao qual se destina, às complexidades do conteúdo e às condições do ambiente escolar, tendo sempre em vista o que se deseja que os estudantes aprendam. Segundo o autor, esses elementos são indispensáveis ao conhecimento base para o ensino e a interação dos conhecimentos docentes de conteúdo, de currículo e pedagógicos, sendo necessários para que o ensino e a aprendizagem ocorram da melhor maneira possível.

A base de conhecimentos para o exercício docente, proposta por Shulman (1986; 1987; 2005), não é específica a uma área de conhecimento, mas se aplica às diversas áreas de ensino da Educação Básica. Deborah Ball e colaboradores, com base nos pressupostos de Shulman, discutiram conhecimentos docentes específicos para a prática do professor de Matemática.

Ball e Bass (2003) afirmam que a qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática depende do que os professores desenvolvem junto aos seus alunos e o que os professores podem fazer depende de seus conhecimentos referentes à Matemática, de como se dá a aprendizagem e de como se pode dar o ensino da mesma. Nesse sentido, é preciso auxiliar os professores a desenvolverem amplos conhecimentos que deem suporte à sua prática de ensino – que os tornem capazes de entender as ideias expostas pelos seus alunos, que os habilitem a elaborarem perguntas estratégicas e, também, que os permita analisar as potencialidades de tarefas matemáticas, como as expostas em livros didáticos.

Na direção da indicação de *Conhecimentos Matemáticos para o Ensino* (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT), Ball, Thames e Phelps (2008) apresentaram subdomínios dos conhecimentos propostos por Shulman. São seis os subdomínios por eles propostos, os três primeiros mais próximos ao *conhecimento do conteúdo específico* e os três últimos associados ao *conhecimento pedagógico do conteúdo*: 1) *conhecimento comum do conteúdo*, 2) *conhecimento especializado do* *conteúdo*, 3) *conhecimento do conteúdo no horizonte*, 4) *conhecimento do conteúdo e alunos*, 5) *conhecimento do conteúdo e ensino* e 6) *conhecimento do conteúdo e currículo*.

O *conhecimento comum do conteúdo* pode ser usado em uma variedade de situações e não é um conhecimento exclusivamente utilizado por professores. Outros profissionais possuem esse domínio de conhecimento e o utilizam na resolução de problemas diversos. Por exemplo, esse conhecimento é necessário para a aplicação correta das fórmulas da *Combinatória*, especificamente, para *arranjos*, *combinações* e *permutações*. Outro exemplo é o cálculo de probabilidades e sua expressão em números decimais, fracionários ou em porcentagens.

Por sua vez, o *conhecimento especializado do conteúdo* é voltado ao ensino, sendo, portanto, um domínio específico a professores. Pode-se ter como exemplo o conhecimento que os professores possuem quanto às relações presentes em distintas situações combinatórias e probabilísticas. Nas seções que seguem essas relações são discutidas detalhadamente e são indicativas de conhecimentos necessários para que professores possam eficientemente ensinar *Combinatória* e *Probabilidade*.

O *conhecimento do conteúdo no horizonte* possibilita que o professor reconheça relações entre conteúdos variados da Matemática, como também conheça percursos de aprofundamento dos conteúdos matemáticos. Um exemplo é o conhecimento de modos de articulação da *Combinatória* com a *Probabilidade*. Outro exemplo é o conhecimento de como problemas, como os combinatórios, podem se tornar gradativamente mais complexos, partindo de situações simples que podem ser resolvidas por listagens, chegando a problemas mais complexos que necessitam do uso de fórmulas matemáticas para suas resoluções. Mais um exemplo é o de como se pode trabalhar elementos centrais à *Probabilidade*, até chegar ao entendimento de correlações entre variáveis.

Do bloco de conhecimento pedagógico, o primeiro destaque de Ball, Thames e Phelps (2008) é o *conhecimento do conteúdo e alunos*. Com base nesse conhecimento, os professores podem prever facilidades e dificuldades de seus alunos no aprendizado dos conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula, bem como conhecer o que pode tornar um conteúdo interessante e motivador. No caso do estudo da *Probabilidade*, saber que o trabalho com experimentos e simulações pode despertar o interesse de alunos é um exemplo desse tipo de conhecimento.

O subdomínio do *conhecimento do conteúdo e ensino*, por sua vez, possibilita ao professor avaliar vantagens e desvantagens de determinadas atividades em sala de aula – incluindo-se as instruções dadas e as representações utilizadas para o ensino de um conteúdo específico. Exemplos de recursos variados de ensino de *Combinatória* e de *Probabilidade* – tais como uso de materiais de manipulação, de *softwares* e de jogos – são apresentados nos diversos capítulos do presente livro.

Por fim, o *conhecimento do conteúdo e currículo* também serve de apoio ao professor dentro e fora da sala de aula. Conhecer o que é prescrito em documentos oficiais e o que é apresentado em materiais didáticos possibilita ao professor um melhor planejamento de suas aulas, bem como uma prática de ensino apoiada em informações curriculares diversas.

Certamente, há uma positiva associação dos conhecimentos que os professores possuem e a qualidade do ensino ocorrido junto aos estudantes. Há, assim, uma forte relação entre o que o professor conhece e o que seus conhecimentos o possibilitam realizar em suas salas de aula. Estudos, como os apresentados neste livro, apontam aspectos mais frágeis e mais sólidos dos conhecimentos docentes para o ensino de *Combinatória* e de *Probabilidade*.

Como se dá o desenvolvimento conceitual, em particular o desenvolvimento do raciocínio combinatório?

Gérard Vergnaud desenvolveu a *Teoria dos Campos Conceituais* e destacou que seu objetivo principal era estudar os conhecimentos das crianças e adolescentes, "entendendo por conhecimentos, tanto o saber fazer quanto os saberes expressos" (VERGNAUD, 1996, p. 155). Para isso, esse autor argumenta que os conceitos somente adquirem sentido por meio das situações e dos problemas nos quais estão envolvidos. Nesse sentido, Vergnaud (1986) defende que todo conceito é formado por um tripé em que as situações que dão significado ao conceito (S); os invariantes (I), isto é, as relações e propriedades do conceito que permanecem constantes nas diversas situações em que os mesmos estão presentes; e as representações simbólicas utilizadas para registro e operacionalização do conceito (R) são igualmente importantes para o desenvolvimento conceitual. Isso porque, resolvendo problemas envolvendo as variadas situações, por meio de diferentes representações simbólicas e com atenção aos diferentes invariantes, é que as situações farão sentido e os conceitos serão desenvolvidos.

Como exemplo, Vergnaud (1986) destaca que o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é formado por situações que exigem multiplicação, divisão ou a combinação entre essas duas operações para a resolução dos problemas nesse campo contido. Segundo o autor, uma das situações que fazem parte desse campo conceitual é o *produto de medidas*, um dos tipos de problema que envolvem raciocínio combinatório. Sobre o desenvolvimento desse tipo de raciocínio, Inhelder e Piaget (1976, p. 241) destacam que está relacionado com a "dissociação entre o possível, o real e o necessário".

Nesse sentido, incentivar o desenvolvimento do raciocínio combinatório pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo, uma vez que se faz necessário realizar o levantamento de casos, analisar relações invariantes e validar as possibilidades. Flavell (1988, p. 210) afirma que o raciocínio hipotético-dedutivo é

> Uma estratégia cognitiva que tenta determinar a realidade no contexto das possibilidades [...]. Tentar encontrar o real dentro do possível requer que primeiramente se considere o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser sucessivamente confirmadas ou rejeitadas. As hipóteses rejeitadas pelos fatos podem ser descartadas; aquelas que os dados confirmam passam a integrar o setor da realidade.

Assim, o desenvolvimento do raciocínio combinatório está intimamente relacionado com o desenvolvimento do pensamento científico, a partir do qual são analisadas situações, elaboradas hipóteses e verificadas se as condições dadas na situação são atendidas na resolução dos problemas postos, para que adequadas soluções sejam encontradas.

Borba (2010) indica que, além do trabalho com as situações de *produto de medidas*, destacadas por Vergnaud (1996), a *Combinatória* também envolve situações de *arranjo, combinação* e *permutação*. Essas últimas são formalmente trabalhadas no Ensino Médio, porém, desde o início da escolarização, já estão presentes no cotidiano dos estudantes, sendo trabalhadas por meio de representações menos formais – tais como desenhos e listagens. A autora defende que todas as situações combinatórias devem ser trabalhadas desde os primeiros anos de escolarização, de modo que sejam discutidos os invariantes de *escolha* e de *ordenação de elementos* e o *esgotamento de possibilidades*, por meio de diversificadas representações simbólicas.

Sendo assim, para as situações de *produto de medidas*, os invariantes de escolha e de ordenação são:

> [...] dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados, a partir da seleção de um elemento de cada um dos conjuntos independentes, gerando um novo conjunto de elementos, de natureza distinta da dos conjuntos disjuntos dados. (BORBA, 2010, p. 2-3).

É importante salientar que, nesse tipo de problema, a ordenação não gera possibilidades distintas. Como exemplo de uma situação de *produto de medidas*, tem-se:

> Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha), duas saias (preta e branca) e dois pares de sapato (dourado e prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas saias e um de seus pares de sapato? (MONTENEGRO, 2018, p. 38).

No exemplo citado por Montenegro (2018), os estudantes deverão escolher um elemento de cada conjunto, ou seja, uma blusa, uma saia e um sapato, para formar um novo conjunto (de trajes) e, nesse novo conjunto, a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas. No caso do problema enunciado, há 16 possibilidades de vestiário e a possibilidade "blusa amarela, saia preta, sapato dourado" é a mesma que "saia preta, blusa amarela e sapato dourado". Os estudantes podem resolver esse tipo de situação com uma listagem, um diagrama, uma árvore de possibilidades, ou ainda, com uma multiplicação direta da quantidade de elementos de cada conjunto, de modo que cheguem ao esgotamento das possibilidades.

Nas situações de *arranjo*, os invariantes de escolha e ordenação são: "a partir de um conjunto maior são escolhidos elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas" (BORBA, 2010, p. 3). Como exemplo de uma situação de arranjo, Montenegro (2018, p. 41) destaca:

> Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Nesse exemplo, os estudantes deverão escolher três letras de um grupo de quatro, sendo que a ordem com que essas letras são escolhidas faz diferença no total de possibilidades. Assim, escolher as letras que formam a placa XYK é diferente de escolher as mesmas três letras em ordem diferente, como XKY, pois se configuram em placas distintas. Assim como nos problemas de *produto de medidas*, as situações de *arranjo* também podem ser resolvidas por meio de diferentes representações, como a listagem, o diagrama e a árvore de possibilidades. Entretanto, essa situação não pode ser resolvida por meio de uma multiplicação direta dos números do enunciado, sendo necessária a utilização de uma generalização de possibilidades, do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC)[2] ou da fórmula de *arranjo* para que se chegue ao esgotamento de todas as 24 possibilidades[3].

Na situação de *combinação* os invariantes de escolha e ordenação "se assemelham aos arranjos em termos de escolha de elementos, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas" (BORBA, 2010, p. 3). Como exemplo de uma situação

---

2 O *Princípio Fundamental da Contagem* é discutido em detalhes no Capítulo 3 do presente livro.

3 Para mais detalhes sobre a resolução dessa situação, por generalização de possibilidades ou PFC, ver o estudo de Montenegro (2018, p. 42).

de *combinação*, de acordo com Montenegro (2018, p. 44), tem-se: "Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?".

No caso desse exemplo, os estudantes deverão escolher três frutas de um total de quatro dispostas no enunciado. Entretanto, diferente da situação de *arranjo*, nesta, a ordenação em que as frutas são escolhidas não faz diferença no total de possibilidades, uma vez que uma salada de frutas com mamão, abacaxi e laranja ou, apenas mudando a ordem de escolha, mamão, laranja e abacaxi, são exatamente a mesma salada. Nesse problema, os estudantes também poderão resolver por meio de listagens, diagramas ou árvores de possibilidades, mas uma multiplicação direta também não pode ser realizada. Nessa situação, é preciso incluir uma divisão pela permutação de três elementos, ou seja, uma divisão por 6, que se configura no número de casos repetidos de uma mesma possibilidade. Isso também é necessário na resolução pelo PFC[4] e está implícito na fórmula de *combinação*, de modo que seja possível chegar às quatro possibilidades totais.

Na situação de *permutação*, em se tratando dos invariantes de escolha e de ordenação, "todos os elementos do conjunto são utilizados, apenas a ordem de apresentação dos mesmos varia" (BORBA, 2010, p. 3). Como exemplo de uma situação de *permutação*, tem-se: "De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?" (MONTENEGRO, 2018, p. 42).

Nesse exemplo, os estudantes irão permutar a ordem de todos os elementos dados no enunciado, de modo que as possibilidades

4 Para mais detalhes sobre a resolução dessa situação por generalização de possibilidades ou PFC ver o estudo de Montenegro (2018, p. 45).

são formadas pela mudança de ordenação dos elementos. Assim, a ordem da fila sendo “Maria, Luís e Carlos” se configura numa fila diferente, caso a ordem fosse “Maria, Carlos e Luís”. Os estudantes podem resolver esse problema pelas representações já elencadas para as situações anteriores – desde as menos formais, como desenhos e listagens, usadas por crianças em início de escolarização, até as mais formais, como o PFC e as fórmulas da *Combinatória*.

Destaca-se que nos anos iniciais do Ensino Fundamental o uso das representações menos formais deve ser privilegiado, de modo que nos anos finais e no Ensino Médio o uso do PFC e das fórmulas, respectivamente, sejam consequência do desenvolvimento desse tipo de raciocínio.

Quais as demandas cognitivas implícitas na compreensão da probabilidade?

A *Probabilidade*, assim como os demais conteúdos educacionais, se faz muito presente no cotidiano das pessoas. Quando participam de sorteios, quando escolhem os números para apostar em jogos da loteria, quando vão a encontros de chá de revelação para saber o sexo de um bebê ou, mesmo, quando decidem não ir para um determinado evento, porque sabem que haverá muitas pessoas e as chances de contraírem Covid-19 aumentam, as pessoas fazem uso de conceitos probabilísticos, seja por meio de avaliação intuitiva – desenvolvida por meio de situações vivenciadas no cotidiano – ou escolarizada.

Pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de *Probabilidade* (SANTOS, 2010; SANTOS; GRANDO, 2011; NACARATO; GRANDO, 2013; SANTOS, 2015; SILVA, 2016) indicam a importância deste estudo desde o início do processo de escolarização, pois para sua ampla compreensão são necessárias intervenções didáticas que promovam reflexões, nas quais conceitos intuitivos desenvolvidos nas experiências cotidianas sejam confrontados aos escolares. As pesquisas também orientam que o estudo da *Probabilidade* seja feito ao longo de todo o processo de escolarização e de modo articulado com outros conteúdos escolares, como a *Combinatória*, e por meio de metodologias que permitam que o estudante faça observações e tire conclusões.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que orienta os currículos das escolas brasileiras, inclui dos anos iniciais do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio objetos de conhecimentos e habilidades sobre *Probabilidade* a serem desenvolvidas pelos estudantes. A BNCC (BRASIL, 2017) indica a necessidade da progressão dos conhecimentos sobre *Probabilidade* e destaca que, para isso, o trabalho escolar deve levar os alunos ao entendimento de que nem todos os eventos são determinísticos, à construção e enumeração de espaço amostral, à compreensão de eventos equiprováveis e não equiprováveis, à estimativa das probabilidades de eventos, entre outros conhecimentos e habilidades. O documento destaca a importância dos alunos compreenderem a aleatoriedade, verbalizarem suas considerações, participarem de experimentos aleatórios e simulações para que possam comparar a probabilidade teórica e a frequentista, ou seja, a quantificação das chances do evento realizada *a priori* (probabilidade teórica) e o resultado obtido nas simulações (probabilidade frequentista).

O estudo desenvolvido por Bryant e Nunes (2012) apresenta demandas cognitivas a serem desenvolvidas por estudantes no decorrer do estudo da probabilidade. Tais autores foram referências dos nossos trabalhos, tendo em vista que as pesquisas por eles relatadas discutem pressupostos da *probabilidade* que são base das investigações que temos desenvolvido no Geração.

Segundo Bryant e Nunes (2012), a *probabilidade* é um sistema complexo e está relacionada à quatro demandas cognitivas, que são: *a compreensão da aleatoriedade, a formação do espaço amostral, a quantificação e a comparação de probabilidades e o entendimento da correlação entre eventos*. Para os autores, as demandas são relacionadas entre si e cada uma envolve raciocínios específicos que são articulados a outros do aspecto do desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A *compreensão da aleatoriedade* é considerada pelos autores como uma demanda fundamental para o desenvolvimento de conceitos da *Probabilidade*, pois a incerteza dos resultados é uma marca registrada dos problemas de *Probabilidade* e, mesmo sendo algo comum, gera dificuldades até mesmo para pessoas adultas. De acordo com os estudos de Bryant e Nunes (2012), o reconhecimento desta característica em estudantes ainda jovens indicou maior grau de compreensão sobre problemas de *Probabilidade*. Argumentos relacionados à justiça também são aguçados nas situações que envolvem a aleatoriedade e devem ser explorados no contexto escolar, pois contribui não apenas para a compreensão da demanda, mas também para o desenvolvimento do pensamento crítico.

A *formação do espaço amostral* é a segunda demanda e, assim como a anterior, é considerada essencial, pois a resolução de problemas de *probabilidade* se pauta no conjunto de todos os resultados possíveis. De acordo com Bryant e Nunes (2012), os procedimentos realizados no processo de educação formal são importantes para o entendimento e para a definição do espaço amostral. A determinação do espaço amostral envolve o raciocínio combinatório e estudos realizados por integrantes do grupo Geração apontam desafios e possibilidades para sua aprendizagem: Azevedo (2013), discutindo a construção de árvores de possibilidades; Vega (2014), verificando o efeito de etapas de escolha; Silva (2019), observando crianças bem novas em seus levantamentos de possibilidades; Gadelha (2020), analisando o uso de materiais de manipulação; e Braz, Braz e Borba (2014), examinando o uso do tato e olfato por uma criança cega ao resolver problemas combinatórios.

A terceira demanda é a *quantificação e a comparação das probabilidades*. A probabilidade de um evento é medida por um número entre 0 e 1 (em que 0 indica impossibilidade e 1 indica a certeza). Na abordagem clássica, ela é indicada pelo número de casos favoráveis dividido pelo número total de casos, podendo ser apresentada por frações, representação decimal ou porcentagens. Para a comparação das probabilidades, razões e proporções são utilizadas.

Equívocos na determinação do espaço amostral conduzem a erros na medida de probabilidade. Segundo Bryant e Nunes (2012), muitos dos equívocos estão relacionados ao entendimento de eventos equiprováveis. Por exemplo, no lançamento simultâneo de dois dados há 36 resultados equiprováveis possíveis (1,1; 1,2; 1,3; ... 6,6); mas os resultados possíveis em termos da soma dos dois números das faces sorteadas são apenas 11, que são de dois a 12, e esses resultados não são equiprováveis. A soma sete é seis vezes mais provável que a soma dois, uma vez que há seis modos de se obter soma sete (1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 e 6+1) e apenas um modo de obtenção da soma dois (1+1). Neste exemplo, os resultados individuais dos lançamentos são equiprováveis, mas os resultados das somas não são equiprováveis e a incompreensão dos espaços amostrais pode ser um dificultador no entendimento das probabilidades envolvidas.

Para minimizar essa problemática, os pesquisadores sugerem metodologias que promovam a discussão das ideias pelos estudantes e intervenções pelo professor, visando superar concepções e conceitos equivocados. Além disso, sugerem a discussão sobre como apresentar a quantificação e a comparação de probabilidades.

A última demanda cognitiva da *probabilidade*, apontada por Bryant e Nunes (2012), é o entendimento da correlação. Sua compreensão está relacionada à forma como são percebidas a associação entre situações aleatórias ou não, como é considerada a quantidade das evidências confirmadas e não confirmadas, e como fazê-la de modo proporcional. A compreensão dessa demanda envolve o entendimento das anteriores e propostas de ensino nas quais a comunicação de ideias e argumentações sejam exploradas.

Os estudos envolvendo as demandas cognitivas de *probabilidade* têm nos indicado, de modo específico, as dificuldades apresentadas por alunos na compreensão da *Probabilidade*, fragilidades de materiais didáticos utilizados em sala de aula e possibilidades para eficazes processos de ensino e aprendizagem, até mesmo na perspectiva inclusiva. Tais apontamentos são importantes para o campo da pesquisa e, também, para o trabalho em sala de aula, uma vez que sugerem uma disposição para o desenvolvimento de situações de ensino e possibilitam a constatação específica das dificuldades dos estudantes, inclusive, dos que possuem deficiências.

Quais pressupostos de educação inclusiva consideramos em estudos sobre Combinatória e sobre Probabilidade?

A visão multifacetada da deficiência tem gerado problemas para a inserção das pessoas com deficiência na sociedade. Movimentos sociais conduzidos por diversos grupos, inclusive, de pessoas com deficiência, provocaram a criação de leis e normativas pelos seus direitos enquanto cidadãos. Mas, esse fato não garantiu a compreensão da sociedade quanto à capacidade que essas pessoas possuem.

O movimento pela inclusão passou por um longo percurso histórico e ainda não atingiu o seu objetivo que é o *direito pleno à* *igualdade*. A princípio, as pessoas com deficiência eram excluídas da sociedade, acreditando-se que a deficiência decorria da intervenção de forças diabólicas; depois, elas passaram a ser segregadas em instituições médicas, ou mesmo escolares, com o intuito de receber um tratamento adequado, mas também de serem retiradas do convívio social. A inserção na sociedade se deu por meio da integração dessas pessoas em diferentes ambientes sociais. No entanto, nessa concepção, a pessoa necessitava se adaptar ao ambiente/contexto. A inclusão é algo mais amplo, diferente da integração. Envolve a interação entre todos e a adaptação do meio, não da pessoa. A inclusão envolve aspectos coletivos e individuais, como a nossa compreensão de seres humanos. Segundo Mantoan (2003), a inclusão envolve a nossa capacidade de entender e reconhecer o outro com uma pessoa única, de conviver e interagir com todos e conceber a diferença como uma característica dos seres humanos.

De acordo com essa compreensão, a inclusão escolar

> [...] implica no reconhecimento das diferenças dos alunos e na concepção de que a aprendizagem é construída na cooperação a partir da atividade do sujeito diante das solicitações do meio, tendo o sujeito de conhecimento como um sujeito autônomo. (FIGUEIREDO, 2010, p. 66).

Nesse contexto, o processo de ensino e aprendizagem deve ser pensado a partir das singularidades dos alunos e das suas potencialidades. As situações de aprendizagens, os espaços e tempos, o agrupamento dos alunos, os conteúdos escolares, de certo modo, são trazidos pelos alunos. De acordo com Figueiredo (2010, p. 61), “a escola que está atenta à questão das diferenças, dispensa grande relevância ao ensino e gestão da sala de aula, uma vez que a grande marca dessa escola é a valorização do papel social do aluno”.

Assim, diante de discussões a respeito da Educação Inclusiva e do pensar na participação dos estudantes que frequentam aulas de ensino regular, mas não veem o que o professor coloca no quadro e o que os colegas registram no caderno, nos surgiu o interesse de realizar estudos mais específicos quanto à *Combinatória* e à *Probabilidade* e a *Deficiência Visual*. Ressalta-se que os trabalhos realizados em contexto escolar pelo grupo Geração, de maneira geral, já possuíam perspectiva inclusiva, uma vez que as situações realizadas em sala de aula, por exemplo, envolviam todos os alunos, independentemente de suas diferenças.

As pesquisas realizadas por Vygotski (1997), por Lambert *et al.* (2004), Morgado, Santos e Takinaga (2016), entre outros autores, foram referência para desmistificar algumas ideias difundidas historicamente sobre a aprendizagem das pessoas com deficiência visual e apontar alguns direcionamentos para os nossos estudos.

De acordo com Vygotski (1997), a deficiência sensorial não interfere nos aspectos cognitivos da pessoa, ou seja, um estudante cego pode alcançar o mesmo nível de conhecimento que outros estudantes se lhe forem proporcionadas vias adequadas à sua aprendizagem. Ele coloca que a relação do homem com o mundo não é direta, mas mediada e complexa. Considera que a linguagem não tem apenas a função comunicativa, mas de organização e desenvolvimento dos processos de pensamento, que são mediados por instrumentos e signos. Desse modo, indica que o trabalho pedagógico deve explorar diversos sentidos.

As pesquisas realizadas por Lambert *et al.* (2004) indicam que pessoas cegas, influenciadas por experiências táteis, podem gerar imagens mentais, assim como pessoas sem deficiência visual. Já os estudos de Gil (2000) assinalam que é por meio da linguagem e da exploração tátil que a pessoa com deficiência visual obtém informações para formar conceitos. Dessa forma, os sistemas háptico, fonador e auditivo são sentidos mediadores aos deficientes visuais. Em consonância com o exposto, Cunha, Cunha e Silva (2013) afirmam que estudantes cegos podem desenvolver melhor memória verbal, mecânica e racional.

Morgado, Santos e Takinaga (2016) afirmam que os estudantes gostam de realizar descobertas utilizando os sentidos e, tendo em vista que a Matemática possui muitos conceitos abstratos, o uso de materiais pedagógicos que utilizam variados sentidos pode ser uma alternativa para mediar o aprendizado de todos os alunos. Segundo as autoras, os materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem, pois possibilitam desenvolver as percepções visual, auditiva, espacial e corporal – necessárias ao desenvolvimento conceitual na Matemática.

No caso específico da *Combinatória* e da *Probabilidade*, alguns estudos apontam possibilidades para o ensino dessas áreas. Na resolução de problemas de contagem, Segadas *et al.* (2015, p. 11) constataram

> [...] que o uso de materiais adaptados para resolução de situações problemas, auxiliam na criação de estratégias de contagem e na compreensão das questões, sendo em alguns casos fundamentais.

Vita, Magina e Cazorla (2015, p. 94) verificaram que os estudantes cegos podem desenvolver conhecimentos probabilísticos a partir de maquete tátil. O estudo realizado por Santos e Borba (2019) indicou que ferramentas materiais contribuíram para que o estudante cego desenvolvesse conceitos probabilísticos. Ademais, a interação dialógica entre a pesquisadora e o estudante "indicam a importância da linguagem no processo de ensino de alunos cegos" (SANTOS; BORBA, 2019, p. 9).

Com o exposto e os estudos realizados, consideramos que o uso de diferentes formas de mediação – linguagem e ferramentas materiais – com outros sistemas sensoriais – háptico, olfativo, fonador e auditivo – podem favorecer o desenvolvimento de conceitos sobre *Combinatória* e *Probabilidade* de estudantes com *Deficiência Visual*. Destacamos, ainda, que os trabalhos que realizamos podem ser desenvolvidos em classes de ensino regular em perspectiva inclusiva.

QUAL O TRAJETO DE PESQUISA QUE ADOTAMOS?

A partir do aqui exposto, queremos destacar que o Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração) tem adotado um trajeto de pesquisa propositadamente articulado. Com isso, ressaltamos que os resultados de uma pesquisa apontam para a necessidade de outras investigações e, assim, há uma sucessão de estudos que buscam uma melhor compreensão de como se dá a aprendizagem da *Combinatória* e da *Probabilidade* e como o ensino pode ocorrer, de modo eficaz, para o desenvolvimento dos raciocínios dos estudantes de diferentes modalidades e níveis de ensino.

Não almejamos apenas a articulação entre as pesquisas do grupo, também desejamos auxiliar no pensar em temáticas futuras de investigação. A partir dos registros das pesquisas materializadas neste livro, pesquisadores podem conhecer aspectos já investigados no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de situações combinatórias e probabilísticas e podem planejar outras investigações necessárias para melhor entendimento desses processos.

Também desejamos contribuir efetivamente aos processos de ensino e de aprendizagem ocorridos em sala de aula, de modo a promover amplos desenvolvimentos dos estudantes da Educação

Básica. Assim, esperamos que os estudos aqui relatados auxiliem professores no planejamento de atividades escolares que promovam discussões que conduzam à aprendizagem de situações combinatórias e probabilísticas. Acreditamos, também, que as atividades utilizadas nos estudos relatados ao longo dos capítulos possam servir de inspiração para o trabalho de ensino da *Combinatória* e da *Probabilidade* – avaliando conhecimentos e promovendo avanços nos desenvolvimentos conceituais dos estudantes.

Aos que desejam obter mais detalhes dos estudos desenvolvidos no Geração, indicamos o blog do grupo (mencionado no início do texto). No blog há informações sobre os participantes do grupo e nossas linhas de pesquisa, bem como *links* das nossas produções (palestras, publicações em eventos científicos, em livros, em periódicos, em dissertações e em teses). Aos que desejarem trocar ideias conosco, no blog constam nossos e-mails e há também espaço para postagem de comentários. Teremos muito prazer em debater as pesquisas realizadas, outras possíveis investigações e, também, vivências em sala de aula.

Desejamos a todos uma boa leitura!

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. *Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades*: É melhor no papel ou no computador? 2013. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

BALL, Deborah; BASS, Hyman. Toward practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *In:* B. Davis.; E. Smith (Eds). *Pro-*

ceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group. Edmonton, Canadá: CMESG/GCEDM, 2003, p. 3-14.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education.* Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov-dec, 2008.

BORBA, Rute. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: SBEM/UFRB, 2010.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 07 out. 2020.

BRAZ, Flávia; BRAZ, Ana; BORBA, Rute. *Educação inclusiva de alunos com deficiência visual:* desenvolvimento de materiais manipulativos para o ensino de combinatória. 2014. 26 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Pedagogia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0ByUlyzknmdPLYnVWbUVjRmJLams/view. Acesso em: 20 out. 2020.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. *Children's Understanding of Probability:* a literature review. Londres: The Nuffield Foundation, 2012. Disponível em: www.nuffieldfoundation.org. Acesso em: 07 out. 2020.

CUNHA, Marcel; CUNHA, Niágara; SILVA, Natália. A defectologia de Vigotski e a educação da criança cega. *Revista Formar Interdisciplinar*, Sobral, v. 1, n. 2, p. 6-11, jan./jun., 2013.

FIGUEIREDO, Rita. A escola de atenção as diferenças. *In:* FIGUEIREDO, Rita; BONETI, Lindomar; POULIN, Jean-Robert. *Novas Luzes sobre a inclusão escolar.* Fortaleza: Edições UFC, 2010. p. 51-69.

FLAVELL, John. *A Psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Editora Pioneira. 1988.

GADELHA, Dacymere. *Resolução de Problemas Combinatórios nos Anos Iniciais:* uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©). 2020. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

GIL, Marta. *Deficiência visual*. Brasília: MEC/SEED, 2000.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

LAMBERT, Séverine; SAMPAIO, Eliana; MAUSS, Yves; SCHEIBER, Christian. Blindness and brain plasticity: contribution of mental imagery? *Cognitive Brain Research*, USA, v. 20, n. 1, p. 1-11, jun., 2004.

MANTOAN, Maria Teresa. *Inclusão escolar:* O que é? Por quê? Como fazer? São Paulo: Moderna, 2003.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. *Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias*. 2018. 247 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MORGADO, Adriana.; SANTOS, Regiane; TAKINAGA, Sofia. Sugestão de alguns materiais para o ensino e aprendizagem para inclusão. *In:* MARINQUE, Ana; MARANHÃO, Maria Cristina; MOREIRA, Geraldo. *Desafios da educação matemática inclusiva:* práticas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. p. 69-82.

NACARATO, Adair; GRANDO, Regina (Orgs.). *Estatística e probabilidade na Educação Básica:* professores narrando suas experiências. Campinas/SP: Mercado das Letras, 2013.

SANTOS, Jaqueline. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do ensino fundamental.* 2010. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

SANTOS, Jaqueline. *A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do ensino fundamental a partir de uma prática problematizadora.* 2015. 191 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SANTOS, Jaqueline; BORBA, Rute. Relações entre ferramentas materiais e mediação na construção de conhecimento probabilístico de um estudante cego. *In:* CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL DE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA, 3., 2019, Granada. *Anais*… Granada: Universidade de Granada, 2019. p. 1-10. Disponível em: http://digibug.ugr.es/handle/10481/55205. Acesso em: 08 out. 2020.

SANTOS, Jaqueline; GRANDO, Regina. O movimento das ideias probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso. *Boletim de Educação Matemática – Bolema*, Rio Claro,v. 24, n. 39, p. 561-584, 2011.

SEGADAS, Cláudia; BERNARDO, Fábio; MOREIRA, Júlio; BARBOSA, Paula; GARCEZ, Wagner. Introduzindo a análise combinatória no ensino fundamental com adaptações para deficientes visuais e surdos. *In:* SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. *Anais*... Pirenópolis/GO: SBEM, 2015.

SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, USA, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev., 1986.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, USA, v. 57, n. 1, p. 313-333, fev.,1987.

SHULMAN, Lee. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado – Revista de currículum y formación del profesorado*, Españha, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2005.

SILVA, Ariedja. *O uso de material manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação infantil.* 2019. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, Rita. É a moeda que diz não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

VEGA, Danielle. *Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de Escolha:* produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação? 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, Lisboa, n. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In:* BRUM, Jean (Org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

VITA, Aida; MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene. A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, São Paulo, v. 8, p. 55-97, 2015.

VYGOTSKI, Lev. *Obras escogidas – V:* Fundamentos da defectología. Tradução de J.G. Blank. Madrid: Visor, 1997.

VIGOTSKI. Lev. A Defectologia e o Estudo do Desenvolvimento e da Educação da Criança Anormal. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 37, n. 4, p. 861-870, 2011.

PARTE 1

Estudos com professores sobre conhecimentos referentes ao ensino de Combinatória e de Probabilidade

1 Conhecimentos de Combinatória para ensinar nas diferentes etapas da educação básica: com a palavra, professores!

Cristiane de Arimatéa Rocha
Rute E. de S. Rosa Borba

ENSINAR E APRENDER COMBINATÓRIA

Ensinar e aprender Combinatória parecem, a princípio, tarefas bastante complexas. Cabe ao professor a adequada seleção de atividades que levem os alunos a se depararem com problemas combinatórios que podem ser resolvidos de maneira elaborada, econômica ou, até mesmo, curiosa. Apesar da aparente complexidade desses processos, a arte de resolver problemas combinatórios encanta desde tempos antigos nas mais diferentes civilizações.

O caminho de desenvolvimento do raciocínio combinatório perpassa pela elaboração de procedimentos de resolução próprios dos problemas combinatórios. Pessoa e Borba (2009) apresentam, em sua investigação, uma gama de bons procedimentos para resolução de problemas combinatórios encontrados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental.

Esses problemas não envolvem, de início, a necessidade de usar álgebra ou conhecimentos matemáticos muito profundos, mas para auxiliar a construção do raciocínio combinatório mais amplo existe a necessidade de que os estudantes explicitem argumentos e justificativas que expliquem os procedimentos adotados na resolução de um problema combinatório (ROCHA, 2019). Desse modo, crenças e concepções sobre o ensino e a aprendizagem de Combinatória implicam em adequações no modo como a aula de Combinatória é planejada, implementada e avaliada.

O professor que ensina Combinatória possui diversos desafios. Sabe-se que os documentos curriculares nacionais apontam para a necessidade de ensinar este conteúdo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997; 2018), passando pelos anos finais (BRASIL, 1998; 2018), até o Ensino Médio (BRASIL, 2000; 2018). Entretanto, durante a formação inicial do professor são poucos os componentes curriculares que discutem problemas combinatórios e, menos ainda, que refletem especificamente sobre o ensino e aprendizagem da Combinatória nos diferentes níveis de ensino.

Ao desafio do ensino da Combinatória, soma-se o fato de que os Livros Didáticos, um dos principais recursos utilizados por professores e alunos, apresentam variados problemas combinatórios a partir dos anos iniciais (BORBA; AZEVEDO; BITTAR, 2016), no entanto, em seus manuais do professor, não apresentam orientações mais específicas que auxiliem a proposição de atividades dessa natureza. Em relação aos Livros Didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental, Lima e Borba (2018) observaram a existência de orientações para o professor quanto às representações adequadas ao trabalho com a Combinatória em cada ano, iniciando no 6º ano com a tabela de dupla entrada, seguido por árvore de possibilidades, a fim de que os “alunos possam perceber padrões de resolução nas diferentes situações combinatórias” (LIMA; BORBA, 2018, p. 204). No Ensino Médio, Rocha e Borba (2017) indicaram que, apesar dos livros apresentarem diferentes procedimentos, o uso de fórmulas é o mais utilizado e para problemas de permutação com elementos repetidos ou permutação circular é o único procedimento apresentado.

Todavia, embora os fatos até aqui discutidos possam indicar que os professores possuem algumas dificuldades na proposição de práticas específicas para Combinatória, alguns professores conseguem propor práticas para os diferentes níveis de ensino, visto que, tal como aponta Shulman (2005), tanto a experiência de ensino como a formação inicial são fontes para constituição da base de conhecimentos docentes.

Para que a Combinatória seja compreendida ao longo da escolarização e que o desenvolvimento do raciocínio combinatório seja alcançado, faz-se necessário nos processos de ensino e de aprendizagem (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996) pautado nessa perspectiva, pois quanto mais cedo os alunos tiverem essa experiência mais amplo será esse desenvolvimento (BORBA, 2013).

Adota-se, ainda, o pressuposto de que os conhecimentos do professor auxiliam os alunos no desenvolvimento dos conceitos necessários para aprendizagem e que as suas crenças acerca de como a Matemática deve ser ensinada, bem como sobre a melhor forma de ensiná-la, influenciam as suas escolhas didáticas, entre outros fatores (HILL *et al.*, 2008). Algumas pesquisas que investigam conhecimentos docentes sobre determinado tema matemático (HILL *et al.*, 2008) esclarecem sobre outros fatores que permeiam a relação entre esses conhecimentos e a prática desses professores. Nessa direção, Ball (2003) defende a importância de pesquisas que focalizem o uso do conhecimento do professor, seja com relação ao conteúdo, seja referente a práticas matemáticas.

O presente capítulo versa sobre um recorte da pesquisa de Rocha (2011) e visa analisar os conhecimentos de professores dos anos iniciais, dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio sobre Combinatória e seu ensino. Esses conhecimentos foram levantados ao longo de entrevistas, verificando o conhecimento dos professores sobre os problemas combinatórios, como analisam erros e dificuldades dos estudantes, como compreendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e, ainda, que tipos de propostas sugerem para a superação das dificuldades apresentadas.

Esses professores tiveram a oportunidade de analisar enunciados de problemas combinatórios e conversar sobre suas impressões a partir dos protocolos de resolução desses problemas por alunos de diferentes níveis de ensino, retirados da pesquisa de Pessoa (2009). Para auxiliar na análise dessas conversas, são utilizadas as discussões de Shulman (2005) e Ball, Thames e Phelps (2008), que indicam ao professor a necessidade de um conjunto de diferentes conhecimentos para implementar eficazmente processos de ensino e aprendizagem.

Na próxima seção, discorre-se brevemente sobre o aporte teórico, discutindo, especificamente, pesquisas que abordam a formação de professores, o ensino e a aprendizagem de Combinatória.

CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA PARA ENSINAR

Pesquisas na formação de professores que ensinam Matemática indicam que os conhecimentos necessários ao professor ultrapassam o domínio do conteúdo matemático, demonstrando que, nessa profissão, existem saberes únicos, diferenciados de outras profissões e que são indispensáveis para alcançar as transformações necessárias para o ensino (ROCHA, 2011). Ball e colaboradores defendem que para ensinar Matemática é necessário o *conhecimento especializado do conteúdo*, que não é utilizado por aqueles que pesquisam em Matemática, mas torna-se essencial para que o professor proponha representações ou modelos adequados e explicações precisas sobre um conteúdo.

Ball e Forzani (2010) comentam que professores também utilizam um tipo específico de conhecimento que permite expor determinado conteúdo aos estudantes, identificar os possíveis percalços na compreensão e, ainda, propor atividades para auxiliar novas aprendizagens. Segundo as autoras, tal conhecimento relaciona duas capacidades: "a de entender as noções e a de vê-las nas perspectivas de alunos que as encontram pela primeira vez" (BALL; FORZANI, 2010, p. 10, tradução própria).

Ball, Thames e Phelps (2008), ao investigarem os conhecimentos matemáticos para ensinar, acrescentaram outros domínios implementados na prática pelos docentes ao analisarem os erros produzidos pelos estudantes, ou, ainda, quando

> [...] planejam explicações, avaliam os alunos, propõem e respondem a questões matemáticas, avaliam a qualidade dos materiais de ensino, implementam representações, explicam conceitos e apresentam porque os procedimentos funcionam. (DELANEY *et al.*, 2008, p. 174).

Os domínios que se referem ao *conhecimento do conteúdo*, apresentados no capítulo introdutório deste livro, são o *conhecimento comum do conteúdo*, *conhecimento especializado do conteúdo* e o *conhecimento do horizonte matemático* (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). O *conhecimento comum do conteúdo* diz respeito às habilidades possuídas por um adulto escolarizado (DELANEY *et al.*, 2008). De acordo com Rocha (2011), para o *Conhecimento Comum da Combinatória* (CcC), um adulto escolarizado, que passou por alguma instrução sobre Combinatória e que tem a habilidade de resolver um problema combinatório utilizando procedimentos adequados, usa esse domínio.

O *conhecimento especializado do conteúdo* é utilizado pelo professor na realização de seu trabalho. O professor que possui um alto *Conhecimento Especializado de Combinatória* (CEC) consegue propor modelos de diferentes tipos de problemas combinatórios; explicações coerentes com respeito aos invariantes de *ordenação*, *escolha*, *repetição* e *esgotamento de possibilidades*, relacionados aos problemas de *produto de medidas discretas*, *permutação*, *arranjo* e *combinação;* procedimentos mais adequados para cada um desses problemas; e conhecer propriedades que relacionam esses tipos de problema. Por exemplo, saber sobre a regra de quociente que a combinação de n elementos p a p é obtida pelo quociente entre o arranjo de n elementos p a p e a permutação de p elementos.

O domínio do *conhecimento do horizonte matemático*, de acordo com Ball e colaboradores, possibilita que o professor faça a relação de um conteúdo com noções posteriores, estruturas e princípios, o que favorece pequenas adequações que consideram futuras discussões na Matemática. Ball, Thames e Phelps (2008) indicam que esse domínio se apresenta quando o professor sabe como os conteúdos matemáticos se relacionam ao longo do currículo. No caso da Combinatória, o desenvolvimento do *Conhecimento do Horizonte da Combinatória* (CHC) pode estar relacionado a saber que os procedimentos enumerativos (listagens, árvores de possibilidades) podem ser ampliados para o uso do *Princípio Fundamental da*

Contagem[1] (PFC) e este, por sua vez, para o uso de procedimentos algorítmicos (fórmula ou fatorial). Inclusive, a partir de um processo de percepção de regularidade, os alunos podem passar de um procedimento enumerativo a um procedimento multiplicativo. As relações entre as diferentes estruturas de Combinatória e seu desenvolvimento ao longo das etapas seguintes, além das conexões realizadas entre a Combinatória e a Probabilidade, fazem parte desse domínio.

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), os domínios relativos ao *conhecimento pedagógico do conteúdo* são subdivididos em *conhecimento do conteúdo e alunos*, *conhecimento do conteúdo e ensino* e o *conhecimento do conteúdo e currículo*, como apresentados no primeiro capítulo deste livro.

O *conhecimento do conteúdo e alunos* permeia a habilidade de reconhecer justificativas para as respostas dos alunos a um dado problema. O *conhecimento da Combinatória e Alunos* (CCA) se estabelece quando o professor apresenta justificativas coerentes dos erros cometidos pelos estudantes (ROCHA, 2011).

O *conhecimento do conteúdo e ensino* inclui a noção de identificar as vantagens da utilização de uma representação sobre a outra para a compreensão do estudante. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), esse domínio representa a junção entre o conhecimento de Matemática e o ensino. O *Conhecimento de Combinatória e Ensino* (CCE) pode se apresentar na habilidade do professor em oportunizar aos estudantes a sistematização de procedimentos enumerativos, como o esgotamento de possibilidades ou a não repetição das mesmas ao

1 O Princípio Fundamental da Contagem estabelece que se um evento é composto por duas ou mais etapas sucessivas e independentes, o número total de possibilidades será determinado pelo produto entre o número de opções existentes em cada etapa.

longo de um processo de listagem. Outra habilidade é proporcionar a discussão sobre invariantes (propriedades e relações) dos conceitos combinatórios, explorando problemas combinatórios diferentes para identificar semelhanças e diferenças no enunciado ou na resolução de problemas.

O *conhecimento do conteúdo e currículo* fundamenta-se em Shulman (2005) e descreve como as noções sobre os materiais e programas curriculares orientam o professor de Matemática para realização do trabalho em determinado ano ou instituição escolar. O *conhecimento da Combinatória e Currículo* (CCC) se apresenta quando o professor indica corretamente em que nível escolar pode se iniciar o ensino de Combinatória, de acordo com os documentos curriculares oficiais, ou quando menciona a utilização de outros tipos de procedimentos de resolução de problemas em detrimento dos procedimentos algorítmicos (fórmulas).

Assis (2014) verificou em sua pesquisa a importância de ações formativas, direcionadas aos professores dos anos iniciais, que versem sobre aspectos dos conhecimentos especializados e didáticos relativos à Combinatória. Essa formação pode auxiliar no reconhecimento e na diferenciação dos problemas combinatórios, bem como na construção de planejamentos e escolhas de procedimentos de resolução e materiais mais adequados para o ensino desse conteúdo.

Costa (2003) investigou como os professores que lecionavam na 6ª série do Ensino Fundamental (atual sétimo ano), na época da coleta, responderam problemas combinatórios. Averiguou-se a ausência de procedimentos sistemáticos, a falta de resolução com árvore de possibilidades ou sua construção incorreta, a não identificação de invariantes do conceito de ordenação em problemas combinatórios e a presença de respostas incorretas sem justificativa.

Outros pesquisadores, a exemplo de Sabo (2010), constataram que professores do Ensino Médio enfatizam a apresentação e a aplicação de fórmulas para a resolução de problemas combinatórios.

Com base no exposto, podem-se constatar resultados de pesquisas que enfatizam os conhecimentos de Combinatória de professores dos diferentes níveis de ensino de forma isolada. Tais conhecimentos podem ter características essenciais para a formação inicial e/ou continuada quando os professores de diferentes níveis conversam sobre tarefas frequentes na docência (interpretação de enunciados de problemas combinatórios, correção de erros de alunos, proposição de atividades para superá-los, identificação de invariantes [propriedades e relações] dos problemas combinatórios) de forma integrada. Nesse sentido, na pesquisa aqui relatada busca apresentar, a professores de diferentes níveis de ensino, o mesmo material para análise, de modo a constatar semelhanças e diferenças entre esses professores e as diferentes etapas de escolarização.

PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Na pesquisa relatada neste capítulo, foram realizadas entrevistas com seis professores que tiveram como base enunciados de problemas combinatórios e protocolos de resolução desses problemas por alunos das diferentes etapas de escolarização, retiradas da pesquisa de Pessoa (2009).

Todos os participantes da pesquisa estavam cursando ou já haviam cursado o mestrado. Foram entrevistados dois professores dos anos iniciais (PAI1; PAI2), dois dos anos finais do Ensino Fundamental (PAF1; PAF2) e dois do Ensino Médio (PEM1; PEM2). Tais professores possuíam mais de 8 anos de experiência nas diferentes etapas de ensino.

Os momentos da entrevista foram, posteriormente, relacionados com os domínios de conhecimento de Combinatória para ensino e sistematizados no Quadro 1, no qual estão separadas as atividades que os professores realizaram na entrevista por domínio de conhecimento.

Quadro 1 – Atividades realizadas na entrevista de Rocha (2011) separadas por conhecimentos de Combinatória para ensinar (continua)

	Domínios de conhecimento	**Atividades realizadas na entrevista**
Conhecimento de Combinatória	Comum de Combinatória (CcC)	• Resolver problemas combinatórios (ROCHA; FERRAZ, 2011)[2].
	Especializado de Combinatória (CEC)	• Verificar se a nomenclatura utilizada é adequada à etapa de ensino; • Agrupar os tipos de problemas combinatórios pelo enunciado; • Identificar os invariantes do conceito apresentados nos tipos de problemas combinatórios, em especial arranjo e combinação.
	Horizonte de Combinatória (CHC)	• Especificar procedimentos de resolução de problemas combinatórios específicos de cada etapa de ensino; • Discutir sobre o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório; • Fazer relações entre áreas ou entre outros conhecimentos matemáticos.

2 Acrescenta-se, neste capítulo, para a integração do conhecimento comum de Combinatória, o trabalho realizado por Rocha e Ferraz (2011) para discutir aspectos sobre a resolução de problemas combinatórios por professores de diferentes formações.

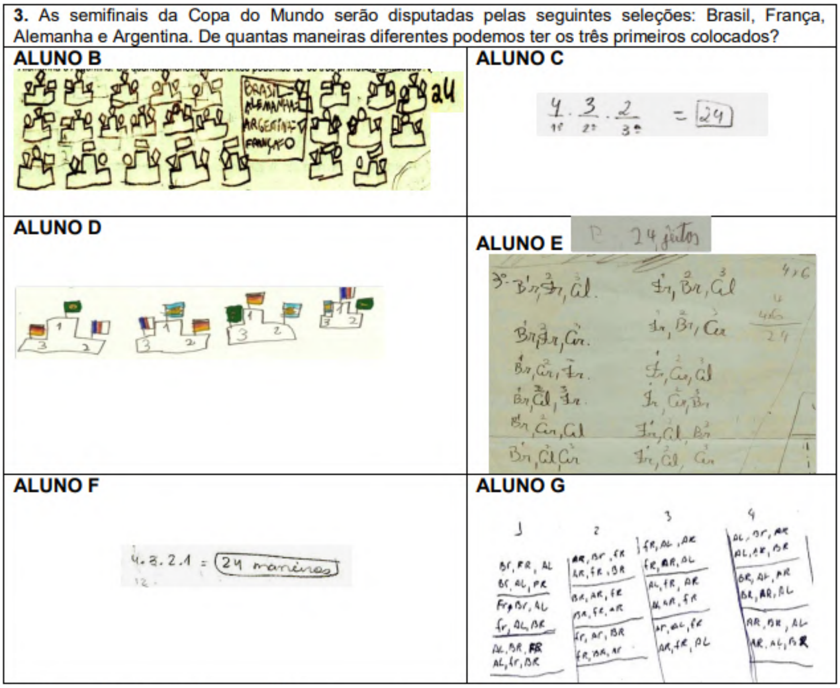
	Domínios de conhecimento	Atividades realizadas na entrevista
Conhecimento Pedagógico de Combinatória	Combinatória e Alunos (CCA)	• Estabelecer critérios sobre dificuldades dos estudantes na resolução de problemas combinatórios; • Antecipar erros cometidos na resolução de problemas combinatórios; • Justificar o motivo dos erros em resolução de problemas combinatórios;
	Combinatória e Ensino (CCE)	• Apresentar proposta para tratar os erros dos estudantes cometidos na resolução de problemas combinatórios; • Propor recursos que podem ser utilizados em aulas de Combinatória;
	Combinatória e Currículo (CCC)	• Apresentar informações sobre os documentos curriculares oficiais referentes à Combinatória.

Fonte: Rocha (2011).

Apesar da separação apresentada no Quadro 1, sabe-se que na prática docente esses conhecimentos estão integrados e, por vezes, ao longo das entrevistas, foram verificados momentos nos quais os diferentes conhecimentos eram mencionados.

As entrevistas foram realizadas em 2010, o que delimita os documentos curriculares oficiais discutidos pelos professores. O instrumento de coleta foi construído com oito problemas combinatórios, sendo de quatro tipos (produto de medidas discretas – PM, permutação – P, arranjo – A e combinação – C) e variando as ordens de grandeza das possibilidades (ordem maior – M, ordem menor – m). Na Figura 1, são apresentados exemplos de protocolos de resolução utilizados nas entrevistas.

Figura 1 – Protocolos de resolução de um problema de arranjo retirados da pesquisa de Pessoa (2009)[3]



Fonte: Rocha (2011, p. 125).

A entrevista envolvia análise de 16 protocolos de resolução desses problemas, dos quais seis continham erros de resolução e os demais apresentavam diferentes procedimentos de resolução (enumerativo sistemático, enumerativo não sistemático, percepção da regularidade, uso do Princípio Fundamental da Contagem correto e incorreto, árvore de possibilidades, tabela de dupla entrada).

3 Essa figura apresenta apenas seis dos protocolos utilizados na entrevista, por isso, inicia com o Aluno B.

Defende-se que os diferentes domínios do conhecimento de Combinatória para o ensino dos professores participantes da pesquisa estão imbricados nos seus comentários sobre as experiências vivenciadas ao longo das suas escolarizações e formações inicial e continuada, sobre as possíveis ações pedagógicas por eles pensadas, nas suas análises de erros dos estudantes ou nas sugestões de estratégias para superação desses erros. Na seção seguinte, apresentam-se e discutem-se alguns resultados, considerando-se os diferentes domínios de conhecimentos anteriormente apresentados.

DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS NOS CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA DE PROFESSORES QUE ATUAM NO ENSINO FUNDAMENTAL E NO ENSINO MÉDIO

Conhecimento Comum de Combinatória (CcC)

A resolução de problemas combinatórios foi classificada como uma habilidade referente ao *Conhecimento comum de Combinatória* (CcC). Constatou-se que os professores com formação em Pedagogia obtiveram média de acertos mais baixa do que os professores licenciados em Matemática. No entanto, quando são comparados os desempenhos dos grupos nos problemas combinatórios de menor ordem de grandeza, não houve diferença significativa de desempenho entre os grupos (ROCHA; FERRAZ, 2011).

Esse resultado explicita que ambos os grupos de professores participantes apresentam CcC adequado aos níveis de escolarização que trabalham, posto que, geralmente, nos anos iniciais, os problemas combinatórios possuem menor ordem de grandeza. Rocha e Ferraz (2011) comentam que esses problemas combinatórios de menor ordem de grandeza permitem que professores utilizem variados procedimentos enumerativos em detrimento de procedimentos algorítmicos.

Procedimentos como o uso do PFC e uso de fórmulas só foram observados em professores com formação em Matemática, enquanto que professores com formação em Pedagogia utilizaram procedimentos enumerativos (por exemplo, listagens, árvores de possibilidades, desenhos) e multiplicação direta. Tais escolhas são reflexos das experiências dos diferentes grupos de professores, seja com relação aos seus cursos de formação inicial e continuada, seja a partir das suas experiências com o ensino nas diferentes etapas de escolarização. Esse resultado reforça o indicado por Shulman (2005), que apresenta a formação inicial e a experiencia de professores como fontes de seus conhecimentos. Ball (2003) acrescenta que as diferentes experiências dos professores são uma fonte essencial para a orientação do trabalho na Educação Matemática.

Conhecimento do Horizonte de Combinatória (CHC)

O *CHC* refere-se à habilidade do professor de verificar adequações para um bom processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório, levando em conta as expectativas do professor sobre características específicas de cada etapa de escolarização e, ainda, relações desse conteúdo com outras áreas ou outros conteúdos ao longo desse processo.

Nesse caso, destacam-se as expectativas favoráveis ao trabalho com Combinatória nos anos iniciais descritas por um professor desse nível de ensino: "PAI2 [...] Eu acho que esse conteúdo é básico para a questão da evolução do raciocínio lógico, o raciocínio da estratégia, de sistematização e a capacidade de síntese e de agrupamento de alunos." (ROCHA, 2011, p. 164). Esse comentário traz características essenciais ao trabalho desse conteúdo nos anos iniciais, apontando indícios de um *CHC* relacionado ao objetivo do ensino desse conteúdo.

Com relação ao uso de termos ao longo das entrevistas, nota-se a ambiguidade no uso do termo *combinação*, utilizado por um dos professores dos anos iniciais para se referir a opções ou possibilidades. É preciso deixar claro quando se está referindo a um significado mais geral ou a um tipo específico de problema combinatório, pois, em etapas futuras de escolarização, será utilizado para diferenciar tipos de problemas combinatórios. Esse fato pode categorizar uma lacuna no *CHC*.

Outro bom exemplo de *CHC* é destacado na apresentação de uma relação entre os conteúdos de Combinatória e Geometria, apontado por um professor de Ensino Médio "PEM1: [...] A gente utiliza às vezes os assuntos de Combinatória para outros tópicos [...] a fórmula de diagonal de polígonos [...] pega os pontos faz a combinação e subtrai o número de lados" (ROCHA, 2011, p. 168). Para obter o número de diagonais de um polígono, pode-se, inicialmente, determinar quantas possibilidades diferentes existem para escolher dois vértices, o que se configura em um problema de *combinação*. Em seguida, retira-se o número de lados do polígono. O professor relacionou os conteúdos de Geometria e Combinatória, apresentando interação entre os conteúdos matemáticos. Autores como Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Costa (2003) indicam a necessidade de buscar relações da Combinatória com outros conteúdos matemáticos ou com demais áreas.

Com base nos procedimentos evidenciados na Figura 1, o professor do Ensino Médio PEM1 elaborou uma hierarquia dos procedimentos de resolução de problemas combinatórios com base na compreensão dos estudantes.

> *PEM1*: [...] A título de compreensão seria o Aluno E, mas a título de estrutura elaborada na resolução poderia ser diferente. O Aluno F seria o mais longe, depois o Aluno D [...]; Depois o Aluno B porque utilizou todas as possibilidades e a questão do principio aditivo; posteriormente o Aluno G [...] estaria numa situação parecida ao Aluno B; depois disso o Aluno E [...]. E por último o Aluno C que seria a estratégia que eu iria cobrar do Ensino Médio quando eu já tivesse trabalhando há algum tempo. (ROCHA, 2011, p. 127).

Nesse extrato, o professor sugeriu o uso ordenado de procedimentos enumerativos (desenhos e listagens) até os mais formais (expressões numéricas e PFC), apresentando um desenho para o processo de desenvolvimento do raciocínio combinatório, no qual estabelece o objetivo para seu aluno do Ensino Médio trabalhar com o *Princípio Fundamental da Contagem*, o que parece confirmar um bom domínio do *CHC*.

Conhecimento Especializado de Combinatória (CEC)

Esse domínio trata sobre a habilidade necessária para o ensino, específica do professor. Foram observadas as nomenclaturas relativas à Combinatória usadas pelos professores, o diferenciamento dos mesmos quanto aos tipos de problemas combinatórios e a identificação por eles dos invariantes (propriedades e relações) presentes nos problemas combinatórios.

Sobre a nomenclatura utilizada, excetuando o professor PAI1, todos os professores reconheceram explicitamente os problemas como sendo de Combinatória. O Professor PAI1 tentou estabelecer relação da Matemática com outras disciplinas, não identificando o conteúdo matemático dos problemas apresentados.

Com relação às diferenças entre os problemas combinatórios a partir dos enunciados, os professores dos anos iniciais agruparam por características do problema (quantidade ou comando final), ou noções de agrupamento, não sendo observadas menções a elementos dos invariantes combinatórios. Os professores dos anos finais não usaram as nomenclaturas próprias para diferenciar os problemas combinatórios, enquanto que os professores do Ensino Médio utilizaram as nomenclaturas típicas da Combinatória: *arranjo*, *permutação* e *combinação*.

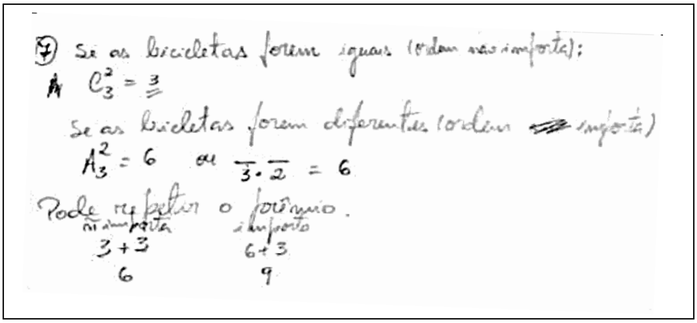
Esse fato denota o uso de linguagens apropriadas para os alunos das diferentes etapas de escolarização, pois está de acordo com as orientações presentes nos documentos curriculares (BRASIL, 1997; 1998), que indicam o trabalho no Ensino Fundamental sem a necessidade de focalizar nomenclaturas. Em contrapartida, os professores necessitam diferenciar esses problemas corretamente, já que essa identificação é essencial para o tratamento dos erros e acertos dos estudantes e estímulo ao desenvolvimento dos raciocínios combinatórios dos mesmos.

No caso dos professores dos anos finais do Ensino Fundamental, a não utilização de nomenclaturas, a não separação dos problemas combinatórios e a não identificação de invariantes dos conceitos na diferenciação de problemas de *arranjo* e *combinação* pode ser devido à ausência de evidências no livro didático que orientem os professores com relação ao trabalho nesse nível de ensino, o que atenua a falta desses conhecimentos ao longo da entrevista (ROCHA, 2011).

Um bom exemplo de *Conhecimento Especializado de Combinatória*, apresentado por um professor dos anos iniciais, refere-se ao tratamento dado ao problema denominado *produto de medidas discretas*, quando ele apresentou a ideia da relação entre dois quantitativos para resolução de problemas desse tipo. "PAI2: A criança ela vai ter que fazer uma relação entre um quantitativo e um quantitativo seguinte para poder fazer as combinações” (ROCHA, 2011, p. 104). O professor ressaltou que o esgotamento de possibilidades é facilitado quando a criança, sistematicamente, combina um elemento de um dos conjuntos com todos os elementos do outro conjunto, até que todas as combinações tenham sido realizadas.

O professor do Ensino Médio PEM1 apresentou um amplo *Conhecimento Especializado de Combinatória* (*CEC)* quando apresentou a habilidade de alterar o enunciado do problema combinatório para indicar a presença de diferentes invariantes (ordenação e repetição), como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Protocolos de comentário de resolução de um problema combinatório de um professor de Ensino Médio



Fonte: Rocha (2011, p. 108).

Esses elementos reforçam que CEC é específico do professor (HILL *et al.*, 2008; BALL; THAMES; PHELPS, 2008), pois apresenta características que vão além da resolução do problema, indicando os invariantes de ordem e repetição de problemas combinatórios, as notações referentes aos problemas de *arranjo* e *combinação*, os procedimentos diferenciados (fórmulas e uso do PFC) e, ainda, as relações entre eles.

Conhecimento de Combinatória e Alunos (CCA)

O *CCA* visa que professores prevejam possíveis dificuldades de estudantes na resolução e compreensão de problemas, antecipando e justificando erros que ocorreram ao longo do processo.

Todos os professores participantes da pesquisa conseguiram identificar alguns erros dos estudantes e até prever outras dificuldades para o aluno ao se deparar com problemas combinatórios, conforme apresenta-se a seguir.

Com relação ao *CCA*, os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental indicaram como dificuldades a incompreensão dos enunciados e a não sistematização de procedimentos enumerativos. Essas dificuldades podem levar à escolha de registros para possibilidades que demandam muito tempo (nomes completos, desenhos elaborados) para serem escritos, à duplicação de possibilidades e ao não esgotamento das possibilidades.

Já os professores dos anos finais, além das dificuldades apresentadas pelos professores dos anos iniciais, acrescentaram a influência do contexto nas interpretações do enunciado, a identificação de elementos invariantes presentes nos problemas combinatórios (ordenação e repetição), a compreensão de possibilidades pelos estudantes e a percepção de regularidades para que os alunos sejam capazes de sair de um procedimento enumerativo para um procedimento mais formal. Um exemplo de percepção da regularidade é usado pelo Aluno E (Figura 1) quando observa que, para cada país em primeiro lugar, existem seis possibilidades diferentes para ordenar os demais países, concluindo com a multiplicação.

No caso dos professores de Ensino Médio, estes coadunaram com o exibido pelos demais professores, havendo um consenso sobre as dificuldades que os estudantes enfrentam ao resolverem problemas combinatórios, acrescentando também a resolução de problemas com número de possibilidades muito grandes.

Um erro que apenas os professores do Ensino Médio conseguiram verificar foi o uso inadequado do *Princípio Fundamental da Contagem* em um problema de *arranjo* (Figura 1 – Aluno F), uma vez que tal procedimento é mais comum nessa etapa de ensino. O uso do PFC no problema de *arranjo* permite acompanhar o invariante de *escolha*, fazendo com que os estudantes percebam o número total de elementos e a restrição exigida em cada etapa de escolha, a identificação da quantidade de elementos do grupo que é escolhido e o invariante de *ordenação* quando identifica a ordem para realizar a escolha.

O Aluno F, apesar de conhecer o procedimento do PFC, utiliza sem levar em consideração o número de elementos do grupo a ser escolhido (de três países), apenas considerando a ordenação do número de países. Dessa forma, ao utilizar esse procedimento, o Aluno F confunde os problemas de *arranjo* e *permutação*. Ao fazerem essas previsões de dificuldades, os professores fazem uso do CCA, no entanto, de acordo com Ball e Forzani (2010), os professores devem ser capazes, ainda, de explicar o conteúdo para os estudantes – o que será abordado na próxima seção.

Conhecimento de Combinatória e Ensino (CCE)

Esse domínio versa sobre propostas para superação de erros e aspectos do planejamento de aulas de Combinatória indicados pelos professores.

Os professores dos anos iniciais sugeriram práticas que abordavam a resolução de problemas, implementando a retomada – escrita e oral – do enunciado, o acompanhamento dos alunos na produção das suas autonomias, a resolução em pequenos grupos e a socialização das estratégias adequadas.

Com vistas às dificuldades apresentadas na seção anterior, os professores dos anos finais focalizaram suas sugestões na variação de procedimentos de resolução de problemas combinatórios, uso de diagramas, tabelas de dupla entrada e fórmulas, tal como indicam Brasil (1998), Borba (2013) e Lima e Borba (2018).

PAF2 discutiu, ainda, a ampliação do número de possibilidades para justificar o uso de outros procedimentos não enumerativos, o que pode ser caracterizado como um *CCE* adequado ao Ensino Fundamental. Ao aumentar as possibilidades, os estudantes sentirão a necessidade de outros procedimentos – como o PFC – e poderão superar algumas dificuldades sentidas nos procedimentos enumerativos. A transição de procedimentos enumerativos para mais formais é necessária. No entanto, os procedimentos enumerativos promovem um bom entendimento inicial para as relações que diferenciam cada problema combinatório.

Os professores do Ensino Médio indicaram como procedimento para problemas de grande número de possibilidades o uso de fórmulas de Combinatória. E para auxiliar a diferenciação dos problemas combinatórios, bem como alguns de seus invariantes, apresentam algumas regras ou sugerem a discussão de outros problemas para auxiliar na compreensão.

Adverte-se, aqui, para a apresentação de dicas ou regras sobre os invariantes de ordenação e repetição dos problemas combinatórios, pois pode gerar um aceleramento desnecessário nos processos de compreensão dos problemas combinatórios por alunos. É mais adequado um ensino que priorize a criação de procedimentos próprios pelos estudantes e que favoreça a apresentação de justificativas produzidas por eles para a ampliação do desenvolvimento do raciocínio combinatório (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996; ROCHA, 2019).

Acredita-se que o ensino de Combinatória, ao longo das diferentes etapas de escolarização, pode focalizar também a relação entre os diferentes procedimentos de resolução de problemas combinatórios, o que pode fornecer estruturas necessárias para a compreensão dos mesmos. No Ensino Médio, inclusive, a relação entre o PFC e fórmulas pode e deve ser construída para que relações entre os problemas de *combinação*, *arranjo* e *permutação* sejam apreendidas. O PFC permite que o estudante explore o enunciado do problema, enquanto que o uso da fórmula exige, inicialmente, um processo de identificação dos invariantes presentes no enunciado, além de conhecimentos relativos à simplificação de fatorial, recaindo no uso do PFC. Alguns autores de livro didático do Ensino Médio já fazem essa comparação entre o PFC e a fórmula, como apontado por Rocha (2019).

Ao serem questionados sobre como planejam suas aulas de Combinatória, os professores dos anos iniciais enfatizaram o uso do material manipulativo e a discussão sobre o enunciado dos problemas combinatórios. Os dois professores dos anos finais do Ensino Fundamental destacaram a relação da Combinatória com o dia a dia na proposição de problemas e o uso do princípio multiplicativo, também conhecido como *Princípio Fundamental da Contagem*, e os professores do Ensino Médio ressaltaram as diferenças existentes nos problemas de *arranjo*, *combinação* e *permutação*.

Observou-se que os professores dos anos iniciais discutiram sobre como trabalhar com resolução de problemas combinatórios, enfatizando a importância da criação de autonomia dos estudantes na produção de procedimentos próprios e do papel do professor realizando a mediação. Isso indica um bom *Conhecimento de Combinatória e Ensino* (CCE), como se pode observar na citação a seguir:

> *PAI2*: [...] com relação à forma dessa Análise Combinatória a professora tem que ter muito mais intervenção [...] é trabalhar o aluno para ele criar sua autonomia. [...] o professor tem que estar muito junto nesse trabalho. (ROCHA, 2011, p. 164).

Em relação aos recursos didáticos para o ensino de Combinatória, poucos professores disseram conhecer algum material com esse fim. Apesar de os professores dos anos iniciais indicarem o trabalho com material manipulativo, esses são do tipo não estruturado, para acompanhar os enunciados dos problemas e auxiliar na abstração. De forma semelhante, o professor PAF1 disse fazer uso de tampinhas de garrafa para representar objetos do enunciado de problemas combinatórios e sistematizar uma organização. Um professor do Ensino Médio falou que o único recurso que utiliza é o livro didático e os demais professores disseram que desconhecem qualquer recurso. Esses resultados podem indicar dificuldades desses professores na criação e/ou elaboração de recursos estruturados para o ensino de Combinatória.

Conhecimento de Combinatória e Currículo (CCC)

Esse domínio trata as informações apresentadas pelos professores no que diz respeito aos documentos curriculares oficiais referentes ao ensino e à aprendizagem da Combinatória.

Na pesquisa aqui relatada, constatou-se que os professores de diferentes etapas reconhecem que o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória pode ocorrer bem antes do Ensino Médio, contrariando a prática em que os problemas combinatórios só podem ser ensinados no 2º ano do Ensino Médio e seguindo as orientações indicadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997; 1998), como também a BNCC (BRASIL, 2018).

Os professores dos anos finais também estabeleceram a relação dos problemas combinatórios com a multiplicação e enfatizaram nas aulas, além de contextos do cotidiano, o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* – o que coaduna com o apontado pelos documentos curriculares da época da entrevista (BRASIL, 1998), apresentando indícios de CCC.

O QUE NOS FALARAM OS PROFESSORES

Na conversa com os professores, observaram-se características dos diferentes conhecimentos para o ensino de Combinatória que ilustram o que acontece em suas práticas. Os domínios de conhecimento apresentados são essenciais para o desenvolvimento de um bom processo de ensino e aprendizagem de Combinatória ao longo da escolarização. Nas conversas com professores, constatou-se que as expectativas apresentadas nas diferentes etapas da entrevista se complementam, apresentando aspectos sobre tipos de procedimentos de problemas combinatórios e previsões de dificuldades de estudantes dos diferentes níveis.

Observou-se que existem algumas divergências de opiniões de professores que atuam no mesmo nível escolar, o que pode ser reflexo das experiências de formação e/ou de prática. Compreende-se, portanto, a necessidade de mais pesquisas que analisem as práticas docentes relativas à Combinatória nas diferentes etapas de escolarização. Isso pode dar um melhor retrato do como se tem vivenciado o ensino e a aprendizagem desse conteúdo e as contribuições ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

As lacunas nos diferentes domínios de conhecimentos de professores para ensinar Combinatória podem dificultar a análise de erros, como também a proposta de superação desses erros. Dessa forma, defende-se a inserção de práticas direcionadas à reflexão dos diferentes domínios de conhecimento sobre Combinatória na formação inicial e continuada de professores nos diferentes níveis de ensino. Outro fator essencial na construção desses domínios diz respeito à vinculação de experiências práticas em sala de aula sobre o ensino e aprendizagem de Combinatória que permitam a reflexão sobre planejamentos de aula, erros e estratégias utilizadas por alunos e recursos para ensino de Combinatória.

Investigações podem ainda ser feitas para tratar o *conhecimento de Combinatória e currículo* na prática dos professores, focalizando as diferenças entre o que é proposto, aplicado e aprendido, bem como as mudanças sofridas pelo currículo nessas esferas, principalmente, com as reformulações sofridas a partir da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). Ainda são necessárias pesquisas que tratem sobre a análise de práticas de professores em sala de aula, visando a complementação do presente estudo.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Adryanne. *Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada:* reflexões e prática de uma professora. 2014. 169 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

BALL, Deborah. *Mathematical proficiency for all students*. Toward a strategic research and development program in mathematics education. USA: Mathematics Study Panel, 2003.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, nov-dec, 2008.

BALL, Deborah; FORZANI, Francesca. What Does it Take to Make a Teacher? *Phi Delta Kappan*, USA, v. 92, n. 2, p. 8-12, oct 2010.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento Combinatório*. Madri: Sintesis, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 1ª a 4ª séries. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 5º a 8º séries. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio. Brasília, DF: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC, 2018.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba. *Anais*... Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana; BITTAR, Marilena. Brazilian Primary School Textbooks: Symbolic Representations. *In:* INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 13., 2016, Hamburg. *Anais*... Hamburg, Alemanha: Sociedade de Didática da Matemática/ Universidade de Hamburgo, 2016. p. 24-31.

COSTA, Claudinei. *As concepções de professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental*. 2003. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

DELANEY, Sean; BALL, Deborah; HILL, Heather; SCHILLING, Stephen; ZOPF, Deborah. Mathematical knowledge for teaching: adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Switzerland, v. 11, n. 3, p. 171-197, jan., 2008.

HILL, Heather; BLUNK, Merrie; CHARALAMBOUS, Charalambos Y; LEWIS, Jennifer; PHELPS, Geoffrey; SLEEP, Laurie; BALL, Deborah. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, London, v. 26, n. 4, p. 430-511, sep. 2008.

LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute. How books from the 6th to the 9th grade propose horizontal treatment of combinatorics. *In:* SCHUBRING, G.; FAN, L.; GERALDO, V. *Proceedings of the Second International Conference on Mathematics Textbook Research and Development.* Rio de Janeiro: UFRJ, 2018. p.199-205.

PESSOA, Cristiane. *Quem dança com quem:* o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA; Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, v. 17, n. 31, p.106-150, 2009.

ROCHA, Cristiane. *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:* diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

ROCHA, Cristiane. *Estudo de Combinatória no Ensino médio à luz do Enfoque Ontossemiótico*: o que e por que priorizar no livro didático e nas aulas? 2019. 383 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

ROCHA, Cristiane; FERRAZ, Martha. Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. *Anais*... Recife: CIAEM, 2011.

ROCHA, Cristiane; BORBA, Rute. Combinatória em livros brasileiros na etapa final da Educação Básica: uma análise por meio de indicadores da faceta epistêmica do EOS. *In:* CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2017, Madri. *Libro de actas*... Madri: CIBEM, 2017. p. 38-46.

SABO, Ricardo. *Saberes docentes*: a análise combinatória no Ensino Médio. 2010. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SHULMAN, Lee. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado – Revista de curriculum y formação del profesorado*, España, v. 9, n. 2, p. 1-30, 2005.

2 O que dizem professores sobre o ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental?

Michaelle Renata M. de Santana
Rute E. de S. Rosa Borba

A IMPORTÂNCIA DO ENSINO DE PROBABILIDADE

A formação básica em Probabilidade torna-se indispensável ao educando nos dias de hoje e em tempos futuros, pois a sociedade requer, cada vez mais, habilidades que permitam uma leitura ampla da realidade e capacidades de ações cotidianas. O entendimento da probabilidade requer um pensamento elaborado, permitindo a análise de situações, o levantamento de possibilidades e o julgamento do que seja provável, improvável, possível e impossível. Nesse sentido, o ensino da probabilidade pode promover o desenvolvimento da capacidade crítica e da autonomia, assim como avanços em outros conteúdos trabalhados na escola, tais como a classificação sistemática e a Combinatória.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) propunham um eixo de aprendizado de *tratamento de informações* que incluía a Estatística, a Probabilidade e a Contagem (Combinatória) como conteúdos matemáticos de importância. Esse eixo estava ausente em currículos anteriores e o atual documento orientador de currículos – Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) – avançou ainda mais na valorização do estudo da probabilidade no Ensino Básico. No texto desse documento, na unidade temática de Probabilidade e Estatística, identificam-se cinco objetos de conhecimento: 1) a ideia de aleatório em situações do cotidiano, 2) a ideia de acaso, 3) a análise de chances de eventos aleatórios, 4) o espaço amostral e 5) o cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis.

Nessa perspectiva, no Ensino Fundamental, os professores devem promover uma formação na qual os estudantes pensem a respeito de diferentes questões e estabeleçam adequadamente estratégias e técnicas para solucionar problemas que permeiam sua vida – a qual inclui situações aleatórias[1] e determinísticas, com as quais é preciso aprender a lidar. Por isso, ensinar conceitos probabilísticos na escola é de extrema importância, contribuindo para o exercício pleno da cidadania com responsabilidade social na tomada de decisões. Sem essa compreensão, os estudantes podem não ser capazes de julgar de forma adequada o meio que os cerca e podem se deixar levar por informações destorcidas da realidade.

Faz-se necessário, portanto, que a escola estimule a formação de conceitos de natureza probabilística, proporcionando aos estudantes

---

1 Em um experimento aleatório, mesmo quando realizado sob condições idênticas, não se pode antecipadamente prever o que ocorrerá, embora se conheça o conjunto de possíveis resultados; enquanto que em um experimento determinístico, sob determinadas condições, é possível prever o resultado que ocorrerá.

uma aquisição de conhecimentos menos compartimentalizados, ou seja, explorando a Probabilidade, envolvendo diferentes conceitos. Para isso, é necessário que os professores, em suas práticas, desenvolvam conceitos probabilísticos através de experiências que permitam aos educandos fazerem observações e tirarem conclusões, desenvolvendo, assim, pensamento científico, fundamental para suas formações.

Alguns estudos, como o de Oliveira e Cazorla (2008) e Lopes (2005), afirmam que é papel da escola proporcionar ao estudante a formação de conceitos estatísticos e probabilísticos que o auxiliarão no exercício de sua cidadania, pois há necessidade de o indivíduo compreender as informações veiculadas, tomar decisões e fazer previsões que influenciam na sua vida pessoal e na de sua comunidade. Argumenta-se que, para isso, é preciso que o ensino das noções probabilísticas utilize uma metodologia pela qual se incentive o educando a descobrir, por si mesmo, a verdade que lhe querem inculcar, estimulando-o à descoberta, à invenção, por meio de propostas de problemas concretos e da realização de experimentos reais e/ou simulados.

Baseando-se nessas ideias, nosso estudo buscou refletir sobre o ensino proposto dessa temática. Assim, o objetivo da nossa pesquisa foi analisar concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental, verificando como concebem a importância do ensino de probabilidade; que motivos apresentam para trabalhar, ou não, este conceito em suas salas de aula; analisar os conhecimentos identificados por professores de diferentes etapas de ensino e verificar que noções consideram ser necessárias na construção do conceito de probabilidade. Busca-se, dessa forma, auxiliá-los em suas formações quanto a esse conceito, bem como em seus processos de ensino da probabilidade.

A PESQUISA REALIZADA

Optamos por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa, recorrendo a um instrumento que nos permitisse conhecer *o quê* e *como pensam* docentes que lecionam em escolas públicas sobre o ensino de probabilidade. Assim, propusemo-nos a questionar os participantes da pesquisa, por intermédio de entrevistas semiestruturadas, e a partir da análise de atividades extraídas de Livros Didáticos, de modo a levantarmos informações sobre seus conhecimentos e suas concepções a respeito da probabilidade e seu ensino.

Os participantes da pesquisa foram selecionados entre professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e que possuem vínculo no setor público em escolas da Região Metropolitana do Recife. Essa seleção se justifica por pensarmos ser possível um ensino de probabilidade nas diferentes etapas de ensino, conforme apresentam documentos oficiais e diversas pesquisas que confirmam a importância do desenvolvimento do pensamento probabilístico nos alunos desde o início de sua escolarização. Selecionamos quatro professores dos anos iniciais (com Licenciatura em Pedagogia) e quatro dos anos finais (com Licenciatura em Matemática) que estavam em exercício da docência na época da coleta de dados. Foram escolhidas quatro escolas públicas e em cada uma delas foram entrevistados um professor de uma etapa e outro de outra etapa de ensino.

Os participantes foram codificados por siglas, compostas de letras e números, utilizados para resguardar suas identidades. Os professores com códigos iniciados em PI são os dos anos iniciais e iniciados em PF os dos anos finais. O instrumento de coleta de dados da pesquisa foi organizado a partir da seleção de atividades de probabilidade retiradas de Livros Didáticos aprovados no Plano

Nacional do Livro Didático (PNLD), de 2007, e analisados em estudo anterior por Santana e Borba (2010)[2]. No Quadro 1, apresentam-se os objetivos da entrevista em cada um de seus momentos e sua relação com a análise posteriormente efetuada.

Quadro 1. Descrição dos objetivos de cada momento da entrevista

Critérios de Análise	Momentos da Entrevista	Objetivos
Sobre a formação e a experiência docente	1º momento	Conhecer a formação e atuação profissional de cada docente.
Investigando o conhecimento sobre probabilidade	2º momento	Diagnosticar que noções básicas de probabilidade os professores identificam a partir da análise de atividades.
		Verificar a importância dada por cada professor ao Ensino de probabilidade.

Fonte: Santana (2011).

Entendemos que a entrevista realizada pode nos fornecer dados relevantes em relação às concepções e conhecimentos de professores sobre probabilidade, evidenciando como, possivelmente, agem no ensino do conceito junto a seus alunos. A sequência de atividades analisadas também possibilita a reflexão de como se pode introduzir, gradativamente, noções probabilísticas no Ensino Fundamental.

---

2 Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B3n0b_rG1DUhb3czSDhEb1Rab2M/view.

FORMAÇÃO E ATUAÇÃO PROFISSIONAL DOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os professores participantes da pesquisa tinham diferentes formações, possuindo cada um os requisitos exigidos para atuação nas etapas em que atuavam. Conforme exposto no Quadro 2, salientamos que dos oito professores entrevistados, dois deles (um dos anos iniciais e outro dos anos finais) possuíam apenas a graduação, enquanto os outros seis haviam concluído estudos de pós-graduação, em nível de especialização.

Quatro dos professores possuíam mais de 10 anos de ensino e os demais um tempo menor de experiência em sala de aula. Alguns professores atuavam em dois níveis de ensino: o Fundamental e o Médio.

Quadro 2. Perfil socioprofissional dos participantes da pesquisa

Prof.	Formação Acadêmica	Anos de Ensino	Atuação
PI1	Pedagogia (UFPE); Especialização em Psicopedagogia (FAFIRE)	10 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental
PI2	Pedagogia (UFPE); Especialização em Formação de Educadores (UFRPE)	07 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental
PI3	Pedagogia (FAFIRE); Especialização em Gestão Educacional (FAFIRE)	17 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental
PI4	Pedagogia (FUNESO)	25 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental
PF1	Licenciatura em Matemática (UFPE); Especialização no Ensino da Matemática (UPE)	03 anos	Anos finais do Ensino Fundamental

Prof.	Formação Acadêmica	Anos de Ensino	Atuação
PF2	Licenciatura em Matemática (UPE); Especialização em Matemática Financeira (UPE)	06 anos	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio
PF3	Licenciatura em Matemática (UFPE); Especialização no Ensino da Matemática (UFRPE)	27 anos	Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio
PF4	Licenciatura em Matemática (UFPE)	06 anos	Anos finais do Ensino Fundamental

Fonte: Santana (2011).

INVESTIGANDO O CONHECIMENTO SOBRE PROBABILIDADE

No segundo momento da entrevista, procuramos identificar na fala dos professores informações sobre seus conhecimentos a respeito de noções de probabilidade a serem trabalhadas junto a seus alunos. Sendo assim, questionamos os professores sobre os conceitos matemáticos que são trabalhados por eles nas turmas nas quais lecionam, com o objetivo de verificar se a probabilidade é contemplada. No Quadro 3, pode-se observar os conceitos descritos pelos professores como sendo os abordados por eles em sala de aula.

No que se refere aos conceitos ditos como trabalhados pelos professores entrevistados, apenas um professor, dos anos iniciais, fez menção explícita à probabilidade. Não podemos afirmar que os professores não trabalham a probabilidade nas aulas, pois os mesmos podem ter esquecido de mencionar esse conceito em suas falas. Verificamos, porém, que eles não enfatizam a probabilidade, e, possivelmente, dedicam pouca atenção à mesma em suas práticas.

Quadro 3. Conceitos matemáticos abordados em sala de aula, segundo os professores

Professor	Conceitos matemáticos indicados
PI1	Frações, sistemas de numeração, figuras geométricas, expressões numéricas, as quatro operações, tratamento da informação, gráficos e tabelas, números romanos, sistema de numeração decimal.
PI2	Conceito aditivo, multiplicativo, as quatro operações, fração, porcentagem, *probabilidade*, estatística, figuras geométricas.
PI3	Operações fundamentais, geometria, estatística, situações problema, números naturais e racionais.
PI4	Sistema de numeração decimal, situações problema, as quatro operações, medidas, sistema monetário.
PF1	Quadrilátero, triângulo, círculo e circunferência, fatoração, álgebra, função do 1º e 2º grau, relações métricas e relações trigonométricas, áreas de figuras planas, volume, equação do 2º grau, potenciação, radiciação.
PF2	Equação, ângulo, conjunto numérico, figuras planas, proporcionalidade, regra de três, frações.
PF3	As quatro operações, problemas, sistema de numeração, sistema decimal, potenciação, radiciação, divisibilidade, expressões numéricas, frações, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, áreas das figuras geométricas, perímetro, sistema de medidas.
PF4	Potenciação, radiciação, equação de 2º grau, função de 1º grau, áreas de figuras planas, função polinomial.

Fonte: Santana (2011).

Em seguida, apresentamos aos professores nove situações envolvendo a probabilidade. As atividades foram selecionadas de livros didáticos, considerando as noções abordadas pelos seus autores ao explorarem o conteúdo de Probabilidade. Sendo assim, as atividades selecionadas para o instrumento de pesquisa envolveram diferentes noções probabilísticas, como as de *acaso*, *chance*, *possibilidades, espaço amostral* e *comparação e cálculo de probabilidade*.

Inicialmente, as atividades eram apresentadas ao professor uma de cada vez e era dado um tempo para ele ler, analisar e, posteriormente, comentar sobre a mesma. Ao apresentar a atividade, questionávamos aos professores que conceitos poderiam ser explorados a partir dela.

A seguir, apresentamos uma análise detalhada de cada atividade. Primeiramente, foram descritas as noções que acreditamos estar sendo abordadas e, posteriormente, as falas dos professores em relação aos conceitos que poderiam ser explorados em cada uma delas.

ANALISANDO AS ATIVIDADES PROPOSTAS

Figura 1. Atividade 1 – evento impossível

Renata poderá lavar a louça agora?

Fonte: Bueno, Leite e Tavares (2004).

Objetivos: Nessa atividade, esperávamos que os participantes percebessem que existem situações do cotidiano nas quais não existe a ação do *acaso*. Trata-se de um evento impossível (ao menos temporariamente), pois não é possível lavar a louça, uma vez que acabou a água na torneira.

No Quadro 4, são dispostos os conceitos que cada professor julgou estarem sendo abordados nessa atividade.

Observamos que os professores – tanto dos anos iniciais quanto dos anos finais – elencaram uma variedade de conteúdos que podem ser abordados a partir da atividade. Todos os professores dos anos iniciais relacionaram a atividade com a ideia de *quantidade*, enquanto alguns dos professores dos anos finais relacionaram com *operações* e *conjuntos numéricos*. Apenas PI2 e PF1 citaram explicitamente *probabilidade* e *possibilidades*. Dessa forma, não houve um reconhecimento amplo da atividade na qual se pode explorar noções probabilísticas.

Quadro 4. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 1

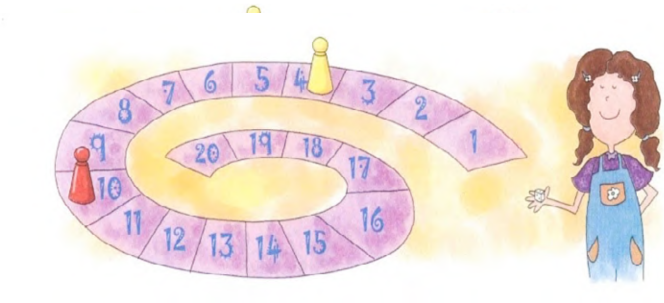
Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	Estimativa, hora, tempo, quantidade, classificação, agrupamento, medidas e grandezas.
PI2	Medidas, quantidade, operações e *probabilidade*
PI3	Quantidade, geometria
PI4	Contagem
PF1	Raciocínio lógico e *possibilidades*
PF2	Operações e figuras planas

Professor	Sínteses das falas dos professores
PF3	Operações naturais, com números inteiros, negativos, positivos, subtração.
PF4	Subtração, conjuntos numéricos

Fonte: Santana (2011).

Figura 2. Atividade 2 – chance

Com uma única jogada o peão amarelo poderá ultrapassar o peão vermelho?



Fonte: Bueno, Leite e Tavares (2004).

Objetivos: Esperávamos que os professores entrevistados percebessem a noção de *chance*. Seria necessário observar que ao jogar um dado de seis faces, com uma única jogada, o pião amarelo não teria chance de ultrapassar o pião vermelho. Mesmo obtendo um número seis, não conseguiria sair à frente, o máximo que ele alcançaria era chegar na mesma casa que o pião vermelho se encontra.

Todos os professores afirmaram que não havia chance de o pião amarelo ultrapassar o vermelho, de acordo com as condições dadas. E, como indicado no Quadro 5, observamos que cinco dos professores evidenciaram a *probabilidade* como conceito a ser explorado. Em contrapartida, três professores não citaram a probabilidade ao analisarem essa atividade: PI1 e PI4 que relacionaram com ideias relativas ao *conceito de número* e PF2 que relacionou com a ideia de *operações*. Alguns professores dos anos iniciais também relacionaram a atividade à sequência numérica ou à contagem, os conteúdos mais explorados nessa etapa de ensino.

Quadro 5. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 2

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	Contagem, número sucessor e antecessor, sequência numérica, adição, cores, escrita de numerais, unidade, dezena.
PI2	*Probabilidade*, adição, contagem.
PI3	*Probabilidade*, sequência numérica, número naturais, noção de quantidade.
PI4	Leitura e escrita de numerais, relação número X quantidade, soma, subtração.
PF1	Porcentagem, *probabilidade*, raciocínio lógico.
PF2	Operações.
PF3	Contagem, *probabilidade*,
PF4	*Probabilidade*, adição e subtração

Fonte: Santana (2011).

Figura 3. Atividade 3 – acaso

Os meninos jogaram a moeda para saber qual dos dois times começará a partida. Qual dos times poderá começar o jogo?

Fonte: Bueno, Leite e Tavares (2004).

Objetivos: Esperávamos que os professores percebessem que no cotidiano estamos cercados de fenômenos que são devidos ao *acaso*, como, por exemplo, o sorteio para determinar quem tem a posse de bola no início de um jogo de futebol.

Ao analisar o Quadro 6, verificamos que sete professores afirmaram que seria possível explorar a *probabilidade* a partir da Atividade 3 e o outro professor mencionou *possibilidade* como conceito abordado.

Todos os professores entrevistados reconheceram a impossibilidade de afirmar qual time começaria, por se tratar de uma situação aleatória, e alguns (PI2, PI3 e PF4) quantificaram a probabilidade (50% de probabilidade para cada time). Outro aspecto que gostaríamos de chamar atenção é com relação à fala do professor

PF2, que, ao analisar a questão, afirmou que é possível trabalhar com possibilidades, associando esse conteúdo ao ensino de Análise Combinatória.

Quadro 6. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 3

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	*Probabilidade*, adição, subtração.
PI2	Chance, *probabilidade*, números ordinais, quantidade, importância das regras.
PI3	*Probabilidade*, espaço.
PI4	*Probabilidade*, sistema monetário, sistema de numeração decimal.
PF1	*Probabilidade*, porcentagem.
PF2	*Possibilidade*, análise combinatória.
PF3	*Probabilidade*, operações de números inteiros.
PF4	*Probabilidade*.

Fonte: Santana (2011).

A partir dessa fala, salientamos, no ensino de Probabilidade, a necessidade de reflexão sobre o número total de possibilidades (o espaço amostral), pois segundo Pessoa e Borba (2009), uma das dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental está na enumeração sistematizada das possibilidades de um evento e consequente esgotamento das possibilidades.

Figura 4. Atividade 4 – mais provável

Fonte: Netto e Panossian (2005).

Objetivos: Esperávamos que os professores percebessem que a noção envolvida seria a de *chance*. Além disso, a discussão sobre o que é mais ou menos provável pode vir a auxiliar o *levantamento de possibilidades*. Nota-se, também, que a própria representação (desenho das bermudas e saia) auxilia na solução da atividade, pois o número de possibilidades já está explicitado.

Seis dos professores participantes (PI1, PI2, PI4, PF1, PF3, PF4), como se pode observar no Quadro 7, evidenciaram a possibilidade de se trabalhar a probabilidade nessa atividade. No contexto em que a situação é apresentada, quatro professores (PI1, PI3, PF2, PF1) afirmaram a possibilidade de se explorar a Combinatória. Parece-nos que esses professores confundiram a probabilidade de escolha de determinada peça de roupa com as possibilidades de combinação das peças com outras peças (como, por exemplo, nos problemas combinatórios nos quais se escolhem saias ou bermudas combinando com blusas).

Quadro 7. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 4

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	*Probabilidade*, estimativa, cores, combinação.
PI2	*Probabilidade*, multiplicação.
PI3	Combinação, análise combinatória.
PI4	*Probabilidade*.
PF1	Combinação, *probabilidade*.
PF2	Análise combinatória.
PF3	Comparação, *probabilidade*.
PF4	*Probabilidade*.

Fonte: Santana (2011).

Figura 5. Atividade 5 – levantamento de possibilidades e avaliação de chances

6 Num globo há 3 bolas numeradas conforme indica a figura.
Três bolas serão extraídas uma após a outra, sem reposição.

a) Quantos números diferentes poderão ser formados?

b) Qual a chance de o número formado ser 548?

c) Qual a chance de o número formado ser ímpar?

d) Resolva os itens *a*, *b* e *c*, supondo as extrações com reposição (depois de cada sorteio a bola é colocada novamente no globo).

Fonte: Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006).

Objetivos: A atividade também envolve a noção de *chance*, no contexto de retirada de bolas de um globo. Além disso, solicita-se o *levantamento de possibilidades* (espaço amostral contendo os diferentes números que podem ser formados) e pede o *cálculo de probabilidades* (de um número específico ser formado (548) e de se formar um número ímpar, no caso, terminado em 5). Não há prévia explicitação das possibilidades e, ainda, solicita-se a descrição dos resultados quando há reposição das bolas.

Como se pode observar no Quadro 8, cinco professores (PI1, PI2, PF1, PF3, PF4) identificaram a *probabilidade* como um conceito a ser explorado a partir dessa atividade. Uma noção que surgiu na fala de um dos professores, PI4, foi a de *estimativa*, que pode ser considerada como auxiliar no ensino de probabilidade, pois situações que envolvem aproximação, aleatoriedade e estimativa possibilitam estudantes a desenvolverem estratégias para a resolução de problemas diversificados que surgirão ao longo de suas vidas.

Quadro 8. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 5

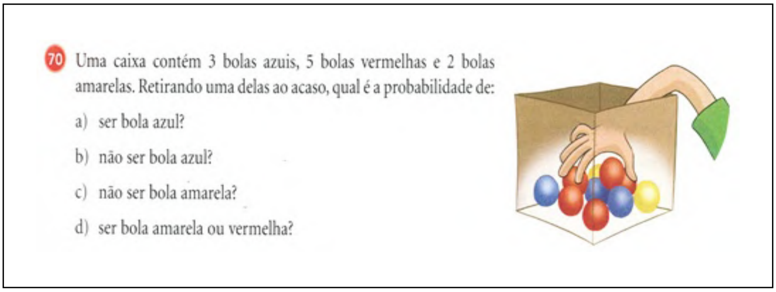
Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	Unidade, dezena e centena, adição, multiplicação, antecessores, sucessores, valor relativo, *probabilidade*, estatística.
PI2	Operações, *probabilidade*, ordem, número real.
PI3	Geometria, noção de quantidade, quadro de valor e lugar.
PI4	Números pares, ímpares, estimativa, raciocínio lógico, leitura de numerais, antecessor e sucessor.
PF1	*Probabilidade*, porcentagem, raciocínio lógico.
PF2	Combinatória, número par e ímpar, unidade, centena e dezena.

Professor	Sínteses das falas dos professores
PF3	Análise combinatória, *probabilidade*, porcentagem, operações de números inteiros.
PF4	*Probabilidade*, porcentagem, razão, simplificação, fração.

Fonte: Santana (2011).

Também observamos que, a partir dessa atividade, alguns professores dos anos finais associam o conteúdo de probabilidade com o de porcentagem, conforme discutido na Atividade 2. Ressalta-se que há uma ênfase – por professores nas duas etapas de ensino – aos números e operações com os mesmos. Embora reconheçamos que características do sistema de numeração possam ser exploradas, esse não é o cerne das questões apresentadas e a atividade deve ser explorada essencialmente sob a perspectiva da probabilidade.

Figura 6. Atividade 6 – cálculo de probabilidades


70 Uma caixa contém 3 bolas azuis, 5 bolas vermelhas e 2 bolas amarelas. Retirando uma delas ao acaso, qual é a probabilidade de:

a) ser bola azul?

b) não ser bola azul?

c) não ser bola amarela?

d) ser bola amarela ou vermelha?

Fonte: Dante (2005).

Objetivos: Nessa situação, esperávamos que os participantes identificassem a noção de *probabilidade* – e cálculos da mesma – como a própria questão já explícita em seu enunciado e que evidenciassem a noção de *acaso* também.

Como era de se esperar, todos os professores afirmaram que a atividade abordava o conceito de *probabilidade*. Observamos, como exposto no Quadro 9, que mais uma vez, alguns professores (PF1, PF3 e PF4) fizeram relação do conteúdo de probabilidade com o de porcentagem, de fração e com a Análise Combinatória. Há, de fato, uma estreita relação com porcentagem e fração, como modos de expressão de probabilidades, e, a partir do levantamento de possibilidades (via análise combinatória), se pode determinar as probabilidades solicitadas na atividade.

Quadro 9. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 6

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	*Probabilidade*, figuras geométricas, adição, cores.
PI2	*Probabilidade*, operações, figuras geométricas, raciocínio lógico, situação problema.
PI3	Quantidade, tipos de figuras, espaço, *probabilidade*.
PI4	*Probabilidade*, raciocínio lógico.
PF1	*Probabilidade*, porcentagem, raciocínio lógico.
PF2	*Probabilidade*.
PF3	Números inteiros, *probabilidade*, comparação, análise combinatória.
PF4	*Probabilidade*, fração, subtração, adição, divisão, porcentagem.

Fonte: Santana (2011).

Alguns professores de anos iniciais citaram a geometria como conteúdo abordado, mas desejamos ressaltar que conceitos geométricos não estão no centro da atividade, nem operações de adição e subtração são diretamente tratadas, como indicado por um professor dos anos finais. Esses conceitos podem ser explorados, mas deve-se ter o cuidado de não distraírem do foco das questões propostas.

Figura 7. Atividade 7 – construção e quantificação do espaço amostral

Bia jogou 2 dados de cores diferentes e obteve soma 8 (4 + 4).

a) Indique todas as possibilidades de obter soma 8 e escreva quantas são as possibilidades.

b) Em que caso o número de possibilidades é maior: obter soma menor do que 4 ou soma maior do que 10?

c) Quantas são as possibilidades de se obter a soma 12?

Fonte: Dante (2008).

Objetivos: Esperávamos que os participantes evidenciassem a noção de *possibilidades*, assim como a construção e quantificação do *espaço amostral* (de obtenção de soma 8 e de soma 12). A atividade também envolve a *comparação de probabilidades* (de soma menor que 4 e soma maior que 10).

No Quadro 10, observam-se os conceitos apontados pelos professores para essa atividade.

Quadro 10. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 7

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	Adição, subtração, multiplicação, *probabilidade*, tratamento da informação, maior que, menor que.
PI2	*Probabilidade*, situações problema.
PI3	Noção de quantidade, *probabilidade*.
PI4	*Probabilidade*, relação número X quantidade, raciocínio lógico.
PF1	Quatro operações, estatística.
PF2	Operações, relação entre maior que e menor que, combinatória.
PF3	Operações, comparação, porcentagem, *probabilidade*.
PF4	Fração, *probabilidade*, simplificação.

Fonte: Santana (2011).

Mesmo estando claramente no enunciado da atividade, nenhum dos oito professores mencionaram a noção de *possibilidade* ou comentou sobre o levantamento e quantificação do *espaço amostral*. No entanto, seis dos participantes (PI1, PI2, PI3, PI4, PF3, PF4) afirmaram que a *probabilidade* é abordada, embora nenhum tenha explicitamente mencionado a *comparação de probabilidades*.

Nesse momento da pesquisa, na fala de um dos professores, fica claro o reconhecimento de que a probabilidade é um conceito que vem sendo cada vez mais explorado, conforme podemos observar na transcrição a seguir:

> *Pesquisador* – Nessa Atividade 7, o que poderíamos explorar?
> *PI4* – Irá contemplar novamente a probabilidade, o raciocínio lógico, relação número/quantidade. Estou vendo que isso está muito na moda, a probabilidade.

Outro ponto observado é que, mais uma vez, outros conteúdos estão sendo associados ao ensino de probabilidade, como é o caso de fração e porcentagem, como afirmam PF3 e PF4. Também se reconhece que a atividade envolve análise combinatória, uma vez que se pede o levantamento de todas as possibilidades da soma dos números lançados nos dados para resultarem em 8, em 4, em 10 e em 12.

Figura 8. Atividade 8 – probabilidade expressa em razão e em porcentagem

5. Durante a cerimônia de casamento, a noiva carrega nas mãos um buquê de flores. Assim que a cerimônia termina ela, de costas, lança o buquê por sobre os ombros para que alguma moça o pegue. Dizem que a moça que o pegar será a próxima a casar.

No casamento da Cris e do Paulo estavam presentes 24 moças solteiras para pegar o buquê.

a) Escreva no caderno a razão que mostra a probabilidade que cada moça tem de pegar o buquê.

b) Quanto é, em porcentagem, a probabilidade que você calculou?

Fonte: Spinelli e Souza (2005).

Objetivos: Nessa atividade, tínhamos como objetivo que os participantes identificassem a noção de *probabilidade expressa em razão e em porcentagem*.

Como se pode observar no Quadro 11, todos os professores afirmaram que os conceitos que poderiam ser explorados seriam a *porcentagem* e a *probabilidade*, tendo em vista que estavam explícitos no enunciado da atividade.

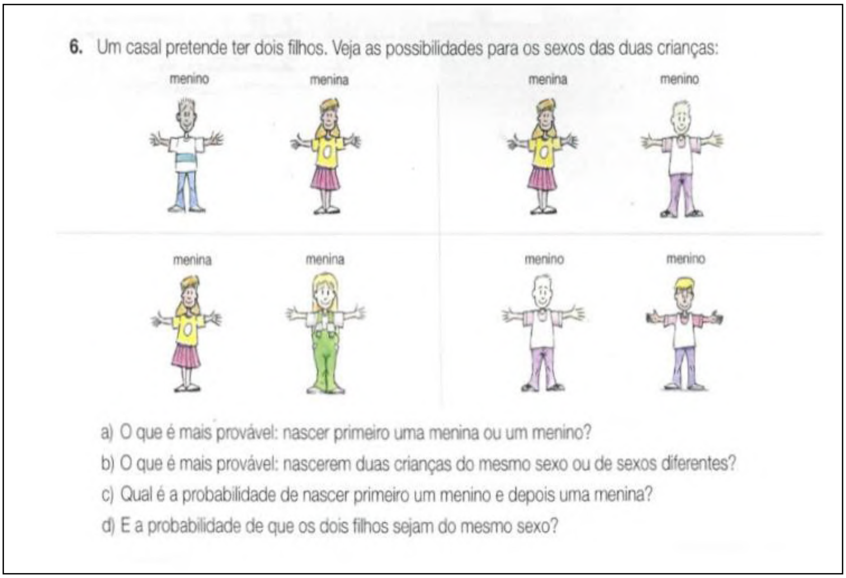
Quadro 11. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 8

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	*Probabilidade*, porcentagem.
PI2	Porcentagem, *probabilidade*, fração.
PI3	Porcentagem, regra de três, *probabilidade*, razão.
PI4	*Probabilidade*, porcentagem, razão.
PF1	*Probabilidade*, quatro operações, dízima periódica, fração, números irracionais, porcentagem.
PF2	*Probabilidade*, porcentagem, divisão, fração.
PF3	*Probabilidade*, operações de multiplicação e divisão, porcentagem, comparação.
PF4	Porcentagem, *probabilidade*, frações.

Fonte: Santana (2011).

Observamos, ainda, que todos os professores resolveram o item *a* dessa atividade e conseguiram expressar a probabilidade em forma de fração (1/24). Com relação ao item *b*, que solicitava o valor em porcentagem, os professores apenas deixaram o indicativo da divisão, por se tratar de uma divisão não exata.

Figura 9. Atividade 9 – comparação e quantificação de probabilidades


6. Um casal pretende ter dois filhos. Veja as possibilidades para os sexos das duas crianças:

menino menina | menina menino

menina menina | menino menino

a) O que é mais provável: nascer primeiro uma menina ou um menino?

b) O que é mais provável: nascerem duas crianças do mesmo sexo ou de sexos diferentes?

c) Qual é a probabilidade de nascer primeiro um menino e depois uma menina?

d) E a probabilidade de que os dois filhos sejam do mesmo sexo?

Fonte: Spinelli e Souza (2005).

Objetivos: Nessa atividade, o objetivo era levar os professores a observarem que estavam envolvidas *a comparação e a quantificação de probabilidades*.

Todos os professores, como indicado no Quadro 12, afirmaram se tratar de uma atividade de probabilidade, mas apenas um (PF3) mencionou, explicitamente, a comparação ou a quantificação de probabilidades. Indiretamente, três professores (PI3, PF2, PF4) mencionaram modos de expressão de quantificações de probabilidades, quais sejam razão (PI3) ou fração (PF2 e PF4). Outro ponto observado é que, mais uma vez, alguns professores associaram a análise combinatória e o levantamento de possibilidades ao conteúdo de probabilidade, como é o caso de PI1, PI2, PI3 e PF2.

Quadro 12. Conceitos matemáticos indicados na Atividade 9

Professor	Sínteses das falas dos professores
PI1	Combinação, *probabilidade*.
PI2	Possibilidades, *probabilidade*.
PI3	Possibilidade, *probabilidade*, razão.
PI4	*Probabilidade*, raciocínio lógico.
PF1	*Probabilidade*.
PF2	Combinatória, *probabilidade*, fração.
PF3	Porcentagem, *probabilidade*, comparação.
PF4	*Probabilidade*, porcentagem, fração.

Fonte: Santana (2011).

A partir das análises das nove atividades propostas e das falas dos professores participantes do estudo, ao discutirem as atividades, pode-se refletir sobre noções probabilísticas a serem abordados no Ensino Fundamental, bem como a serem melhor trabalhadas na formação docente, de modo a permitir que os professores tenham um maior domínio da probabilidade e dos aspectos desse conceito a serem trabalhados junto a seus alunos. Nessa direção, segue-se a apresentação do que disseram os professores quanto ao ensino de probabilidade.

RELEVÂNCIA DO ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Durante a entrevista, também questionamos aos entrevistados porque a probabilidade deve ser trabalhada, ou não, no Ensino Fundamental. A seguir, expomos algumas das afirmações dos professores.

> PI1 – *Não tenho muita experiência no ensino de probabilidade. Para falar a verdade, eu nunca trabalhei na escola e muito menos no curso de Pedagogia. Eu busco me esforçar para trabalhar determinados conteúdos com os alunos para que no futuro eles não sintam essa dificuldade que eu senti. Eu não conheço nenhum colega meu que tenha trabalhado probabilidade. Eu confesso que eu nunca trabalhei, tem no livro, mas eu nunca trabalhei. Eu acho que deve ser trabalhado no Ensino Fundamental, mas de maneira mais adequada, observando a questão da linguagem. Até porque é importante para a nossa vida cotidiana.*
>
> *PI4* – Deve ser trabalhada, com certeza, pois está muito presente no contexto dos alunos, além de estimular o raciocínio e o pensamento.
>
> *PF4* – Eu acho que sim. Eu acho que deveria fazer uma reformulação total dos conteúdos do Ensino Fundamental porque eles tratam muito da Matemática abstrata, você não toca muito nessa parte de probabilidade. Esses conceitos são coisas que a gente vê no dia-a-dia e eu acho que é pouco explorado no Fundamental. Só vê um pouquinho no 7º ano e só vai ver no 2º ano do Ensino Médio...a probabilidade é algo que está no dia-a-dia e deveria ser mais explorada.

Todos os professores afirmaram que a probabilidade deve ser, sim, trabalhada no Ensino Fundamental desde os anos iniciais, pois acreditam que a probabilidade está presente no dia a dia do aluno e o estudo desse conceito torna os estudantes mais reflexivos e desenvolve um modo específico de raciocínio.

Nas falas dos professores observamos as lacunas nas suas formações iniciais, identificadas, especialmente, pelo professor PI1, o qual afirma que, apesar de a Probabilidade estar presente nos livros didáticos, os professores não sentem segurança de ensinar esse assunto. A fala de Pl1 corrobora achados de estudos anteriores, tais como o de Rodrigues (2006) e o de Viali (2008).

E, por fim, questionamos aos professores entrevistados no que eles acham que o ensino da probabilidade pode auxiliar o desenvolvimento de seus alunos. Observamos os seguintes depoimentos:

> *PI3* – A probabilidade ajuda a criar a noção de possibilidades, mecanismos que o aluno tem de escolher a partir de determinado objeto ou situação-problema.
> *PF3* – Com a probabilidade, os alunos já teriam uma ideia de como operar. É importante porque estaria aumentando o grau de capacidade, de entendimento de situações da vida cotidiana.

Verificamos, nos extratos acima, mais uma vez, a afirmativa de que a probabilidade auxilia os alunos a lidar com situações da vida cotidiana, tornando-os aptos a fazerem escolhas. A visão dos professores vai ao encontro do que é indicado nas pesquisas de Oliveira e Cazorla (2008), pois, segundo as autoras, faz-se necessário para a formação do aluno crítico e reflexivo a compreensão de que muitas questões do cotidiano são de natureza aleatória – sobre as quais podemos conhecer as possibilidades, mas não sabemos exatamente o que vai ocorrer.

Em um extrato da fala do professor PI4, observamos a indicação da necessidade de subsídios que orientem o professor na sua prática, norteando seu trabalho com as noções probabilísticas junto aos alunos.

> *Pesquisador* – No que a probabilidade pode contribuir no desenvolvimento do aluno?
> *PI4* – No contexto deles, no seu dia-a-dia. Agora eu acho complicado é que a gente não tem um momento para pensar nisso, de fazer dessa forma. A gente faz os problemas de probabilidade por fazer. A gente até teve uma oportunidade de trabalhar com a Coordenadora essas questões para gente trabalhar com os alunos, mas mesmo assim você fica muito no inicial. Eu sinto falta de atividade, o professor para planejar aula tem que

> ter tempo. Se você trabalhasse um horário só teria mais tempo para pesquisar, para trocar experiências.

Nesse sentido, concordamos com Silva (2002) quando indica a necessidade de uma busca constante por processos de ensino que possibilitem o debate entre os estudantes para promover a conscientização dos conceitos probabilísticos, auxiliando-os na leitura de mundo. E, ainda, são necessárias mais iniciativas que proporcionem aos professores tempo suficiente para que participem de momentos de formação contínua e de discussões entre pares sobre as noções probabilísticas.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

No desenvolvimento desta pesquisa, buscamos analisar concepções e conhecimentos de professores do Ensino Fundamental sobre a Probabilidade, verificando que noções os professores consideram ser necessárias à construção desse conceito.

Os achados foram relevantes e evidenciaram que os professores reconhecem a importância do estudo de probabilidade, percebem a valorização da mesma nos currículos e possuem conhecimento de algumas noções probabilísticas básicas. Entretanto, carecem de melhor formação para distinguir aspectos relevantes da probabilidade a serem trabalhadas com seus alunos.

A partir do que foi observado, pode-se concluir que, ao menos para estes participantes, professores do Ensino Fundamental exploram muito pouco os conceitos probabilísticos em suas salas de aula, justificando que os Livros Didáticos utilizados não oferecem subsídios suficientes para se trabalhar com esse conteúdo. Paralelo a isso, como evidenciado em Oliveira e Cazorla (2008), durante suas formações iniciais não foram oferecidos elementos formativos que incorporassem saberes e práticas que permitissem o desenvolvimento de abordagens educativas a fim de orientar o ensino das noções básicas de *probabilidade* em sala de aula.

Podemos observar também que quase todos os professores entrevistados, ao analisarem as atividades (em especial, as inicialmente apresentadas), relatavam diversos conteúdos matemáticos que poderiam ser explorados – como os números e operações com os mesmos, geometria e medidas – sem ser dado muito destaque ao conceito de probabilidade. Por um lado, consideramos esse aspecto como um ponto positivo, pois, como amplamente defendido na Educação Matemática, é preciso articular os eixos matemáticos entre si. Por outro lado, entretanto, verificamos que parece haver incompreensões de como se deve articular esses eixos, dando a devida atenção a cada um dos conceitos envolvidos por si mesmo.

Nomenclaturas como *fenômeno aleatório*, *espaço amostral*, *acaso* e *evento*, necessárias na formalização do conceito de *probabilidade*, não foram evidenciadas pelos professores entrevistados. Com base nessa fragilidade apresentada, relativa às noções probabilísticas, surgem as dificuldades de se explorar a probabilidade em sala de aula, pois, sem a devida construção própria do conceito, os professores não conseguem orientar seus alunos na aprendizagem de noções probabilísticas.

O que percebemos é que os professores se sentem despreparados para o ensino de noções probabilísticas, devido às dificuldades encontradas na elaboração de conceitos que exigem construção reflexiva sobre a ideia de *acaso* e *aleatoriedade*. Para Batanero (2001), esses conceitos implicam novas perspectivas relativas à própria forma dos professores conceberem a realidade que os cerca.

Ficou evidenciado, ainda, que muitos professores não se sentem preparados para explorar em suas salas de aula o conceito de *probabilidade*, justificando que em suas formações iniciais não vivenciaram experiências que os orientassem no trabalho com esse conceito. Como afirma Viali (2008), a falta de preparação do professor de Matemática para o desenvolvimento dos conteúdos relacionados à Estatística (entre eles, conceitos probabilísticos) faz com que ele, muitas vezes, prefira não trabalhar com esses conteúdos em suas salas de aula.

Acreditamos que seja necessária a realização na escola de um trabalho envolvendo conceitos probabilísticos, desde os anos iniciais e com aprofundamento nos anos finais do Ensino Fundamental, que favoreça a construção do conceito de *probabilidade* a partir de noções básicas, tais como: percepção do *acaso*, ideia de *experiência aleatória* e a noção de *probabilidade*, conforme propõe Coutinho (2001). Os estudos de Bryant e Nunes (2012) seguem a mesma direção quando apontam quatro demandas cognitivas implicadas na aprendizagem de probabilidade – a *compreensão da aleatoriedade*, a *formação do espaço amostral*, a *quantificação* e a *comparação de probabilidades* e o *entendimento da correlação* entre eventos –, vistas como aquisições fundamentais ao desenvolvimento do raciocínio que é necessário para a resolução de problemas acerca do acaso e da incerteza.

Para os professores, proporcionar o ensino das noções probabilísticas aos estudantes os auxiliarão no exercício de sua cidadania, compreendendo que muitas questões do cotidiano são de natureza aleatória, sabendo estimar o grau de probabilidade de cada uma delas e norteando suas tomadas de decisão.

Tudo isso nos leva a reconhecer a complexidade em compreender as noções probabilísticas e reforçam a necessidade de mais pesquisas relacionadas ao ensino de probabilidade e suas noções básicas e a instrumentalização dos cursos de formação inicial e continuada na construção de estratégias que fomentem o trabalho com o aleatório para a introdução e desenvolvimento do conceito de probabilidade[3].

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. *Didáctica de la estadística.* Granada: Grupo de Educación Estadística Universidade de Granada, 2001.

BONJORNO, José; BONJORNO, Regina; OLIVARES, Ayrton. *Coleção Fazendo a Diferença:* 8ª série. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN): Matemática. Ensino de 1ª a 4ª série. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular:* Educação é a Base. Brasília: MEC, 2018.

BRYANT, Peter.; NUNES, Terezinha. *Children's understanding of probability:* a literature review. Londres: The Nuffield Foundation, 2012.

BUENO, Ana; LEITE, Antonieta; TAVARES, Selma. *Coleção Pensar e Viver:* 4ª série. 2. ed. São Paulo: Ática, 2004.

COUTINHO, Cileda. *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège:* de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri – géomètre II. 2001. 338 f. Tese

3 O estudo intitulado *Produções e usos de livros didáticos no ensino de probabilidade nos anos iniciais* (SANTANA, 2020) ressalta a necessidade de compreender como conceitos probabilísticos tem sido apresentados em materiais didáticos e encontra-se disponível no blog do Geração (http://geracaoufpe.blogspot.com).

(Doutorado em Matemática) – Grenoble Université Joseph Fourier, França, 2001.

DANTE, Luiz. *Tudo é Matemática:* 8ª série. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, Luiz. *Coleção Aprendendo Sempre:* 5º ano. São Paulo: Ática, 2008.

LOPES, Celi. O desenvolvimento da Probabilidade e da Estatística. *In:* ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 18., 2005, Campinas. *Anais*... Campinas, SP: UNICAMP, 2005.

NETTO, S.; PANOSSIAN, M. *Coleção Um passo de cada vez* – 4ª série. São Paulo: Escala Educacional, 2005.

OLIVEIRA, Silvana; CARZOLA, Irene. Ensinando probabilidades no ensino fundamental. *Educação Matemática em Revista*, SBEM, v. 24, n. 13, p. 3-6, 2008.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, UNICAMP, v. 1, 2009.

RODRIGUES, José. Formação matemática de professores de atuação multidisciplinar nas séries iniciais do ensino fundamental: indicativos para estudos de noções de probabilidade. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. *Anais*... Águas de Lindóia, SP, 2006.

SANTANA, Michaelle. *O acaso, o provável, o determinístico:* concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemáti ca) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SANTANA, Michaelle; BORBA. Rute. Como a probabilidade tem sido abordada nos livros didáticos de Matemática de anos iniciais de escolarização. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Salvador, BA, 2010.

SANTANA, Michaelle. *Produções e usos de livros didáticos no ensino de probabilidade nos anos iniciais*. 2020. 239 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SILVA, Ismael. *Probabilidades:* a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito. 2002. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SPINELLI, Walter; SOUZA, Maria. *Coleção Matemática:* 6ª série. São Paulo: Ática, 2005.

VIALI, Lori. O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de licenciatura em Matemática. *In:* SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA, 18., 2008, Estância de São Pedro. *Anais*... Estância de São Pedro, 2008.

3 Conhecimento interpretativo do professor sobre o uso do Princípio Fundamental da Contagem no ensino e na aprendizagem de Combinatória

Ana Paula B. de Lima
Rute E. de S. Rosa Borba

ORIENTAÇÕES PARA O ENSINO DA COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A Análise Combinatória[1], segundo Morgado *et al.* (1991), é um campo da Matemática que se destina a analisar estruturas e relações discretas que apresentam, frequentemente, dois tipos de problemas, sendo eles:

> 1) Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; e 2) Contar ou classificar os subconjuntos de um

---

1 Neste texto, Análise Combinatória e Combinatória são tratadas como sinônimas e se referem a uma área da Matemática que estuda a resolução de problemas de contagem.

> conjunto finito e que satisfazem condições dadas. (MORGADO *et al.*, 1991, p. 2).

Desse modo, a Combinatória faz análise das possibilidades e das combinações possíveis entre elementos de um ou mais conjuntos de elementos.

Sendo a Combinatória uma importante área de estudo da Matemática discreta e com longo percurso de desenvolvimento, recomenda-se que seja trabalhada nas diversas etapas de ensino. Esta recomendação está presente em documentos curriculares brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997; 1998; 2002) e a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), que sucedeu aos PCN.

As diferentes situações combinatórias que são estudadas ao longo da Educação Básica, como apresentado no capítulo inicial deste livro, são *produto de medidas*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*. Elas apresentam características distintas e diferentes maneiras de organizar o raciocínio combinatório empregado em sua resolução. Borba (2013) chama a atenção quanto às relações e propriedades presentes nessas situações, quais sejam: a *escolha* e a *ordenação de elementos* e o *esgotamento de possibilidades*. Outras relações estão presentes nos problemas combinatórios condicionais, como indicado por Borba e Braz (2012).

Os PCN (BRASIL, 1997; 1998) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) indicam que o trabalho com as diferentes situações combinatórias seja feito de modo gradual. Nessa direção, Borba (2013) e Lima (2015) recomendam que nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sejam trabalhadas situações simples que possuam um pequeno número de possibilidades, as quais podem ser listadas. Já para os Anos Finais, os alunos devem entrar em contato com problemas que solicitem um número maior de possibilidades para que, assim, possam aplicar o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) (também conhecido como *princípio multiplicativo*), em preparo para o trabalho no Ensino Médio com as fórmulas da Combinatória. Como ressaltado nos Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco, em relação ao Ensino Médio, "o estudo da Análise Combinatória deve possibilitar que o estudante amplie, aprofunde e formalize seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório adquirido ao longo do Ensino Fundamental" (PERNAMBUCO, 2013, p. 195).

Nas aulas de Combinatória, Borba (2013) aconselha que os professores de Matemática aproveitem as estratégias que são desenvolvidas por seus estudantes, como desenhos, diagramas, listagens e operações aritméticas, buscando estimular seus alunos a pensarem sobre possíveis generalizações durante a resolução de situações combinatórias, desenvolvendo, desse modo, procedimentos de resolução mais formais. Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2002) e os Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013) não indicam o ensino inicial da Combinatória a partir do uso de fórmulas matemáticas para resolução das diferentes situações. A indicação é que o uso das fórmulas seja resultado do desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes, sendo utilizadas na simplificação de cálculos, em caso de problemas com resultados muito grandes.

A BNCC (BRASIL, 2018) traz poucas orientações sobre os variados problemas combinatórios. Rocha, Lima e Borba (2016), ao analisarem as orientações da Base para o ensino de Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, observaram que as situações de *produto de medidas*, são as únicas explicitamente sugeridas pelo documento para esta etapa da Educação Básica, com recomendação de trabalho desenvolvido apenas a partir do 4º ano. Para os Anos Finais, as orientações da BNCC se referem ao estudo, no 8º ano, do espaço amostral em problemas de contagem. É nesta etapa que se tem, como uma das habilidades sugeridas no campo dos Números: "resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo" (BRASIL, 2018, p. 311). Para o Ensino Médio, o documento sugere "resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore" (BRASIL, 2018, p. 537).

Vê-se aqui, nas orientações curriculares e de pesquisa, a importância do uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), ou princípio multiplicativo, para o estudo de situações combinatórias, bem como para o desenvolvimento do estudo sobre espaços amostrais. A seguir, será detalhado como o PFC pode ser utilizado na resolução de diferentes situações combinatórias.

O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

O *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), ou *princípio multiplicativo*, é enunciado por Lima *et al.* (2006) da seguinte maneira:

> [...] se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a p.q. (LIMA *et al.*, 2006, p. 125).

Salienta-se que o princípio pode ser ampliado para outras decisões, como D3 (tomado a r modos), D4 (tomado a s modos), D5 (tomado a t modos), e assim por diante. Diante disso, o número de decisões a se tomarem, consecutivamente, a partir de D1, D2, D3, D4 e D5 seria, portanto, *p.q.r.s.t*.

É a partir da exploração de situações combinatórias simples que os alunos poderão compreender, segundo os PCN (BRASIL,1998, p. 137), o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), implícito em questões como: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?". Essa questão é tratada na Combinatória como um *produto de medidas* e, como outras situações combinatórias, pode ser resolvida aplicando-se o PFC. A seguir, são apresentados exemplos de outras situações combinatórias (*permutação*, *arranjo* e *combinação*, respectivamente) que ilustram como o PFC pode ser aplicado no processo de resolução.

Para verificar de quantos modos distintos pode-se organizar, em uma estante, cinco livros diferentes, tem-se, pelo PFC, que para o primeiro livro a ser colocado na estante há cinco possibilidades de escolha – uma vez que qualquer um dos livros pode ser colocado primeiramente. Para o segundo livro a ser colocado na estante, há quatro possibilidades, visto que um dos livros já foi colocado na estante. Para o terceiro livro há três possibilidades, uma vez que já há dois livros na estante. Há duas possibilidades para colocar o quarto livro na estante, pois três livros já estão na estante. E para o quinto livro, há apenas uma possibilidade, visto que todos os outros livros já estão na estante. Desse modo, a partir do PFC, a resolução desse problema de *permutação* pode ser representada matematicamente por $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja, seriam 120 maneiras distintas de organizar os cinco livros na estante.

Outro exemplo: na final de uma competição de natação estão participando oito nadadores. De quantas formas distintas pode-se ter os três primeiros colocados? A partir do PFC, pode-se desenvolver o seguinte pensamento: como qualquer um dos nadadores pode chegar em primeiro lugar, têm-se oito possibilidades para esta colocação.

Para o segundo lugar, há sete possibilidades, uma vez que o primeiro lugar já foi ocupado por um dos nadadores e, para o terceiro lugar, há seis possíveis nadadores, visto que dois deles já ocupam o primeiro e o segundo lugar. A representação matemática da resolução desta questão de *arranjo*, por meio do PFC, dá-se do seguinte modo: $8 \times 7 \times 6$, ou seja, há 336 maneiras diferentes de formar o pódio com os três primeiros colocados entre oito competidores.

Em outra situação, uma pessoa precisa escolher, entre suas seis amigas, quatro para levar ao cinema. De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá fazer essa escolha? Usando o PFC, ela teria para escolha da primeira amiga, seis possibilidades. Para escolha da segunda amiga, considerando que uma já foi escolhida, teria cinco possibilidades. Como duas amigas já foram escolhidas, para a terceira escolha haveria quatro possibilidades. Por fim, para escolha da quarta amiga, se teria três possibilidades. Nesse caso, além da realização do produto $6 \times 5 \times 4 \times 3$, é necessário dividir o resultado obtido pela permutação dos quatro elementos escolhidos entre si, pois escolher as amigas Ana, Cris, Bia e Lua, nesta ordem, é o mesmo que escolher as mesmas amigas, só que em ordem diferente. A permutação entre essas quatro amigas poderia ser obtida pelo produto $4 \times 3 \times 2 \times 1$, e o resultado desse problema de *combinação* será dado por $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$, que resultará em 15 possibilidades de escolha de quatro entre seis amigas.

Assim, O PFC pode ser aplicado na resolução das diferentes situações combinatórias trabalhadas na Educação Básica (*produtos de medidas*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*), podendo, também, servir de base para a construção das fórmulas empregadas na resolução dessas situações durante o Ensino Médio. Além disso, o PFC também é uma estratégia válida para problemas que apresentem condições (BORBA; BRAZ, 2012) para sua resolução, visto que a aplicação direta de fórmulas da Combinatória nem sempre são apropriadas para estes casos.

Conforme Maher, Powell e Uptegrove (2011), a introdução do PFC em problemas de contagem é uma ideia-chave para o estudo dos conceitos da Análise Combinatória, tornando-o, assim, elemento fundamental para o ensino e aprendizagem da Combinatória. De acordo com Lima (2015, p. 5), "É preciso, entretanto, que professores tenham conhecimento de como o PFC pode ser utilizado para a resolução de distintas situações combinatórias". É necessário, então, investigar os conhecimentos de Combinatória, em particular do PFC, que professores de Matemática desenvolvem, tanto em suas formações iniciais quanto nas continuadas. Acredita-se que tais conhecimentos podem, de forma direta, influenciar o modo como a Combinatória é trabalhada em sala de aula.

CONHECIMENTO DE PROFESSORES PARA O EXERCÍCIO DOCENTE

Uma das principais contribuições dadas por Shulman (1987) foi a proposta de uma *Base de Conhecimentos* para o exercício docente, base essa válida para qualquer área do conhecimento. Nessa proposta, Shulman (1987) destaca a importância do *Conhecimento do Conteúdo* e do *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* para a prática dos professores.

Partindo de tais categorias, Ball, Thames e Phelps (2008) redirecionaram o olhar desses conhecimentos para a prática do professor de Matemática e desenvolveram a noção de Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT). Ball e colaboradores propuseram seis subdomínios para melhor investigar, a partir da prática dos docentes em sala de aula, os conhecimentos dos professores voltados ao ensino e à aprendizagem da Matemática, os quais são descritos a seguir:

- O *Conhecimento Comum do Conteúdo* (*Common Content Knowledge*) é relativo ao conhecimento do professor sobre conteúdos e conceitos abordados nos diferentes campos da Matemática. Porém, este não é um conhecimento que tem como única finalidade o ensino, pois pode ser utilizado por diferentes profissionais, como engenheiros, enfermeiros, contadores etc.
- O *Conhecimento Especializado do Conteúdo* (*Specialized Content Knowledge*) é aquele usado, exclusivamente, para o ensino dos diferentes conceitos matemáticos. Com ele é possível compreender os porquês da Matemática e entender os raciocínios e estratégias por trás das respostas dadas pelos alunos.
- O *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte* (*Horizon Content Knowledge)* permite ao professor compreender as relações entre os conteúdos matemáticos, além de perceber as conexões curriculares dos diferentes campos da Matemática nas diferentes etapas de escolaridade. Estas relações e conexões auxiliam o professor no processo de ensino e aprendizagem.
- O *Conhecimento do Conteúdo e Alunos* (*Knowledge of Content and Students*) é o conhecimento sobre os conteúdos da Matemática e sobre as relações dos alunos com eles, como a antecipação das dificuldades ou dúvidas que os alunos possam vir a ter.
- O *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* (*Knowledge of Content and Teaching*) é o conhecimento do conteúdo matemático com a compreensão pedagógica para o ensino deste conteúdo. Tem-se, nesse subdomínio, por exemplo, as diferentes representações dos conceitos, de modo a atender as necessidades de aprendizagem dos alunos.

- O *Conhecimento do Conteúdo e Currículo* (*Knowledge of Content and Curriculum*) é o conhecimento do conteúdo matemático e das orientações propostas nos programas curriculares quanto ao mesmo, além de orientações metodológicas e uso de recursos para o ensino da Matemática.

Cada um desses subdomínios deve estar atrelado ao conteúdo, bem como ao seu nível de ensino. Assim, segundo Ribeiro (2017, p. 53),

> [...] o MKT ideal de professores do Ensino Médio é distinto de um MKT ideal de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental ou Educação Infantil, bem como um MKT em tópicos de Geometria é distinto de um MKT em tópicos de Números.

Dessa forma, é importante que o professor desenvolva, também, o *Conhecimento Interpretativo* que, segundo Ribeiro (2017, p. 57), "é aquele que permitirá ao professor atribuir significado matemático às produções e comentários dos alunos, de modo a poder, posteriormente, fornecer um feedback construtivo". Assim, possibilitaria ao professor desenvolver um conhecimento sobre as capacidades matemáticas dos alunos (RIBEIRO, 2017), sem, necessariamente, impor a forma particular e especializada de conhecimento do professor de Matemática.

O PERCURSO DA PESQUISA

Este capítulo é um recorte da dissertação desenvolvida por Lima (2015), da qual participaram três professores de Matemática que atuavam em turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e em turmas do Ensino Médio. O critério de escolha desses professores foi que eles tivessem, no mínimo, cinco anos de experiência docente, por acreditar que eles já teriam uma base de conhecimentos desenvolvida ao longo de sua experiência em sala de aula. O objetivo deste capítulo é apresentar como professores de Matemática da Educação Básica analisam o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) por estudantes ao resolverem situações combinatórias e como propõem intervenções em sala de aula.

Os dados aqui discutidos são referentes ao segundo momento da entrevista realizada com os participantes do estudo de Lima (2015), em que os professores foram questionados sobre o uso do PFC na resolução de situações combinatórias. Para isso, foram utilizados protocolos de diferentes situações combinatórias com respostas e justificativas incorretas dadas por estudantes, seguidos dos seguintes questionamentos:

> 1. Os estudantes estão corretos em suas respostas e justificativas?
> a) Se correto, por quê?
> b) Se incorreto, qual das alternativas é mais adequada para este tipo de problema?
> c) Se incorreto, qual a dificuldade você acha que o aluno apresentou na compreensão deste problema?
> 2. Como você auxiliaria o aluno a compreender este problema? (LIMA, 2015, p. 65).

Dessa forma, acreditava-se que os professores poderiam expor seus conhecimentos sobre o uso do PFC como estratégia de resolução de problemas combinatórios e seus conhecimentos interpretativos, a partir das respostas dos alunos. A seguir, são apresentados resultados que focam o *Conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e Alunos* e o *Conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e Ensino* dos professores participantes desta pesquisa ao analisarem questões sobre o ensino da Combinatória, quando os estudantes erram ao usar o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) na resolução das situações combinatórias apresentadas.

CONHECIMENTOS DOCENTES SOBRE O PFC EM AÇÃO

Em seu estudo sobre os conhecimentos de professores de Matemática quanto ao uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), Lima (2015) criou categorias de análises partindo do estudo de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre conhecimentos docentes. São elas: *Conhecimento Comum do PFC*, *Conhecimento Especializado do PFC*, *Conhecimento do PFC no Horizonte*, *Conhecimento do PFC e Alunos*, *Conhecimento do PFC e Ensino* e *Conhecimento do PFC e Currículo*. Para cada uma dessas categorias, Lima (2015) dá alguns exemplos, dentre os quais apresentamos alguns referentes ao *Conhecimento do PFC e Alunos*, *Conhecimento do PFC e Ensino*.

Sobre o *Conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e Alunos*, Lima (2015, p. 70) apresenta como exemplos:

- Apontar e descrever as dificuldades apresentadas pelos alunos ao aplicarem o PFC na resolução de diferentes situações combinatórias, sejam estas condicionais ou não-condicionais;
- Mostrar familiaridade com erros comuns cometidos pelos alunos ao usarem o PFC;
- Prever facilidades e/ou dificuldades de seus alunos ao usarem o PFC para resolução de diferentes situações combinatórias;
- Entender como os alunos estão usando o PFC na resolução de problemas combinatórios.

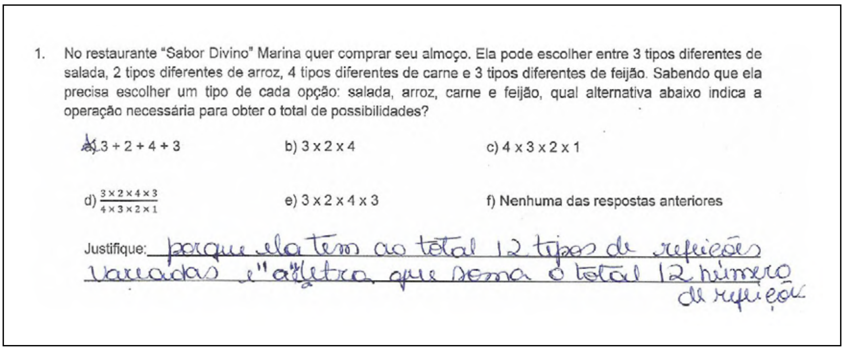
Já em relação ao *Conhecimento do Princípio Fundamental da Contagem e Ensino*, Lima (2015, p. 71) apresenta como exemplos:

- Usar métodos e técnicas de ensino para a Combinatória que contemplem o uso do PFC;
- Avaliar, junto aos alunos, vantagens e desvantagens do uso do PFC para resolução de problemas combinatórios;
- Apresentar esclarecimentos aos alunos referentes ao uso do PFC e relações com outras estratégias, como a árvore de possibilidades, durante a resolução dos problemas.

A seguir, são apresentadas análises feitas pelos professores entrevistados sobre erros cometidos por estudantes ao resolverem distintas situações combinatórias e quais estratégias metodológicas eles optariam usar para superar as dificuldades enfrentadas pelos alunos durante suas resoluções.

Na Figura 1, tem-se um problema de *produto de medidas*, em que o aluno assinala como sendo alternativa correta a opção na qual o total de possibilidades seria encontrado por meio de uma adição das quantidades presentes no enunciado.

Figura 1. Exemplo de resolução incorreta de um aluno, de problema de *produto de medidas*, analisado pelos professores


1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $3 + 2 + 4 + 3$ b) $3 \times 2 \times 4$ c) $4 \times 3 \times 2 \times 1$

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ e) $3 \times 2 \times 4 \times 3$ f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: porque ela tem ao total 12 tipos de refeições variadas e "a" letra que soma o total 12 número de refeições

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

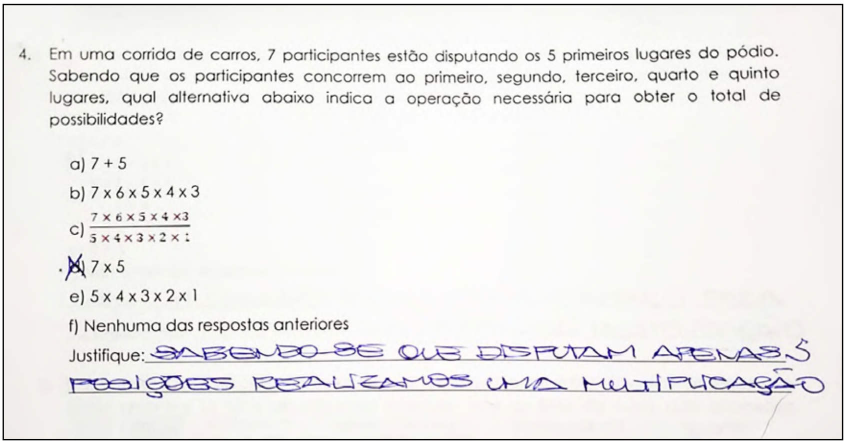
Ao serem questionados sobre o tipo de erro e a dificuldade enfrentada pelo aluno, os professores entrevistados, P1, P2 e P3 fizeram as seguintes observações:

> *P1*: Ele não compreendeu, porque na verdade ele juntou os números que apareciam no problema sem compreensão [...] ele colocou o 3 aqui, o 2, o 4, o 3 e somou de forma aleatória. Não houve compreensão.
> *P2*: Ele não entendeu que o prato necessita ter todos esses componentes [...] E, ele pensou, acredito, nas refeições individualizadas e não no conjunto.
> *P3*: Me parece conceitual. É como se ele não soubesse resolver o princípio fundamental mesmo da coisa.

Com base nessas falas, percebe-se que os entrevistados apontam e descrevem os erros cometidos pelo aluno ao somar as possibilidades dadas no contexto do problema. P1 e P3 chamam atenção de que esse é um tipo de erro conceitual, já que o aluno usa o princípio aditivo para resolver a situação proposta. Além disso, P1 e P2 descrevem o erro cometido pelo aluno ao somar as quantidades presentes no enunciado e não entender o conjunto das possibilidades pedidas. É importante destacar que, mesmo quando os professores não citam diretamente o PFC, em suas falas há indícios de que faltou a correta aplicação desse princípio, ou seja, ao invés de somar as quantidades citadas, essas deveriam ser multiplicadas ($3 \times 2 \times 4 \times 3$), como indicado na opção 'e' da questão.

Na Figura 2, tem-se um *arranjo* no qual um aluno erroneamente indica como resposta correta para o problema a opção em que se multiplicam entre si as possibilidades apresentadas no enunciado do problema. A justificativa apresentada pelo aluno é "sabendo-se que disputam apenas 5 posições realizamos uma múltiplicação".

Figura 2. Exemplo de resolução incorreta de um aluno, de problema de *arranjo*, analisado pelos professores


4. Em uma corrida de carros, 7 participantes estão disputando os 5 primeiros lugares do pódio. Sabendo que os participantes concorrem ao primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 7 + 5

b) 7 x 6 x 5 x 4 x 3

c) $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

d) 7 x 5

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: SABENDO-SE QUE DISPUTAM APENAS 5 POSIÇÕES REALIZAMOS UMA MULTIPLICAÇÃO

Fonte: Azevedo *et al.* (2013).

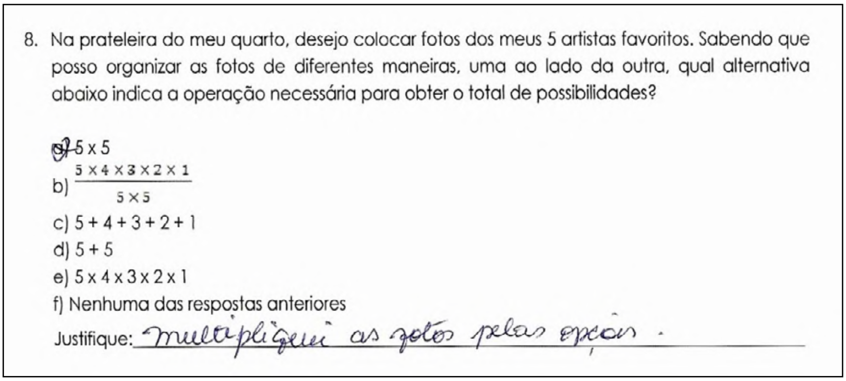
Ao serem questionados sobre as dificuldades enfrentadas pelo aluno ao resolverem tal situação, os professores fizeram as seguintes análises:

> *P1*: [...] ele pegou e multiplicou os números que apareceram no problema, mas ele não levou em consideração a ordem.
> *P2*: Eles trazem muito isso... A dificuldade, acho que eles pegam os números e multiplicam. Tem 7 participantes, 5 lugares, então ele faz 7×5, mas é a mesma coisa. É a mesma dificuldade aqui de perceber as etapas.
> *P3*: Ele talvez tenha até ouvido falar no conceito, mas o conceito é multiplicar. Ele pega os números que aparecem e multiplica 7×5.

Como se pode perceber, P2 aponta que esse pode ser um erro recorrente dos alunos ao resolverem situações semelhantes, mostrando, assim, familiaridade com erros comuns que podem ser cometidos. P1 e P3 chamam atenção, novamente, para dificuldades conceituais ao apontarem que o aluno não percebe características dos invariantes do problema, como a ordem de escolha em cada etapa de resolução e, por considerar a multiplicação direta como meio para resolução do problema proposto, quando o correto seria considerar as etapas de escolha e aplicar o PFC ($7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$).

Na situação apresentada na Figura 3, o aluno também usou a multiplicação direta ao indicar qual seria a alternativa correta para resolver o problema de *permutação*.

Figura 3. Exemplo de resolução incorreta de um aluno, de problema de *permutação*, analisado pelos professores


8. Na prateleira do meu quarto, desejo colocar fotos dos meus 5 artistas favoritos. Sabendo que posso organizar as fotos de diferentes maneiras, uma ao lado da outra, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 5 x 5

b) $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 5}$

c) 5 + 4 + 3 + 2 + 1

d) 5 + 5

e) 5 x 4 x 3 x 2 x 1

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: multipliquei as fotos pelas opcões.

Fonte: Azevedo *et al.* (2013).

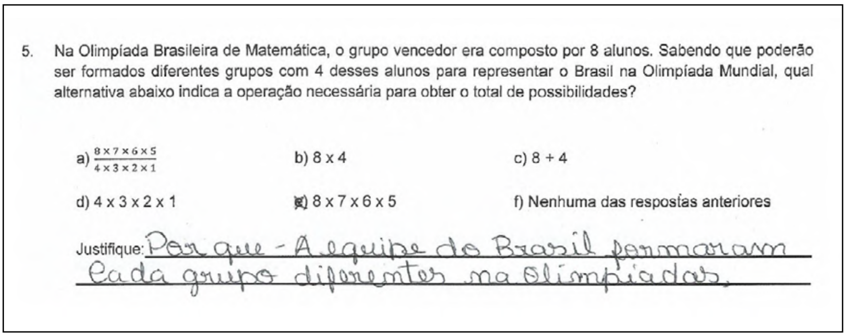
Ao analisar a resolução do aluno em questão, os professores apontam algumas dificuldades, mas entendem que o mesmo já apresenta indícios de que compreende o que é pedido no problema. Entre as dificuldades apresentadas nos excertos abaixo, ressalta-se quando P3 aponta o entendimento conceitual por parte do aluno.

P1: [...] ele tá errado, mas eu acho que ele já aponta um indício de compreensão.
P2: Erro de interpretação.
P3: Mesmo conceito do outro, eu acho. Ele sabe que precisa multiplicar, ele pega a quantidade e multiplica uma pela outra. Ele até sabe o conceito, mas ele não entendeu o contexto da coisa.

O estudante da Figura 3 está bem longe da resposta correta, pois não aplica corretamente o PFC, e nenhum dos professores aponta isso claramente. O correto, nessa questão, não seria multiplicar o número de fotos pelas posições das mesmas, mas, sim, aplicar o PFC, obtendo $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ (opção 'e').

No problema seguinte, disposto na Figura 4, temos uma *combinação*. Nesse tipo de questão, o aluno deveria perceber que para obter o total de possibilidades pedidas, teria que aplicar o *Princípio Fundamental da Contagem* e depois dividir pela permutação de 4, de modo a desconsiderar os casos repetidos, ou seja, a alternativa correta seria a letra 'a'.

Figura 4. Exemplo de resolução incorreta de um aluno, de problema de *combinação*, analisado pelos professores


5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$ b) 8 x 4 c) 8 + 4

d) 4 x 3 x 2 x 1 e) 8 x 7 x 6 x 5 f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Por que - A equipe do Brasil formaram cada grupo diferentes na Olimpíadas.

Fonte: Silva, Pontes e Teixeira (2013).

Ao analisarem a resposta do aluno, os professores tentam traçar a linha de raciocínio do aluno ao apontar a multiplicação direta como estratégia de resolução e, ao mesmo tempo, justificar sua resposta, enfatizando os diferentes grupos que seriam formados.

> *P1*: Ele não percebeu que [...] a ordem não importa, e ai resolveu como se fosse um arranjo.
> *P2*: E ai no caso, a 'letra a' é a resposta correta, porque ele não desconsiderou a ordem, ele até [...] pela resposta dele, ele entendeu que deveria escolher o 1º, depois o 2º, depois o 3º. Só que ao fazer isso, escolha o 1º ele tá definindo quem é o 1º aluno, mas isso não condiz com o que tá sendo proposto aqui.
> *P3*: Ele erra, ele sabe o conceito, mas ele tá preso ao conceito do Princípio Fundamental da Contagem, então ele erra. Talvez o conceito de combinação não esteja claro pra ele.

P1 e P2 chamam a atenção para o invariante da ordem, pois, nesse caso, o aluno não desconsidera os casos repetidos. Já P3 afirma que esse tipo de erro reflete a dificuldade em entender os conceitos combinatórios para diferenciar os diferentes tipos de problema. Nas palavras de P1 e P3, a dificuldade está em diferenciar uma situação de *arranjo* de uma situação de *combinação*.

Ao fim das análises de cada uma das resoluções, percebe-se que os professores mobilizam conhecimentos relacionados ao conteúdo e aos alunos. No caso, eles avaliam o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* como estratégia para resolução dos problemas apresentados e apontam tipos de erros que os alunos cometem e que, por vezes, são recorrentes. Este tipo de conhecimento pode ser de fundamental importância para o professor no momento do planejamento de suas aulas e nas escolhas metodológicas para o ensino de conteúdos matemáticos, especificamente, neste caso, para o ensino das diferentes situações combinatórias.

Após a fase de análise, os professores também foram questionados sobre que procedimentos metodológicos poderiam usar para ajudar os alunos a superarem dificuldades e elucidarem algumas dúvidas conceituais durante a resolução dos problemas. Quando os professores conseguem se expressar sobre esses procedimentos, acabam por evidenciar seus conhecimentos referentes ao ensino dos conteúdos matemáticos, em específico, neste estudo, para o ensino de situações combinatórias.

Para o problema de *produto de medidas,* os professores sugeriram diferentes maneiras de se trabalhar com esse tipo de situação, de modo a ajudar os alunos no entendimento da mesma, como se vê nos extratos a seguir.

> *P1*: Com uma árvore, construiria um esquemazinho da árvore de possibilidades e ajudaria. Primeiro perguntaria quais são estas possibilidades pra depois ver qual o total. Aí dava pra ele visualizar que é um produto de multiplicações.
> *P2*: Então, ele não entendeu bem o prato. Eu sempre digo assim: qual o seu objetivo? Formar pratos? Mas o que é que compõe o prato? Então, para formar esse prato eu posso dividir em etapas? Então, aí você conseguiria uma visão mais ampla, mais global.
> *P3*: Conceito do Princípio Fundamental [...].

Percebe-se que, diferentemente de P3, que propõe diretamente o trato com o PFC, P1 e P2 propõem um diálogo com seus alunos ou a construção de árvore de possibilidades, para que o aluno perceba o princípio multiplicativo implícito na questão e possa melhor visualizar as possibilidades pedidas. Porém, mesmo sendo um bom caminho a ser seguido, P1 e P2 não evidenciam em suas falas como pode ser feita essa transição entre essas duas representações (árvore de possibilidades e PFC).

Para a situação de *arranjo*, os professores indicaram as estratégias que seguem para ajudar o aluno na resolução do tipo de problema em questão:

> *P1*: [...] a árvore de possibilidades ficaria bem, como posso dizer, bem extensa. Mas é... seria, também, usar uma árvore de possibilidades, depois ele perceber o princípio multiplicativo. Agora ficaria bem cheia de ramos.
> *P2*: O objetivo da questão de interpretação é classificar em 1º, 2º, 3º, 4º e 5º. Então, de quantas formas eu posso fazer isso? Então, eu tenho que fazer uma etapa, escolher o 1º, depois o 2º, depois o 3º, então.
> *P3*: Eu minimizaria a quantidade de participantes e a quantidade de lugares, mostraria a ele que não faz o menor sentido você apenas multiplicar as possibilidades. Acho que, se você ilustra isso [...] parece que o entendimento dele ficaria mais claro.

Como se vê, P1 chama a atenção para a dificuldade em se usar a árvore de possibilidades para resolver este tipo de problema, devido ao número elevado de possibilidades a serem encontradas. Na fala de P2 e P3, percebe-se a intenção de se discutir com os alunos o enunciado do problema, de modo que eles entendam o que precisa ser feito e que percebam que, neste caso, a multiplicação direta não seria uma estratégia a ser adotada. Assim, o trabalho com situações combinatórias partiria de contextos mais simples até os mais complexos, como orientado por documentos curriculares e pesquisas acadêmicas.

Para a questão *permutação*, as intervenções propostas pelos professores foram as que seguem:

> *P1*: A questão seria trabalhar com quadros de casas de possibilidades. Porque daria pra ele ver/identificar realmente [...] é porque todas elas, pelo menos as três, resolvem com o princípio multiplicativo, mas aí teria que [...] a árvore de possibilidades ia chegar o momento que dificultaria a 4ª questão

... ficaria muito extensa, mas ai com o quadro de posição ele compreenderia.

P2: Se eu tenho 5 livros para colocar em 5 locais ... você teria que escolher o 1º livro para o 1º local, o 2º livro, o 3º livro ..., tá tudo na mesma linha.

P3: Eu trilharia muito pelo que eu disse no outro, diminuía a quantidade de possibilidades e mostraria a ele que não faz muito sentido apenas fazer isso (uma multiplicação direta entre as opções apresentadas). Eu acho uma maneira que tem dado certo assim. Você diminui a quantidade de informação e apresenta a ele o mesmo conceito.

P1 indica o uso de quadros, pois, novamente chama atenção que o uso da árvore de possibilidades pode dificultar a compreensão do problema devido à sua extensão. Nas falas de P2 e P3, as estratégias seriam, como para o problema de *arranjo*, discutir as etapas de resolução do problema com os alunos e diminuir o total de possibilidades para que, assim, o aluno possa perceber o *princípio multiplicativo* implícito nesta situação.

Sobre que intervenções metodológicas poderiam usar para auxiliar na resolução do problema de *combinação*, os professores entrevistados apontaram algumas estratégias que poderiam usar em suas aulas.

P1: Seria, realmente, dele formar grupos e perceber que é, como a ordem não importa, é, então seriam grupos, é, seriam grupos distintos no caso. Porque no arranjo ..., aliás seriam os mesmos grupos. Ele teria que dividir no final, aí se ele não perceber isso ele não compreendeu mesmo o problema. Porque como é na formação dos grupos ele vai ver que tem grupos repetidos. Se tem grupos repetidos, ele vai ter que dividir e não somente multiplicar.

P2: Acho que a árvore de possibilidades funciona bem, principalmente num nível menor. Você começar com problemas

> menores e ir subindo gradativamente. Tem um que começa fazendo pra dois lugares, o que é que vai acontecer? Eu sempre tento fazer com poucos resultados e que ele [aluno] faça uma comparação entre a leitura direta, a contagem direta, e a contagem indireta.
> *P3*: Eu trilharia pelo mesmo caminho. Eu acho [...] se você colocar 3 alunos para formar grupos de 2, eu acho que ele entende melhor.

P2 e P3 indicam em suas falas que repetiriam procedimentos usados em outros problemas – discutir o que é pedido no problema e diminuir a quantidade de possibilidades a ser encontrada. Já P1 vai um pouco além com a proposta metodológica para esse tipo de questão, propondo um trabalho para que os alunos percebam a diferença de invariantes entre os diferentes tipos de problema.

Com isso, fica evidente o *Conhecimento Especializado do Professor* referente às situações combinatórias, no modo como os professores apresentam os invariantes de ordem e as estratégias usadas pelos alunos. Além disso, a interpretação dada às respostas dos alunos – *Conhecimento do Conteúdo e Aluno* – expõe, além desse *Conhecimento Especializado do Conteúdo*, um conhecimento acerca de estratégias de ensino – *Conhecimento do Conteúdo e Ensino* – no intuito de auxiliar os alunos no processo de aprendizagem.

RETOMANDO OS PRINCIPAIS PONTOS

A partir do exposto, com o objetivo de apresentar como professores da Educação Básica analisam o uso do *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) por estudantes ao resolverem situações combinatórias e como propõem intervenções em sala de aula, pode-se tirar algumas conclusões. Uma delas refere-se à indicação destes professores para o uso do PFC para a resolução de situações combinatórias, partindo de situações simples, com pequenas quantidades, até as mais complexas, para que os alunos possam perceber as multiplicações implícitas nas questões e, aos poucos, irem desenvolvendo o raciocínio combinatório necessário para resolução dos diferentes problemas de Combinatória estudados na Educação Básica.

As intervenções propostas pelos professores, P1, P2 e P3, podem ser realizadas em sala de aula, levando em consideração a etapa de ensino, para a superação de dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao resolverem situações combinatórias. Durante a entrevista, os professores destacaram que algumas situações-problema podem ser beneficiadas de representações simbólicas específicas e quando um problema apresentar muitas possibilidades de resolução, a sugestão é que a árvore de possibilidades não seja uma boa alternativa de representação.

Finalmente, conclui-se que os professores participantes da pesquisa reconhecem a importância do *Princípio Fundamental da Contagem* na resolução de variadas situações combinatórias. Espera-se que haja esse reconhecimento amplo por parte de outros professores e que o uso do PFC possa ser trabalhado de modo significativo em sala de aula, auxiliando estudantes na resolução de problemas combinatórios não-condicionais, bem como os condicionais.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana; ASSIS, Adryanne; BORBA, Rute; PESSOA, Cristiane. Princípio fundamental da contagem: alunos do curso de graduação em Pedagogia resolvendo problemas combinatórios. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

BALL, Deborah; THAMES, Mark; PHELPS, Geoffrey. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? *In:* SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza, CE: UNI7, 2012.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. 1ª a 4ª série. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. 5ª a 8ª série. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. *Temas e problemas elementares*. 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção PROFMAT)

LIMA, Ana. *Princípio Fundamental da Contagem*: conhecimentos de professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações

Combinatórias. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth. *Combinatorics and Reasoning:* representing, justifying and building isomorphisms. USA. Mathematics Education Library. Springer, 2011.

MORGADO, Augusto; CARVALHO, João; CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e probabilidade*. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do professor de Matemática)

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco/Parâmetros na Sala de Aula:* Matemática Ensino Fundamental e Médio. Recife: SE, 2013.

RIBEIRO, Miguel. Conhecimento Interpretativo para Ensinar Matemática e História da (Educação) Matemática: contributos para a Formação. *Educação & Linguagem*. v. 20, n. 1, p. 47-72, 2017.

ROCHA, Cristiane; LIMA, Ana Paula; BORBA, Rute. Conhecimentos Pedagógicos para Ensinar Combinatória: currículo e documentos orientadores para os anos iniciais. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 7, n. 1, 2016.

SHULMAN, Lee. Knowledge and teaching: foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, February, 1987.

SILVA, Maria; PONTES, Danielle; TEIXEIRA, Maria. Princípio fundamental da contagem: a compreensão de estudantes do 3º ano do Ensino Médio sobre os problemas de Combinatória. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

PARTE 2

Pesquisas com estudantes da educação básica – em distintas modalidades e níveis de ensino – sobre recursos voltados para a aprendizagem da Combinatória e da Probabilidade

4 Problemas combinatórios em livros da alfabetização de jovens e adultos

Glauce Vilela Martins
Rute E. de S. Rosa Borba

JUSTIFICATIVAS DO ESTUDO PROPOSTO

Investigações com análise de livros didáticos para o ensino da Matemática vêm se tornando cada vez mais frequentes (LIMA, 2017; AZEVEDO, 2017), tendo em vista a importância desse recurso nos processos de ensino e de aprendizagem nas escolas brasileiras. Sendo um recurso orientador dos conteúdos tratados em sala de aula, é muito relevante sondar quais conceitos são tratados nos livros e de que modo são abordados. Essas investigações são importantes em livros de todos os níveis e modalidades de ensino, a fim de oportunizar a todos os estudantes um amplo e útil conhecimento matemático.

Diante dessa perspectiva, e tomando como ponto de partida que a aprendizagem matemática é um direito e uma necessidade (individual e social) básica para as pessoas exercerem plenamente sua cidadania, o ensino de Matemática na Educação de Jovens e Adultos (EJA) assume um papel fundamental na formação desses indivíduos que são marcados historicamente por exclusões socioculturais. Cabe à escola, em particular ao que é tratado nos Livros Didáticos, trabalhar propostas inclusivas que possibilitem a todos um amplo desenvolvimento matemático.

Respeitando-se as particularidades de vivências dos educandos, dentro da Educação Matemática, os documentos oficiais, pesquisadores e estudiosos defendem que a abordagem dos conteúdos na escola adote como ponto de partida para a aprendizagem a *resolução de problemas*, amparada em diferentes contextos significativos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a resolução de problemas se apresenta como forma privilegiada de atividade matemática, ressaltando que ela é, ao mesmo tempo, "objeto e estratégia para aprendizagem ao longo de todo ensino fundamental" (BRASIL, 2017, p. 266).

Nesse sentido, em livros didáticos, os problemas devem ser apresentados aos alunos da EJA, e de outras modalidades de ensino, em situações diversificadas, apresentando e solicitando para sua resolução representações simbólicas diversas, bem como apresentando contextos compatíveis, de modo a estimular os desenvolvimentos conceituais de todos os estudantes. Os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, baseados na resolução de problemas, devem propor ao educando jovem e adulto

> [...] estabelecer conexões entre os diversos conteúdos e entre os procedimentos informais e os escolares, para que possam utilizar esses conhecimentos na interpretação da realidade em que

> vivem, sugere-se que os conteúdos matemáticos sejam abordados por meio da resolução de problemas. (BRASIL, 2001, p. 103).

Tendo em vista a problematização com diversos conceitos, o campo conceitual das estruturas multiplicativas foi selecionado como foco da análise relatada neste capítulo, pois os conceitos desse campo estão muito presentes no cotidiano social de jovens e adultos. A multiplicação e a divisão são aplicadas e o número racional é evidenciado em múltiplos modos na vida dos estudantes da EJA e, também, estão bem presentes situações combinatórias, foco central do estudo aqui relatado.

A análise de como os livros abordam a Combinatória considerou a apresentação de situações combinatórias com suas particularidades, as representações simbólicas utilizadas e solicitadas para a resolução dos problemas, bem como se os contextos se adéquam, ou não, ao público a qual se destinam – no caso, estudantes da EJA. Em particular, voltou-se o olhar para livros destinados à alfabetização de jovens e adultos, para se verificar o tratamento dado aos problemas de Combinatória em processos iniciais de escolarização nessa modalidade de ensino.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS ADOTADOS

Os alunos da EJA formam um grupo homogêneo, do ponto de vista socioeconômico, porém, em vários outros aspectos, formam um grupo bastante heterogêneo. Eles chegam à escola cada um com suas vivências e uma bagagem de conhecimentos adquiridos ao longo do tempo, sem, necessariamente, terem passado pelo processo de educação formal em algum momento de suas vidas. São donas de casa, empregadas domésticas, trabalhadores da construção civil, comerciantes, entre outras atividades profissionais. São homens, mulheres, jovens, adultos, idosos, com diferentes religiões, crenças e valores (FONSECA, 2002; ARROYO, 2014).

Muitos desses jovens e adultos possuem noções matemáticas que foram aprendidas de modo intuitivo ou informal, por meio de suas ricas experiências sociais, antes de terem contato com conceitos escolares formais (BRASIL, 2001; FONSECA, 2002; SILVA; BORBA, 2007). Esses conhecimentos que os alunos da EJA trazem para a escola são de extrema importância, pois, a partir da valorização dos mesmos, os educadores podem desenvolver planos de ensino adequados aos interesses e necessidades desse público, visando seus amplos desenvolvimentos matemáticos.

As competências e concepções dos alunos vão se desenvolvendo ao longo do tempo através da valorização das suas experiências de vida – tanto dentro como fora da escola – e de suas visões de mundo, sendo necessário que eles se apropriem das aprendizagens escolares de modo crítico, apoiando-se em seus conhecimentos prévios (BRASIL, 2001; FONSECA, 2002). É preciso que, ao enfrentarem uma nova situação, eles usem os conhecimentos já adquiridos em situações anteriores e que tentem adaptá-los a essa nova situação.

Schliemann (1998) chama a atenção que nem sempre é claro para os alunos as relações entre as situações de fora e de dentro da escola, pois enquanto dentro da escola, por vezes, demonstram dificuldade em realizar operações matemáticas, fora da escola

> [...] as estratégias desenvolvidas pelos indivíduos como instrumento para resolver problemas no trabalho caracterizam-se pela manutenção do significado do problema em todos os passos necessários para sua resolução, com constante referência às quantidades físicas e ao uso de transformações numéricas que levam em consideração o sistema decimal. (SCHLIEMANN, 1998, p. 15).

A Proposta Curricular para EJA (BRASIL, 2001) deixa clara a necessidade de se trabalhar significados diversificados, representações simbólicas variadas e contextos significativos que tenham por objetivo auxiliar no processo de aprendizagem dos estudantes. A partir da apresentação de variados problemas matemáticos, podem ser trabalhadas situações significativas que possibilitem mais e mais avanços no conhecimento matemático dos alunos dessa modalidade de ensino. Ressalta-se, também, o cuidado de que os contextos trabalhados na EJA não sejam infantilizados, mas adequados a jovens e adultos. No ensino formal, deve-se, então, reconhecer a validade de conhecimentos extraescolares, propondo novos problemas com situações variadas que estimulem ainda mais o raciocínio dos educandos. Fonseca (2002) destaca a necessidade do reconhecimento mútuo – entre professores e estudantes – do valor dos saberes extraescolares e escolares, afirmando que

> Essa demanda, entretanto, precisa ser contemplada num exercício dialético de confronto com as estratégias que jovens e adultos constroem ou adquirem em situações escolares para solução dos problemas cotidianos. Esse confronto exige ser delineado como uma relação de interlocutores adultos – e que não deixam de sê-lo porque uns detém saberes com maior ou menor valorização social – que, como tal, assume posição de sujeito na negociação de saberes e sentidos que se estabelecem (e estabelecem as) relações de ensino-aprendizagem (FONSECA, 2002, p. 24).

Nesse sentido, observa-se que fora da escola a Matemática se desenvolve em situações a serem dominadas, sendo necessário, portanto, que na escola a abordagem dos conteúdos tenha como ponto de partida a resolução de problemas e não definições de conceitos. O ideal é, então, fornecer problemas e situações variadas visando estimular o desenvolvimento conceitual do adolescente e do adulto (ZUFFI; ONUCH, 2007; NUNES; SANTANA, 2017).

Como discutido no capítulo introdutório deste livro, o campo conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 1986) é formado por um conjunto de *situações* (S) que envolvem a divisão e a multiplicação, a proporção, bem como outros conceitos matemáticos. Entre essas situações encontram-se os problemas que exigem raciocínio combinatório, com seus *invariantes* (I), isto é, propriedades e relações que se mantêm constantes nas diversas situações nas quais a Combinatória se faz presente e o conjunto de *representações simbólicas* (R) que podem ser utilizadas para representar e operar nos problemas combinatórios.

No estudo aqui relatado, o tripé (S, I, R) serviu de base para as análises de livros didáticos efetuadas. A seguir, apresentam-se os procedimentos metodológicos adotados na investigação realizada.

COMO SE REALIZOU A INVESTIGAÇÃO

O estudo envolveu a análise de todos os exemplares (19 livros) aprovados na primeira edição do Programa Nacional do Livro Didático para Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA) (BRASIL, 2008), o qual era voltado ao programa governamental federal denominado de Brasil Alfabetizado (BRASIL, 2006).

Os livros foram analisados identificando, inicialmente, os problemas de estrutura multiplicativa e, em seguida, foi efetuado o levantamento dos tipos de problemas combinatórios, de acordo com a classificação unificada proposta por Pessoa e Borba (2007); das representações simbólicas apresentadas nos problemas; das representações simbólicas solicitadas para a resolução dos problemas; e dos contextos apresentados nos problemas.

PRINCIPAIS RESULTADOS OBTIDOS

Situações combinatórias encontradas nos livros de alfabetização da EJA

Com base nos resultados, observou-se que as situações combinatórias encontradas não estão distribuídas de maneira uniforme nas obras aprovadas pelo PNLA (BRASIL, 2008), além disso, verificou-se uma representatividade pouco satisfatória. Pode-se observar, na Tabela 1, que a situação de *combinação* é a de maior representatividade, correspondendo a 65% dos problemas tratados, seguida da situação de *produto de medidas*, que corresponde a 17% dos problemas. As situações de *permutação* correspondem a 12% e, por fim, a situação de *arranjo* corresponde a 6% dos problemas identificados.

Além de uma quantidade muito pequena de problemas de Combinatória em cada um dos 19 livros, apenas o livro J abordou as quatro situações propostas na classificação de Pessoa e Borba (2007), seis obras abordaram dois dos quatro tipos de situação, nove obras abordaram apenas um tipo de situação, e três obras – G, I e M – não abordaram sequer uma dessas situações.

Tabela 1. Situações combinatórias encontradas nos livros de alfabetização da EJA

Livros aprovados no PNLA 2008	Situações combinatórias			
	Arranjo	Combinação	Permutação	Produto de medidas
Livro A	-	6	-	3
Livro B	1	6	-	-
Livro C	1	-	-	-

Livros aprovados no PNLA 2008	Situações combinatórias			
	Arranjo	Combinação	Permutação	Produto de medidas
Livro D	-	-	2	-
Livro E	-	3	-	-
Livro F	-	1	2	-
Livro G	-	-	-	-
Livro H	-	1	-	-
Livro I	-	-	-	-
Livro J	1	1	1	2
Livro K	-	2	1	-
Livro L	-	1	-	-
Livro M	-	-	-	-
Livro N	-	2	-	-
Livro O	-	3	-	1
Livro P	-	2	-	-
Livro Q	-	-	-	1
Livro R	-	1	-	-
Livro S	-	2	-	1
Total	3	31	6	8

Fonte: Martins (2010).

São apresentados, a seguir, exemplos de problemas combinatórios retirados dos exemplares analisados, de acordo com as situações trabalhadas.

Figura 1. Exemplo de problema de arranjo

9 ESCREVA TODOS OS NÚMEROS DE DOIS ALGARISMOS QUE VOCÊ CONSEGUIR USANDO $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ E $\boxed{7}$. NÃO VALE USAR O MESMO ALGARISMO DUAS VEZES.

35	37	53	57	73	75

Fonte: Livro C.

Figura 2. Exemplo de problema de combinação

COMO MUITAS BRASILEIRAS, MARIA AJUDA SUA FAMÍLIA VENDENDO DOCES. ELA FAZ COCADAS E PAÇOCAS PARA VENDER NA SAÍDA DA ESCOLA. EM CADA SAQUINHO ELA COLOCA CINCO DOCES.

VAMOS DESCOBRIR DE QUE MANEIRAS ELA PODE MONTAR OS SAQUINHOS COM ESSES DOIS TIPOS DE DOCES.

UM SAQUINHO PODE TER:

- CINCO COCADAS
- CINCO PAÇOCAS
- UMA PAÇOCA E QUATRO COCADAS
- UMA COCADA E QUATRO PAÇOCAS

1. DE QUE OUTRAS MANEIRAS ELA PODE MONTAR OS SAQUINHOS?

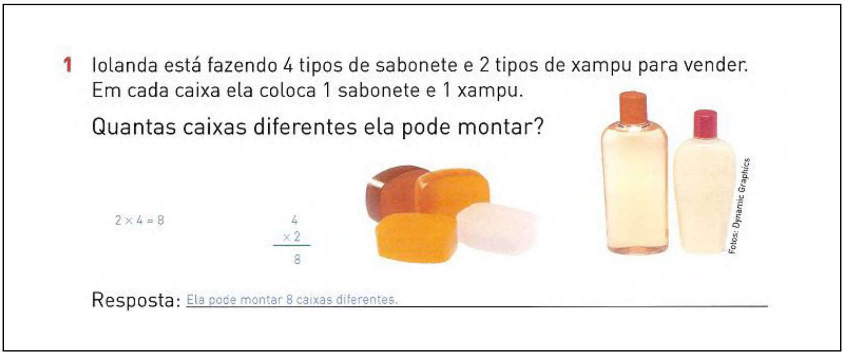
....

Fonte: Livro B.

Figura 3. Exemplo de problema de permutação

Fonte: Livro K.

Figura 4. Exemplo de problema de produto de medidas



Fonte: Livro J.

Salienta-se que o Guia do PNLA (BRASIL, 2008), nas sínteses dos livros, não faz quase nenhum tipo de abordagem referente ao trabalho com a Combinatória, exceto nos exemplares B e N, nos quais os tipos de problemas multiplicativos são mencionados sucintamente. Dessa forma, nos livros destinados à alfabetização na EJA, parece não haver uma valorização ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois poucos problemas dessa natureza são abordados nos exemplares, sem a preocupação de trabalhar variadas situações que dão significado à Combinatória.

Barreto, Amaral e Borba (2007), investigando o raciocínio combinatório nos livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, constataram que os problemas de *produto de medidas* são os únicos tipos de problemas combinatórios que são trabalhados explicitamente. Os outros tipos – *arranjo*, *combinação* e *permutação* – são apresentados, porém, sem nenhum destaque. Os percentuais desses outros tipos de problemas combinatórios nos livros do Ensino Fundamental são bem mais elevados que os observados nas obras destinadas à EJA, diferenciando-se, assim, o tratamento dado à Combinatória nas diferentes modalidades de ensino.

Resultados obtidos nas pesquisas de Schliemann (1988), Gomes e Borba (2014) e Santos (2008) mostram a dificuldade que jovens e adultos têm em resolver problemas combinatórios. Fica evidente, então, a necessidade de trabalhar os problemas combinatórios, tanto nos anos iniciais do Ensino Fundamental regular, quanto no início da escolarização na modalidade voltada a jovens e adultos. A escolarização tem papel significativo na ampliação da compreensão de conceitos. Assim, fica claro que o quantitativo de problemas combinatórios abordados nos livros para alfabetização de jovens e adultos é insatisfatório e em muito pouco parecem contribuir para a ampliação da compreensão da Combinatória.

Representações simbólicas apresentadas nos livros de alfabetização da EJA

Quanto aos tipos de representações simbólicas apresentadas nos problemas combinatórios, foi encontrada, nas 19 obras analisadas, pouca diversidade de representações utilizadas junto aos enunciados das situações-problema. Na apresentação dos problemas, os autores não utilizam a calculadora, manipulativos, jogos, algoritmos, cálculo mental e também não trabalham com gráficos.

Observa-se, na Tabela 2, que a forma mais usual de apresentação dos problemas é apenas por meio de enunciados, sem nenhum outro suporte, o que corresponde a 42% dos problemas, seguido de enunciado com desenhos, correspondendo a 39% e, por fim, da apresentação de tabelas e quadros, que corresponde a 19% dos problemas combinatórios. Além de a diversidade de representações simbólicas ser insatisfatória, observa-se que apenas os exemplares A, B, F e K apresentam os três tipos de representações encontradas.

Tabela 2. Tipos de representações simbólicas apresentadas nos problemas combinatórios

Representações simbólicas apresentadas			
Livros aprovados no PNLA 2008	Apenas enunciado	Desenho	Quadro
A	4	3	2
B	5	1	1
C	1	-	-
D	1	-	1
E	-	2	1
F	1	1	1

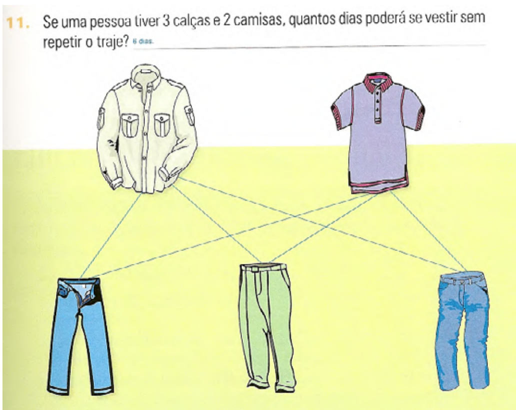
Representações simbólicas apresentadas			
Livros aprovados no PNLA 2008	Apenas enunciado	Desenho	Quadro
G	-	-	-
H	1	-	-
I	-	-	-
J	1	4	-
K	1	1	1
L	-	1	-
M	-	-	-
N	-	2	-
O	2	2	-
P	2	-	-
Q	1	-	-
R	-	-	1
S	-	2	1
Total	20	19	9

Fonte: Martins (2010).

A seguir, são apresentados exemplos dos tipos de representações simbólicas apresentadas nas obras analisadas.

Como os livros analisados não abordam uma grande variedade de representações simbólicas e a maioria apresenta apenas enunciado, sem a utilização de outro suporte, a ausência dessa diversidade pode prejudicar processos de resolução de problemas. A árvore de possibilidades não foi apresentada em nenhum dos problemas combinatórios. É importante destacar que o estudo de Azevedo (2013) aponta que, das diversas representações utilizadas nas intervenções, os alunos que construíram árvores de possibilidades, virtual ou escrita, avançaram em seus raciocínios combinatórios, ou seja, a ausência na apresentação dessa e de outras representações pode comprometer o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Figura 5. Exemplo de problema que apresenta desenho



Fonte: Livro P.

Figura 6. Exemplo de problema que apresenta apenas enunciado

2 | Usando números:

a) Quantos números de dois algarismos podem ser formados com os seguintes números:
2, 6, 7, 9

26, 27, 29, 62, 67, 69, 72, 76, 79, 92, 96, 97

Fonte: Livro O.

Figura 7. Exemplo de problema que apresenta quadro

OS ORGANIZADORES DA DIVERSÃO ESTÃO FORMANDO PARES PARA A FESTA DE CARUARU, MAS ATÉ AGORA SÓ CONSEGUIRAM 4 MULHERES E 4 HOMENS INTERESSADOS. AJUDE-OS A ESCOLHER PARES PARA A FESTANÇA.

	ADRIANO	LUÍS	FÁBIO	RAFAEL
ANA	Adriano e Ana	Luís e Ana	Fábio e Ana	Rafael e Ana
FLÁVIA	Adriano e Flávia	Luís e Flávia	Fábio e Flávia	Rafael e Flávia
LAÍS	Adriano e Laís	Luís e Laís	Fábio e Laís	Rafael e Laís
ISABEL	Adriano e Isabel	Luís e Isabel	Fábio e Isabel	Rafael e Isabel

QUANTOS PARES DIFERENTES PODERÃO SER FORMADOS COM ESSAS PESSOAS? 16 pares diferentes

Fonte: Livro D.

A pouca variação de representações simbólicas apresentadas como suporte na apresentação dos problemas diverge do recomendado no Guia do PNLA (BRASIL, 2008), que salienta a necessidade da abordagem de representações simbólicas variadas para auxiliar na compreensão das situações-problema. Dessa forma, a ausência de representações variadas na apresentação dos problemas não estimula os alunos a resolverem as situações propostas a partir do uso de diferentes simbologias. De forma contrária ao que se afirma no Guia PNLA (BRASIL, 2008) sobre os livros analisados, não há estímulo ao conhecimento de formas variadas de representar situações combinatórias.

Representações simbólicas solicitadas aos alunos nos livros de alfabetização da EJA

Quanto aos tipos de representações simbólicas solicitadas a serem utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas combinatórios, observa-se, na Tabela 3, pouca diversidade. Não há solicitação de representação específica para resolução das situações-problema em 67% dos problemas combinatórios, seguido de 21% dos problemas nos quais se solicita o uso de material manipulativo para sua resolução. Já em 8% dos problemas há solicitação do uso de desenhos e em 4% solicita-se o preenchimento de tabela ou quadro.

Nas obras analisadas, observa-se a inexistência de solicitação de uso da calculadora, de jogos, algoritmos e cálculo mental. Esses são modos usuais de representações que podem auxiliar na resolução de problemas e consequente aprendizado de conceitos.

Tabela 3. Tipos de representações simbólicas que são solicitadas nos problemas combinatórios

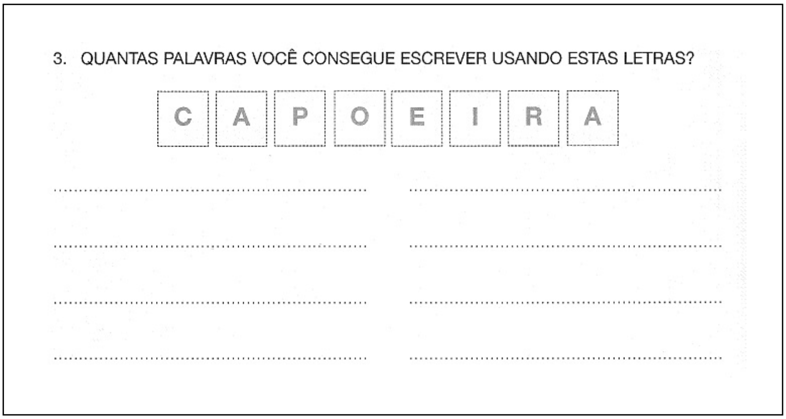
Livros aprovados no PNLA 2008	Enunciado sem solicitação	Desenho	Manipulativo	Preenchimento de quadros/ tabela
A	5	2	2	-
B	4	-	2	1
C	1	-	-	-
D	2	-	-	-
E	2	-	1	-
F	3	-	-	-
G	-	-	-	-
H	-	-	1	-
I	-	-	-	-
J	5	-	-	-
K	3	-	-	-
L	1	-	-	-
M	-	-	-	-

Livros aprovados no PNLA 2008	Enunciado sem solicitação	Desenho	Manipulativo	Preenchimento de quadros/ tabela
N	2	-	-	-
O	2	-	2	-
P	-	-	2	-
Q	-	1	-	-
R	1	-	-	-
S	1	1	-	1
Total	32	4	10	2

Fonte: Martins (2010).

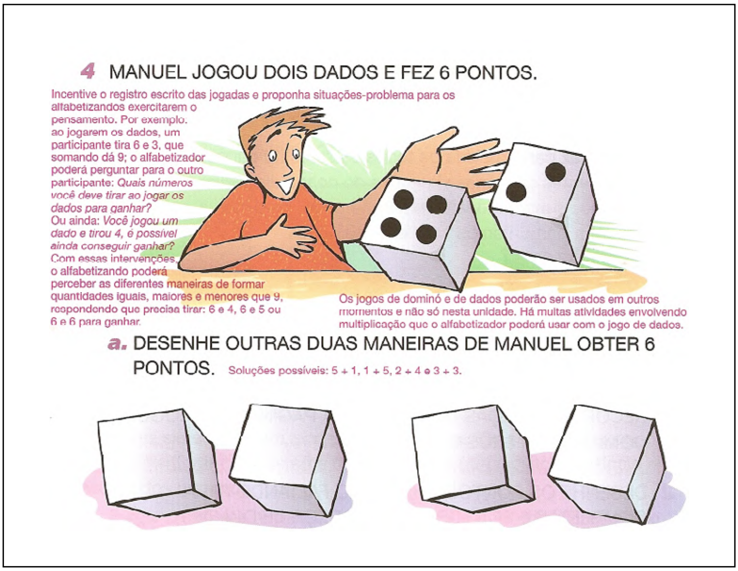
São apresentados, a seguir, exemplos de solicitação aos alunos de representação simbólica para resolução dos problemas combinatórios.

Figura 8. Exemplo de problema com enunciado sem solicitação de representação simbólica para resolução



Fonte: Livro F.

Figura 9. Exemplo de problema que solicita desenho em sua resolução



Fonte: Livro Q.

Figura 10. Exemplo de problema que solicita uso de material manipulativo em sua resolução

AGORA É SUA VEZ. USANDO AS NOTAS QUE VOCÊ VAI ENCONTRAR NO MATERIAL DE APOIO, ORGANIZE DIFERENTES POSSIBILIDADES DE SE CHEGAR AOS VALORES ABAIXO. DEPOIS, REGISTRE AS POSSIBILIDADES QUE VOCÊ ENCONTROU:

R$ 87,00 – OITENTA E SETE REAIS

Nesta atividade, os alunos usarão as notas como material de contagem e simularão situações reais de representação de quantidades/valores. Dessa forma, deverão registrar o máximo de possibilidades que conseguirem. Socialize as estratégias utilizadas pelos alunos.

R$ 156,00 – CENTO E CINQÜENTA E SEIS REAIS

Fonte: Livro H.

Figura 11. Exemplo de problema que solicita preenchimento de quadro/tabela para sua resolução

1. ENCONTRE TODAS AS POSSIBILIDADES DE FORMAR UM GRUPO DE 6 PESSOAS, COM HOMENS E MULHERES. COMPLETE O QUADRO.

HOMENS	MAIS	MULHERES	IGUAL	GRUPO DE 6 PESSOAS
1	+	5	=	6
2	+			

Fonte: Livro S.

Muitos jovens e adultos com pouca ou nenhuma escolarização dominam, de alguma forma, estratégias matemáticas para resolução de problemas cotidianos. Estudos, como o de Silva e Borba (2007), com adultos e crianças resolvendo problemas que envolviam números decimais, salientam a importância da valorização da matemática oral, tão bem desenvolvida e utilizada pelos jovens e adultos. Vale a pena ressaltar que, no estudo de Gomes e Borba (2014), os profissionais utilizavam também algoritmos formais, ou seja, há certas atividades cotidianas nas quais os adultos pouco escolarizados utilizam procedimentos escolares formais.

Valorizando representações já familiares, também é importante levar alunos jovens e adultos a trabalharem com variadas formas de representação, sejam escritas, por uso de materiais concretos, pictóricas, por meio de símbolos formais ou por recursos orais, que tenham como objetivo maior a compreensão de conceitos e suas propriedades. No decorrer desse processo, é importante que os alunos sejam levados "a elaborar hipóteses, construir representações (desenhos, esquemas), analisar escritas de números de diferentes grandezas e também produzir escritas pessoais, podendo argumentar sobre essas construções" (BRASIL, 2001, p. 113).

Para que haja uma eficaz aprendizagem de conceitos, a partir da resolução de problemas, as representações simbólicas apresentadas em Livros Didáticos e trabalhadas em sala de aula devem ser diversificadas, assim como os contextos nos quais os problemas estão inseridos, os significados presentes nas situações e as propriedades que as caracterizam.

Contextos trabalhados nos livros de alfabetização da EJA

Os contextos apresentados nos problemas combinatórios foram classificados conforme o Quadro 1.

Quadro 1. Definição dos tipos de contextos encontrados nos livros de alfabetização de jovens e adultos analisados (continua)

Tipos de Contextos	Exemplos
Contexto diversão – As situações que se referem ao lazer. Destacam-se nesse contexto situações de jogos, festas, viagens e passeios.	*Num jogo de boliche João derrubou 6 pinos em 3 lançamentos. Quantos pinos João derrubou no total? (GONÇALVES, 2007, p. 156).*
Contexto doméstico – As situações que se referem ao dia a dia doméstico. Destacam-se nessa categoria as situações que envolvem economia doméstica, alimentação e afazeres domésticos.	*Uma pessoa que escova s dentes em 2 minutos com a torneira aberta gasta, aproximadamente, 8 litros de água. Se ela fizer isso 3 vezes por dia quantos litros gastará? (BRAGANÇA; CARPANEDA, 2007, p. 289).*

Tipos de Contextos	Exemplos
Contexto escolar – Situações que se referem à organização escolar, materiais escolares, grupos de alunos e professores.	*Uma turma da* EJA *vai fazer um trabalho de pesquisa sobre profissões. Para isso, eles serão reunidos em grupos de 6 componentes. Sabendo que a turma tem 24 alfabetizandos, quantos grupos serão formados?* (BAGANÇA; CARPANEDA, 2007, p. 263).
Contexto de medidas – Situações que se referem a medidas de comprimento, capacidade, massa e tempo que não estão diretamente relacionadas com nenhum dos contextos citados anteriormente. Destacam-se nessa classificação distância de lugares, peso de objetos, capacidade de substâncias e outras.	*Imagine que você vai fazer um churrasco para 20 pessoas. Quantos quilos de carne você precisa comprar sabendo que cada pessoa come em média 300 gramas de carne?* (NAHUM, 2007, p. 193).
Contexto monetário – Estão classificadas nesse contexto as situações-problema que envolvem dinheiro. Destacam-se nesse contexto, situações de compra, venda, desconto, aumento, preço por unidades e troco.	*Maria foi a uma loja aproveitar a liquidação. Comprou uma calça que custava R$ 20,00, mas teve um desconto de 10%. Quanto ela pagou pela calça?* (RIGONI, 2007, p. 195).
Contexto profissional – As situações que se referem diretamente às situações vivenciadas nas diversas atividades profissionais. Destacam-se nesse contexto as relações de produtividade, salário, benefícios e horas trabalhadas.	*Seu Mário é mecânico. Ele precisa da sua ajuda. Ele desmontou três carros de duas portas para vender as peças. No final ele ficou com: Quantos volantes? Quantas rodas? Quantas portas? Quantos espelhos?* (NERY; GIANNI, 2007, p. 216).
Contexto matemático – Esta categoria refere-se aos problemas que não apresentam nenhum contexto extramatemático, são os problemas que envolvem números sem relação com nenhum tipo de situação do dia a dia. Destacam-se nessa categoria os problemas que envolvem algoritmos.	*Escreva todos os números de dois algarismos que você conseguir usando 3, 5 e 7. Não vale usar o mesmo algarismo duas vezes.* (BRAGRANÇA; CARPANRDA. 2007, p. 228).

Tipos de Contextos	Exemplos
Outros – Nesta categoria estão classificadas situações-problema do cotidiano de contextos distintos do descritos acima. Destacam-se nesta categoria situações que envolvem a organização, caracterização e quantificação de objetos, bem como relacionadas a notícias e outros contextos.	*Seu Romildo recebeu novas mudas e precisa reparti-las entre Antônio, Manoel e Pedro. Observe a quantidade de mudas e ajude-o a fazer a distribuição.* (HAILER; GUIMARÃES, 2007, p. 210).

Fonte: Martins (2010).

Quanto à adequação dos contextos apresentados nos problemas combinatórios, pode-se afirmar que as obras analisadas apresentam contextos adequados a alunos da Educação de Jovens e Adultos, embora se concentre em apenas três categorias de contextos. Observa-se, na Tabela 4, que o contexto monetário apresenta maior representatividade (44% dos problemas), seguido de contexto escolar (35%) e de outros contextos (21%).

Tabela 4. Quantitativo de contextos apresentados nos problemas combinatórios dos livros analisados

Livros aprovados no PNLA 2008	Contextos		
	Escolar	Monetário	Contexto Matemático
Livro A	4	3	2
Livro B	3	2	2
Livro C	1	-	-
Livro D	1		1
Livro E	1	2	-

Livros aprovados no PNLA 2008	Contextos		
	Escolar	Monetário	Contexto Matemático
Livro F	2	1	-
Livro G	-	-	-
Livro H	-	1	-
Livro I	-	-	-
Livro J	1	2	2
Livro K	2	-	1
Livro L	-	1	-
Livro M	-	-	-
Livro N	1	1	-
Livro O	1	3	-
Livro P	-	2	-
Livro Q	-	1	-
Livro R	-	1	-
Livro S	-	1	2
Total	17	21	10

Fonte: Martins (2010).

Não foram observados problemas combinatórios no contexto doméstico, de medidas, profissional, entre outros contextos. Desse modo, as obras apresentam uma variedade que poderia ter sido ampliada, tendo em vista que os conhecimentos prévios trazidos por jovens e adultos estão inseridos em contextos sociais muito vastos e diversificados.

Seguem exemplos dos contextos observados nos livros analisados.

Figura 12. Exemplo de problema envolvendo contexto escolar

1. O número 231 tem três algarismos. Como neste capítulo estamos trabalhando igualdade e diferença, você vai fazer mais quatro números usando esses mesmos três algarismos, mas não vale fazer dois números iguais e não pode repetir nenhum algarismo no mesmo número.

Fonte: Livro A.

Figura 13. Exemplo de problema envolvendo contexto monetário

11. Como podemos obter R$ 12,00 usando moedas de R$ 1,00 e cédulas de R$ 2,00, R$ 5,00 e R$ 10,00? Uma opção já foi dada. Complete: Sugestões:

Valor	R$ 1,00	R$ 2,00	R$ 5,00	R$ 10,00	Expressão
R$ 12,00	2			1	2 x R$ 1,00 + R$ 10,00
R$ 12,00		1	2		1 x R$ 2,00 + 2 x R$ 5,00
R$ 12,00	2		2		2 x R$ 1,00 + 2 x R$ 5,00
R$ 12,00		1		1	1 x R$ 2,00 + 1 x R$ 10,00
R$ 12,00		6			6 x R$ 2,00

Fonte: Livro O.

Figura 14. Exemplo de problema envolvendo contexto matemático

1. ENCONTRE TODAS AS POSSIBILIDADES DE FORMAR UM GRUPO DE 6 PESSOAS, COM HOMENS E MULHERES. COMPLETE O QUADRO.

HOMENS	MAIS	MULHERES	IGUAL	GRUPO DE 6 PESSOAS
1	+	5	=	6
2	+			

Fonte: Livro S.

De modo geral, as especificidades e características inerentes à EJA foram pouco exploradas em situações cotidianas do jovem e do adulto, como cálculos envolvidos em situação de compra e venda, cálculo de valores de itens que compõem a alimentação doméstica, bem como gastos com orçamentos, uso de moedas e cédulas em compras, problemas referentes a receitas caseiras, entre outras situações vivenciadas.

Salienta-se, entretanto, a necessidade de distribuir mais equitativamente as variedades de contextos nas obras, sem valorizar determinado contexto em detrimento de outros – como é o caso da supervalorização do contexto monetário. É importante observar que a diversidade de contextos variados poderá possibilitar aos educandos da EJA a transferência dos conhecimentos utilizados em problemas que abordem contextos familiares vivenciados em seu dia a dia para situações novas que abordem contextos não ou pouco familiares (SCHILIEMANN, 1988; SILVA; BORBA, 2007).

CONCLUSÕES DAS ANÁLISES DE LIVROS DIDÁTICOS DE ALFABETIZAÇÃO DA EJA

Diversos são os avanços observados em cada edição de avaliação do livro didático proposta pelo governo federal (nos Programas Nacionais de Livros Didáticos). É consenso entre professores, pesquisadores e estudiosos das variadas áreas de conhecimento que esses programas têm levado muitos autores de Livros Didáticos a voltarem sua atenção para importantes aspectos conceituais, didáticos e gráficos, visando a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem ocorridos em sala de aula.

Após análise dos dados coletados neste estudo, pode-se constatar nessa primeira edição do Programa Nacional do Livro Didático para

Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA/BRASIL, 2008), quanto à diversidade de problemas combinatórios, que os problemas de *combinação* são os mais abordados, embora esse tipo de problema e os demais – de *arranjo*, *permutação* e *produto de medidas* – raramente sejam abordados nos livros. É importante ressaltar a necessidade da abordagem do trabalho com as variadas situações multiplicativas, em seus diferentes graus de complexidade, com o intuito de estimular o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos alunos, em particular o raciocínio combinatório.

No que se refere às representações simbólicas apresentadas nos problemas combinatórios, predominam os que apresentam apenas enunciados e enunciados com desenho como suporte aos problemas. Observa-se nas obras analisadas a pouca variedade de representações, sem apresentação de problemas com a calculadora, manipulativos, jogos, cálculo mental e gráficos – recursos muito importantes no aprendizado da Matemática.

Quanto às representações simbólicas solicitadas para auxiliar os alunos na resolução dos problemas, há um predomínio em enunciados sem nenhum tipo de solicitação de resolução. Em pequena quantidade, os livros analisados contemplam apenas as categorias de uso de manipulativos, desenhos e preenchimento de tabela e quadro como representações simbólicas solicitadas. Vale salientar que, embora documentos oficiais destaquem a necessidade de uma abordagem ampla de simbologias, os autores não evidenciaram o intensivo estímulo a outros tipos de representações, salvo as representações tradicionais, utilizando, primordialmente, enunciados sem solicitação de representações na resolução.

No que se refere à atenção dada à não infantilização dos contextos apresentados nos problemas combinatórios nas obras analisadas, é importante enfatizar que eles são considerados adequados ao público dessa modalidade de ensino. Contudo, alguns contextos foram privilegiados, como o contexto monetário, em detrimento de outros que não foram abordados, mas que também se fazem presentes no cotidiano de jovens e adultos.

Portanto, a partir dos dados coletados e análise dos mesmos, não se pode afirmar que na primeira edição do PNLA de Matemática haja distribuição equitativa dos significados dos problemas combinatórios. Igualmente, não há variedade suficiente nas formas de representações simbólicas de apresentação dos problemas e sugeridas para resolução de situações propostas. Porém, no que se refere aos contextos, esses se apresentaram adequados à modalidade de ensino à qual estão direcionados, necessitando apenas de uma maior diversidade. Nesse sentido, no que diz respeito à abordagem da Combinatória, o PNLA (BRASIL, 2008) parece pouco contribuir para ampliação do raciocínio combinatório de jovens e adultos em início de escolarização.

Ao se pensar na Educação Matemática de jovens e adultos, de acordo com as afirmações de Fonseca (2002), é preciso pensar que os educandos solucionam problemas reais e imediatos, essenciais nas suas atividades profissionais e em outras instâncias de suas vidas. É necessário, assim, promover a discussão sobre a necessidade de colocar os alunos jovens e adultos em situações desafiadoras, propondo a esses, através de situações-problema, diferentes significados e representações, bem como o uso de contextos apropriados para a modalidade de ensino da EJA.

De acordo com Vergnaud (1991), é necessário diversificar significados e representações simbólicas nos problemas apresentados aos alunos. Essa variedade pode promover a compreensão dos conceitos de forma estimulante, fornecendo ao aluno condições de exercer seu direito de cidadão, atuando de forma ativa na sociedade em que vive.

Nessa direção, Silva, Borba e Monteiro (2015) afirmam que as práticas de Educação Matemática na EJA devem ser voltadas para o fortalecimento da autoestima, resgate da dignidade, bem como para construção da identidade dos estudantes que dela participam.

Embora as avaliações de livros didáticos promovidas pelo governo federal sejam bastante relevantes na qualidade desse recurso, constata-se que há aspectos que necessitam de uma análise mais refinada, sendo abordados em pesquisas científicas da Educação Matemática. É de extrema importância que autores e editoras de livros estejam atentos não apenas às normas específicas estabelecidas nos planos de avaliação dos livros, como também às pesquisas desenvolvidas no meio científico, para que esse recurso didático tão utilizado no contexto educacional do Brasil seja, cada vez mais, aperfeiçoado.

Um estudo de doutorado, em andamento, tem buscado ampliar a discussão sobre o ensino de Combinatória na Educação de Jovens e Adultos, analisando como se propõe e se vivencia esse conteúdo em variadas instâncias curriculares. Um recorte desse estudo encontra-se em Martins e Borba (2018) e, com a continuidade da investigação, almeja-se trazer mais contribuições ao desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes da EJA.

REFERÊNCIAS

ARROYO, Miguel. *Outros Sujeitos, Outras Pedagogias.* 2 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

AZEVEDO, Danilo. *Uma análise de livros didáticos de Matemática da Coleção "EJA – Mundo do Trabalho"*. 2017. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2017.

AZEVEDO, Juliana. *Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?* 2013. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia*. v. 2. Recife: UFPE, 2007. p. 1-21.

BRAGANÇA, Angiolina; CARPANEDA, Isabela. *Vida Nova*. São Paulo: FTD S.A., 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. *Educação para Jovens e Adultos:* Ensino Fundamental: proposta curricular – 1º segmento. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. *Brasil Alfabetizado:* experiências de avaliação dos parceiros. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Guia PNLA*. Brasília: MEC, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular – BNCC*. Brasília: MEC, 2017.

FONSECA, Maria. *Educação Matemática de Jovens e Adultos.* Belo Horizonte/MG: Autêntica, 2002.

GOMES, Maria; BORBA, Rute. Profissionais fazendo matemática: avanços e limites nos cálculos com números decimais. *Zetetiké (on-line),* v. 22, n. 2, p. 89-122, nov., 2014.

GONÇALVES, Jane. *Alfabetiza Brasil*. Curitiba: Módulo Editora e Desenvolvimento Educacional Ltda., 2007.

HAILER, Marco; GUIMARÃES, Karina. *Ponto de Encontro*. São Paulo: FTD S.A., 2007.

LIMA, Katia. Currículo de Matemática da Educação de Jovens e Adultos: uma análise baseada em livros didáticos. *Revista Eventos Pedagógicos*, v. 8, p. 321-322, 2017.

MARTINS, Glauce. *Livros didáticos de alfabetização de jovens e adultos:* um estudo sobre as estruturas multiplicativas. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

MARTINS, Glauce; BORBA, Rute. Combinatória: Currículos prescrito e apresentado na Educação de Jovens e Adultos. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2018. Foz do Iguaçu. *Anais...* Foz de Iguaçu, PR: SBEM, 2018.

NAHUM, Erdna. *Alfabetização de Jovens e Adultos – Vale a Pena!* São Paulo: Scipione S.A., 2007.

NERY, Salvador; GIANNI, Eloísa. *Caminhos para a Cidadania: Alfabetização e Diversidade.* São Paulo: Edições Escala Educacional S.A., 2007.

NUNES, Célia; SANTANA, Eurivalda. Resolução de problemas: um caminho para aprender a fazer matemática. *Scientiae*, v. 19, p. 1-19, 2017.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1a a 4a série. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte, MG: SBEM/UNI-BH, 2007.

RIGONI, Fátima. *Muda o Mundo Brasil*. Curitiba: Módulo Editora e Desenvolvimento Educacional Ltda., 2007.

SANTOS, Luciana. *Raciocínio Combinatório na EJA*. *In:* Encontro Sergipano de Educação Matemática, 8., 2008, Aracajú. *Anais...* Aracaju, SE, 2008.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. *In:* CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988. p.85-100.

SILVA, Valdenice; BORBA, Rute. Diferentes saberes de adultos e crianças em números decimais: implicações para a prática educativa. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007, Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte, MG: SBEM/UNI-BH, 2007.

SILVA, Valdenice; BORBA, Rute; MONTEIRO, Carlos. Saberes matemáticos na ação cidadã: conhecimento de números decimais de jovens e adultos. *UNIÓN*, San Cristobal de La Laguna, v. 41, p. 39-56, 2015.

VERGNAUD, Gerard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, v. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD. Gerard. *El niño, las matemáticas y la realidad:* Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

ZUFFI, Edna. ONUCHIC, Lourdes. O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores. *Revista Iberoamericana de Matemática*, n. 11, p. 79-97, set., 2007.

5 Árvores de possibilidades e o desenvolvimento do raciocínio combinatório

Juliana Azevedo Montenegro
Rute E. de S. Rosa Borba

POR QUE USAR ÁRVORES DE POSSIBILIDADES NA APRENDIZAGEM DE COMBINATÓRIA?

O raciocínio combinatório pode se desenvolver com o auxílio de diferentes recursos, como a resolução de problemas, o uso das tecnologias da informação, jogos, entre outros, conforme destacado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), e pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). A utilização de recursos variados visa facilitar os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e, consequentemente, a apreensão de diversos conceitos, como, em particular, os referentes à Combinatória.

Entre as representações simbólicas que podem ser usadas para o ensino de Combinatória, destacam-se as árvores de possibilidades, também conhecidas como *diagramas de árvore* ou *diagramas de possibilidades*. Entende-se que, por meio de representações sistemáticas, como é o caso da árvore de possibilidades, os estudantes podem analisar as distintas situações combinatórias e perceber padrões, levando à generalização das possibilidades.

Em conformidade com esse pensamento, o presente estudo aborda a resolução de problemas combinatórios por meio do uso de árvores de possibilidades – com uso de lápis e papel ou com utilização do computador – como recursos facilitadores da aprendizagem. Acredita-se que essa representação simbólica possibilita que se entendam diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar variados tipos de problemas combinatórios, observando-se as semelhanças e diferenças entre eles.

Quanto ao uso das tecnologias em sala de aula, Borba e Penteado (2010, p. 13), afirmam que "[...] sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento". Assim, o lápis e o papel atuam como tecnologias utilizadas de forma predominante em sala de aula. Entretanto, percebe-se que as tecnologias informáticas estão cada vez mais inseridas no contexto escolar, o que se deve ao fato de que essas tecnologias possibilitam o acesso a discussões teóricas e práticas em relação ao ensino e à aprendizagem de qualquer área do conhecimento, bem como a obtenção de informações sobre recursos digitais que podem ser utilizados em sala de aula.

No caso específico da construção de árvores de possibilidades, o uso do computador pode aliviar algum trabalho que seria efetuado pelo aluno. Por exemplo, a sistematização de todas as possibilidades pode ser efetuada por um *software*, permitindo que o aluno concentre sua atenção em outros aspectos importantes dos problemas, como a correta interpretação do enunciado, as relações envolvidas em cada tipo de problema combinatório e as expressões numéricas que podem ser utilizadas para a resolução desses problemas.

Em contrapartida, a construção de árvores de possibilidades em lápis e papel pode demandar um raciocínio sobre a situação combinatória desde o início de sua resolução. Isso porque o aluno precisará efetuar escolhas sobre os elementos que constituirão as possibilidades, pensar sobre a ordenação dos elementos no momento da construção da árvore, entre outras relações.

Como discutido no capítulo introdutório, outro aspecto do aprendizado matemático é apontado por Vergnaud (1986) ao enfatizar que conceitos são articulados entre si, sendo esta inter-relação de conceitos denominada de *campos conceituais*. Como já apontado anteriormente, Vergnaud (1996) considera um campo conceitual como um conjunto de situações que dão significado ao conceito.

Sendo assim, esperava-se, neste estudo, que a abordagem da Combinatória pela resolução de situações diversificadas que caracterizam este conteúdo favorecesse seu domínio, uma vez que, como enfatiza Vergnaud (1986), resolvendo variadas situações de um campo conceitual, conceitos desse campo são construídos pelos alunos.

Vergnaud (1996, p. 184) também ressalta a importância das representações simbólicas, afirmando que elas "[...] têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas". Dessa forma, esperava-se que a resolução de situações combinatórias por meio de árvores de possibilidades influenciasse diretamente no sucesso de seu aprendizado, uma vez que o uso dessa representação simbólica pode permitir avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório ao apontar as etapas de escolha necessárias (FISCHBEIN, 1975 *apud* BORBA, 2010).

Desse modo, o estudo relatado neste capítulo visa analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, a influência da construção de árvores de possibilidades, com o uso de lápis e papel ou de um *software* educativo, na aprendizagem de diferentes situações combinatórias por alunos dos anos iniciais de escolarização. Para que isso acontecesse, os participantes deste estudo resolveram situações combinatórias por meio de árvores de possibilidades, fazendo uso de lápis e papel ou do *software* educacional *Diagramas de Árbol*[1]. Tal atividade visava possibilitar a reflexão sobre situações combinatórias e o estabelecimento de relações entre as mesmas para que, por meio de distintas sessões de ensino, os estudantes desenvolvessem aprendizagens em Combinatória.

COMO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES FORAM USADAS COMO RECURSO DE APRENDIZAGEM?

O estudo aqui relatado foi realizado com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Recife. A escolha de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental foi baseada, principalmente, no fato de que esses alunos já haviam aprendido sobre multiplicação e divisão e possuíam maior autonomia na leitura e interpretação de enunciados. As duas escolas foram escolhidas para atender ao quantitativo de alunos desejados para a concretização da pesquisa, não sendo objetivo compará-las.

Em ambas as escolas, foi aplicado um teste inicial, seguido de distintas formas de ensino, realizadas em um encontro, e, ao final, dois testes que permitiram avaliar os avanços obtidos por meio do

1 *Diagramas de Árbol* não se trata de um *software livre*, ele foi concedido pelas autoras Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) para uso pelo Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração).

ensino realizado. Durante a sessão de ensino, os alunos trabalharam em duplas, as quais foram distribuídas em quatro grupos distintos, de acordo com a proposta de ensino para cada grupo.

O primeiro grupo, G1, caracterizado como o primeiro grupo experimental, trabalhou com o *software Diagramas de Árbol*, no qual são construídas árvores de possibilidades; o segundo grupo, G2, também um grupo experimental, construiu árvores de possibilidades com lápis e papel; o terceiro grupo, G3, formou o grupo controle assistido, que trabalhou problemas multiplicativos (excluindo-se os de Combinatória) por meio de desenhos. Dessa forma, pretendia-se observar se a instrução em problemas multiplicativos – não combinatórios – seria suficiente para o avanço de desempenho em situações combinatórias do teste após a aula. Houve, ainda, a participação do quarto grupo, G4, que caracterizou o grupo controle desassistido, objetivando certificar-se de que apenas o passar de tempo e outras atividades escolares não era suficiente para que se desse o aprendizado em Combinatória.

No teste inicial, os alunos responderam oito situações-problema referentes à Combinatória, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto de medidas, arranjo, combinação* e *permutação*. Como pode ser visto no Quadro 1.

Essas questões também foram trabalhadas na sessão de ensino dos grupos que trabalharam a Combinatória (G1 e G2). Desse modo, no processo de ensino, as questões do teste inicial foram usadas, visando comparar as respostas anteriores, com o intuito de que os alunos percebessem os seus erros e acertos nas questões. A partir dos resultados encontrados no teste inicial, os 40 alunos foram divididos em quatro grupos, nos quais foram distribuídos de acordo com seus acertos, buscando garantir que os grupos partissem de uma mesma média de nível inicial. Assim, cada grupo foi constituído por cinco duplas, sendo três delas da Escola 1 e duas duplas da Escola 2.

As questões que foram propostas para os alunos do terceiro grupo (com ensino em estruturas multiplicativas não combinatórias) foram baseadas na classificação de problemas multiplicativos sugerida por Nunes e Bryant (1997). Dessa forma, a lista de questões destinada a esse grupo foi composta por oito situações-problema, sendo duas questões para o tipo *multiplicação*, duas questões do tipo *problema inverso da multiplicação*[2], duas questões para *relação entre variáveis – co-variação* – e duas questões de *distribuição*[3]. O único tipo de problema multiplicativo, abordado por Nunes e Bryant (1997), que não foi incluído na lista é o que eles denominam de *produto cartesiano*, pelo fato de não ter sido abordado pelo grupo, relacionado à ideia de Combinatória.

Quadro 1. Problemas do teste inicial (todos os grupos) e trabalhados na proposta de ensino para o Grupo 1 (com *software*) e o Grupo 2 (com papel e lápis)

Produto de medidas:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois

2 Este tipo de problema também é conhecido como *quotição*.

3 Este tipo de problema também é conhecido como *partição*.

bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7 De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

8 Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Adaptado de Azevedo, Costa e Borba (2011).

Após cinco dias do processo de ensino, foi aplicado, com os 40 alunos, as questões referentes a um primeiro teste após a aula, objetivando verificar os avanços obtidos por meio das sessões de ensino realizadas. Nove semanas depois das sessões de ensino, foi aplicado um segundo teste, após a aula, com 38 dos 40 alunos presentes[4].

4 Destaca-se que no teste inicial e no primeiro teste após a aula havia 40 alunos participantes da pesquisa, e no segundo teste após a aula havia 38 alunos. Isso porque dois alunos não estavam mais na mesma escola na época da realização do segundo teste após a aula.

Com esses dois testes – com problemas combinatórios semelhantes aos resolvidos no teste inicial – objetivava-se observar a retenção do aprendizado dos grupos com diferentes modos de ensino, verificando se, logo após e um tempo depois, os alunos haviam retido a aprendizagem e, com isso, demonstrar se a mesma foi apenas pontual ou mais permanente.

Foi realizada uma análise quantitativa das questões acertadas pelos alunos participantes da pesquisa, verificando-se o número de questões acertadas no teste inicial e nos testes após a aula (primeiro e segundo), buscando comparar os acertos antes e depois do processo de ensino, em função dos grupos experimentais e controles. Todas essas análises foram realizadas por meio do uso do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Análises qualitativas acompanharam as quantitativas, buscando possíveis explicações para melhores desempenhos de certos grupos e em alguns tipos de problemas. Acredita-se, dessa forma, que análises quantitativas direcionaram o olhar para os destaques em desempenhos e as análises qualitativas auxiliaram na busca de justificativas para as diferenças de desempenho observadas.

COMO A CONSTRUÇÃO DE ÁRVORES DE POSSIBILIDADES AUXILIOU O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO?

Tipos de respostas dadas pelos alunos

Após a aplicação do teste inicial, foi decidido classificar o erro e o acerto das crianças segundo alguns critérios de pontuação, para qualificar o desempenho além de mero erro ou acerto pleno. A pontuação foi dividida em níveis crescentes, iniciando pelo erro do aluno, passando por acertos parciais e terminando no acerto total da questão, como se pode observar no Quadro 2.

A formação das duplas foi realizada por meio do número de pontos alcançados pelos alunos no teste inicial. Essa distribuição ocorreu com o objetivo de que houvesse diferentes níveis de compreensão inicial em cada grupo e que a média de acertos de cada grupo, antes do ensino, fosse próxima.

Quadro 2. Níveis crescentes de pontuação por tipo de resposta

Tipo de resposta	Pontuação	Descrição
Resposta errada	0 ponto	Não apresenta relação com Combinatória, ou seja, na sua resolução a criança não aponta indícios de compreensão do problema proposto. (Ver exemplo na Figura 1)
Resposta parcialmente correta 1	1 ponto	Escolhe apenas um caso, ou seja, a criança escolhe apenas uma possibilidade, não indicando perceber que podem existir outras. (Ver exemplo na Figura 2)
Resposta parcialmente correta 2	2 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos de uma das quantidades citadas no problema. (Ver exemplo na Figura 3)
Resposta parcialmente correta 3	3 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, não limita ao número de uma das quantidades citadas, mas não consegue esgotar todas as possibilidades. (Ver exemplo na Figura 4)
Resposta correta	4 pontos	Esgota todas as possibilidades, ou seja, acerta a questão apontando todas as possibilidades da questão. (Ver exemplo na Figura 5)

Fonte: Azevedo (2013).

Figura 1. *Resposta errada* do Aluno 34 para a oitava questão do teste inicial, na qual *não há relação combinatória explicitada*

> 8. Quantas palavras, com e sem sentido, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?
>
> Resposta: Amor palavras 2, Amor com sentido Amor sem sentido

Fonte: Azevedo (2013).

Figura 2. *Resposta parcialmente correta 1* do Aluno 32 para a quinta questão do teste inicial, *na qual foi escolhido apenas um caso*

> **5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1° e 2° lugares?**
>
> **Resposta:** QUEM PODE FICAR EM PRIMEIRO É LÉO E SEGUNDO PEDRO.

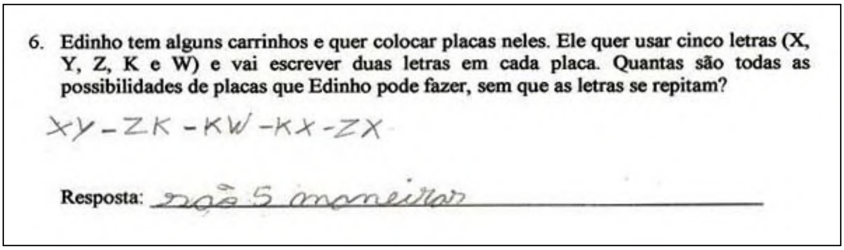
Fonte: Azevedo (2013).

Figura 3. *Resposta parcialmente correta 2* do Aluno 22 para a sexta questão do teste inicial, *na qual se limitou os casos ao número de elementos*

> **6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?**
>
> **Resposta:** Junta-se X e Y Z e K e W Fica só

Fonte: Azevedo (2013).

Figura 4. *Resposta parcialmente correta 3* do Aluno 6 para a sexta questão do teste inicial, *na qual se enumerou alguns casos, não limitando ao número de uma das quantidades citadas, mas não se conseguiu esgotar todas as possibilidades*

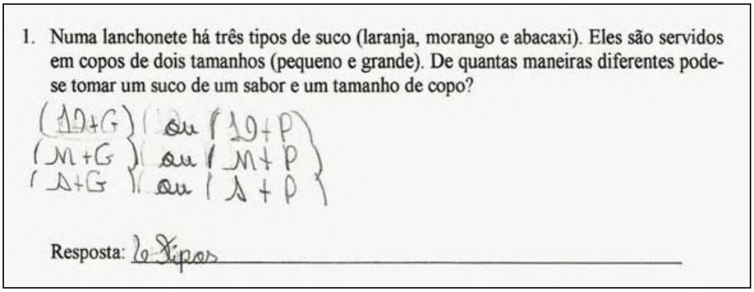

6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

XY - ZK - KW - KX - ZX

Resposta: são 5 maneiras

Fonte: Azevedo (2013).

Figura 5. *Resposta correta* do Aluno 15 para a primeira questão do teste inicial, *na qual se esgotou todas as possibilidades*


1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?

(AB+G) ou (AB+P)
(M+G) ou (M+P)
(L+G) ou (L+P)

Resposta: 6 tipos

Fonte: Azevedo (2013).

Acertos em problemas combinatórios: sondando com o teste inicial, verificando a aprendizagem no primeiro teste após o ensino e confirmando a retenção da aprendizagem no segundo teste após o ensino

Na Tabela 1, observa-se o desempenho médio por grupo nas distintas etapas do estudo. Como pode ser visto, os quatro grupos partiram de uma média inicial similar (próximo a 5 pontos). No teste aplicado poucos dias após a última sessão de ensino, os critérios de pontuação permaneceram os mesmos: de zero ponto (soluções sem relação combinatória) até quatro pontos (solução correta com indicação do total de possibilidades). Sendo oito problemas, o total possível de pontos seria 32.

Tabela 1. Comparação da média de desempenho por grupo no teste inicial e nos testes após a aula

Grupos	Teste inicial	Primeiro teste após a aula	Segundo teste após a aula
Grupo 1 (Árbol)	4,6	12,1	13,22
Grupo 2 (lápis e papel)	4,8	14,8	16,44
Grupo 3 (Controle – Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1	4,0
Grupo 4 (Controle – desassistido)	4,9	2,8	4,2

Fonte: Azevedo (2013).

Pode-se notar o avanço médio dos alunos que participaram do ensino em Combinatória, quando comparado ao resultado médio do teste inicial. Assim, percebe-se a evolução que ambos os grupos experimentais (G1 e G2) – que construíram árvores – apresentaram, uma vez que o salto na pontuação média é evidente, mesmo tendo participado de apenas uma sessão de ensino. Já os grupos que não participaram da sessão de ensino em Combinatória diminuíram suas médias de acertos no primeiro teste após a aula.

Para observar se o aprendizado evidenciado no primeiro teste após a aula era meramente imediato e temporário, ou se havia sido retido por mais tempo, realizou-se um segundo teste após a aula, nove semanas após aplicação do primeiro. É possível perceber, ainda observando a Tabela 1, que os alunos dos grupos com ensino específico em Combinatória (G1 e G2) continuaram avançando em seus conhecimentos sobre este conteúdo. Já os grupos que não participaram da sessão de ensino em Combinatória, que diminuíram sua média de acertos no primeiro teste após a aula, continuaram com baixas médias no segundo teste após a aula.

Assim, constatou-se que os alunos dos grupos com ensino por meio de árvores de possibilidades (G1 e G2) avançaram em seus conhecimentos sobre Combinatória. Além disso, percebe-se que houve um aumento nas médias de acerto também na comparação com o primeiro teste após a aula. Vale salientar que não houve, entre o primeiro e o segundo teste após a aula, sessões de ensino em Combinatória – nem pela pesquisadora nem pela escola – que justificassem esse aumento na média de acertos, sendo, portanto, uma evidência de que o conteúdo trabalhado na sessão de ensino do presente estudo foi, de fato, aprendido.

Ainda em relação à Tabela 1, pode-se perceber um avanço um pouco maior do Grupo 2, que construiu árvores de possibilidades em lápis e papel, em relação ao Grupo 1, que utilizou o *software* na construção de árvores. Esse desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita – com lápis e papel) adotada no teste inicial e nos testes após a aula, enquanto os alunos do Grupo 1 resolveram as situações por meio de um *software* e nos testes após a aula tiveram que utilizar uma representação escrita com uso do lápis e papel. Assim, parece ter havido uma demanda maior por parte do G1, pois teve que passar a representação que visualizaram no *software* em uma representação em lápis e papel.

Além disso, o Grupo 2 pode ter sido beneficiado por ter que pensar nas relações combinatórias concomitantemente à construção das árvores de possibilidades em lápis e papel, enquanto que o Grupo 1 teve a árvore de possibilidades construída pelo *software*, sendo necessário pensar nessas relações apenas no momento de selecionar os casos válidos. Assim, ao usar o *software* – que pode ser motivador para os alunos – é preciso dedicar tempo para os alunos perceberem que podem elaborar representações semelhantes no lápis e papel.

O Grupo 3, composto pelos alunos que tiveram aulas de problemas de multiplicação e divisão – campo conceitual no qual a Combinatória se insere – manteve, nos testes após a aula, a sua média de acertos em comparação com o teste inicial. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, parece não ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório. O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, não avançou no seu desempenho nos problemas, ou seja, nem o passar do tempo, nem as experiências escolares e extraescolares, foram suficientes para o aprendizado de situações combinatórias.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível destacar que ambos os grupos que participaram da sessão de ensino em Combinatória apresentaram diferenças significativas de desempenhos entre o teste inicial e o segundo teste após a aula, avançando substancialmente em seus conhecimentos combinatórios. O Grupo 1 (*software*), quando comparado o teste inicial com o segundo teste após a aula, obteve diferença significativa entre as respectivas médias[5], mas não houve diferenças significativas na comparação do primeiro teste após a aula com o segundo teste após a aula nesse grupo[6]. Já no Grupo 2 (lápis e papel), nesse mesmo panorama de comparação, também foi observada diferença significativa com o segundo teste após a aula[7] e, assim como para o Grupo 1, também nesse grupo não houve diferenças significativas na comparação do primeiro teste após a aula com o segundo teste após a aula[8]. O fato de não ter havido diferença significativa nesses dois grupos, em se tratando dos desempenhos nos testes após a aula, atesta que os dois grupos mantiveram estáveis os conhecimentos desenvolvidos durante as sessões de ensino.

Com o intuito de comprovar a influência do ensino nos resultados dos grupos experimentais, foi observado, ainda pela prova paramétrica *t-teste de amostras em pares*, que não houve diferenças significativas na comparação do teste inicial com o segundo teste após a aula do Grupo 3 (controle – estruturas multiplicativas)[9], nem do primeiro teste após a aula com o segundo teste após a aula[10]. Também não houve diferenças significativas na comparação do teste inicial com o segundo teste após a aula do Grupo 4 (controle desassistido)[11], nem do primeiro teste após a aula com o segundo teste após a aula[12].

---

5 $t(8) = -2{,}920$; $p = 0{,}019$.
6 $t(8) = -0{,}472$; $p = 0{,}649$.
7 $t(8) = -3{,}447$; $p = 0{,}009$.
8 $t(8) = -1{,}541$; $p = 0{,}162$.
9 $t(9) = 0{,}751$; $p = 0{,}472$.
10 $t(9) = 0{,}0750$; $p = 0{,}946$.
11 $t(9) = 0{,}391$; $p = 0{,}705$.
12 $t(9) = -0{,}782$; $p = 0{,}454$.

Como os alunos aprenderam com árvores de possibilidades

A sessão de ensino voltada para a resolução de problemas combinatórios teve como foco principal a construção de árvores de possibilidades – virtual ou em lápis e papel. No início da sessão, em ambos os grupos, foi explicado para os alunos que o teste continha oito situações-problema já resolvidas por eles na ocasião do teste inicial.

Também foi explicado que, no momento do ensino, a pesquisadora ajudaria os alunos na resolução da primeira situação de cada tipo de problema, e os alunos, em duplas, resolveriam sozinhos a segunda situação de cada tipo de problema. No entanto, a pesquisadora, que agia como professora, poderia tirar dúvidas, caso fosse necessário.

Além disso, foram ressaltadas as diferenças existentes entre os tipos de problemas combinatórios, ou seja, no momento da construção das árvores de possibilidades foi chamada a atenção para as relações presentes em cada tipo de situação: *produto de medidas*, *combinação*, *arranjo* ou *permutação*.

Como indicado no capítulo introdutório desse livro, Borba (2010) ressalta que uma primeira relação combinatória está associada à *escolha de elementos*, a partir de um ou mais conjuntos. Uma segunda relação está associada à *ordenação dos elementos*, ou seja, se a ordem em que os elementos estão dispostos irá gerar, ou não, novas possibilidades. Já o *esgotamento de possibilidades* é comum a todos os tipos de problemas, uma vez que busca determinar o número total de possibilidades de combinar os elementos, sob determinadas condições.

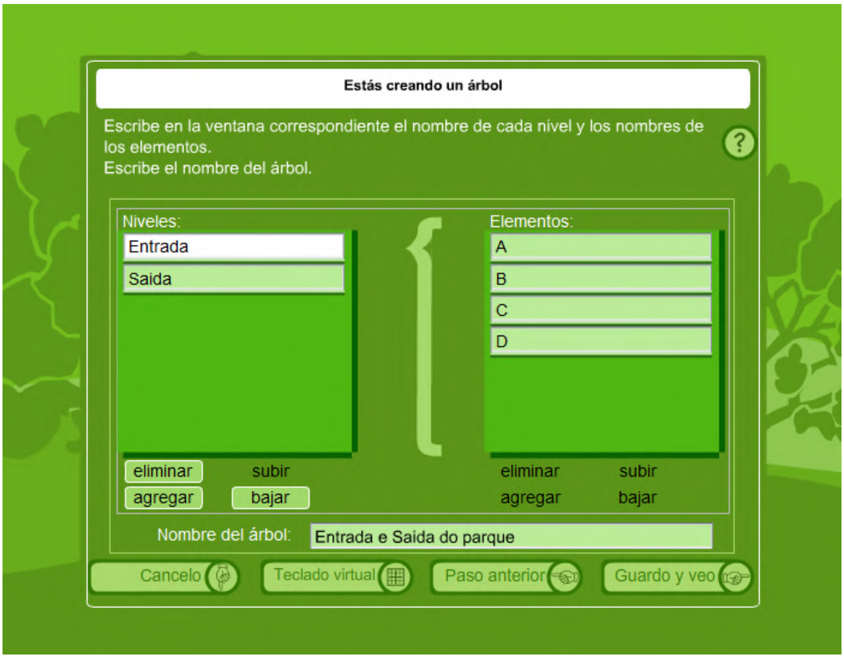
Dessa forma, foi chamada a atenção – por meio de questionamentos e em termos compreensíveis pelas crianças, isto é, termos não científicos ou coloquiais – que em problemas de *produto de medidas* tem-se: Relação 1 – Elementos de dois (ou mais) conjuntos diferentes formam um novo conjunto; Relação 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Ressaltou-se que em problemas de *combinação* tem-se: Relação 1 – Escolher alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Relação 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Em problemas de *arranjo* chamou-se a atenção que: Relação 1 – Escolher alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Relação 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades. Em problemas de *permutação* foi ressaltado que: Relação 1 – Todos os elementos de um conjunto são utilizados; Relação 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

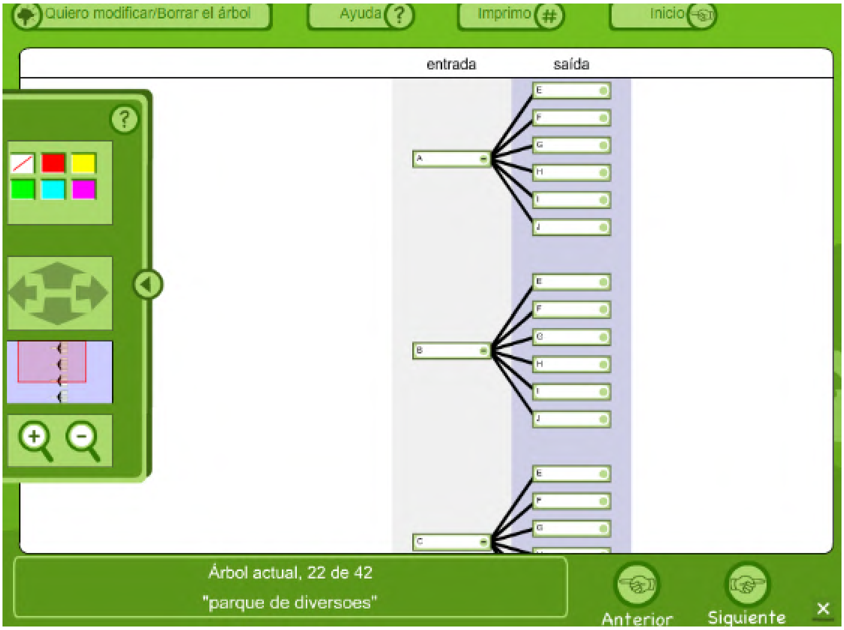
Utilizando como exemplo o segundo problema de *produto de medidas*, percebe-se que neste problema têm-se dois conjuntos diferentes: um conjunto de portões de entrada e outro conjunto de portões de saída, e combinando um elemento de cada conjunto serão formados novos conjuntos. Além disso, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, pois “Entrar pelo Portão A e sair pelo Portão E” é a mesma possibilidade que “Sair pelo Portão E e entrar pelo Portão A”.

Inicialmente, foi ressaltado que havia duas etapas de escolha distintas para que as crianças percebessem a diferença entre os dois conjuntos (Conjunto 1: Portões de entrada; Conjunto 2: Portões de saída), pois o aluno precisa escolher um elemento de cada conjunto para formar um novo conjunto (novo conjunto: portão de entrada/portão de saída do parque). Assim, foi questionado aos alunos se entrando pelo Portão A seria possível sair pelo Portão B e, imediatamente, alguns deles responderam que não, justificando que não se poderia sair pelo portão de entrada. Nas Figuras 6 e 7 pode-se visualizar como esta situação de *produto de medidas* pode ser resolvida com árvore de possibilidades: gerada pelo *software* e criada com o uso de lápis e papel.

Destaca-se que, inicialmente, alguns alunos responderam que seria possível sair pelo portão B. Contudo, após ser questionada a natureza do portão, eles perceberam que não seria possível, por se tratar de um portão de entrada. Dessa forma, buscava-se deixar claro aos alunos quais elementos eram possíveis de serem escolhidos. Quanto à escolha de outras possibilidades, sempre era enfatizado que se João entrasse pelo Portão A, ele poderia sair pelo E, mas que se ele desistisse de sair pelo E teria outras opções para escolher.

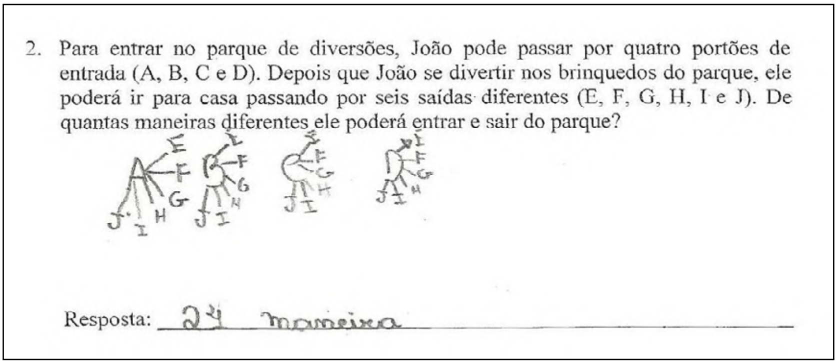
Figura 6. Página de escolha de níveis e elementos e a árvore de possibilidades construída pelas duplas do G1 no *Diagramas de Árbol* (*produto de medidas*)





Fonte: Azevedo (2013).

Figura 7. Árvore de possibilidades construída pelo Aluno 7 no processo de ensino com o uso do lápis de papel (*produto de medidas*)



2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Resposta: 24 maneira

Fonte: Azevedo (2013).

Discussões dessa natureza foram necessárias em todos os tipos de problemas, pois, segundo Borba e Azevedo (2012), a Combinatória possui um caráter hipotético-dedutivo, havendo, portanto, dificuldades por parte de algumas crianças em distinguir entre o real e o possível, uma vez que na realidade só escolhemos um caso, mas para escolher este caso temos, antes, que decidir entre várias possibilidades de escolha. Inhelder e Piaget (1976) afirmaram que a distinção entre o que acontece na realidade e o que é possível de acontecer é um pensamento considerado avançado, plenamente alcançado em um período denominado de operacional formal. No estudo aqui relatado, acreditava-se que os alunos poderiam ser levados a pensar sobre as possibilidades de escolha se fossem questionados quanto aos elementos a serem escolhidos.

Como os alunos passaram a usar representações simbólicas após o ensino

Os tipos de representação simbólica para a resolução dos problemas combinatórios podem ser os mais variados: *desenhos*, *listagens*, árvores de possibilidades, *quadros*, *diagramas*, *cálculos* ou uso de *fórmulas*, entre outras (PESSOA; BORBA, 2009). No presente estudo, foram classificadas as representações simbólicas de resolução de acordo com as utilizadas pelos alunos nos testes realizados, desde as situações em que eles não explicitavam estratégia ou representação simbólica, passando por representações que não eram corretas para chegar ao resultado, tais como adição, subtração e multiplicação dos números do enunciado, até as representações que poderiam levar a um acerto total, como a multiplicação, adição de parcelas repetidas, desenho, diagrama, árvore de possibilidades e listagem.

Observou-se, inicialmente, quando os participantes do G1 (*software Diagramas de Árbol*) e do G2 (*lápis e papel*) ainda não haviam participado de sessões de ensino envolvendo o raciocínio combinatório, que os alunos, em sua maioria, não explicitaram estratégia ou representação simbólica de resolução dos problemas em questão. Nesses casos, os alunos indicavam um número para a resposta, mas não explicitavam como chegaram nesse número, apesar de ser possível, em alguns casos, inferir que o aluno somou, subtraiu ou multiplicou os números dos elementos do enunciado do problema.

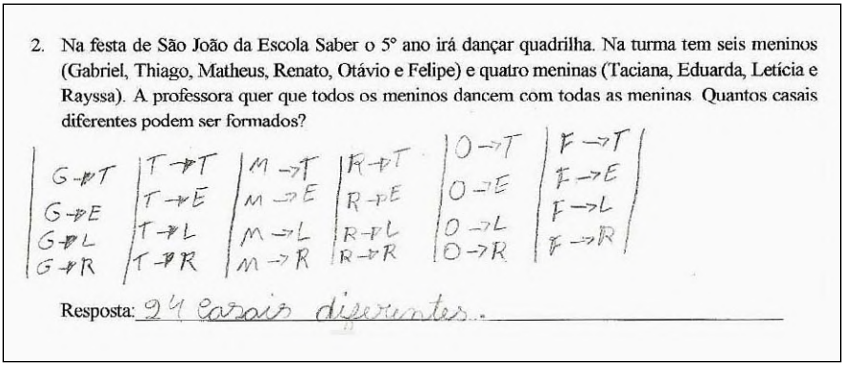
Notou-se, também, que, no teste inicial, quando os alunos do G1 e do G2 explicitaram representações simbólicas, utilizaram a *listagem* como procedimento preferido de resolução, entretanto, essa *listagem*, por vezes, não apresentava relação com o que o problema estava pedindo. Além disso, no teste inicial, a árvore de possibilidades não foi utilizada pelos alunos desses grupos.

Os alunos, após o ensino, quando explicitaram uma representação simbólica, utilizaram, na maioria das vezes, a *listagem*, com evidências de pensamento combinatório. Além da *listagem*, também foram utilizadas pelos alunos outras representações eficientes, como o *diagrama*, a árvore de possibilidades, a *multiplicação adequada*, além da *percepção de regularidades* na situação.

No teste logo após o ensino, o Aluno 6, participante do Grupo 1, utilizou a *multiplicação adequada* como representação para a resolução de uma situação de produto de medidas. Já no segundo teste após a aula, esse mesmo aluno se utilizou do tipo de representação *listagem de possibilidades* por meio de uma estratégia sistemática, ou seja, organizada, para a resolução do problema, como se pode observar na Figura 8.

Esse episódio chama a atenção para o fato de que o aluno em questão não aprendeu um método de resolução do problema, ou seja, ele não foi *treinado* para resolver problemas combinatórios por meio de árvore de possibilidades. Contudo, há evidência de que o aluno aprendeu a refletir sobre o que o problema está perguntando, tendo em vista que resolveu a situação por meio de outras representações (listagem e multiplicação), que também lhe pareceram válidas para a solução correta da situação.

Figura 8. *Resposta correta* do Aluno 6 do G1 (Árbol) para a segunda questão do segundo teste após a aula, por meio de *listagem de possibilidades*



2. Na festa de São João da Escola Saber o 5° ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Letícia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

G→T	T→T	M→T	R→T	O→T	F→T
G→E	T→E	M→E	R→E	O→E	F→E
G→L	T→L	M→L	R→L	O→L	F→L
G→R	T→R	M→R	R→R	O→R	F→R

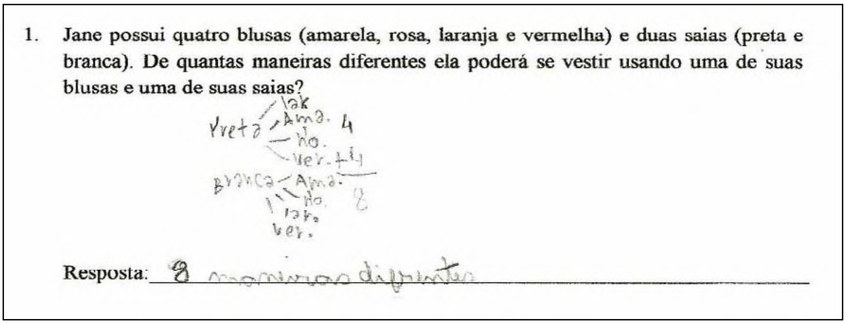
Resposta: 24 casais diferentes..

Fonte: Azevedo (2013).

Destaca-se no Grupo 1, que trabalhou com o *software* na aula, a pouca utilização da árvore de possibilidades no primeiro teste após a aula. Apenas um aluno (Aluno 38) fez uso dessa representação. Ressalta-se, ainda, que a eficácia do uso da árvore de possibilidades aconteceu, principalmente, nos problemas de *produto de medidas,* como é possível verificar na Figura 9.

A baixa utilização dessa representação no primeiro teste após a aula repercutiu no segundo teste após a aula, de modo que não houve utilização desse tipo de representação naquele momento. Entretanto, é possível que a árvore de possibilidades, trabalhada por meio do *software* com esse aluno, tenha forte influência na utilização de diagramas como representação para resolução de problemas combinatórios.

Figura 9. *Resposta correta* do Aluno 38 do G1 (Árbol) para a primeira questão do primeiro teste após a aula, por meio de árvore de possibilidades



1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?

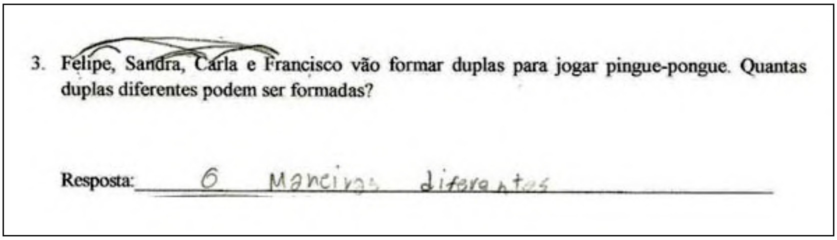
Resposta: 8 maneiras diferentes

Fonte: Azevedo (2013).

Dessa forma, destaca-se o uso do diagrama no segundo teste após a aula, embora essa representação não tenha sido utilizada no primeiro teste após a aula. Com esse tipo de representação, é possível responder de forma bem sucedida os problemas combinatórios, entretanto, é necessário que o aluno organize, sistematize seu pensamento, para que não se perca na contagem dos subconjuntos. O diagrama foi pouco utilizado pelos alunos da pesquisa. A seguir, na Figura 10, é possível visualizar um diagrama formado utilizando o próprio enunciado do problema.

Analisando as representações do G2 foi possível notar a diminuição da não *explicitação de um tipo de representação simbólica ou estratégia* e da *listagem de possibilidades* após o ensino. Quanto ao uso da *listagem*, acrescenta-se que, em ambos os grupos experimentais, houve uma melhora qualitativa no uso dessa representação simbólica, uma vez que a listagem passou a ser usada de forma sistemática, com percepção da multiplicação existente nos tipos de problemas combinatórios.

Figura 10. *Resposta correta* do Aluno 38 do G1 (Árbol) para a terceira questão do no segundo teste após a aula, por meio de *diagrama*


3. Felipe, Sandra, Carla e Francisco vão formar duplas para jogar pingue-pongue. Quantas duplas diferentes podem ser formadas?

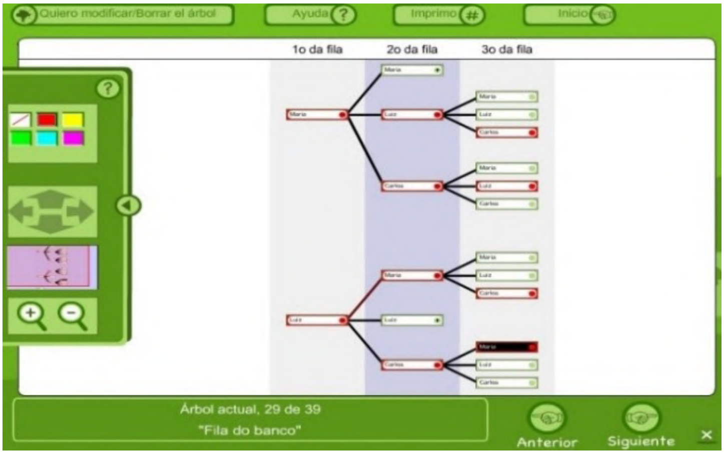
Resposta: 6 maneiras diferentes

Fonte: Azevedo (2013).

Destaca-se, entretanto, que a árvore de possibilidades foi menos utilizada nas situações de *permutação* e, quando usada, provocou o desentendimento na interpretação da relação de escolha da permutação, o que pode ser indicativo da maior dificuldade em realizar um diagrama de árvore que tenha mais níveis (ramos) em sua construção, como pode ser visto na Figura 11. No problema exemplificado na Figura 11, eram solicitadas de quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco. Nesse tipo de problema era necessário destacar os casos válidos em vermelho, pela resolução com o software.

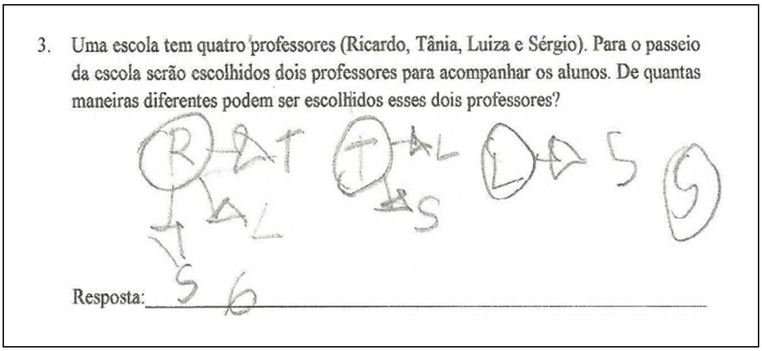
Essas representações, após as sessões de ensino, apresentavam indícios de pensamento combinatório, chegando até o acerto total nesse tipo de situação. Nos problemas de *combinação*, a árvore de possibilidades também passou a ser usada, com atenção aos casos repetidos que não precisavam ser registrados, como se pode ver na Figura 12.

Figura 11. Árvore gerada pelo *software* para a sétima questão do teste inicial



Fonte: Azevedo (2013).

Figura 12. *Resposta correta* do Aluno 33 do G2 (Lápis e Papel) para a terceira questão do primeiro teste após a aula, por meio de árvore de possibilidades



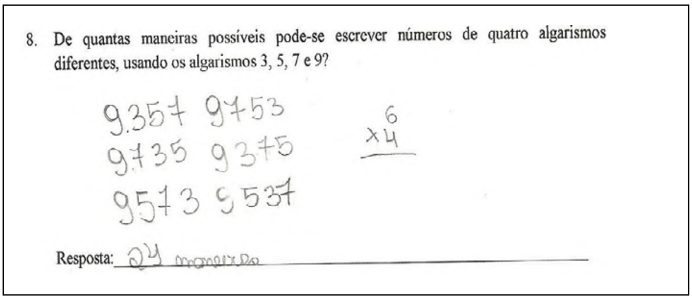
3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Resposta: 6

Fonte: Azevedo (2013).

Além desses tipos de representação, salienta-se que alguns alunos perceberam a regularidade de possibilidades no problema e generalizaram em suas respostas, como pode ser visto no exemplo da Figura 13, no qual o Aluno 7 percebeu que para números de quatro algarismos iniciados com certo algarismo há seis possibilidades. Se há quatro algarismos que podem iniciar os números para um algarismo, é possível generalizar que para todos os demais também haverá seis possibilidades, permitindo, assim, multiplicar o número de algarismos (quatro) pelo número de possibilidades por algarismo (seis). A *percepção da regularidade*, normalmente, foi realizada após o aluno adotar uma *listagem* ou árvore de possibilidades sistemáticas. Entretanto, assim como indicado no estudo de Pessoa e Santos (2012), são poucos os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental que fazem uso dessa generalização.

Figura 13. *Resposta correta* do Aluno 7 do G2 (Lápis e Papel) para a oitava questão do primeiro teste após a aula, por meio de *listagem* com *percepção da regularidade*



8. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de quatro algarismos diferentes, usando os algarismos 3, 5, 7 e 9?

9357 9753
9735 9375
9573 9537

6
x4

Resposta: 24 maneiras

Fonte: Azevedo (2013).

Assim, há fortes evidências de que as sessões de ensino realizadas com os grupos experimentais possibilitaram grandes e importantes avanços nos raciocínios combinatórios dos alunos. Evidencia-se que alunos do 5º ano do Ensino Fundamental (em torno de 10 anos), que tenham acesso a esse tipo de trabalho em sala de aula, são capazes de desenvolver esse tipo de raciocínio de forma sistemática. Desse modo, acredita-a que, apesar do que foi apontado por Inhelder e Piaget (1976), ao afirmarem que resoluções sistemáticas espontâneas só começam a ser efetuadas por alunos entre 11 e 15 anos (*combinação*) e 14 e 15 anos (*arranjo* e *permutação*), é possível, a partir dos resultados deste estudo, antecipar a idade em que acontecem essas sistematizações, por meio de sessões de ensino.

O QUE SE PODE CONCLUIR...

Diante do que foi apresentado e analisado, conclui-se que os participantes dos grupos com ensino em Combinatória, com uso de *lápis e papel* ou com uso do *software Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios. Os dois grupos demonstraram desempenhos significativamente melhores nos testes após a aula, comparado ao teste respondido antes da sessão de ensino.

Isso revela que o trabalho com árvores de possibilidades pode resultar em eficiente estratégia de ensino com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Desse modo, entende-se que representar a árvore de possibilidades em diferentes meios, virtual e escrito, por exemplo, pode ser um aspecto positivo para o aprendizado da Combinatória.

Pode-se observar que tanto o Grupo 3 (controle assistido) como o Grupo 4 (controle desassistido) não avançaram em seus raciocínios combinatórios, levando à conclusão de que para o desenvolvimento do raciocínio combinatório é preciso um ensino específico, como o ocorrido nos Grupos 1 e 2, não sendo favoráveis a esse desenvolvimento apenas o trabalho com outros tipos de problemas multiplicativos e menos ainda apenas o passar do tempo.

É possível perceber a importância de se chamar a atenção para as relações e propriedades de cada situação combinatória, pois acredita-se que, somente assim, os alunos terão maior compreensão dos problemas combinatórios. No estudo, foi possível perceber que, em geral, os alunos não apresentavam dificuldades quanto à relação de escolha, sendo, portanto, a relação de ordenação dos elementos de mais difícil entendimento para os alunos.

Levando em consideração os resultados relatados no presente estudo, ressalta-se a importância do trabalho com o uso de diversas representações simbólicas, especialmente, a árvore de possibilidades, que possibilita um olhar mais sistemático para as resoluções de problemas combinatórios, revelando, assim, que a resolução dos testes após a aula não foi influenciada diretamente por uma representação simbólica que foi ensinada, mas pela maior compreensão das relações envolvidas em cada situação. Além disso, destaca-se a necessidade de relacionar o ensino utilizando o *software* com o uso do lápis e papel, pois acredita-se que a necessidade de transformação da forma de representação virtual para a escrita, ou seja, a aprendizagem com utilização do *software* e a resolução dos testes após a aula em lápis e papel, pode ser um fator a ser considerado na aprendizagem[13].

Com o presente estudo, é possível concluir que o trabalho com árvores de possibilidades é um excelente caminho para o aprendizado da Combinatória, uma vez que, utilizando essa representação,

---

13 As transformações de modos de representar situações combinatórias para outros modos foi posteriormente investigado e mais informações sobre este estudo que se seguiu ao aqui relatado pode ser encontrado em: https://drive.google.com/file/d/1Wd4moAXvAf2vPxLvg2PLoLUSfhY1k8pv/view.

os alunos foram capazes de responder situações combinatórias. Acredita-se, ainda, em conformidade com Vergnaud (1986), que trabalhar múltiplas representações permite aos alunos uma visão ampla do conhecimento matemático, desde que se reflita sobre as similaridades entre as variadas formas de representar o conceito estudado.

Dessa forma, em concordância com Fischbein (1975) e Fischbein, Pampu e Minzat (1970), afirma-se que apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não será suficiente para o aprendizado da Combinatória, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, que pode ser com o uso de um recurso computacional – o *software educacional* – ou com *lápis e papel*, como no caso deste estudo. Recomenda-se, assim, o uso da árvore de possibilidades e o uso de outras representações simbólicas, desde os primeiros anos de escolarização.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. *Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades*: É melhor no papel ou no computador? 2013. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora; BORBA, Rute. O impacto do *software Árbol* no raciocínio combinatório. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. *Anais...* Recife: CIAEM/IACME, 2011.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais...* Salvador: SBEM/UFRB, 2010.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com recurso tecnológico: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. *In:* SPINILLO, Alina; LAUTERT, Síntria (Org.) *A pesquisa em Psicologia e suas implicações para a Educação Matemática*. Recife: Editora Universitária. 2012.

BORBA, Marcelo; PENTEADO, Miriam. *Informática e Educação Matemática*. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. (Coleção tendências em Educação)

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. 1ª a 4ª série. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018.

FISCHBEIN, Efraim. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children,* Reidel, Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British Journal of Educational Psychology,* n. 40, 1970.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter, *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, v. 17, n. 31, jan./jun., 2009.

SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria; LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. *In:* COMITÊ INTERAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., Querétaro. *Anais*... Querétaro, México: CIAEM/ICMI, 2007.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, n. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In:* BRUM, Jean (Org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

6 Existe um tipo de problema combinatório mais fácil que o outro? As etapas de escolha podem ajudar a responder

Danielle Avanço Vega
Rute E. de S. Rosa Borba

HÁ ALGUM PROBLEMA COMBINATÓRIO MAIS FÁCIL E OUTRO MAIS DIFÍCIL?

Pensando nas possíveis respostas à pergunta que intitula este capítulo, pode-se imaginar que algumas pessoas respondam que os problemas de *combinação* são os mais difíceis, outras, contudo, podem afirmar que os problemas do tipo *permutação* é que são os mais difíceis, entre outras possibilidades. Assim, podem existir várias respostas, dependendo de cada pessoa. Mas, essa é uma conclusão muito vaga.

Fatores diversos para explicar dificuldades com problemas combinatórios já foram anteriormente estudados, tais como a influência do desenvolvimento cognitivo (INHELDER; PIAGET, 1976; MORO; SOARES, 2006), do aprendizado escolar (FISCHBEIN, 1975; SCHLIEMANN, 1988), dos tipos de problemas e suas respectivas relações e propriedades (PESSOA; BORBA, 2009), da ordem de grandeza do número de possibilidades (PESSOA; BORBA, 2009; TEIXEIRA *et al.*, 2011), da descrição dos valores das variáveis (CORREA; OLIVEIRA, 2011) e da explicitação de possibilidades no enunciado (SILVA; SPINILLO, 2011).

Todavia, o impacto do número de *etapas de escolha* dos elementos ainda não foi uma questão abordada em todos os tipos de problemas combinatórios e pode auxiliar a responder se existe mesmo um tipo de problema combinatório mais fácil ou mais difícil que os demais. É isso que se buscará responder neste capítulo, a partir da análise da influência do *número de etapas de escolha* na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios (*produto de medidas*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*). Mas, o que seriam essas etapas de escolha?

Vega (2014) entende que as etapas de escolha estão relacionadas às variáveis presentes em uma situação combinatória. Assim, as etapas dependem do número de variáveis e em cada etapa analisa-se quantos elementos das variáveis podem ser escolhidos. Dessa forma, a autora defende que o número de etapas de escolha pode influenciar na resolução de problemas combinatórios.

Vega (2014) exemplifica as etapas de escolha em um problema de *produto de medidas*, em que se deve escolher um entre quatro tipos de suco e um entre os cinco tipos de sanduíche, sendo duas as etapas de escolha: o tipo de suco e o tipo de sanduíche – resultando em 20 diferentes possibilidades de combinar esses elementos. Nesse mesmo tipo de problema, a autora argumenta que se poderiam ter três etapas de escolha, bastando adicionar mais uma variável, tendo-se que escolher, por exemplo, o tipo de suco, o tipo de sanduíche e o tipo de sobremesa. Já em uma *permutação*, por exemplo, na qual se pretende permutar três pessoas em uma fila, as etapas de escolha são três: a primeira pessoa da fila, a segunda e a terceira – resultando em seis distintas possibilidades de permutação. Embora o problema de *produto de medidas* de duas etapas de escolha apresente como solução uma grandeza numérica mais alta que o problema de *permutação* com três etapas, este último tipo de problema tem se mostrado mais difícil para os alunos em início de escolarização, podendo-se questionar se o número de etapas de escolha teria alguma influência nesse resultado.

Afinal, existe um tipo de problema combinatório mais fácil ou mais difícil que os demais? Para responder a esse questionamento, buscou-se verificar em pesquisas anteriores quais problemas eram considerados mais fáceis e quais seriam os mais difíceis. Segundo Pessoa e Borba (2009; 2010), Correa e Oliveira (2011) e Azevedo e Borba (2012), os problemas do tipo *produto de medidas* foram considerados de mais fácil resolução para os estudantes, já os problemas de *permutação* foram tidos como os mais difíceis. No entanto, essas pesquisas não objetivaram controlar o número de etapas de escolha. Será que ao se comparar diferentes problemas com duas, três ou quatro etapas de escolha os mesmos resultados serão repetidos?

Segue-se a discussão desses e de outros estudos anteriores, os quais buscaram analisar a compreensão de variadas situações combinatórias e possíveis explicações para as dificuldades apresentadas por alunos do Ensino Básico.

O QUE DIZEM ESTUDOS ANTERIORES SOBRE FACILIDADES E DIFICULDADES COM PROBLEMAS COMBINATÓRIOS?

Estudos como os de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009; 2012), Maher e Yankelewitz (2010) e Matias, Santos e Pessoa (2011) apontam haver noções de Combinatória, até mesmo, antes do aprendizado desse conteúdo na escola. Os participantes desses estudos evidenciaram compreender a necessidade de se escolher adequadamente elementos de conjuntos para combiná-los, contudo, exibiam dificuldades em ponderar, ou não, a ordem dos elementos e apresentavam muita dificuldade com o esgotamento de todas as possibilidades. O indício desse conhecimento inicial aponta para a possibilidade de trabalhar esse conteúdo desde os anos iniciais – já que houve consideração de algumas das relações combinatórias, sendo preciso intervir para que outras relações sejam também compreendidas.

Segundo Schliemann (1988), Moro e Soares (2006), Taxa-Amaro (2006) e Pessoa e Borba (2009), dificuldades com Combinatória ocorrem em diferentes níveis e modalidades de ensino, tanto nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, como no Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos e, até mesmo, entre estudantes de Ensino Superior. Assim, constatou-se que, mesmo após trabalhar o conteúdo de Combinatória na escola, dificuldades ainda podem continuar a existir.

Como apontado na introdução do presente texto, estudos anteriores investigaram fatores diversos que podem explicar dificuldades com problemas combinatórios. O desenvolvimento cognitivo pode ser um fator que privilegia a resolução de problemas de Combinatória, bem como a instrução escolar. Já os tipos de problemas e suas respectivas relações e propriedades, assim como a ordem de grandeza do número de possibilidades, podem se constituir em dificultadores, ao passo que a descrição dos valores das variáveis e a explicitação de possibilidades no enunciado são considerados facilitadores. No entanto, o alcance do número de etapas de escolha dos elementos – foco do estudo relatado neste capítulo – não foi, ainda, devidamente explorada.

Dessa forma, neste capítulo, serão apresentados os resultados do estudo de Vega (2014), que controlou as etapas de escolha de elementos, verificando se há influência do número de etapas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Esse controle de número de etapas de escolha não havia sido uma preocupação de estudos anteriores e pode, pelo menos em parte, explicar desempenhos observados em alguns desses estudos anteriormente realizados.

COMO SE INVESTIGOU O IMPACTO DO NÚMERO DE ETAPAS DE ESCOLHA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS?

Realizou-se um estudo de sondagem com 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (VEGA, 2014), cujo recorte é aqui relatado e discutido. Cada participante respondeu um de seis tipos diferentes de testes, possibilitando o controle das variáveis manipuladas: número de etapas de escolha (2, 3 ou 4 etapas) dos problemas a serem resolvidos, ordem de grandeza dos resultados dos problemas (respostas variando de 2 a 126) e tipos de situações combinatórias (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*).

No Quadro 1 são exibidas as comparações efetuadas nos seis tipos de teste. Os números de questões de cada teste (6 ou 8) mudaram de acordo com as comparações efetuadas (2, 3 ou 4 etapas de escolha de dois tipos de problemas ou etapas de escolha dentro de um mesmo problema). Também foi controlada a ordem de grandeza das respostas, em cada etapa de escolha. A partir dessa organização, seria possível verificar se a dificuldade era por conta do tipo de problema e não por causa do número de etapas de escolha, nem por resultado maior ou menor que outro. Algumas comparações não foram efetuadas, pois a ordem de grandeza das respostas variava muito de um tipo de problema para outro, de modo que não se poderia ter certeza se a causa era o tipo de problema ou a grandeza numérica da resposta.

Quadro 1. Tipos de testes

Testes	Nº de questões	Comparação	Respostas dos problemas por etapas de escolha		
Tipo 1	6	Produto de medidas X Permutação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2	6	24
Tipo 2	6	Produto de medidas X Arranjo	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	24	120
Tipo 3	6	Produto de medidas X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	4	6 e 5
Tipo 4	6	Permutação X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2 e 3	6 e 4	24 e 15
Tipo 5	6	Arranjo X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	20 e 24	120 e 126
Tipo 6	8	2, 3 e 4 etapas de escolha dentro de um mesmo problema	Produto de medidas	Combinação	Permutação
			8	6, 4 e 5	2 e 6

Fonte: Vega (2014).

O QUE SE DESCOBRIU SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONTROLANDO-SE AS ETAPAS DE ESCOLHA?

De acordo com o desempenho dos alunos na resolução dos problemas, as respostas foram categorizadas em *acertos totais*, *acertos* *parciais* e *erros*, como pode ser observado no Quadro 2. Optou-se por considerar acertos parciais e não apenas mero erro ou acerto total.

Quadro 2. Categorização das respostas

Pontuação 0	Erro
Pontuação 1	Acerto parcial 1 – apenas uma possibilidade apresentada
Pontuação 2	Acerto parcial 2 – de 2 até a metade das possibilidades apresentadas
Pontuação 3	Acerto parcial 3 – mais da metade das possibilidades apresentadas
Pontuação 4	Acerto total

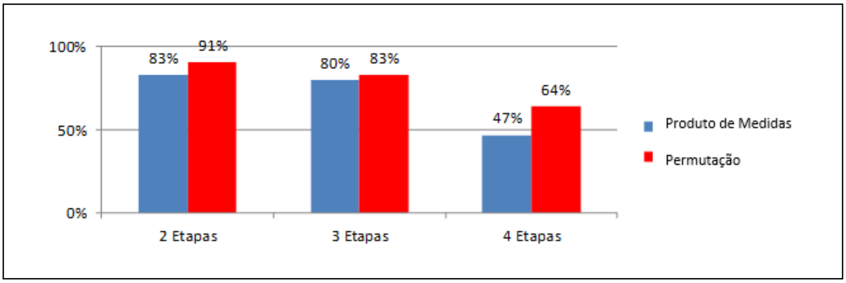
Fonte: Vega (2014).

Seguem-se os resultados obtidos nos seis testes, buscando-se, primeiramente, comparar os desempenhos em problemas de *produto de medidas* com todos os demais tipos de problema, visto que os problemas de *produto de medidas* foram considerados, em estudos anteriores, como os de mais fácil resolução. Assim, objetivava-se verificar se esse tipo de problema continuaria a ser o mais fácil quando se controlasse o número de etapas de escolha e número total de possibilidades nos distintos tipos de problemas.

O primeiro teste traz a comparação mais relevante dessa pesquisa. Isso porque, com base nos testes aplicados em estudos anteriores, com alunos da faixa etária de 10 a 11 anos, os problemas de *produto de medidas* eram tidos como os mais fáceis e os de *permutação* eram considerados mais difíceis Sendo assim, o teste Tipo 1 checou os desempenhos nesses dois tipos de problemas.

No Gráfico 1 podem ser observadas as atuações dos alunos nos problemas de *produto de medidas* e nos de *permutação*. É possível observar um desempenho superior nos problemas com duas etapas de escolha e uma queda nos percentuais de acertos parciais e totais nos problemas com três e quatro etapas de escolha.

Gráfico 1. Percentuais de acerto nos problemas de *produto de medidas* e de *permutação*, com duas, três e quatro etapas de escolha



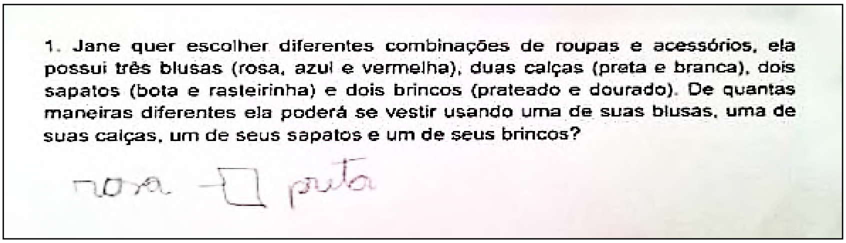
Fonte: Vega (2014).

Nos problemas de *permutação*, em todas as etapas de escolha, há um percentual de acerto maior que nos problemas de *produto de medidas* e essa diferença torna-se maior nos problemas com quatro etapas de escolha. Esses dados caminharam em sentido contrário ao de estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; PESSOA; SANTOS, 2011; CORREA; OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013) que apontaram o problema de *permutação* como o mais difícil, quando comparado ao de *produto de medidas*. No entanto, tais estudos não controlaram as etapas de escolha dentro dos problemas combinatórios, nos quais *produto de medidas* sempre tinha duas etapas e *permutação* três ou quatro etapas de escolha. Percebe-se que, uma vez ajustado o número de etapas de escolha, *permutação* não é o tipo de problema combinatório de mais difícil compreensão, nem *produto de medidas* o de mais fácil resolução.

Não foram observadas diferenças estatisticamente significativas nas respostas com duas ou três etapas de escolha. Esses resultados demonstram que com poucas etapas de escolha (duas ou três) esses dois tipos de problemas se nivelam, em termos de facilidade para os alunos, mas com quatro etapas eles se diferenciam[1].

Ao se analisar os erros cometidos pelos alunos nos problemas de *produto de medidas* com quatro etapas de escolha, verificou-se que, dos sete alunos que erraram esse problema, quatro deixaram-no em branco e três não listaram todas as etapas. Combinaram somente duas etapas, revelando, assim, que quanto maior o número de etapas de um problema, maior o grau de dificuldade que ele apresenta, inclusive, para problemas considerados mais fáceis, como pode ser visto na Figura 1.

Figura 1. Resposta incorreta do Aluno 16 ao não considerar todas as etapas de escolha de um problema de produto de medidas no teste Tipo 1


1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

rosa preta

Fonte: Vega (2014).

1 Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares foi verificado que os problemas de *permutação* foram significativamente mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *produto de medidas* com quatro etapas de escolha ($t(23) = 2{,}713$; $p = 0{,}012$).

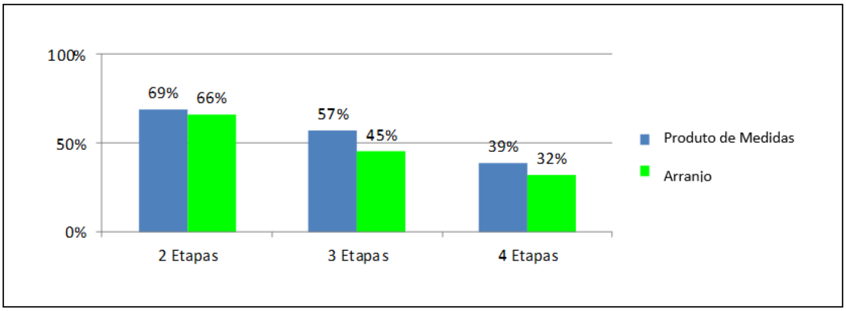
Percebe-se que o aluno começa a listar um tipo de blusa, no caso rosa, e a combina com um tipo de calça, no caso preta, contudo, não continua a lista das demais peças que precisam ser combinadas, como o sapato e os brincos.

Quando se analisa o problema de *permutação* com quatro etapas de escolha, têm-se quatro elementos que precisam ser permutados, já no problema de *produto de medidas* são quatro conjuntos de elementos que precisam ser combinados, tornando a possibilidade de erro no problema de *produto de medidas* superior, como foi o que ocorreu. Na *permutação,* lembrar-se de quatro elementos torna-se mais fácil do que ponderar quatro diferentes conjuntos de escolhas e todos os seus elementos em *produto de medidas*.

Viu-se, também, que os alunos exibiram dificuldades nos problemas de *permutação* com maior número de etapas de escolha (quatro), pois quando empregavam todos os elementos dispostos no problema, nem sempre conseguiam descobrir todas as possíveis permutações dos quatro elementos. Todavia, em *permutações,* o percentual de acertos foi maior, visto que os alunos consideravam todos os quatro elementos e utilizavam alguma sistematização no levantamento das possíveis soluções, já em *produtos de medidas* alguns elementos acabavam sendo esquecidos.

No teste Tipo 2, também foram comparados os desempenhos em problemas de *produto de medidas* e *arranjo*, como pode ser visto no Gráfico 2. Estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2009; PESSOA; SANTOS, 2011; CORREA; OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013) mostraram que os problemas de *produto de medidas* são mais fáceis que os problemas de *arranjo*. Com a comparação feita, objetivava-se observar se o mesmo se repetiria com o controle do número de etapas de escolha e de número total de possibilidades.

Gráfico 2. Percentuais de acerto nos problemas de *produto de medidas* e de *arranjo*, com duas, três e quatro etapas de escolha



Fonte: Vega (2014).

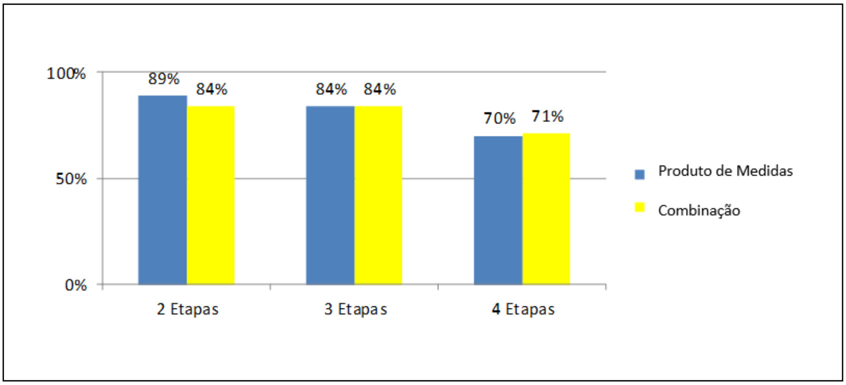
Percebe-se que em todas as etapas de escolha nos problemas de *produto de medidas* há um percentual de acerto maior do que o obtido em problemas de *arranjo*. Contudo, essa diferença nos desempenhos, entre um tipo de problema e outro, não foi significativa, de acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares[2]. Isso demonstra que controlados os números de etapas de escolha e o número de possibilidades solicitadas no problema, esses dois tipos de situações se equiparam em nível de dificuldade para estudantes do Ensino Fundamental, diferenciando-se dos resultados de estudos anteriores, nos quais não houve controle de número de etapas de escolha.

No teste Tipo 3, foram comparados os desempenhos em problemas de *produto de medidas* e *combinação*, como pode ser visto no

2 Tanto nos problemas com duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), como nos problemas com três etapas de escolha (t (24) = 1,953; p = 0,063), e também na comparação dos problemas com quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não se apresentaram diferenças significativas de desempenho entre os problemas de *produto de medidas* e *arranjo*.

Gráfico 3. Não foram notadas diferenças significativas nas comparações de desempenho entre esses tipos de problemas, pois há pouca alteração percentual nos acertos de um tipo de problema e outro, quando as etapas de escolha e número de possibilidades solicitadas foram controladas[3].

Gráfico 3. Percentuais de acerto nos problemas de *produto de medidas* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha

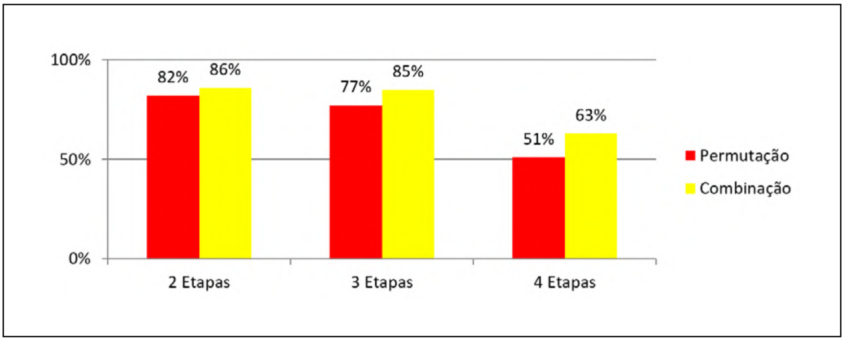


Fonte: Vega (2014).

Já no teste Tipo 4, percebeu-se, de modo geral, uma atuação melhor nos problemas de *combinação* quando comparados aos problemas de *permutação*, como pode ser observado no Gráfico 4.

3 De acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares, tanto em duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), como em três etapas (t (24) = 1,953; p = 0,063) e em quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não foram observadas diferenças significativas de desempenho entre problemas de produto de medidas e combinação.

Gráfico 4. Percentuais de acerto nos problemas de *permutação* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha



Fonte: Vega (2014).

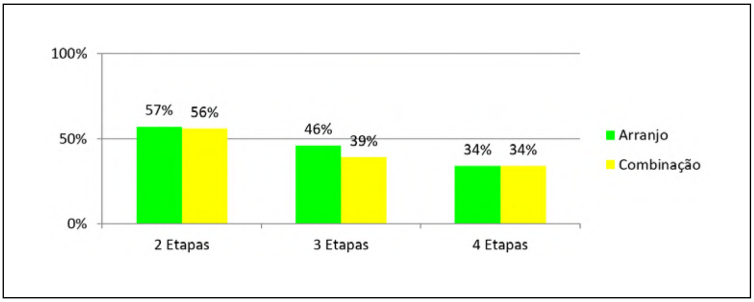
De acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares, há diferença significativa de desempenho entre um tipo de problema e outro. Essa alteração foi verificada somente nos problemas com três e quatro etapas de escolha[4].

Essa significância pode ser justificada pelas respostas de cada tipo de problema, pois os problemas de *combinação* apresentaram como resultados 3, 4 e 15 possibilidades em duas, três e quatro etapas, respectivamente; já os problemas de *permutação* tinham 2, 6 e 24 possibilidades como solução para duas, três e quatro etapas de escolha, respectivamente. Esse pequeno diferencial nos valores dos resultados pode ter sido suficiente para tornar os problemas de *combinação* mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *permutação*.

4 Não se observou diferença significativa de desempenho entre os problemas com duas etapas de escolha ($t(20) = -0,730$; $p = 0,474$). Com três etapas ($t(20) = -3,627$; $p = 0,002$) e com quatro etapas de escolha ($t(20) = -2,750$; $p = 0,012$), foi observado um melhor desempenho, estatisticamente significativo, com relação aos problemas de combinação.

O teste Tipo 5 buscou relacionar o desempenho dos problemas de *arranjo* e *combinação*, como pode ser visto no Gráfico 5, que apresenta uma pequena melhoria no percentual dos problemas de *arranjo* com duas e três etapas, comparado com os problemas de *combinação*. Nota-se uma igualdade no desempenho dos problemas com quatro etapas de escolha, sinalizando que não há uma diferença significativa entre o desempenho em um tipo de problema e outro[5].

Gráfico 5. Percentuais de acerto nos problemas de *arranjo* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha



Fonte: Vega (2014).

Percebeu-se o mesmo grau de dificuldade nos problemas de *arranjo* e de *combinação* que tiveram controladas suas etapas de escolha e grandezas numéricas dos resultados (possibilidades solicitadas), não havendo um tipo de problema que seja considerado mais fácil ou mais difícil que o outro, como também se evidenciou na pesquisa de Azevedo (2013).

5 Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, não houve grau de significância em todas as etapas de escolha comparadas. Duas etapas de escolha: t (21) = 0,196; p = 0,847; Três etapas de escolha: t (21) = 0,880; p = 0,389; Quatro etapas de escolha: t (21) = 0,000; p = 1,000.

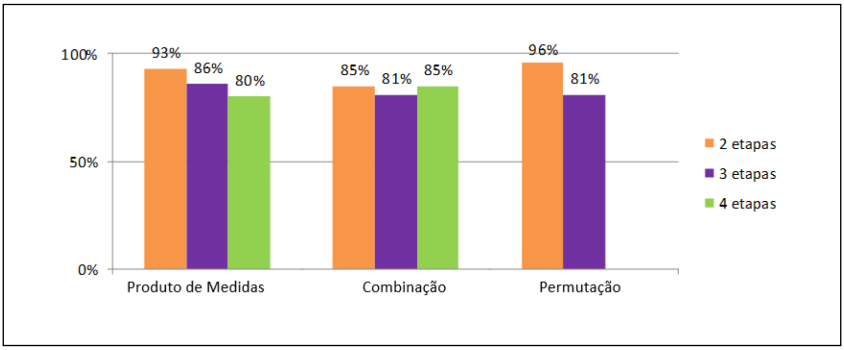
Após ponderar todas as comparações de desempenho entre os diferentes tipos de problemas, foi considerada a influência das etapas de escolhas num mesmo problema, mantendo igual ou similar o total de possibilidades em todas as etapas. O teste Tipo 6 conteve os resultados dos problemas para que, tanto no problema com duas etapas de escolha como no problema com três e quatro etapas, o total de possibilidades fosse o mesmo, ou similar. Do mesmo modo, seria possível notar o efeito das etapas de escolha com o controle das grandezas numéricas. Nos testes anteriores, controlou-se o número de etapas de escolha relacionando-as aos números de possibilidades semelhantes ao longo dos problemas comparados, já no teste Tipo 6, como visto no Gráfico 6, a comparação aconteceu dentro de um mesmo problema, no qual variou-se a etapa de escolha e manteve-se o mesmo ou muito semelhante número de possibilidades.

A princípio, analisaram-se os problemas de *produto de medidas*, sendo possível verificar um decrescente desempenho à medida que as etapas de escolha aumentavam. Tornou-se claro que é mais fácil responder problemas com duas etapas de escolha do que problemas com três etapas e estes, por sua vez, são mais facilmente resolvidos do que problemas com quatro etapas de escolha. Esses problemas tinham como resolução o resultado oito em todas as suas etapas de escolha, logo, controlado o número de possibilidades, evidenciou-se que o número de etapas de escolha influencia o desempenho dos alunos. Quanto mais etapas de escolha, mais difícil o problema se tornou[6].

---

6 Por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, verificou-se diferença significativa entre os desempenhos nos problemas de *produto de medidas* de duas etapas e quatro etapas ($t(19) = 3{,}584$; $p = 0{,}002$) e entre os problemas de três etapas e quatro etapas ($t(19) = 2{,}517$; $p = 0{,}021$). Entretanto, não foram observadas diferenças significativas nos desempenhos entre problemas de duas e três etapas de escolha ($t(19) = 1{,}831$; $p = 0{,}083$).

Gráfico 6. Percentuais de acerto em cada etapa de escolha nos problemas de *produto de medidas*, *combinação* e *permutação*[7]



Fonte: Vega (2014).

Com esses dados, verificou-se a influência das etapas de escolha no problema de *produto de medidas*, tido como um dos mais fáceis de serem resolvidos, de acordo com Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013), para os quais é o problema que exibe os melhores desempenhos.

Nos problemas de *combinação*, observou-se que não foram apontadas diferenças significativas comparando cada uma das etapas, que apresentaram totais de possibilidades 6, 4 e 5 em duas, três e quatro etapas, respectivamente, isso porque as diferenças percentuais entre uma etapa e outra são baixas[8]. Esse tipo de problema pode apresentar mais complexidade em suas propriedades e relações,

7 Não houve problemas de permutação com quatro etapas de escolha.

8 Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares não foi verificada diferenças significativas de desempenho entre duas e três etapas de escolha ($t(19) = 0{,}645$; $p = 0{,}527$), duas e quatro etapas ($t(19) = 0{,}719$; $p = 0{,}481$), e três e quatro etapas de escolha ($t(19) = 0{,}000$; $p = 1{,}000$).

mas o coeficiente de dificuldade é fundamentalmente o mesmo para qualquer número de etapas de escolha.

Também não houve diferença significativa na análise dos problemas de *permutação*. Em sua resolução, esse tipo de problema tinha os valores 2 e 6 como respostas para duas e três etapas de escolha, respectivamente. Com quatro etapas de escolha não foram apresentados problemas, pois o valor do total de possibilidades não seria igual ou similar aos das outras etapas e, portanto, não atenderiam ao objetivo desse tipo de teste. Por essa mesma razão, não foram controlados os problemas de *arranjo*, pela falta de flexibilidade de seus resultados em cada etapa de escolha[9]. Já na pesquisa de Pontes e Borba (2012), em que foram analisados problemas com 3 e 4 etapas de escolha, foi possível encontrar diferenças significativas nos problemas de *permutação*, contudo a grandeza numérica não havia sido controlada e igualada.

Desse modo, nos problemas de *permutação*, o número de etapas de escolha não influenciou no desempenho. Justifica-se esse resultado ao se considerar as propriedades e relações específicas desse tipo de problema, bem como o número de etapas de escolha envolvidas nos problemas.

QUE CONCLUSÕES SE PODE TIRAR SOBRE DIFICULDADES DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS QUANDO SE CONTROLA AS ETAPAS DE ESCOLHA E O NÚMERO TOTAL DE POSSIBILIDADES?

E aí? Será que existe mesmo um tipo de problema combinatório mais fácil ou mais difícil que os demais? Através dos resultados

---

9 Não houve diferenças significativas no desempenho dos alunos ao responder problemas de *permutação* com duas ou três etapas de escolha ($t(19) = 1{,}993$; $p = 0{,}061$).

encontrados no estudo relatado neste capítulo, é possível perceber evidências que destacam as etapas de escolha dos problemas de Combinatória enquanto variável que pode influenciar no desempenho de alunos do Ensino Fundamental ao responderem questões com esse conteúdo, indicando, assim, qual tipo de problema seria mais fácil ou mais difícil.

Nos diferentes tipos de testes empregados (seis, ao todo), verificou-se que o problema de *permutação* com quatro etapas de escolha foi o que exibiu um nível de facilidade melhor quando comparado ao problema de *produto de medidas* com a mesma quantidade de etapas, nesse caso, quatro etapas também no teste Tipo 1. Essa conclusão vai de encontro ao que estudos anteriores assinalavam, como sendo *produto de medidas* mais fácil que *permutação*. Há, portanto, evidências do impacto do número de etapas de escolha na dificuldade desse tipo de problema combinatório.

Nos testes Tipo 2 e 3, notou-se não haver diferenças significativas de desempenho entre problemas de *produto de medidas* e *arranjo* ou entre *produtos de medidas* e *combinações*, nem com duas, três ou com quatro etapas de escolha. Já no teste Tipo 4, os problemas de *permutação* com três e quatro etapas foram mais difíceis de serem solucionados do que os problemas de *combinação*, também com três e quatro etapas de escolha. No teste Tipo 5, em todas as etapas de escolha, ressaltou-se a não diferença significativa de desempenho entre problemas de *combinação* e *arranjo*.

As análises realizadas neste capítulo ressaltam que, se o número total de possibilidades não for muito alto, não há diferenças significativas de atuação nos tipos de situações combinatórias. Deve-se considerar, também, as relações e propriedades de cada tipo de problema.

Quando se analisou somente as etapas de escolha, sem comparar os tipos de problemas, foco central do teste Tipo 6, foi possível constatar, controlando-se o número total de possibilidades requeridas, que os problemas com quatro etapas de escolha apresentam mais dificuldade de resolução que os problemas combinatórios com duas e três etapas. Especialmente nos problemas de *produto de medidas*, há forte ênfase da influência das etapas de escolha na resolução dos problemas.

Esse dado reforça a hipótese inicial e central da pesquisa aqui debatida de que estudos anteriores apontavam o *produto de medidas* como problema de mais fácil resolução, mas, em regra, esse tipo de problema abordava apenas duas etapas de escolha e era relacionado com problemas de outros tipos – *arranjos*, *combinações* e *permutações* – os quais possuíam, em geral, três ou quatro etapas de escolha.

Ao se analisar o número total de possibilidades de um problema, percebe-se que quanto maior a grandeza numérica presente na resposta, maior o grau de dificuldade para solucioná-lo corretamente. Isso foi examinado ao se comparar os diferentes tipos de testes e notar que os testes Tipo 2 e 5 eram mais difíceis do que os demais testes, pois exibiam diferenças significativas de desempenho, quando relacionados com outros. Explica-se esse fato devido ao total elevado de possibilidades nos problemas presentes em tais testes.

Sendo assim, confirma-se que as etapas de escolha influenciam, juntamente com a ordem de grandeza do total de possibilidades apresentadas, na facilidade ou dificuldade de um problema combinatório. Fora estas duas variáveis, há indicativos de que o tipo de situação combinatória também influencia nos desempenhos, o que pode ser percebido nas relações e propriedades próprias de cada situação, evidenciadas no procedimento utilizado em sua resolução. É o caso, por exemplo, dos problemas de *permutação* com quatro etapas, em que os estudantes sistematizaram suas soluções ponderando os quatro elementos a serem permutados, enquanto se esqueceram de um ou mais elementos em *produtos de medidas*, que também possuíam quatro etapas de escolha.

As análises apresentadas neste capítulo foram realizadas a partir do estudo de Vega (2014), que adotou como base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), a qual aponta para *situações que dão significado*, *invariantes* (propriedades e relações) de cada uma das situações e *representações simbólicas* empregadas em conceitualizações. De modo geral, pôde-se constatar que não há um significado dos problemas combinatórios que seja acatado como mais fácil que os demais; viu-se que há influência das etapas de escolha, enquanto relação invariante de importante proeminência; e verificou-se não haver ligação entre a representação simbólica selecionada pelo aluno para resolver os problemas e as etapas de escolha ou os diferentes tipos de problemas combinatórios.

Almeja-se colaborar para um enriquecimento no ensino de Combinatória, não priorizando o ensino deste ou daquele tipo de problema combinatório, mas, sim, de todos os diferentes tipos de problemas, para que os estudantes vivenciem diversas relações e propriedades combinatórias. Também é preciso proporcionar que os alunos lidem com variado número de etapas de escolha nos problemas, a fim de que entendam mais amplamente as escolhas necessárias no levantamento de possibilidades.

Deve-se, também, estimular a multiplicidade de estratégias de resolução, para que os estudantes percebam que algumas são mais eficazes, quando, por exemplo, se tem um maior número total de possibilidades. Desenhos e listagens – representações muito comuns entre os alunos – são bem utilizadas quando há poucas possibilidades, mas não são, essencialmente, os mais indicados quando o número total de possibilidades é alto. Borba (2013) aponta sobre essa questão ao afirmar que os alunos devem iniciar com o uso destes procedimentos, porém, gradualmente, precisam começar a utilizar estratégias mais gerais e sistemáticas – como diagramas, quadros, cálculos aritméticos, princípio fundamental da contagem e fórmulas, os quais darão conta da grande variedade de situações combinatórias.

Os alunos do 6º ano exibiram bons desempenhos nos testes propostos, fortalecendo a ideia de que o ensino desse conteúdo pode e deve ser principiado ainda no Ensino Fundamental, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais[10] (BRASIL, 1997) e como comprovado em estudos anteriores (MORO; SOARES, 2006; PESSOA; BORBA, 2009; MAHER; YANKELEWITZ, 2010; PESSOA; SANTOS, 2011; MATIAS; SANTOS; PESSOA, 2011; PESSOA; BORBA, 2012).

Faz-se necessário que os dados desta pesquisa e de outras tornem-se conhecidos para o professor do Ensino Básico, pois é ele quem poderá auxiliar os alunos a levantarem a ponte entre modos intuitivos e cotidianos de pensamento para o modo próprio da Matemática formal, em um procedimento crescente e em espiral, que inicia com os conhecimentos prévios dos alunos e progride para procedimentos combinatórios mais elaborados, como a sistematização, a generalização e demais procedimentos importantes para a combinação de elementos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. *Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades*: É melhor no papel ou no computador? 2013. 126 f.

10 O estudo foi desenvolvido antes da implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e ainda hoje muitos professores baseiam suas práticas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. O ensino da Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2012, Canoas. *Anais*... Canoas, RS: ULBRAS, 2012.

BARRETO, Fernanda. *O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.* 2012. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba. *Anais*... Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

BRASIL, Ministério da Educação e Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CORREA, Jane. OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. *Educar em Revista*, Curitiba, n.se1, p. 77-91, 2011.

FISCHBEIN, Efraim. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Reidel, Dordrecht, 1975.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. *In:* MAHER, Carolyn; POWER, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth. *Combinatorics and Reasoning*. New York: Springer, 2010.

MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., Recife. *Anais...* Recife, PE: UFPE, 2011.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Thereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Revista Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ* – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan./jun. 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. *Em Teia:* Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n. 1. 2010. Disponível em: http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4. Acesso em: 08 set. 2011.

PESSOA, Cristiane.; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? *Proceedings...* 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taiwan, 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. *Anais...* Recife, PE: UFPE, 2011.

PONTES, Danielle; BORBA, Rute. A influência das etapas de escolha e das representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2012, Canoas. *Anais...* Canoas, RS: ULBRAS, 2012.

SCHLIEMANN, Ana Lucia. *A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In:* CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Ana Lúcia. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.

SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. *Anais...* Recife, PE: UFPE, 2011.

TAXA-AMARO, Fernanda. Solução de problemas com operações combinatórias. *In:* BRITO, Márcia Regina (Org.). *Solução de problemas e a matemática escolar*. Campinas: Alínea, 2006. p. 163-183.

TEIXEIRA, Leny. CAMPOS, Edileni. VASCONCELLOS, Monica. GUIMARÃES, Sheila. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. *Educar em Revista*, Curitiba, n. se1, p. 245-270, 2011.

VEGA, Danielle. *Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha:* Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação? 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In:* BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

7 A probabilidade nos anos iniciais de escolarização: vamos jogar?

Rita Batista
Rute E. de S. Rosa Borba

INICIANDO O JOGO

As atuais demandas sociais têm imposto a todos os cidadãos conhecimentos e habilidades concernentes à Probabilidade para análises conscientes de riscos e chances e posteriores tomadas de decisão. Para decidir sobre um plano de previdência, um seguro, um investimento financeiro, um tratamento médico ou, até mesmo, um jogo de loteria, a Probabilidade está presente e precisa ser considerada para se avaliar as escolhas, e suas consequências, de forma consciente. Portanto, pensar em Probabilidade é pensar o futuro, é projetar o que pode ou não acontecer e, então, avaliar e decidir.

Exatidão, certeza e determinismo são considerados por muitos como características centrais da Matemática e esse olhar está bem presente nas aulas. A Probabilidade rompe com essas características, pois lida essencialmente com incerteza, com análises de chances e com riscos. Nessa direção, a Probabilidade envolve conhecimentos que contemplam experimentos aleatórios, análises de espaços amostrais, relações proporcionais, raciocínio combinatório, cálculos probabilísticos, entre outros.

Dito dessa forma, a Probabilidade parece muito complexa e pertencente unicamente ao mundo dos adultos. Por que, então, pensar sobre o ensino da Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental ou mesmo nos anos finais? O ideal não seria deixar para discutir questões probabilísticas quando o aluno estivesse mais instrumentalizado para lidar com a complexidade que envolve o tema? No Ensino Médio, talvez? Neste capítulo, buscamos respostas a essas indagações, assim como evidências de que o ensino da Probabilidade pode ser tratado desde o início da escolarização.

Não se trata de ensinar às crianças cálculos probabilísticos elaborados, que vão além de sua capacidade de compreensão, nem impor um ritmo sem sentido para ampliar um repertório matemático que, aparentemente, só será necessário na vida adulta. Na verdade, trata-se de iniciar um processo de reflexão sobre conceitos probabilísticos muito presentes na vida de todas as pessoas: crianças, jovens, adultos e idosos, como, por exemplo, pensar sobre o que é possível, o que é impossível, o que é provável e improvável ou sobre o que é certo de acontecer (evento determinístico) e quais as possibilidades de resultados que existem, entre outras questões.

Foi pensando no ensino e na aprendizagem da Probabilidade desde os primeiros anos de escolarização que Bryant e Nunes (2012) elaboraram um mapeamento de estudos probabilísticos envolvendo crianças. O *Children's understanding of probability – A literature review* traz reflexões sobre diversas pesquisas, resgatando desde estudos feitos por Piaget e Inhelder, publicados nas décadas de 1950 e 1970, até pesquisas mais recentes apoiadas em aportes tecnológicos.

Dada a importância crescente da Probabilidade na sociedade, tem-se ampliado, cada vez mais, nos currículos a inserção de conteúdos probabilísticos em suas bases. O Currículo de Pernambuco (2019), por exemplo, propõe o ensino processual e espiralado da Probabilidade na Educação Básica e aponta que "trabalhar com as noções que sustentam o conceito de probabilidade como aleatoriedade e chance são fundamentais" (PERNAMBUCO, 2019, p. 45). Nesse documento, que está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), defende-se o estudo de temas probabilísticos a partir dos primeiros anos de escolarização no Ensino Fundamental, considerando contextos que permitam "a construção da ideia de probabilidade que deve apoiar-se em situações elaboradas de tal forma que o estudante possa experimentar e realizar simulações" (PERNAMBUCO, 2019, p. 58).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), que embasa obrigatoriamente todas as propostas curriculares do país, apresenta de modo bem amplo os estudos envolvendo a Probabilidade. Desde o 1º ano do Ensino Fundamental, a BNCC inclui questões concernentes a essa unidade temática, propondo nos anos iniciais um trabalho "centrado no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis" (BRASIL, 2017, p. 274).

Nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos probabilísticos devem ser ampliados e aprofundados em conformidade com a BNCC, por meio de experimentos aleatórios e simulações (probabilidade frequentista[1]) para confronto e aproximação com a probabilidade teórica (probabilidade clássica[2]). O documento salienta, ainda, a progressão dos conhecimentos em função da capacidade de ampliação da compreensão do espaço amostral por meio da enumeração dos seus elementos, associados ao raciocínio combinatório em problemas de contagem.

Em consonância com os pressupostos acima discutidos, o estudo que apresentamos aqui considera o potencial das crianças na aprendizagem de questões probabilísticas, mesmo antes de terem acesso ao estudo formal da Probabilidade em sala de aula. O desenho da pesquisa considerou as demandas cognitivas estabelecidas por Bryant e Nunes (2012) para a compreensão da probabilidade. Para estes autores, a probabilidade se configura como um conceito complexo, havendo quatro demandas cognitivas[3] necessárias ao desenvolvimento da compreensão da probabilidade por parte dos aprendizes: *compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade; formar e categorizar o espaço amostral; comparar e quantificar probabilidades;* e *entender correlações*.

A complexidade do conceito, como apontado por Bryant e Nunes (2012), não tem a intencionalidade de servir de justificativa para o distanciamento ou abandono da inserção de conteúdos de natureza probabilística nos currículos dos anos iniciais do Ensino

---

1 A probabilidade frequentista considera a frequência de eventos que ocorrem em iguais condições. Assim, em conformidade com Bernouili, se um evento ocorre em um determinado conjunto de vezes (k) em n tentativas idênticas e independentes, e se o número de tentativas é grande, k/n deve ser próximo da probabilidade objetiva desse evento (BATANERO; DIAZ, 2007).

2 A probabilidade clássica é considerada uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis, na visão Laplaciana (BATANERO; DIAZ, 2007).

3 Essas demandas são detalhadas no capítulo introdutório desse livro.

Fundamental. Pelo contrário, a complexidade do tema exige um trabalho permanente e processual ao longo de toda caminhada escolar, de reflexão e ação, de jogos e experimentações, para o entendimento de diversos conceitos que estão atrelados a cada uma das exigências cognitivas defendidas por esses autores.

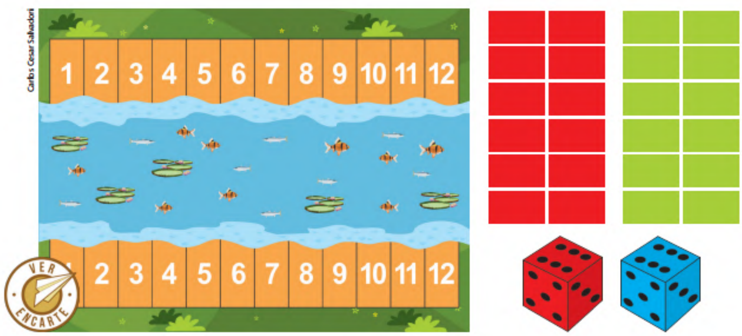
Historicamente, a probabilidade esteve associada a jogos de azar. Hoje, o ensino e reflexões probabilísticas no âmbito escolar se assentam também no uso de diversos tipos de jogos. Considera-se, portanto, que o jogo é um importante recurso para a aprendizagem não apenas da probabilidade, pois permite aos jogadores ampliar seu caráter competitivo, aperfeiçoar-se operatoriamente, buscar diferentes soluções, repensar e avaliar situações, encontrar e estruturar novas relações e resolver problemas (GRANDO, 2000). Para Cañizares *et al.* (2003), o conceito de probabilidade pode ser desenvolvido por meio de jogos e experimentos com uso de moedas e dados, por exemplo, pois auxilia na compreensão de conceitos como acaso, independência e eventos mutuamente exclusivos. Assim, os jogos de azar são um importante contexto no qual as crianças enfrentam situações aleatórias e tornam-se conscientes da sua imprevisibilidade. E como estes jogos também fazem parte da cultura das crianças fora da escola, eles amplificam a aquisição de conhecimentos probabilísticos, mesmo antes de qualquer instrução formal sobre o tema (CAÑIZARES *et al.*, 2003).

O recorte da pesquisa que detalharemos a seguir levantou compreensões intuitivas da probabilidade de crianças do 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental, a partir da vivência com o jogo *Travessia do Rio* (BRASIL, 2014). Foram exploradas as três primeiras exigências elencadas por Bryant e Nunes (2012) para compreensão da probabilidade que dizem respeito à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades, especificamente.

REGRAS DO JOGO

O estudo contou com a participação de 36 crianças de duas escolas públicas, assim distribuídas: 12 crianças do 1º ano, 12 do 3º ano e 12 do 5º ano do Ensino Fundamental. Foram utilizados dois jogos: um com moedas e outro com dados que serviram de base para uma entrevista clínica[4] (CARRAHER, 1998) realizada individualmente com cada um dos participantes. Detalharemos, a seguir, o jogo *Travessia do Rio* (Figura 1), foco do presente capítulo. Trata-se de um jogo de tabuleiro que utiliza dados e é jogado em duplas.

Figura 1. Jogo *Travessia do Rio*



Fonte: Brasil (2014, p. 40).

4 Baseada no Método Clínico Piagetiano, a entrevista clínica permite ao entrevistador dirigir a conversa para as questões que deseja sondar e, ao mesmo tempo, ser dirigido pelo pensamento do entrevistado, possibilitando a sondagem dos pensamentos, intenções e valores do que o entrevistado diz e faz.

Nesse jogo, os participantes escolhem a 'casa' numerada (de 1 a 12) em que serão colocadas as suas 12 fichas (um jogador coloca fichas vermelhas de um lado e outro jogador coloca fichas verdes do outro lado do 'rio'). Eles podem colocar mais de uma ficha em cada 'casa' que margeia o 'rio' ou, se preferirem, pode ser colocada uma ficha em cada 'casa'. Os dados são lançados por um jogador de cada vez e o resultado da soma dos números dos dois dados será considerado para a realização da 'travessia' de uma ficha, caso esteja na 'casa' com o resultado da soma dos dados. Ganha o jogo quem conseguir passar todas as fichas para o outro lado do 'rio'. Dessa forma, a escolha do modo de distribuição das fichas é uma questão primordial para se ter sucesso no jogo.

As aprendizagens descritas nesse jogo pelo Caderno de Jogos do PNAIC (BRASIL, 2014) são: resolver adições e analisar possibilidades de soma resultando em 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Embora não esteja explícito nesse material, tem-se também noções de probabilidade como possível aprendizagem das crianças ao participarem do jogo. Maior chance de vencer estará nas mãos do jogador que escolher colocar suas fichas em 'casas' com maior probabilidade de soma dos números de dois dados, como na 'casa' 7 (com possibilidades de 1 no dado vermelho e 6 no azul, e vice-versa, e 2 no dado vermelho e 5 no azul, e vice-versa, e, ainda, 3 no dado vermelho e 4 no azul, e vice-versa). No total, há 36 possibilidades de somas, sendo 6 para a 'casa' 7 e para as demais somas, há uma, duas, três, quatro ou cinco possibilidades e não há nenhuma possibilidade de que a soma de dois dados resulte em 1.

Para além das questões supracitadas, o uso de dados de cores diferentes no jogo pode auxiliar as crianças a perceberem que resultados como 2 + 5 e 5 + 2 são possibilidades distintas. Dessa forma, sair 5 no dado vermelho e 2 no dado azul é uma possibilidade diferente de sair 5 no dado azul e 2 no dado vermelho.

As crianças tiveram a oportunidade de jogar algumas rodadas antes de iniciar a entrevista clínica, na qual havia oito perguntas norteadoras com foco em situações atreladas à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades, envolvendo: chance igual e diferente, evento impossível, eventos aleatórios, equiprobabilidade, evento pouco provável, levantamento de possibilidades e independência de eventos.

O Quadro 1 especifica a ordem das perguntas norteadoras realizadas durante a entrevista, associando-as a cada foco alusivo aos elementos probabilísticos discutidos neste estudo.

Quadro 1. Discriminação das questões do jogo *Travessia do Rio* (continua)

Demanda cognitiva	Foco probabilístico	Perguntas norteadoras
Comparação de probabilidades	1 – *Chance igual*	Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?
Espaço amostral	2 – *Evento impossível*	João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê?
Comparação de probabilidades	3 – *Chance diferente*	Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê?
Espaço amostral	4 – *Evento pouco provável*	Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê?
Espaço amostral	5 – *Levantamento de possibilidades*	João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?

Demanda cognitiva	Foco probabilístico	Perguntas norteadoras
Aleatoriedade	6 – *Independência de eventos*	André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo?
Aleatoriedade	7 – *Equiprobabilidade*	Se você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê?
Aleatoriedade	8 – *Evento aleatório*	Se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê?

Fonte: Silva (2016).

É importante ressaltar que na pesquisa aqui relatada foi explorado, especialmente, o *significado intuitivo*[5] da probabilidade, como proposto por Batanero e Diaz (2007), em função das crianças, provavelmente, não terem tido acesso à instrução formal do tema. O objetivo, portanto, foi analisar as compreensões intuitivas das crianças acerca de alguns elementos da probabilidade em situações de jogos.

PARA ONDE O JOGO NOS LEVA?

No que diz respeito à compreensão da aleatoriedade – primeira das demandas cognitivas apontadas por Bryant e Nunes (2102) – foram

5 Significado intuitivo da probabilidade diz respeito a ideias intuitivas e naturais relacionadas à possibilidade e à probabilidade que aparecem desde muito cedo em crianças e que não estão condicionadas à educação formal. Utilização de expressões qualitativas como "provável", "improvável", "impossível" são usadas para expressar graus de crença na ocorrência de eventos aleatórios (BATANERO; DIAZ, 2007).

investigados três pontos concernentes à probabilidade: a *independência de eventos*, *eventos equiprováveis* e *eventos aleatórios*. Notadamente, as situações probabilísticas apontadas neste estudo assentam-se em diversos elementos que envolvem a compreensão da aleatoriedade e compreendê-los é essencial para o amplo entendimento da probabilidade.

Em relação à independência de eventos, foi feita a seguinte indagação às crianças: *André jogou o dado uma vez e deu 5, jogou de novo e deu 5, jogou mais uma vez e deu 5. Se ele jogar novamente, você acha que vai sair o 5 de novo? Por quê?*

O fato de sair 5 no primeiro lançamento de um dado, assim como no segundo ou terceiro lançamento, configura os eventos como independentes, logo, a probabilidade de sair o 5 pela quarta vez, ou em qualquer outra vez, permanece 1 em 6. Diz-se, portanto, que a aleatoriedade não tem compromisso com os ensaios anteriores ou posteriores. Cada ensaio é independente e não tem qualquer relação com nenhum outro, por isso, é aleatório.

Do total das crianças investigadas, menos de 17% acharam que poderia sair qualquer face do dado: sendo uma das crianças do 1º ano, duas do 3º e três do 5º ano. Quase 39% dos estudantes julgaram que o evento aconteceria novamente, sendo a maior parte deste julgamento feito por alunos do 1º ano, enquanto pouco mais de 44% consideraram que o evento não iria acontecer, pois já tinha acontecido muitas vezes.

As justificativas equivocadas apresentadas pelas crianças se assentam num tipo de erro defendido por Bryant e Nunes (2012) como *efeito de recência positiva ou efeito de recência negativa*. Para esses pesquisadores, as crianças que defenderam que o 5 iria sair novamente porque já tinha saído muitas vezes, cometeram o erro de *efeito de recência positiva,* por acreditar que o evento tende a se repetir com os mesmos resultados. Já os alunos que disseram que o 5 não iria sair porque já havia saído muitas vezes, cometeram o erro *efeito de recência negativa*, por julgarem que a probabilidade de ocorrer o evento novamente diminui em função de ocorrências anteriores. Considera-se, por conseguinte, que para o redimensionamento das compreensões das crianças acerca da independência de eventos é importante o desenvolvimento de propostas pedagógicas que envolvam experimentos aleatórios (jogos, sorteios) que permitam uma relação dialógica com espaço para refletir, discutir, levantar possibilidades, confrontar ideias e opiniões, analisar situações, levantar hipóteses etc.

Alguns exemplos de *recência positiva* encontradas foram: *"porque caiu 5 um bocado de vez"* (Ana, 1º ano), *"ele jogou tanto e deu tanto o número 5 que eu acho que vai dar de novo"* (Pedro, 3º ano) e *"ele jogou tantas vezes e dá o 5, dá o 5, aí vai dar de novo, se ele tiver sorte"*. Já como exemplos de *recência negativa*, tem-se: *"ele jogou direto 5, aí eu acho que vai ser outro número"* (Carlos, 1º ano), *"Não. Porque já caiu muitas vezes"* (Amanda, 3º ano) e "*Ele jogou muitas vezes e dessa vez pode estar confiante que vai dar o 5 de novo, mas não vai. Poder, pode, mas não vai dar o 5 de novo não"* (André, 5º ano).

Embora alguns alunos tenham se posicionado a favor ou contra a saída do 5 no novo lançamento, sem considerar a independência de eventos, há indícios de alguma compreensão, como quando atribuíram a questão à sorte ou a Deus, típica linguagem e pensamento da *probabilidade intuitiva* defendida por Batanero e Diaz (2007). A fala de André, acentuada pela dúvida ("*poder, pode, mas*"), pode ser um importante ponto de partida para discussões sobre a aleatoriedade e a independência de eventos.

Os alunos que corretamente consideraram que poderia cair qualquer face do dado no novo lançamento, mesmo sem terem tido acesso formal ao ensino de Probabilidade, trouxeram argumentos bem interessantes e até amadurecidos, como *"acho que vai cair o 5. Ou pode cair no 4 ou no 6. Pode cair qualquer um."* (Carla, 1º ano), *"pode cair o 5, mas tem pouca chance. Os outros (1, 2, 3, 4 e 6) estão em maior quantidade. Todos eles contra o 5 são maiores"* (Paulo, 3º ano) e "*as chances são mínimas porque ninguém sabe qual é o que vai cair. (...). Não vai dar o 5 ou vai dar o 5, vai dar o 4, o 3, qualquer um"* (Rute, 5º ano). Acreditamos, a partir de exemplos como esses, que o jogo, mesmo sem a intenção neste estudo de ensinar Probabilidade, permitiu aprendizagens a partir das reflexões propostas.

Para analisar as compreensões das crianças em relação à equiprobabilidade, lhes foi perguntado: s*e você jogar com o dado vermelho e eu com o dado azul quem terá mais chance de tirar o 6: eu ou você? Por quê?* Sabe-se que as chances são as mesmas, ou seja, 1 em 6 para qualquer dado ou qualquer pessoa.

Dos 33% dos alunos que julgaram que eles teriam mais chances, cinco eram do 1º ano, quatro do 3º e três do 5º ano, utilizando como argumentos: *"porque eu sou o mais inteligente da minha sala*" (1º ano), "*parece que é eu. Lá em casa tem um jogo desse e eu joguei o 'coisa' pra cima e só saía 6, 6, 6..."* (1º ano), "*na verdade, eu sempre ganho o 6*" (1º ano), "*eu, porque assim, depende da sorte, né? Só Deus sabe*" (3º ano). Já os alunos que acharam que a pesquisadora teria mais chance (25%), alegaram: "*porque a senhora é grande, sabe mais*" (1º ano), "*porque você tem mais habilidade do que eu. Eu não sou bom em jogar dado não. Tem a ver com a habilidade da mão, com sorte*" (5º ano), "*você pode ter mais sorte e tirar o número maior*" (5º ano).

Pouco mais de 36% considerou que ambas as pessoas teriam a mesma chance de tirar o 6 e utilizaram como justificativas argumentos como: "*porque é a mesma função, o dado*" (3º ano), "*as duas. O meu também pode parar 6 também*" (3º ano), "*ninguém tem mais chance.*

Mesma chance, porque nós dois temos um seis" (5º ano), "*porque você não pode roubar. Nem eu nem você*" (5º ano).

As crianças do 1º ano tiveram mais dificuldade em perceber a equiprobabilidade presente na situação e utilizaram parâmetros particulares, próprios do significado intuitivo da probabilidade (BATANERO; DIAZ, 2007), para justificar a influência de um evento externo sobre os resultados do lançamento do dado: a inteligência, a experiência, a crença num resultado, o fato de ser adulta, grande ou saber mais.

Já os estudantes do 3º e 5º anos, mesmo sem a consolidação do conceito da equiprobabilidade, nem da aleatoriedade, apresentaram argumentos mais consistentes e coerentes com a situação apresentada. Alguns relacionaram o fato, inclusive, à honestidade do dado ("*porque você não pode roubar")* ou à sorte *("depende da sorte, né? Só Deus sabe").*

Em relação a *resultados incertos* (aleatoriedade), foi solicitado que as crianças respondessem à seguinte indagação: *se eu jogar um dado, é mais fácil sair qual dos números? Por quê?* A maioria dos alunos (72%) apontou um número específico como resposta, eles utilizaram as seguintes justificativas para argumentar suas escolhas: "*porque quando joguei saiu o 5*" (1º ano), "*porque o menino do jogo jogou e caiu 5*" (1º ano), "*porque o 6 é mais*" (1º ano), "*um dia meu amigo tava jogando isso e só caía 6"* (3º ano), "*esse é o mais forte, o mais alto que tem, é ele"* (3º ano), "*o 5, porque quando tô jogando com meu irmão sai mais o 5 para mim*" (5º ano). Outras crianças escolheram mais de um número como resposta à indagação, alegando, por exemplo: "*toda vez que eu jogo tem que sair o 5, o 3 ou o 4, mas eu não sei porquê*" (5º ano).

As compreensões das crianças sobre aleatoriedade, observados nesta indagação, ainda são muito fragilizadas. Alguns alunos, mesmo não acertando a questão, apontaram indícios de compreensão, como o aluno Antônio (3º ano) que informou que não era "adivinhador" para saber qual iria cair, embora, posteriormente, tenha optado por um número específico, e Beatriz (5º ano) que informou: "*toda vez que eu jogo tem que sair o 5, o 3 ou o 4, mas eu não sei porquê*". Apenas três alunos do grupo pesquisado julgaram que poderia cair qualquer número.

Carvalho e Fernandes (2005) defendem que para ampliar a compreensão da aleatoriedade é necessário o desenvolvimento de novas atitudes intuitivas por meio do envolvimento pessoal do aprendiz em atividades práticas com objetos aleatórios concretos e com intensa interação dos alunos entre si e com o professor.

Para Mlodinow (2009, p. 16), "a aleatoriedade é fundamentalmente uma codificação do bom senso". O autor alega que eventos aleatórios podem se assemelhar a eventos não aleatórios, por isso, é importante ter cuidado para não os confundir quando tratarmos da interpretação de questões humanas, uma vez que foram necessários muitos séculos para que os cientistas aprendessem a ver além da ordem aparente e reconhecer a aleatoriedade oculta na natureza e também na vida.

Para avaliar a compreensão das crianças, no que tange ao espaço amostral, optamos por explorar questões com foco em *levantamento de possibilidades, evento impossível e evento pouco provável.* Essa opção pode ser justificada pelo fato de que, para avaliar se o evento é muito ou pouco provável, se é possível ou impossível, é imprescindível conhecer e analisar o espaço amostral.

No lançamento de dois dados, o espaço amostral contempla 36 possibilidades. O evento soma 8, tem ao todo cinco possibilidades de resultados: 2 e 6, 6 e 2, 4 e 4, 3 e 5, 5 e 3. A pergunta norteadora feita aos alunos para que se desencadeasse a discussão acerca do levantamento de possibilidades foi: *João apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair nos dados para dar 8?*

Embora os alunos não tenham conseguido esgotar todas as possibilidades para o evento, todos elencaram, ao menos, uma possibilidade de soma que resultasse em 8, sendo que, dos registros apresentados, 50% apontaram três possibilidades, como se pode observar na Tabela 1.

As crianças mais velhas que sabiam os fatos fundamentais da soma (resultados memorizados da soma de alguns números, por exemplo: 2 + 6 ou 4 + 4) não observaram os dados, nem fizeram contagens. Pensaram nas possíveis respostas e efetuaram os registros. Já as mais novas, especialmente do 1º ano, necessitaram realizar contagens nos dados e algumas sentiram dificuldades em encontrar mais de uma possibilidade. Segundo estudos de Pessoa e Borba (2009), de fato, algumas crianças sentem dificuldades em fazer uma lista exaustiva dos resultados possíveis de uma situação.

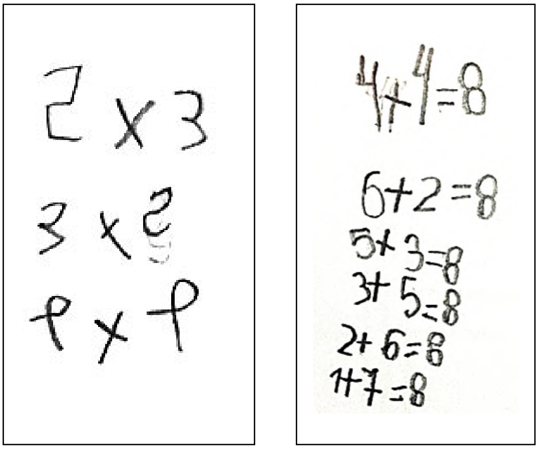
Tabela 1. Síntese da quantidade de possibilidades de soma 8 no lançamento de dois dados elencados pelos alunos (por ano)

Ano	1 possibilidade	2 possibilidades	3 possibilidades	4 possibilidades	5 possibilidades
1º	5	1	4	1	1
3º	3	3	6	0	0
5º	0	4	8	0	0
Total	8	8	18	1	1

Fonte: Adaptado de Silva (2016).

Curiosamente, apenas crianças do 1º ano sugeriram os registros 3 + 5 e 5 + 3, aparentemente como possibilidades distintas. Nas Figuras 2a e 2b, tem-se os registros de duas crianças do 1º ano que fizeram esses apontamentos diferenciados, mesmo que nem todas as possibilidades tenham sido elencadas (Figura 2a) ou que possibilidades impossíveis de saírem em dados (como 1 + 7) tenham sido inicialmente apontadas (Figura 2b).

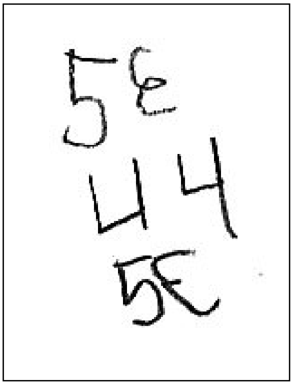
Figuras 2a e 2b. Registro de possibilidade de soma 8 no lançamento de dois dados por crianças do 1º ano

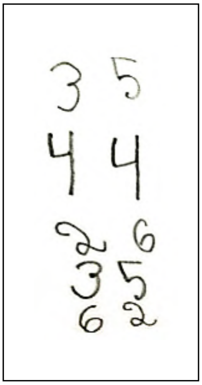


Fonte: Silva (2016).

Observamos que as crianças do 3º ano e, especialmente do 5º ano, julgaram os resultados 5 + 3 e 3 + 5, assim como 2 + 6 e 6 + 2 como possibilidades iguais, mesmo que os dados tivessem cores distintas para se chamar a atenção sobre os resultados diferenciados. Alguns verbalizaram e até apagaram os registros feitos com comentários como: *"esse já tem"* ou *"já botei esse"*. Essas crianças estavam analisando os registros feitos antes de colocar novos registros, enquanto os estudantes do 1º ano contavam nos dados e escreviam em qualquer ordem todas as vezes que encontravam o resultado 8. Eles não refletiram sobre as respostas registradas anteriormente, provavelmente, por esta razão, apenas eles (alunos do 1º ano) tenham conseguido registrar tais possibilidades que foram eliminadas pelos maiores. Um fato que apoia esta conclusão, são registros repetidos, como apontados nas Figuras 3a e 3b.

Figuras 3a e 3b. Registro de possibilidades repetidas por crianças do 1º ano





Fonte: Silva (2016).

A análise do espaço amostral, segundo Bryant e Nunes (2012), começa com uma procura exaustiva de todas as possibilidades e, para tal, há duas importantes exigências: eliminar qualquer *elemento impossível* e conhecer todos os *resultados possíveis*. A compreensão do espaço amostral tem estreita relação com o raciocínio combinatório, portanto, pensar em todas as possibilidades do espaço amostral pressupõe elencar os elementos do experimento aleatório, considerando os eventos explorados na situação.

Apesar de as crianças terem relativa facilidade em identificar elementos impossíveis em alguns contextos (NÓBREGA; SPINILLO, 2015; SILVA, 2016), tal fato nem sempre ocorre. Neste caso específico, algumas crianças não atentaram para resultados impossíveis do evento *soma 8* no lançamento de dois dados, talvez porque é perfeitamente possível encontrar resultado 8 em outras somas que não estejam atreladas a lançamentos de dados. Para elas, um resultado qualquer que totalizasse 8 poderia ser resposta à indagação proposta. O diálogo (Quadro 2) a seguir ocorrido com uma criança do 1º ano aponta esta compreensão equivocada.

Quadro 2. Diálogo entre pesquisador e a estudante Maria

Pesquisadora	Criança: Maria
Tu achas que tem outro jeito? (de dar 8 na soma de dois dados)	*Um mais seis. Não! Um mais sete.*
E tem sete no dadinho?	*Não. Mas pode ser um mais sete mesmo! E então registrou 1 + 7 na folha.*

Fonte: Adaptado de Silva (2016).

Constatamos que a maior dificuldade das crianças em elencar todas as possibilidades de soma 8 no lançamento de dois dados foi a dificuldade em perceber que a ordem, nesse caso, compõe uma possibilidade distinta, apesar de totalizar resultados iguais. Julgamos que para os alunos perceberem essa diferença é importante haver instrução advinda da escola, possibilitando-lhes a percepção total dos elementos que compõem determinado evento de um espaço amostral.

Para ampliação das compreensões das crianças sobre o levantamento de possibilidades (entendimento do espaço amostral) sugerimos uma instrução baseada na reflexão em atividades que promovam o raciocínio combinatório e que também tratem da probabilidade, envolvendo situações experimentais como jogos de cartas, moedas, diferentes tipos de dados, bingo etc. Outras atividades com o uso das diversas situações combinatórias também auxiliam nessa compreensão.

João colocou todas as suas fichas no 1. Ele conseguirá ganhar o jogo? Por quê? Esta foi a pergunta que norteou a discussão acerca de evento impossível (soma 1) no lançamento de dois dados. Mais de 91% das crianças informaram que João não conseguiria ganhar o jogo, mas nem todos os argumentos apontaram para a compreensão sobre o evento impossível, como observado nestas falas: *"não porque escolheu menos"* (1º ano), "*ele tá com pouco, com bem pouquinho*" (3º ano), "*não tem chance de ganhar porque colocou tudo num canto só. Imagine se não sair esse (1) ele vai perder. Tem que ter muita sorte"* (3º ano).

As crianças que apresentaram justificativas coerentes disseram: "*porque são dois dados e ele jogou as fichas só no 1. Nos dois dados só dá 2, 6 e 10. Não dá 1 não!*" (3º ano), "*Ihhhh, lascou! Não tem como ganhar não, porque são dois dados. Aí se cair dois dados com 1 e 1 não vai dar (para atravessar o rio)"* (5º ano).

Pedro apostou todas as fichas no 3. Ele tem muita, pouca ou nenhuma chance de ganhar o jogo? Por quê? Foi essa a pergunta norteadora para avaliar a compreensão dos estudantes acerca de *evento pouco provável*. Há apenas duas possibilidades de formação 3 no lançamento de dois dados: 2 + 1 e 1 + 2, enquanto que para sair o 7, por exemplo, tem seis possibilidades. Comparando os dois eventos, podemos dizer que é pouco provável alguém ganhar o jogo se colocar todas as suas fichas no 3. A Tabela 2 mostra as respostas das crianças.

Tabela 2. Síntese da quantidade de respostas dos alunos em relação a um evento pouco provável (por ano)

Ano	Muita chance	Pouca chance	Nenhuma chance
1º	3	6	3
3º	0	9	3
5º	3	8	1
Total	6	23	7

Fonte: Adaptado de Silva (2016).

Observa-se que a maioria das crianças informou que haveria pouca chance de Pedro ganhar o jogo. No entanto, as justificativas nem sempre apontaram para a compreensão coerente sobre evento pouco provável, como, por exemplo: *"porque o número é baixo"* (3º ano) ou *"porque o 3 é pouquinho"* (1º ano).

Das crianças que aparentaram indícios de compreensão, destacamos as seguintes falas: "*pouquíssima chance, porque é muito difícil sair todas no 3*" (3º ano), "*fica difícil cair 2 em um (dado) e 1 no outro*" (5º ano), "*porque ninguém sabe o que vai cair, pode sair um nove (4 + 5), as chances são mínimas*" (5º ano), "*pra sair o número 3, tem que ter o número 2 e juntar com o número 1. É difícil*" (5º ano).

Quase sempre os argumentos apresentados pelas crianças mais velhas, especialmente as do 5º ano, comprovaram algum entendimento sobre o tipo de evento em discussão. Já as crianças do 1º, e até do 3º ano, apresentaram justificativas mais fragilizadas que tinham relação como *magnitude* do número 3. Poucos alunos do 1º ano demonstraram indícios de compreensão da situação, normalmente, eles dissociavam a formação do 3 no lançamento de dois dados e pensavam o número isoladamente, fora do contexto do jogo. Ainda assim, alguns apresentaram argumentos mais coerentes, estabelecendo comparação implícita com os demais eventos "*porque não para muito no 3*" ou relacionando com a formação 3 no lançamento de dois dados *"se ele bater 2 e 1 fica 3"*.

A terceira demanda cognitiva defendida por Bryant e Nunes (2012) para compreensão da probabilidade versa sobre a quantificação e comparação de probabilidades. No estudo aqui relatado, exploramos apenas a comparação de probabilidades, considerando a análise do espaço amostral para o estabelecimento de comparações em termos de *mais* e *menos*. Como estávamos averiguando as compreensões mais intuitivas das crianças, não esperávamos, naturalmente, que elas calculassem probabilidades para poder compará-las.

Para avaliar a compreensão sobre eventos que têm chances iguais de ocorrência, perguntou-se às crianças: *"Pedro apostou todas as fichas no 2 e João todas no 12. Quem tem mais chance de ganhar? Por quê?"* As chances de Pedro e de João são iguais, pois só há uma possibilidade de soma 12 (6 + 6) e uma de soma 2 (1 + 1) no lançamento de dois dados. Nossa hipótese era que os alunos pudessem refletir sobre essas possibilidades e estabelecer a comparação.

Dos 36 alunos pesquisados, apenas três afirmaram que ambos teriam a mesma chance. Julgamos que a pergunta norteadora possa ter influenciado o resultado, uma vez que não se propôs que os dois (João e Pedro) poderiam ter também chances iguais. Os alunos do 1º ano utilizaram justificativas que tiveram como apoio a análise dos números 2 e 12 em relação ao seu valor absoluto ou ordinário, ou de "proximidade" com uma possível vitória, considerando a recente experiência no jogo. Já as crianças do 3º ano, apesar de se equivocarem na resposta, apresentaram uma discreta ampliação nas compreensões apresentadas, refletindo sobre a formação de cada número separadamente (2 ou 12), embora não tenham estabelecido a comparação.

No 5º ano, alguns alunos atribuíram as chances (maior ou menor) a elementos externos: *"porque para chegar no 12 tem que balançar muito os dados"* ou a sua experiência *"as chances são mínimas, mas vai dar o 2 porque sempre cai o número menor quando jogo"* ou ainda numa impossibilidade inexistente de sair o 2, *"tem como dar 12 com 6 e 6 e não tem como dar 2".*

Independente do ano de escolaridade, as crianças não conseguiram comparar as probabilidades a partir da análise do espaço amostral. No entanto, observamos que o jogo possibilitou reflexões que poderiam suscitar compreensões mais elaboradas a partir do confronto das ideias iniciais com intervenções realizadas para fins de ampliação das aprendizagens.

Na comparação de probabilidades com chances diferentes de ocorrência usou-se a seguinte pergunta norteadora: *Quem tem mais chance de ganhar o jogo: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas no 11? Por quê?*

Sabemos que no lançamento de dois dados há seis possibilidades de formação do 7 (1 + 6, 6 + 1, 2 + 5, 5 + 2, 3 + 4 e 4 + 3) e apenas duas de formar 11 (5 + 6 e 5 + 6). Assim, há seis chances em 36 de sair 7 e duas chances em 36 de cair 11. Como citado anteriormente, havia expectativa de que as crianças relacionassem o número de possibilidades dos distintos eventos para estabelecer a comparação.

Mais de 52% dos alunos pesquisados informaram que o 7 teria mais chance de sair, ou seja, que a pessoa que escolheu o 7 teria mais chance de ganhar o jogo. No 1º ano, as crianças apontaram para uma compreensão equivocada: "*porque tá mais perto de ganhar*", "*no 7 porque tá mais perto do 6*", "*fica no sétimo lugar*", "*porque se ele escolheu 7 ele tem 7 vidas*". Dois alunos fizeram menção às possibilidades de formação dos números envolvidos na situação, embora não tenham claramente feito uma comparação de probabilidades: "*se bater 5 e 2 fica 7*" e "*para mais no 11 e 6 + 5 dá 11*".

Antônio, do 3º ano, deixou muito clara a comparação utilizando os componentes dos eventos. Inicialmente, ele informou que o 7 "é um número menor e o 11 foi difícil de eu acertar" e completou dizendo que para dar 11 sai 5 e 6 e para dar 7 sai 5 e 2, 6 e 1 e 4 e 3, concluindo que o 7 "é fácil de acertar". Já Pietra, julgou que o 7 teria mais chance de sair, mas que não sabia ainda o porquê, uma vez que "*não para muito no 11, é muito difícil parar*". As crianças tendem a considerar a recente experiência no jogo para justificar suas escolhas. Nem sempre a análise é probabilística, proporcional, ou seja, considerando que para sair 11 só há duas possibilidades, enquanto para sair 7 tem, no total, seis possibilidades. Quase sempre os argumentos são baseados em suas crenças e intuições. É possível, portanto, perceber que elas cometem um equívoco comum denominado *heurística da representatividade* quando julgam que a pequena amostra que foi experienciada traduz o conjunto, a população.

Camila, do 5º ano, apresentou argumentos semelhantes ao de Antônio, do 3º, quando informou que o 7 teria mais chance, pois: "*[...] foi uma resenha pra cair o 11 aqui. O 7 é mais fácil de cair o número em dois dados, porque pode cair 4, 3. Aí o 11 não tem muita chance porque não cai muito os números. O 7 pode cair 5 e 2, 6 e 1*". Apesar de não elencar a formação dos 11 em sua fala, Camila analisa adequadamente o porquê de o 11 ter menos chance.

As crianças apresentaram compreensões mais coerentes na comparação de eventos com chances diferentes de ocorrência do que em chances iguais. Como pontuado anteriormente, a pergunta norteadora pode ter influenciado tanto uma como a outra resposta. Acredita-se que nas chances diferentes, na experiência no jogo, o resultado 7 tenha sido fator determinante para as escolhas das crianças, ao mesmo tempo que o 11 foi pouco ou nenhuma vez observado durante os lançamentos dos dados. Assim, a escolha era daquele valor que apareceu mais vezes durante a vivência no jogo. Em relação às chances diferentes, sair 2 ou 12 foi raro, mas não permitiu que eles concluíssem que teriam iguais as probabilidades, pois exigia que pensassem no espaço amostral de cada evento e comparassem ambos. Nesse caso, apenas a experiência no jogo não pareceu determinante.

Foi possível observar que a compreensão das crianças acerca da comparação de probabilidades apresenta uma gradação em relação aos anos de escolaridade, no que diz respeito à qualidade das justificativas apresentadas, mesmo quando as respostas eram equivocadas. Essa qualidade diz respeito a um maior uso de elementos matemáticos para justificar suas escolhas. Por exemplo, no 1º ano houve estudantes que não conseguiram apresentar justificativas ou usavam relações inexistentes, como, por exemplo: "*porque é muito dinheiro*" ou "*porque tá mais perto de ganhar*".

FIM DO JOGO

O estudo aqui relatado permitiu-nos observar que o significado intuitivo da probabilidade (BATANERO; DIAZ, 2007) foi evidenciado pelas crianças, especialmente pela observância, nos participantes, de crenças e ideias baseadas na recente experiência do jogo, envolvendo concepções que se relacionavam à sorte. O uso de aleatorizadores, como dados e moedas, é um dos campos de problemas defendidos por Batanero e Diaz (2007) para exploração do significado intuitivo da probabilidade. O jogo envolvendo o lançamento de dois dados fez emergir nas crianças uma linguagem natural, baseada em crenças e opiniões. Batanero, Henry e Parzisz (2005) estabelecem relação do significado intuitivo da probabilidade aos jogos de azar, defendendo que as primeiras ideias intuitivas desses jogos (de azar) são comuns em muitas civilizações primitivas e que podem aflorar em crianças ou em adultos que nunca estudaram Probabilidade, por meio de palavras, frases e expressões coloquiais para expressar os sucessos, as incertezas e as crenças, como também foi observado no presente estudo.

Julgamos que as atividades envolvendo o jogo explorado neste recorte de pesquisa podem possibilitar a ampliação da compreensão da probabilidade, pois discutem e exploram importantes focos das demandas cognitivas que dizem respeito à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades. Naturalmente, o redimensionamento das compreensões das crianças não acontecerá com apenas uma rodada do jogo ou sem a relação dialógica que permitirá aos alunos refletir, questionar, duvidar, levantar hipóteses, discutir, concluir. É importante que as atividades com o uso do jogo sejam planejadas e as perguntas que mobilizem as ideias iniciais e intuitivas das crianças sejam pensadas para que os estudantes confrontem suas crenças e opiniões iniciais com os resultados possíveis do jogo, aproximando-se de ideias probabilísticas mais consistentes.

Pode-se dizer, portanto, que as crianças que fizeram parte deste estudo apresentaram compreensão intuitiva e nem sempre coerente das demandas cognitivas exploradas em relação à aleatoriedade, ao espaço amostral e à comparação de probabilidades. Os estudantes mais velhos (3º e 5º anos) apresentaram maior compreensão das discussões probabilísticas estudadas em comparação com os mais novos, fato claramente observado na coerência (ou não) dos argumentos apresentados. Percebemos que algumas crianças aprenderam com a vivência do jogo, apesar de não ter sido o objetivo desta pesquisa. Os estudantes apresentaram clara incompreensão da independência de eventos, cometendo erros de *recência positiva* ou negativa que se evidenciam na escassez de entendimento sobre sequências aleatórias (BRYANT; NUNES, 2012). Foi observado, ainda, que o uso da experiência advinda do jogo, por meio dos poucos ensaios realizados, pode ter motivado um equívoco denominado de *heurística da representatividade*, em que se julga que uma pequena amostra representa o conjunto de resultados.

Mesmo assim, com o pouco e reduzido acesso ao jogo, os alunos apresentaram argumentos que nos permitiram crer que as intuições iniciais que elas trouxeram sobre a probabilidade, juntamente com o desenvolvimento de jogos, intervenções e reflexões podem ampliar o entendimento primário desses estudantes para compreensões mais elaboradas a respeito de exigências cognitivas da probabilidade (BRYANT; NUNES, 2012). Por essa razão, julgamos importante e necessário ampliar os estudos que foquem na utilização de jogos para resgatar e ampliar compreensões dos estudantes, sejam crianças, adolescentes ou adultos, acerca das demandas cognitivas da probabilidade.

Nessa direção, e em continuidade ao estudo aqui relatado, está em andamento uma pesquisa que visa levantar *compreensões de crianças e de adultos acerca de justiça em jogos à luz de demandas cognitivas da probabilidade*. Um recorte dessa investigação encontra-se em Batista, Borba e Henriques (2019).

Pontuamos, ainda, como uma imprescindível contribuição ao ensino da Probabilidade na educação básica, pesquisas que proponham e explorem formas de intervenção para a consolidação das aprendizagens sobre o tema. Acreditamos, a partir dos estudos realizados, que os jogos sejam um dos recursos que podem auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

REFERÊNCIAS

BATANERO, Carmen; DÍAZ, Carmen. Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. *In:* BENDEGEN, J. P VAN; FRANÇOIS, K. (Eds.). *Philosophical dimensions in mathematics education*. New York: Springer, 2007. p. 107-127.

BATANERO, Carmen; HENRY, Michel; PARZYSZ, Bernard. The nature of chance and probability. *In:* JONES, Grahan (Ed.). *Exploring probability in school:* Challenges for teaching and learning (15-37). New York: Springer. Bellhouse, D. R, 2005.

BATISTA, Rita; BORBA, Rute; HENRIQUES, Ana. Quando um jogo é justo? A relação entre aleatoriedade e justiça na ótica de crianças e adultos. *In:* ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Loulé. *Livro de Atas*... Loulé, Portugal: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa*: Jogos na Alfabetização Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC/SEB, 2017.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. *Children's understanding of probability:* a literature review. Nuffield Foundation. 2012. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 18 out. 2020.

CAÑIZARES, Maria; BATANERO, Carmen; SERRANO, Luís; ORTIZ, Juan. Children's understanding of fair games. *In:* CONFERENCE OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Bellaria. *Anais...* Bellaria, Itália: CERME, 2003. p.1-9.

CARRAHER, Terezinha Nunes. *O método clínico usando os exames de Piaget*. São Paulo: Cortez, 1998.

CARVALHO, Carolina. FERNANDES, José Antônio. Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, v. 14, n. 2, p. 71-88, jul./dez., 2005.

GRANDO, Regina. *O conhecimento e o uso de jogos na sala de aula.* 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

MLOWDINOW, Leonard. *O andar do bêbado:* como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

NÓBREGA, Giselda. SPINILLO, Alina. *A concepção do possível em crianças aplicadas a situações de probabilidade e combinatória*. *In:* SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., 2015, Ilhéus. *Anais*... Ilhéus, BA: UESC/PPGEM, 2015, p. 2216-2223.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, v. 17, n. 31, jan./jun., 2009.

PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco:* Ensino Fundamental. Área de Matemática e Ciências da Natureza. Secretaria de Educação e Esportes, 2019.

SILVA, Rita. É a moeda que diz, não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos em situações de jogos. 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

8 Raciocínios combinatório e probabilístico de estudantes jovens e adultos: investigando relações

Ewellen Tenório de Lima
Rute E. de S. Rosa Borba

IMPORTÂNCIA DA COMBINATÓRIA E DA PROBABILIDADE NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO DE ESTUDANTES

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade de ensino que, desde a garantia de sua oferta, a partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN), Lei nº 9.394/96 (BRASIL, 1996), aponta para as especificidades que rodeiam seus estudantes: jovens e adultos que não concluíram a Educação Básica na idade usual e que apresentam, portanto, características, necessidades e dificuldades distintas daquelas dos estudantes do ensino regular. Dessa maneira, é importante que a EJA seja alvo de pesquisas que busquem investigar os conhecimentos de seus estudantes e entender como pensam sobre diferentes conceitos, inclusive matemáticos, visando contribuir para o desenvolvimento dos mesmos.

O raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico constituem formas de pensar próprias do raciocínio lógico-matemático, essencial ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos que permitem que eventos do cotidiano sejam mais plenamente compreendidos. Defende-se, portanto, que o trabalho voltado para o desenvolvimento desses raciocínios seja realizado durante todo o período de escolarização, visando à apropriação de conceitos da Combinatória e da Probabilidade por estudantes dos vários níveis e modalidades da Educação Básica. No presente estudo, que teve como público-alvo estudantes de diferentes módulos da EJA, buscou-se levantar conhecimentos combinatórios e probabilísticos evidenciados por esses participantes, a partir da resolução dos problemas propostos que exploram a articulação entre tais áreas da Matemática.

No que se refere aos problemas combinatórios, foi adotada a organização proposta por Borba (2010) que, a partir de classificações anteriores e considerando os invariantes (relações) de ordem e de escolha desses problemas, os classifica em quatro tipos, sendo estes: *arranjo*, *combinação, permutação* e *produto de medidas*. Já no que diz respeito aos problemas probabilísticos propostos, foram consideradas três, das quatro exigências cognitivas ao amplo entendimento da Probabilidade, conforme apontado por Bryant e Nunes (2012), relativas: 1. ao entendimento da aleatoriedade; 2. à construção de espaços amostrais e 3. à comparação de probabilidades (diferentes). Ressalta-se que a categorização dos problemas, as relações e os raciocínios neles implícitos, foram discutidos no capítulo introdutório deste livro.

Com a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986; 1996) – apresentada no primeiro capítulo deste e-book – também como aporte teórico, o presente estudo teve como foco a análise da compreensão dos *invariantes* das diferentes *situações* propostas e as *representações simbólicas* utilizadas na resolução dos problemas em questão. Além disso, estando os conceitos combinatórios e probabilísticos inseridos no Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas, esta pesquisa teve como objetivo principal analisar as relações que surgem a partir de revisitações propostas entre problemas das duas áreas, que possam apontar para as possíveis contribuições de um trabalho articulado entre Combinatória e Probabilidade.

A INVESTIGAÇÃO DE RELAÇÕES ENTRE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

O estudo de dissertação aqui relatado teve a participação de 24 estudantes da EJA, com idade média de 36 anos, sendo estes pertencentes a três grupos distintos. A escolha pelos três grupos se deu pelo interesse em investigar os conhecimentos combinatórios e probabilísticos (e as relações entre esses conhecimentos) com estudantes em diferentes etapas de escolarização da modalidade Educação de Jovens e Adultos. Assim, optou-se por trabalhar com estudantes que, no período da coleta de dados, estivessem cursando módulos equivalentes à conclusão dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (Módulo II), dos Anos Finais do Ensino Fundamental (Módulo IV) e do Ensino Médio (EJA Médio 3), respectivamente. Os dados foram coletados no segundo semestre de 2017, com oito estudantes de cada grupo, em três escolas públicas (duas municipais e uma estadual) do município de Correntes, localizado no Agreste Meridional do Estado de Pernambuco.

A coleta de dados consistiu na realização de entrevistas clínicas individuais. Esse método foi escolhido pelo interesse em investigar, de maneira mais aprofundada, o raciocínio dos estudantes, visto que esse tipo de coleta permite que o pesquisador levante discussões acerca dos problemas trabalhados, levando os estudantes a (re) avaliarem as situações e suas respostas dadas, chegando, assim, a uma análise mais fidedigna do pensamento do entrevistado diante do problema em questão.

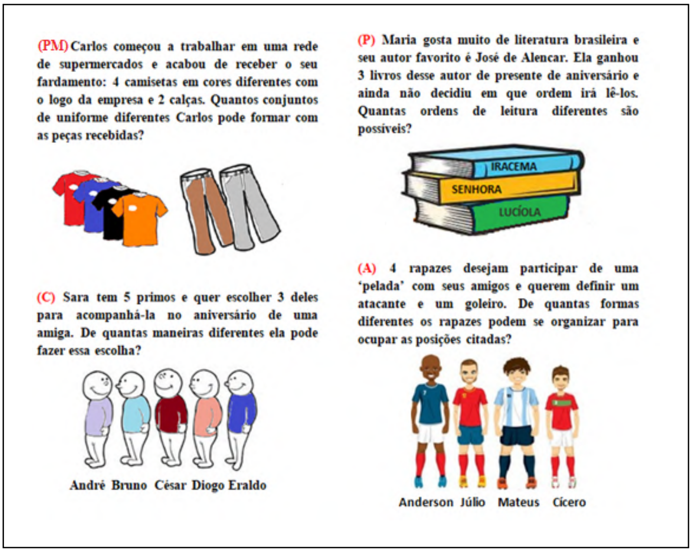
As entrevistas clínicas conduzidas foram áudio-gravadas e tiveram duração de, aproximadamente, 45 minutos cada. Foi proposto que os participantes do estudo resolvessem problemas combinatórios e probabilísticos que se relacionavam entre si por meio de revisitações, que consistiam no aprofundamento de problemas combinatórios à luz da Probabilidade e vice-versa. Todos os problemas foram lidos em voz alta pela pesquisadora para sanar dificuldades com a leitura e os participantes tiveram acesso a material impresso, lápis, borracha e calculadora.

Foram propostos quatro problemas combinatórios (Figura 1) e 12 problemas probabilísticos, sendo quatro problemas de cada tipo (construção de *espaço amostral*, entendimento de *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* – Figura 2, bloco de *combinação*).

Os problemas combinatórios apresentados na Figura 1 foram pensados e construídos de forma a terem um baixo número de etapas de escolha e de possibilidades, permitindo que pudessem ser resolvidos por meio do uso de estratégias e *representações simbólicas* diversas, dada a variedade de níveis de escolarização dos participantes. Teve-se, ainda, um cuidado especial com os contextos dos problemas, a fim de evitar a infantilização, adequando-os, assim, ao público-alvo do estudo (jovens e adultos).

No que diz respeito aos problemas probabilísticos propostos, optou-se por criar situações simples, de fácil entendimento, e que remetessem ao próprio cotidiano dos participantes. O foco desses problemas foi a exploração das exigências cognitivas da Probabilidade, anteriormente citadas. Assim, os problemas de *espaço amostral* estavam relacionados à solicitação de listagem (indicação uma a uma) das possibilidades atreladas à *situação* combinatória referida. Os problemas de *aleatoriedade* demandavam a compreensão do caráter aleatório inerente aos mesmos, além da percepção da equiprobabilidade presente nas situações propostas, para que as chances de ocorrência dos eventos pudessem ser corretamente avaliadas. Por fim, no que diz respeito aos problemas de *comparação de probabilidades diferentes,* buscou-se explorar a compreensão da proporção que embasa o cálculo de probabilidades, isto é, o entendimento, direto ou indireto, sobre os espaços amostrais considerados, o que está intimamente relacionado ao raciocínio combinatório.

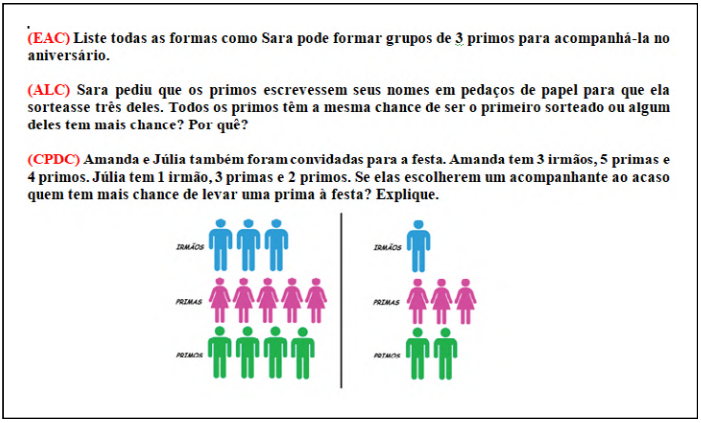
Figura 1. Problemas combinatórios propostos



PM → *produto de medidas*: 2 etapas de escolha – 8 possibilidades; C → *combinação*: 3 etapas de escolha – 10 possibilidades; P → *permutação*: 3 etapas de escolha – 6 possibilidades; A –> *arranjo*: 2 etapas de escolha – 12 possibilidades.

Fonte: Lima (2018a).

Figura 2. Bloco de problemas probabilísticos articulado ao problema de combinação[1]


(EAC) Liste todas as formas como Sara pode formar grupos de 3 primos para acompanhá-la no aniversário.

(ALC) Sara pediu que os primos escrevessem seus nomes em pedaços de papel para que ela sorteasse três deles. Todos os primos têm a mesma chance de ser o primeiro sorteado ou algum deles tem mais chance? Por quê?

(CPDC) Amanda e Júlia também foram convidadas para a festa. Amanda tem 3 irmãos, 5 primas e 4 primos. Júlia tem 1 irmão, 3 primas e 2 primos. Se elas escolherem um acompanhante ao acaso quem tem mais chance de levar uma prima à festa? Explique.

EAC → espaço amostral de combinação; ALC → aleatoriedade de combinação;-CPDC → comparação de probabilidades diferentes de combinação.

Fonte: Lima (2018a).

Os problemas combinatórios e probabilísticos propostos foram organizados em dois tipos de teste, havendo no primeiro deles (Teste 1) revisitações aos problemas combinatórios sob o olhar da Probabilidade, enquanto no Teste 2 os problemas probabilísticos eram resolvidos primeiro e, posteriormente, revisitados sob o olhar da Combinatória.

---

1 Os demais blocos de problemas probabilísticos propostos possuem estrutura semelhante, sendo cada bloco referente a um tipo de problema combinatório (*produto de medidas*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*).

A análise dos dados da pesquisa foi quanti-qualitativa e as análises estatísticas referentes aos desempenhos dos participantes do estudo foram realizadas por meio do uso do *software Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS. Para pontuar o desempenho obtido nos problemas combinatórios e nos problemas de construção de *espaços amostrais* foram consideradas diferentes categorias de desempenho, a depender do número de possibilidades explicitadas. Dessa forma, foi atribuído zero (0) ponto para aquelas resoluções que indicavam menos da metade das possibilidades de determinado problema, um (1) ponto para aqueles participantes que indicaram metade ou mais das possibilidades e dois (2) pontos para os casos nos quais todas as possibilidades foram encontradas (esgotamento das possibilidades). Por sua vez, ao se tratar dos problemas probabilísticos de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes*, foram atribuídas pontuações considerando-se as respostas e as justificativas apresentadas pelos participantes. Assim, foi atribuído zero (0) ponto para os erros, um (1) ponto para acertos com justificativas matematicamente inadequadas e dois (2) pontos para acertos com justificativas adequadas.

Dessa maneira, a pontuação máxima que poderia ser obtida pelos participantes do estudo, ao resolver os problemas propostos, era equivalente a 32 pontos. As análises e discussões dos dados coletados são apresentadas a seguir.

O QUE DESCOBRIMOS SOBRE OS RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO DE JOVENS E ADULTOS

Conforme pontuações atribuídas às resoluções dos problemas propostos, tem-se que os desempenhos totais variaram entre 1 e 25 pontos (de um máximo de 32), sendo o desempenho médio igual a 12,63 pontos. Esse resultado indica grandes dificuldades dos participantes do estudo frente à resolução de tais problemas, o que evidencia uma precariedade no conhecimento combinatório e probabilístico dos mesmos.

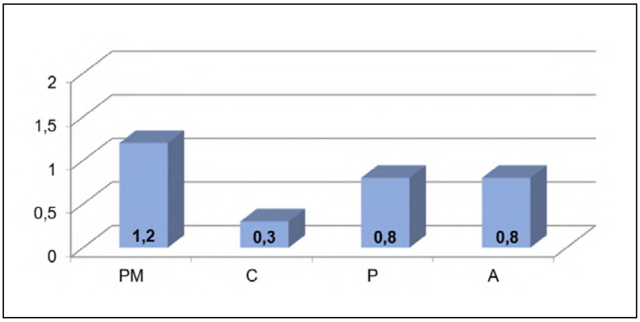
O Grupo 1 (concluintes dos Anos Iniciais) apresentou um desempenho médio de 7 pontos, ao passo em que o Grupo 2 (concluintes dos Anos Finais) apresentou um desempenho médio de 13,6 pontos e o Grupo 3 (concluintes do Ensino Médio) apresentou desempenho médio de 17,3 pontos.

Observa-se que o desempenho médio, mesmo que insatisfatório ao se tomar por base a pontuação máxima possível, cresceu bastante em função do nível de escolarização dos participantes da pesquisa. O desempenho médio apresentado pelos estudantes do Grupo 1 foi de pouco mais que a metade do desempenho médio dos estudantes do Grupo 2, enquanto o desempenho dos estudantes do Grupo 3 foi ainda maior. Essa influência da escolarização no desempenho dos participantes se comprovou estatisticamente significativa a partir da realização de uma análise de variância (ANOVA), sendo: $F (2, 23) = 5{,}269$; $p = 0{,}014$. Contudo, essa diferença significativa de desempenho foi constatada apenas ao se comparar o Grupo 1 com o Grupo 3.

Outra importante variável do estudo refere-se à ordem de apresentação dos problemas propostos, isto é, ao tipo de teste. Dessa forma, era de suma importância observar como essa variável influenciou o desempenho dos participantes. O desempenho médio obtido pelos estudantes da EJA que resolveram o Teste 1, isto é, que resolveram inicialmente os problemas combinatórios e os revisitaram sob o olhar da Probabilidade, foi de, aproximadamente, 13,1 pontos. Desempenho que superou em apenas um ponto aquele obtido pelos participantes que resolveram o Teste 2, no qual os problemas probabilísticos foram resolvidos primeiro (desempenho médio de 12,2 pontos). O teste estatístico realizado (Teste t) confirma que essa diferença de desempenho não chegou a ser significativa, sendo: $t(22) = 0{,}293$; $p = 0{,}772$. Logo, a ordem de apresentação dos problemas e de suas respectivas revisitações não influenciou diretamente, de maneira quantitativa, o desempenho médio dos participantes do estudo.

No Gráfico 1, é possível observar o desempenho dos participantes do estudo em função do tipo de problema combinatório resolvido. A partir de tal análise, buscou-se investigar qual problema combinatório foi mais facilmente resolvido pelos participantes da pesquisa, bem como identificar aquele no qual esses participantes apresentaram mais dificuldades para explicitar as possibilidades correspondentes. Salienta-se que a pontuação máxima em cada tipo de problema era de dois pontos, desempenho equivalente a um acerto total: o esgotamento de possibilidades.

Gráfico 1. Desempenho médio por tipo de problema combinatório



PM → produto de medidas; C → combinação; P → permutação; A → arranjo.

Fonte: Lima (2018a).

Corroborando estudos anteriores (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015), o problema de *produto de medidas* foi aquele no qual os participantes do estudo apresentaram maior desempenho médio quando comparado aos outros problemas combinatórios propostos. Por outro lado, no problema de *combinação*, foi observado o menor desempenho médio e os participantes evidenciaram dificuldades ao buscar o esgotamento e/ou indicação de muitas das possibilidades relacionadas ao problema desse tipo proposto nos testes. A partir da realização de análises estatísticas (teste t de amostras em pares) constatou-se que tais diferenças de desempenho foram significativas para os diferentes pares de problemas, exceto ao se comparar os problemas de *permutação* e *arranjo*, nos quais os desempenhos médios observados foram iguais[2].

O êxito na resolução dos problemas combinatórios propostos também esteve relacionado ao nível de escolarização dos participantes da pesquisa. Estudantes do Grupo 2 (concluintes dos Anos Finais) e do Grupo 3 (concluintes do Ensino Médio) tenderam a ter um desempenho superior ao dos estudantes do Grupo 1 (concluintes dos Anos Iniciais), em função, principalmente, das estratégias e *representações simbólicas* utilizadas por estudantes nessas diferentes etapas da Educação Básica na EJA para resolver os problemas de *produto de medidas*, *combinação*, *permutação* e *arranjo* e de uma melhor compreensão dos invariantes desses problemas.

Entretanto, é importante destacar que o uso de tais estratégias e *representações* teve, ainda, influência direta do tipo de teste, sendo possível perceber que os estudantes que resolveram os problemas combinatórios de início (Teste 1 – Combinatória → Probabilidade), assim como aqueles que resolveram problemas probabilísticos (inclusive

2 Tal teste estatístico gerou os seguintes dados: PM x C → $t(23) = 6{,}868$; $p < 0{,}001$; PM x P → $t(23) = 2{,}318$; $p = 0{,}030$; PM x A → $t(23) = 2{,}460$; $p = 0{,}022$; C x P → $t(23) = -2{,}937$; $p = 0{,}007$; C x A → $t(23) = -3{,}140$; $p = 0{,}005$ e P x A → $t(23) = 0{,}000$; $p = 1$.

de construção de *espaço amostral*) antes (Teste 2 – Probabilidade → Combinatória), apresentaram comportamentos distintos ao resolvê-los, dada a ordem de apresentação dos problemas.

Como pode ser observado na Tabela 1, ao resolverem os problemas combinatórios propostos no Teste 1, os participantes do estudo tenderam a usar, majoritariamente, a enumeração oral para indicar as possibilidades relativas às situações trabalhadas (chegando a ser usada em 83,3% dos casos no problema de *arranjo*). Esse resultado evidencia uma resistência dos participantes em construir registros espontâneos durante a resolução dos problemas propostos. A maioria dos estudantes dos diferentes níveis de escolarização considerados preferiu indicar oralmente as possibilidades referentes aos problemas propostos e, posteriormente, registrar apenas o número total de possibilidades encontradas. Essa resistência ao registro também pode ser atribuída à crença de que, por se tratar de problemas matemáticos, apenas cálculos numéricos seriam adequados para suas resoluções.

Tabela 1. Estratégias e representações simbólicas utilizadas (Problemas combinatórios – Teste 1)

	Produto de medidas	Combinação	Permutação	Arranjo
Enumeração oral	75%	75%	66,7%	83,3%
Listagem extensiva	-	8,3%	8,3%	8,3%
Listagem reduzida	-	-	8,3%	-
Uso de valor do enunciado	-	-	8,3%	-
Adição	8,3%	-	-	-

	Produto de medidas	Combinação	Permutação	Arranjo
Multiplicação inadequada	-	16,7%	8,3%	8,3%
Multiplicação adequada	16,7%	-	-	-

Fonte: Lima (2018a).

Ainda que os problemas propostos tivessem um resultado com ordem de grandeza pequena (menor ou igual a 12), a falta de registro dificulta o controle das possibilidades já consideradas, podendo levar à repetição e/ou não consideração de todas as possibilidades. Destaca-se que a revisitação proposta aos problemas no Teste 1, sob o olhar da Probabilidade e a partir da solicitação do uso da listagem para explicitação dessas possibilidades (construção de *espaço amostral*) – representação simbólica que raramente surgiu de maneira espontânea –, consistiu em um importante momento para o refinamento das respostas dadas pelos participantes.

É válido ressaltar que o caráter multiplicativo, inerente aos problemas combinatórios, foi percebido poucas vezes pelos participantes do estudo. Estudantes do Grupo 1 chegaram a utilizar a adição e os valores presentes no enunciado para resolver problemas combinatórios, como exemplificado na Transcrição 1.

A resolução anterior evidencia incompreensões de P3 referentes aos invariantes de escolha do problema combinatório de *produto de medidas*. Nesse caso, o estudante confundiu elementos com possibilidades. No problema de *produto de medidas*, P3 somou os elementos dos dois conjuntos (camisetas e calças), chegando ao total de 6 elementos, e considerou esse o número de conjuntos distintos que podem ser formados na situação em questão.

Transcrição 1. Problema de *produto de medidas* (Teste 1) resolvido por P3 (concluinte dos Anos Iniciais)

Problema referente à quantificação de possibilidades de conjuntos de uniforme diferentes a partir de 4 camisetas e 2 calças

Pesquisadora: "O senhor escreveu que Carlos pode formar seis conjuntos de uniforme diferentes. Como o senhor resolveu?"
P3: "[...] ele recebeu quatro camisetas e duas calças, 'né'? [...] ele pode formar seis conjuntos."
Pesquisadora: "Por quê?"
P3: "Cada camiseta dessa é uma farda [...] e cada calça é uma farda, 'né'? Eu pensei assim, quatro e dois dá seis."

Fonte: Lima (2018a).

Por outro lado, os participantes que fizeram uso de multiplicações evidenciaram uma percepção do caráter multiplicativo dos problemas combinatórios. Entretanto, essa estratégia, quando usada de maneira direta, leva ao resultado correto apenas nos problemas de *produto de medidas*, visto que, em especial nesse tipo de problema, ao se multiplicar os valores presentes no enunciado obtém-se o número total de possibilidades. Ao utilizarem a multiplicação para resolver os problemas de *combinação*, *permutação* e *arranjo*, os participantes, generalizando a estratégia exitosa no problema de *produto de medidas*, chegaram a soluções incorretas, como pode ser observado na Figura 3.

O estudante da EJA Médio 3 (P19) fez uso espontâneo da multiplicação para resolver alguns dos problemas combinatórios propostos na pesquisa. Contudo, tal estratégia o levou ao erro no problema de *combinação* (Figura 3), visto que, nesse problema, o número de trios distintos que podem ser formados é igual a 10. Ao considerar o resultado obtido pela multiplicação do número de primos (5) pelo número de escolhas (3), P19 apresentou trios repetidos em sua contagem, o que poderia ser percebido por meio do uso de outras estratégias (como a listagem).

Figura 3. Problema de *combinação* (Teste 1) resolvido por P19 (concluinte do Ensino Médio). Multiplicação inadequada

Fonte: Lima (2018a).

No que diz respeito aos participantes que resolveram o Teste 2 (Probabilidade → Combinatória), são apresentados, na Tabela 2, os percentuais referentes às estratégias e *representações simbólicas* utilizadas durante a resolução desses problemas combinatórios (em contexto de revisitações).

Tabela 2. Estratégias e representações simbólicas utilizadas (Problemas combinatórios – Teste 1)

	Produto de medidas	Combinação	Permutação	Arranjo
Sem revisitação	25%	58,3%	41,7%	58,3%
Enumeração oral	41,7%	25%	33,3%	25%

	Produto de medidas	Combinação	Permutação	Arranjo
Listagem extensiva	-	-	8,3%	-
Generalização de listagem	-	-	-	8,3%
Uso de valor do enunciado	-	-	8,3%	-
Adição	16,7%	-	-	-
Multiplicação inadequada	-	16,7%	8,3%	8,3%
Multiplicação adequada	16,7%	-	-	-

Fonte: Lima (2018a).

Um importante resultado referente à Tabela 2 diz respeito à resistência frente às revisitações propostas no Teste 2 (Probabilidade → Combinatória). Ao resolver esse tipo de teste, os participantes da pesquisa tiveram o primeiro contato com os problemas que solicitavam a construção de *espaços amostrais*, ou seja, a primeira solução dada aos problemas de *produto de medidas*, *combinação*, *permutação* e *arranjo* se deu com o uso de uma estratégia/*representação simbólica* pré-determinada: a listagem escrita. Posteriormente, esses estudantes resolveram os problemas combinatórios, nos quais eram propostas revisitações a cada problema de *espaço amostral* já resolvido, não havendo restrição acerca da estratégia ou *representação simbólica* a ser utilizada. Nessas condições, um dado particular do Teste 2 tem relação com a não revisitação aos problemas, ou seja, por já terem usado a listagem ao resolver os problemas de *espaço amostral*, os participantes tenderam a apresentar resistência ao uso de outras representações (até mesmo a enumeração oral) para conferir a primeira resposta. Dessa maneira, vários participantes repetiram a resposta dada de início, perdendo a chance de reavaliar os invariantes das diferentes situações combinatórias para refinar as suas resoluções. Tal resultado alerta para um ponto negativo do Teste 2.

A enumeração oral (assim como no Teste 1) foi amplamente utilizada, apresentando como principal desvantagem a ausência de registro. Por sua vez, a listagem se manteve como uma estratégia que tendeu a não aparecer quando não houve solicitação explícita. Assim, no Teste 2, os estudantes que já haviam utilizado a listagem tenderam a não refazer o registro escrito de possibilidades consideradas.

Ao resolverem os problemas de *espaço amostral*, em ambos os tipos de teste, os participantes da pesquisa usaram, na maioria das vezes, listagens extensivas, sem sistematização. Destaca-se que grande parte dos estudantes do Grupo 1, por apresentarem dificuldades de leitura e escrita, não produziram registros escritos ao resolverem tal tipo de problema. A esses estudantes, em especial, foi permitida a indicação oral das possibilidades para que fossem registradas pela pesquisadora. Listagens mais refinadas (com representações reduzidas dos casos – com abreviações, iniciais, etc. – ou com generalização) foram utilizadas poucas vezes por alguns estudantes dos Grupos 2 e 3.

No que diz respeito à resolução dos problemas probabilísticos de *aleatoriedade* e de *comparação de probabilidades diferentes*, não foi constatada diferença significativa de desempenho em função do bloco ao qual tais problemas são relacionados, ou seja, o fato de aprofundarem as situações de *produto de medidas*, *combinação*, *permutação* ou de *arranjo* não influenciou o desempenho. Dado o posto, o desempenho médio obtido em cada tipo de problema é apresentado de maneira geral (chegando a um total possível de 8 pontos). O desempenho médio geral observado foi de 3,1 pontos nos problemas de *aleatoriedade* e de 3,2 pontos nos problemas de *comparação de probabilidades diferentes*[3].

Conforme evidenciado no método, a pontuação atribuída ao desempenho nesses problemas também levou em consideração a apresentação de justificativas às respostas dadas pelos participantes. Nesse sentido, os problemas de *aleatoriedade* obtiveram 14,6% de respostas corretas com justificativas adequadas, já os de *comparação de probabilidades diferentes* obtiveram 35,4% de acertos totais. Justificativas adequadas tenderam, ainda, a serem apresentadas por estudantes dos Grupos 2 e 3.

O Quadro 1 consiste em uma sistematização geral das estratégias e *representações simbólicas* mais utilizadas por cada grupo na resolução dos problemas propostos. A apresentação desse quadro visa permitir que seja avaliada a influência da escolarização formal nas estratégias utilizadas pelos estudantes da EJA frente à resolução dos problemas combinatórios e probabilísticos.

Quadro 1. Estratégias e representações simbólicas mais utilizadas

	Grupo 1: Concluintes dos Anos Iniciais	Grupo 2: Concluintes dos Anos Finais	Grupo 3: Concluintes do Ensino Médio
Problemas combinatórios	· Enumeração oral · Adição e uso de valores do enunciado	· Enumeração oral · Listagens · Multiplicação	· Enumeração oral · Listagens · Multiplicação

3 Assim, não foi observada diferença significativa, conforme teste estatístico (t teste – pares): AL x CPD →t(23) = -0,081; p = 0,936.

	Grupo 1: Concluintes dos Anos Iniciais	Grupo 2: Concluintes dos Anos Finais	Grupo 3: Concluintes do Ensino Médio
Espaços amostrais	• Enumeração oral • Listagem Extensiva	• Listagem extensiva (algumas sistemáticas) • Listagem reduzida	• Listagem extensiva e reduzida • Sistematização e generalização
Demais problemas probabilísticos	• Erros baseados em preferências pessoais • Justificativas inadequadas	• Alguns casos de justificativas adequadas	• Ainda há erros de comparação de probabilidades • Maioria das justificativas adequadas

Fonte: Lima (2018a).

O Quadro 1 evidencia um refinamento das estratégias utilizadas pelos participantes do estudo, em função do nível de escolarização destes. O melhor desempenho apresentado por estudantes dos Grupos 2 e 3 justifica-se pelo fato desses participantes possuírem um maior repertório de conhecimentos referentes às estruturas multiplicativas, bem como de *representações simbólicas* mais diversificadas (ainda que insuficientes para a resolução de problemas mais complexos ou com um número maior de possibilidades).

O objetivo do presente estudo, ao propor problemas combinatórios e probabilísticos relacionados entre si, foi investigar as relações que se estabelecem entre os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução dos problemas propostos nos dois tipos de teste utilizados, que tiveram como foco a revisitação de problemas combinatórios sob o olhar da Probabilidade (Teste 1) e de problemas probabilísticos sob o olhar da Combinatória (Teste 2).

Ao se tratar do Teste 1, destaca-se que a solicitação da listagem de todas as possibilidades referentes a cada problema combinatório permitiu aos estudantes que não haviam utilizado essa estratégia espontaneamente na resolução dos problemas (*produto de medidas*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*) produzir o registro das possibilidades que foram levantadas inicialmente. Por sua vez, os poucos estudantes que já haviam utilizado a listagem ao resolverem os problemas combinatórios tiveram, no momento das revisitações a tais problemas referentes à construção de *espaços amostrais*, a chance de rever esses registros. Essa revisitação permitiu que fossem levantadas reflexões sobre os invariantes das situações em questão na busca pelo esgotamento dos casos possíveis em cada uma delas. A Transcrição 2 ilustra uma das contribuições que a revisitação aos problemas combinatórios, a partir da construção de *espaços amostrais*, trouxe para o desempenho e para o raciocínio combinatório dos participantes.

Transcrição 2. Problema de arranjo (Teste 1) resolvido por P17 (concluinte do Ensino Médio)

Problema referente à quantificação de possibilidades de escolha de um atacante e um goleiro a partir de 4 amigos

Pesquisadora: "[...] você já me falou Júlio e Cícero. Desses dois quem vai ser o goleiro e quem vai ser o atacante?"
P17: "O goleiro vai ser Júlio e o atacante vai ser César..."

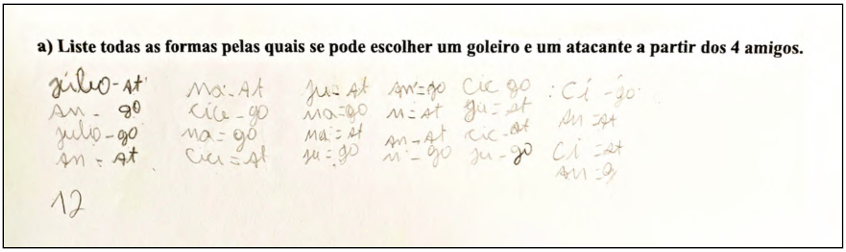
[...] P17 indica oralmente outra dupla de rapazes.

Pesquisadora: "Quantas formas são possíveis? Duas?"
P17: "São quatro. Pode ser o contrário também."

Considera mais pares e seus inversos, chegando a enumerar oralmente 8 possibilidades.

Fonte: Lima (2018a).

Figura 4. Problema de espaço amostral de arranjo (Teste 1) resolvido por P17 (concluinte do Ensino Médio). Listagem reduzida sistemática



Fonte: Lima (2018a).

A partir da revisitação ao problema de *arranjo,* P17, que já havia demonstrado compreensão dos *invariantes de ordem* e *de escolha* dessa situação combinatória, pôde registrar as possibilidades indicadas anteriormente e, por meio de sistematização, organizar novos pares (e seus inversos), chegando a esgotar o número de possibilidades (12). A construção de *espaço amostral* atuou, nesse caso, como um importante auxílio ao esgotamento de possibilidades, pois facilitou a visualização dos casos considerados e permitiu que o participante controlasse, também, a contagem dos pares invertidos. Por vezes, tais revisitações proporcionaram a reflexão sobre invariantes dos problemas em questão, levando os estudantes a indicarem mais algumas possibilidades ou a excluírem casos repetidos considerados, consistindo, assim, em avanços qualitativos de desempenho.

Esse tipo de relação entre os problemas combinatórios e os de *espaço amostral* tomou o caminho inverso ao se tratar do Teste 2. Nesse tipo de teste, os problemas que solicitavam, explicitamente, a listagem de possibilidades, foram resolvidos antes dos problemas combinatórios (que não trazem em seu enunciado sugestões ao uso de representações simbólicas específicas).

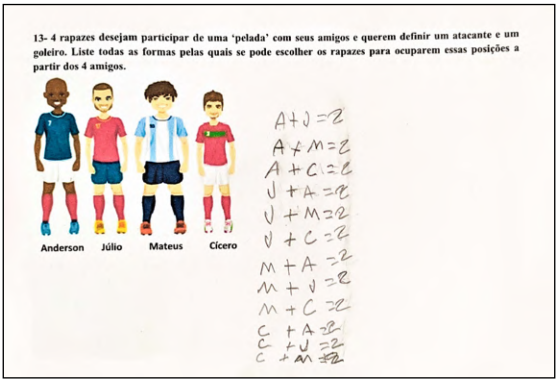
Um ponto negativo que foi apontado anteriormente quanto às revisitações propostas no Teste 2 diz respeito ao fato de que muitos estudantes apresentaram resistência em revisitar os problemas de *espaço amostral*. Como esses estudantes já haviam registrado as possibilidades encontradas, muitas vezes, não possuíam um repertório de estratégias e *representações* mais eficientes para a resolução dos problemas e, portanto, decidiram manter a resposta inicial.

A revisitação às listagens produzidas é, contudo, um importante momento de reflexões sobre os *invariantes* dos problemas, que podem proporcionar ajustes aos registros feitos e levar à descoberta de novas possibilidades ou desconsideração de casos repetidos. Dessa forma, destaca-se que, ao optar pela não revisitação, alguns estudantes deixaram de tirar proveito da oportunidade proporcionada pela relação estabelecida entre os problemas de *espaço amostral* e os combinatórios. Na Figura 5 e Transcrição 3, é ilustrado o caso de um estudante do Grupo 2, que, ao listar os casos referentes ao problema de *arranjo*, havia encontrado o dobro das possibilidades. A partir da revisitação, o mesmo conseguiu eliminar tais repetições, chegando à resposta correta.

Ao resolver o problema de *espaço amostral* de *arranjo*, P16 percebeu, corretamente, que cada dupla de rapazes poderia ser contada duas vezes, pois escolher Anderson para ocupar a vaga de atacante e Júlio para ocupar a vaga de goleiro é diferente de escolher Júlio para ser atacante e Anderson para ser goleiro. Entretanto, posteriormente, P16 fez essa inversão na própria listagem reduzida, indicando o dobro de possibilidades. Ao revisitar a listagem produzida, a partir do problema de *arranjo*, percebeu o erro e, oralmente, chegou ao resultado correto.

Destaca-se, dessa forma, que as revisitações propostas entre os problemas combinatórios e os problemas de *espaço amostral* propiciaram o surgimento de importantes contribuições que relacionam os raciocínios combinatório e probabilístico dos estudantes da EJA, participantes do presente estudo.

Figura 5. Problema de espaço amostral de arranjo (Teste 2) resolvido por P16 (concluinte dos Anos Finais). Listagem reduzida sistemática



Fonte: Lima (2018a).

Transcrição 3. Problema de arranjo (Teste 2) resolvido por P16 (concluinte dos Anos Finais)

Problema referente à quantificação de possibilidades de escolha de um atacante e um goleiro a partir de 4 amigos

[...] Revisa a listagem e percebe que considerou o dobro de possibilidades.

P16: "[...] Eu já tinha contado duas vezes, pra dizer que tinha trocado, mas aí eu escrevi de novo (risos)."
Pesquisadora: "Tem dupla repetida, então?"
P16: "'Tá' tudo repetido. Eu escrevi 24, mas é só 12".

[...] Não refaz a listagem, apenas registra por escrito o resultado obtido (12).

Fonte: Lima (2018a).

Os problemas de *espaço amostral* possuem uma relação mais direta com o raciocínio combinatório. Contudo, estes não foram os únicos a se relacionarem positivamente com os problemas combinatórios.

No que se refere aos problemas de *aleatoriedade* propostos, destaca-se o trabalho com o conceito de equiprobabilidade. Assim, resoluções corretas de tais problemas demandavam a percepção acerca de *espaço amostral* e, portanto, também estavam intimamente relacionadas ao raciocínio combinatório.

Por sua vez, a exigência cognitiva da Probabilidade, referente à *comparação de probabilidades diferentes*, foi aquela na qual os participantes do estudo apresentaram desempenho mais baixo. Isso se deu, justamente, em função da não utilização do raciocínio combinatório que permitisse aos estudantes considerar cada evento separadamente, levantando seus *espaços amostrais*, para só, então, determinar suas probabilidades e compará-las. Assim, foi ao não fazer distinção entre possibilidade e Probabilidade que os participantes apresentaram respostas inadequadas nesse tipo de problema em específico.

O QUE SE PODE CONCLUIR SOBRE A ARTICULAÇÃO DOS RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIO E PROBABILÍSTICO NA EJA

Os participantes do estudo aqui apresentado resolveram problemas combinatórios e probabilísticos durante entrevistas clínicas individuais. Tais estudantes obtiveram um melhor desempenho em relação aos problemas combinatórios de *produto de medidas* e o menor percentual de acertos foi observado nos problemas de *combinação.* Esses resultados dialogam com estudos anteriores realizados com estudantes de diferentes níveis de escolarização e modalidades de ensino.

No que diz respeito às exigências cognitivas relacionadas à Probabilidade, os participantes apresentaram certa facilidade na compreensão do caráter aleatório dos eventos discutidos, entretanto, basearam-se, frequentemente, apenas no número de casos favoráveis ao comparar probabilidades diferentes. Entretanto, uma compreensão superficial da Probabilidade foi evidenciada a partir das justificativas apresentadas pelos participantes às resoluções dadas. A partir dessas justificativas, foi possível perceber que mesmo alguns acertos eram baseados em concepções matemáticas inconsistentes.

A escolarização formal demonstrou influenciar as estratégias e *representações simbólicas* utilizadas pelos participantes ao resolverem os diferentes problemas propostos, sendo possível perceber um refinamento das mesmas em função dos grupos aos quais esses participantes faziam parte. Ao resolverem os problemas combinatórios, por exemplo, os estudantes do Módulos IV (concluintes dos Anos Finais do Ensino Fundamental) e da EJA Médio 3 (concluintes do Ensino Médio)evidenciaram maior compreensão dos invariantes de ordem e de escolha dos diferentes problemas propostos, obtendo mais êxito, também, no esgotamento das possibilidades. Ao se tratar dos problemas probabilísticos, percebeu-se que os estudantes que faziam parte dos grupos com maior nível de escolarização foram capazes de apresentar mais respostas corretas e justificá-las adequadamente.

A ordem de apresentação dos problemas (dados os dois tipos de testes utilizados no estudo) mostrou não influenciar significativamente o desempenho dos participantes. Todavia, destaca-se que as revisitações aos problemas combinatórios, propostas no Teste 1 (principalmente por meio da construção de *espaços amostrais*), mostraram-se mais proveitosas, visto que a restrição ao uso de uma estratégia específica (a listagem) não era apresentada de início, o que permitia que os estudantes explorassem diferentes formas de resolução dos problemas propostos. Assim, a estrutura de revisitações presente no Teste 1 parece ter estabelecido uma melhor articulação entre Combinatória e Probabilidade.

Assim, foram observadas relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o probabilístico no contexto de resolução dos problemas propostos. Em especial, a construção de *espaços amostrais* proporcionou a descoberta de novas possibilidades referentes aos problemas combinatórios, além de consistir em um momento de reflexão acerca dos invariantes de ordem e de escolha desses problemas.

A partir dos resultados obtidos, acredita-se que a articulação do raciocínio combinatório e probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento dessas formas de pensamento em estudantes da EJA. Foi possível perceber que surgem contribuições entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade através da resolução de problemas que permitem estabelecer relações entre ambos os raciocínios.

Dessa maneira, infere-se que a instrução escolar pode proporcionar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico de maneira articulada, a partir da proposição de situações que explorem esses modos de pensar, bem como do refinamento de estratégias que permitam que os estudantes obtenham sucesso ao resolverem problemas relativos a tais tipos de raciocínio.

Um estudo de tese encontra-se em andamento, tendo em vista aprofundar as discussões aqui apresentadas, analisando articulações entre Combinatória e Probabilidade em diferentes instâncias do currículo nos Anos Finais do Ensino Fundamental[4]. Nesse sentido, o estudo aqui relatado, bem como o que está em andamento,

4 O projeto de pesquisa e alguns resultados preliminares podem ser conferidos em Lima (2018b; 2020) e Lima e Borba (2019a, 2019b, 2019c).

busca contribuir para o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico dos estudantes de diferentes modalidades e variados níveis de ensino da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais*... Salvador, BA: SBEM/UFRB, 2010. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhaHd2YVBKVllRVm8/view. Acesso em: 09 out. 2020.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, dez., 2015. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/9907. Acesso em: 09 out. 2020.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei n. 9394/96.* Brasília, DF: MEC, 1996.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. *Children's understanding of probability*: a literature review. Nuffield Foundation. 2012. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen. *Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA:* investigando relações. 2018a.141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018a. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29717. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen. A articulação entre Combinatória e Probabilidade nas diferentes instâncias do currículo dos Anos Finais do Ensino Fundamental: o que é dito, o que é feito e o que se pode fazer? *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 22., 2018b, Belo Horizonte. *Anais*... Belo Horizonte, MG: FaE/UFMG, 2018b. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1DC4PeY9d7AkEofel10rmB3Bck_pKpmvD/view. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen. Probabilidade em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais: diferentes concepções. *Zetetiké*, Campinas, SP, v.28, p. 1-18, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656908. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen; BORBA, Rute. A articulação entre Combinatória e Probabilidade nas diferentes instâncias do currículo: um levantamento da produção nacional. *Revista Paranaense de Educação Matemática* – RPEM, Campos do Mourão, PR, v. 8, n. 17, p. 546-566, 2019a. Disponível em: https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.17.546-566. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen; BORBA, Rute. A articulação entre Combinatória e Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental: um olhar para o currículo prescrito no Brasil. *In:* CONGRESO INTERNATIONAL VIRTUAL DE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA, 3., 2019b, Granada. *Anais*...Granada, Espanha: IEMath-GR/UGR, 2019b. Disponível em: https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/lima_borba.pdf. Acesso em: 09 out. 2020.

LIMA, Ewellen; BORBA, Rute. Combinatória, Probabilidade e suas relações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019c, Cuiabá. *Anais*... Cuiabá, MT:SBEM-MT, 2019c.Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/352/616. Acesso em: 09 out. 2020.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, v. 1, p.75-90, 1986.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In:* BRUM, Jean (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 155-191.

9 O uso de material de manipulação e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Infantil

Ariedja de Carvalho Silva
Rute E. de S. Rosa Borba

CRIANÇAS DA EDUCAÇÃO INFANTIL PODEM DESENVOLVER RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO?

A pesquisa que será apresentada neste capítulo foi motivada e desenvolvida pela compreensão de que crianças, desde a Educação Infantil e com as devidas adequações para este nível de ensino, podem apreender conteúdos matemáticos específicos. O estudo tem seu enfoque no ensino da *Combinatória*, buscando fomentar em crianças novas formas de pensar sobre diferentes cenários, nos quais elementos podem ser combinados (*arranjos, combinações, permutações e produtos de medidas*).

Estudos anteriores, como o de Pessoa e Borba (2012), apresentaram em seus resultados que crianças pertencentes a esse nível de escolarização já indicam princípios de raciocínio combinatório e chamam a atenção de que este tipo de pensamento precisa de um período extenso para progredir e se consolidar. No intuito de oportunizar uma Educação Matemática que desenvolva as diferentes maneiras de raciocínio – senso numérico, relacional, algébrico, funcional, probabilístico e combinatório, entre outros (BORBA, 2016) – entende-se a importância de que seja iniciado, desde a Educação infantil e com atividades adequadas, o ensino de diferentes conteúdos, visando o desenvolvimento gradativo desses raciocínios matemáticos.

Respeitando o que é indicado pelo Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil – RCNEI (BRASIL, 1998), que sustenta que a diversificação das aprendizagens se dá através de sucessivas reorganizações dos conhecimentos, defende-se que crianças da Educação Infantil podem experimentar a familiarização com conteúdos matemáticos de modo simples e relacionado às suas práticas sociais cotidianas. O RCNEI salienta a necessidade de que, desde o início formal, haja conteúdos/conceitos para promoção da aprendizagem nos diversos campos de conhecimento. Trabalhar com fundamentos matemáticos na Educação Infantil leva em consideração a necessidade de crianças construírem conhecimentos e modos de pensamento diversificados, preparando-os para a vivência em coletividade, para que, assim, possam ter condições de atuar de modo participativo na sociedade – a qual, cada vez mais, exige dos sujeitos uma diversidade de conhecimentos e habilidades. Sabendo que a Educação Infantil (EI) faz parte de uma das três etapas da Educação Básica e que abrange crianças de 0 até 5 anos (de 0 a 3 anos em creches e de 4 e 5 anos em pré-escolas), baseada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB (BRASIL, 1996), tem-se por objetivo viabilizar a evolução integral dessas crianças, por meio de ações que incorporem fatores sociais, a família e a comunidade.

Amparado pelo que tem sido discutido e defendido por pesquisadores da área e o que está apresentado em documentos oficiais de âmbito nacional, o estudo aqui apresentado justifica a utilização de atividades, neste caso, especificamente, de raciocínio combinatório, que possam incentivar nos alunos o desenvolvimento desse tipo de pensamento. Compreendendo que o agrupamento de elementos faz parte da rotina e prática social, desde muito cedo, é possível estimular as crianças a pensarem sobre variados modos de combinar elementos em diferentes contextos sociais (BORBA, 2016).

Borba, Rocha e Azevedo (2015) apresentam estudos que reiteram a importância do longo prazo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, argumentando quanto à possibilidade de apresentação de situações-problema contextualizadas desde o início da escolarização e no decorrer de toda educação básica, para garantir o progresso desse modo específico de raciocínio.

A resolução de problemas combinatórios ajuda no desenvolvimento de diferentes estratégias – seja de maneira mais informal (com a ajuda de material de manipulação, desenhos ou listas) ou mais formalizada (por intermédio de operações aritméticas, do Princípio Fundamental da Contagem ou de fórmulas). Tais procedimentos podem ser utilizados nos diferentes tipos de problemas combinatórios: *arranjos* (nos quais se escolhem elementos a partir de um conjunto único e a ordem dos elementos determina possibilidades distintas), *combinações* (nas quais também se escolhem elementos a partir de um conjunto único, mas a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas), *permutações* (nas quais todos os elementos de um conjunto são reordenados entre si) e *produtos de medidas* (nos quais se escolhe um elemento de cada um dos dois ou mais conjuntos enunciados, sem distinção de ordenação dos elementos). Além dessas particularidades nos tipos de problemas combinatórios, tem-se a propriedade em comum de esgotamento das possibilidades, ou seja, deseja-se determinar – direta ou indiretamente – o número total de modos de combinar os elementos dados conforme solicitado.

Compreendendo que as crianças novas ainda não possuem domínio da leitura e escrita, pode-se propor a utilização de materiais de manipulação e a produção de desenhos na resolução de problemas. Na pesquisa aqui relatada, propôs-se explorar como o uso desses dois recursos pode auxiliar e estimular o aprendizado e resolução de problemas combinatórios por parte de crianças da Educação Infantil. Defende-se, assim, o uso de instrumentos dessas naturezas como estímulos contínuos e regulares no desenvolvimento de princípios e estratégias em problemas matemáticos.

Dialoga-se, desse modo, com o que é apontado por Pais (2001) sobre a possibilidade de direcionar o manuseio de objetos e favorecer a aquisição de conceitos matemáticos, ou seja, criar uma conexão entre operar sobre um objeto e acomodar conceitos. Este processo pode favorecer o envolvimento ativo das crianças no desenvolvimento das atividades, nas quais serão exercidas ações internas (pensamento/raciocínio) e externas (interação com objetos e sujeitos).

É importante salientar que para crianças em seu processo inicial de alfabetização, ainda sem apropriação da linguagem escrita, o estímulo a outras maneiras de resolução deve ser encorajado. Tem-se no desenho um importante apontamento de primeiros registros realizados por crianças e autores, tais como Smole, Diniz e Cândido (2000), os quais sugerem que crianças não-leitoras registrem, por intermédio de desenhos, seus esquemas e resoluções para situações-problema.

Diante de tudo que foi exposto, o objetivo central da pesquisa discutida neste capítulo foi investigar quais indícios de raciocínio combinatório se encontram em desenvolvimento por parte de crianças novas e como a utilização de material de manipulação e a elaboração de desenhos podem favorecer mais ainda o desenvolvimento desse modo de pensar por parte de crianças da Educação Infantil. Defende-se, portanto, que crianças em início da escolarização podem ser estimuladas a aprendizagens matemáticas com conteúdos específicos, neste caso, a Combinatória, sendo também levadas a avanços em outras áreas da Matemática, como a Probabilidade e a Estatística, entre outras.

A seguir, serão apresentados, de modo sucinto, a fundamentação teórica básica do estudo e estudos anteriores que usaram recursos variados para o ensino com crianças novas. Segue-se a descrição do método utilizado, a apresentação e discussão de resultados obtidos e as considerações quanto às implicações da pesquisa realizada.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS QUANTO AO DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A pesquisa foi desenvolvida a partir de bases teóricas referentes à construção do conhecimento e ao desenvolvimento cognitivo. Os pressupostos das teorias de Jean Piaget e de Gérard Vergnaud serviram de base para a elaboração do método adotado, bem como das análises realizadas.

A construção do conhecimento tem seus pilares fundamentados no que foi apresentado por Piaget (1972) em sua teoria sobre a *Gênese e evolução do conhecimento*, segundo a qual os sujeitos pensam sobre o mundo conforme *experiências físicas* (nas quais fazem descobertas das características dos objetos), *experiências sociais* (como a aprendizagem de nomes, termos, expressões ligadas aos objetos) e *experiências lógico-matemáticas* (reflexões quanto às relações constituídas na ação sobre objetos).

Em especial, quanto ao conhecimento lógico-matemático, esse estudioso ressalta a interação sujeito-objeto, que é construída em decorrência da ação mental do sujeito sobre os objetos do mundo. Na resolução de problemas deve-se considerar essa tríade de experiências (físicas, sociais e lógico-matemáticas) que permitem aos sujeitos a análise das situações e o entendimento de suas características particulares. Os raciocínios desenvolvidos possibilitam, assim, a formação de conceitos. A partir da exploração de materiais de manipulação e de outras representações, tais como desenhos, as crianças podem, progressivamente, desenvolverem seus raciocínios e, em consequência, construírem mais e mais conhecimentos.

Na *Teoria dos Campos Conceituais* (TCC), de Gérard Vergnaud (1986), que se baseia na teoria piagetiana, mas discute novos aspectos do desenvolvimento cognitivo, ressaltam-se elementos constituintes de conceitos, organizados em uma tríade (S, I, R). A primeira dimensão da tríade trata de situações (*S*) que dão significado aos conceitos, como os da Combinatória, foco do presente estudo. As situações aqui tratadas referem-se aos variados tipos de problemas combinatórios: *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medida*). A segunda dimensão conceitual refere-se aos *Invariantes* (*I*) das situações. No caso da Combinatória, tem-se como invariantes (relações e propriedades que se mantêm constantes nas variadas situações): a *escolha* e a *ordenação de elementos* que caracterizam cada tipo de problema combinatório e o *esgotamento de possibilidades* – comum a todos os problemas combinatórios. A terceira dimensão apontada na TCC – as *Representações Simbólicas* (*R*) – permitem a análise e compreensão das variadas situações, podendo, no caso da Combinatória, serem desenhos, listagens, diagramas e expressões numéricas, entre outras.

Nas análises que seguem, esses elementos serão considerados ao se avaliar os conhecimentos de situações combinatórias e seus invariantes por parte de crianças da Educação Infantil, ao utilizarem representações em desenhos e a partir do uso de material de manipulação.

ESTUDOS ANTERIORES E O USO DE VARIADOS RECURSOS DE ENSINO

Ao utilizar materiais de manipulação e produção de desenhos, esta pesquisa tomou como base estudos anteriores que tratam destas temáticas. Alguns desses estudos são apresentados a seguir.

Sobre materiais de manipulação, estudos diversos (PAIS, 2001; LORENZATO, 2006; BATISTA; SPINILLO, 2008, entre outros) têm demonstrado a capacidade que estas ferramentas possuem. Atribui-se, aqui, como material de manipulação, tudo que possa ser visto, manuseado, sentido ou deslocado pelo sujeito e que sua utilização tenha como objetivo a reflexão sobre algum conceito específico. É importante ressaltar que manusear esses materiais, empiricamente e sem finalidade, não é garantia de aprendizagem de conceitos. É importante associá-los aos contextos nos quais serão inseridos e às relações que serão criadas nas salas de aula para que possam gerar novos aprendizados. Defende-se, portanto, que materiais de manipulação têm grande potencial de ensino e de aprendizagem, principalmente quando associados ao papel do professor como mediador e facilitador na estruturação do conhecimento.

Lorenzato (2006) faz uma classificação do que ele nomeia de Material Didático (MD) concreto manipulável, subdividido em: Material manipulável estático, sobre o qual não é possível modificar sua morfologia; e o Material manipulável dinâmico, sendo que este pode ser modificado em sua estrutura por meio de intervenções realizadas sobre o objeto. É importante se ater que não se trata de discutir qual material é o mais importante, mas o que nesses materiais vai ser permitido aos alunos experimentar, observar, analisar, testar e entender das características de conceitos e, a partir daí, surgirem novos contextos, indagações e hipóteses e, assim, estimular o desenvolvimento da criticidade e do raciocínio lógico.

O desenho é uma *representação simbólica* que também pode ajudar na aprendizagem de novos conceitos, sendo uma das primeiras expressões realizadas por crianças no papel. O desenho é uma ação que pode estimular a atividade mental das crianças e, portanto, um excelente recurso de aprendizagem.

Smole (1996) aborda a relevância de pensar sobre representações espontâneas, tais como os desenhos infantis, que podem ser produzidas para a aprendizagem da Matemática. Em seus estudos, Smole (1996) identificou dois segmentos elementares para as representações gráficas espontâneas realizadas por crianças ao solucionarem problemas: (i) o desenho e (ii) os procedimentos pessoais de cálculo. Estas representações não possuem regras fixas, mas são estratégias criadas no processo de resolução de cada situação-problema. Smole (1996) aponta, ainda, que desenhar é uma ação intrínseca das crianças simbolizarem o que se passa em suas mentes, que antecede a formalização da linguagem no âmbito escolar.

Na seção seguinte, busca-se apresentar o método adotado no estudo, os participantes da pesquisa e os procedimentos adotados.

COMO PROPUSEMOS ÀS CRIANÇAS O USO DE MATERIAL DE MANIPULAÇÃO E DESENHOS

Fizeram parte deste estudo 20 crianças, com 5 anos de idade, faixa etária característica dos estudantes que compõem o Grupo V, ano final da EI, matriculadas e com frequência assídua, em um centro de ensino de Educação Infantil. A unidade participante, Escola

Municipal Professor Augusto Pereira, fica situada no bairro de Santo Aleixo, no município de Jaboatão dos Guararapes-PE. As crianças foram divididas em dois grupos, sendo esta divisão realizada de modo aleatório, mediante sorteio com os nomes dos estudantes.

No momento inicial, foi solicitado que no primeiro grupo (G1) as crianças solucionassem, individualmente, um teste contendo problemas combinatórios, fazendo uso do material de manipulação. Já no segundo grupo (G2), as crianças foram incentivadas a, individualmente, produzirem desenhos com lápis coloridos e papel, para o registro de suas resoluções. No segundo momento, os alunos dos dois grupos passaram, também individualmente, por uma sessão de ensino e, por fim, todas as crianças solucionaram problemas combinatórios de um teste final.

Tinha-se como objetivo geral analisar a influência de material de manipulação e de produção de desenhos no raciocínio combinatório de crianças da Educação Infantil (EI). Como objetivos específicos, pretendia-se: sondar aspectos do raciocínio combinatório que já se encontram em processo inicial de construção por parte de crianças da EI; verificar se e como o uso de material de manipulação e a produção de desenhos podem auxiliar na ampliação dos raciocínios combinatórios de crianças da Educação Infantil; e analisar os desempenhos das crianças por tipo de problema combinatório.

Os materiais descritos a seguir foram utilizados durante as três fases da pesquisa. À disposição do G1, ficou o material de manipulação, que era composto por: tabuleiro confeccionado com base em tecido tipo carpete, figuras ilustrativas com a representação dos objetos citados nos problemas – em quantidade maior que o necessário, para que fosse viável listar todas as possibilidades e ainda haver material excedente – e no verso destas imagens velcro, para facilitar a mudança de posições das figuras no tabuleiro, sempre que necessário. À disposição do G2 estavam lápis de vários tipos e cores (caneta hidrocor, cera e madeira) e folhas de papel, para que pudessem fazer o registro das suas resoluções dos problemas.

No teste inicial, instrumento de sondagem, foram apresentados a todos os estudantes, em sessão individual, quatro situações-problema que abrangiam os diferentes problemas combinatórios (sendo um de cada tipo: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas)*. Os problemas foram lidos diversas vezes, de acordo com a necessidade e solicitação das crianças. Não foi dado limite de tempo durante as sessões.

Foi necessário seguir um roteiro de perguntas, para que ficasse assegurado que todas as crianças dos dois grupos recebessem as mesmas instruções. A pergunta feita inicialmente foi: Você terminou? Ao responderem positivamente este primeiro questionamento, partiu-se para as demais: Qual a sua resposta? Quantos são? Como você chegou a essa resposta? Caso tivesse respondido negativamente, fazia-se necessário aguardar que a criança finalizasse sua resolução. E seguiram-se os questionamentos: Qual é a resposta? Quantos são? Como você chegou a essa resposta?

As respostas dadas pelas crianças no teste inicial foram analisadas quanti e qualitativamente, de acordo com o raciocínio de cada uma e o tipo de estratégia utilizada na resolução de cada problema apresentado, na percepção quanto aos invariantes combinatórios, o que levou em consideração e as representações simbólicas que foram preferencialmente utilizadas na solução dos problemas.

Para o segundo momento – a sessão de ensino – foram realizados questionamentos de como a escolha poderia ser feita, se as ordens dos elementos estavam diferentes e se havia mais alguma possibilidade diferente que pudesse ser colocada. Essas três relações (*escolha de elementos*, *ordenação de elementos* e *esgotamento de possibilidades*) foram igualmente tratadas nos dois grupos, com intuito de incentivar o desenvolvimento do raciocínio combinatório das crianças. Também foram incentivadas a sistematizarem suas respostas para um melhor desempenho.

Após a sessão de ensino, foi aplicado um teste final, seguindo a mesma estrutura dos problemas utilizados no teste inicial, e as mesmas instruções foram dadas para que fosse seguido um padrão e, assim, manter uma uniformidade, não havendo interferências ou diferenciações por parte da pesquisadora. Foi dado um intervalo de tempo de um dia entre as etapas (teste inicial, sessão de ensino e teste final) para minimizar a possibilidade do cansaço e saturação durante o processo.

A seguir, são apresentados os problemas utilizados no teste inicial, os quais também foram trabalhados na sessão de ensino:

- *Arranjo*: Numa corrida temos três carrinhos (amarelo, vermelho e azul). Nessa corrida, só podem ganhar dois carros por vez, o campeão e o vice-campeão. De quais maneiras diferentes os carrinhos podem ocupar o lugar de campeão e de vice-campeão na corrida?
- *Combinação*: Cinco crianças (Vivi, Caio, Duda, Bete e Samuel) vão brincar no pula-pula. Duas crianças podem brincar de cada vez. De quais maneiras diferentes as crianças podem brincar no pula-pula?
- *Permutação*: Laura está organizando espaços de dormir para os três bichinhos do sítio de sua tia (um pato, uma galinha e uma ovelha). Esses espaços ficarão um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes os bichinhos podem ser organizados?
- *Produto de Medidas*: Carol precisa se arrumar para ir à festa, mas não sabe que roupa usar. Ela tem quatro blusas (lilás,

vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde). De quais maneiras diferentes ela pode se vestir para ir à festa?

Para o teste final foram utilizadas as situações-problema que seguem:

- *Arranjo*: Três animais (a lebre, a tartaruga e a raposa) apostaram uma corrida para ver quem consegue dar a volta na floresta primeiro. Serão premiados dois animais: o que chegar em primeiro e o que chegar em segundo lugar. De quais maneiras diferentes os animais podem ocupar o primeiro e o segundo lugar na corrida?
- *Combinação*: Para fazer uma salada de frutas, Alice possui quatro frutas (banana, maçã, uva e laranja). Só podem ser colocadas duas frutas na salada. De quais maneiras diferentes ela poderá fazer a salada?
- *Permutação:* A titia quer guardar os seus três pares de sapatos (preto, vermelho e marrom) na prateleira um ao lado do outro. De quais maneiras diferentes eles podem ser organizados?
- *Produto de Medidas*: Na festinha da escola haverá um bailinho. Os dois meninos (Pedro e Davi) querem dançar com as suas quatro coleguinhas: (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia). De quais maneiras diferentes os pares podem ser formados, para que os meninos dancem com todas as meninas?

COMO AS CRIANÇAS DESENVOLVERAM SEUS RACIOCÍNIOS COMBINATÓRIOS

Os dados obtidos durante a pesquisa foram analisados quanti e qualitativamente, com o objetivo de averiguar quais invariantes das variadas situações combinatórias (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medidas*) eram notados pelas crianças, como as representações por meio dos recursos utilizados (material de manipulação e desenhos) facilitaram suas compreensões e quais elementos foram limitadores durante a resolução dos problemas pelas crianças.

Foi adotado um sistema de pontuação para as respostas dadas, que foram compostas por pontos que variavam de zero (quando nenhuma possibilidade foi listada e, assim, apresentou-se erro total na resolução do problema); passando por acertos parciais (pontuados 1, 2 e 3, dependendo do número de possibilidades corretas listadas); chegando-se a soluções corretas, mas com possibilidades repetidas (4 pontos) e a soluções corretas sem repetição de possibilidades (5 pontos). Essa pontuação faz uma correspondência com classificações apresentadas em estudos anteriores, como de Inhelder e Piaget (1976), que trazia cinco fases no avanço de resolução nos problemas de permutação, partindo da não compreensão de que os elementos apresentados poderiam ser organizados de formas diferentes até chegar ao esgotamento de possibilidades, sem que necessitassem de auxílio para isso; e o estudo pi que trata de problemas de *produto de medidas* que apresentam um escalonamento de níveis e subníveis do raciocínio combinatório, a partir do que foi apresentado por Inhelder e Piaget (1976) e Pessoa e Borba (2010), que também fazem um paralelo de classificações dos estágios e níveis encontradas em Inhelder e Piaget (1976) e em Moro e Soares (2006).

Na Tabela 1 é apresentada a média de pontuações dos dois grupos, G1 e G2, nos momentos de teste inicial e teste final. A pontuação máxima que poderia ser atingida, nas duas fases, era de 20 pontos (uma vez que a pontuação máxima era de cinco pontos em cada questão).

Tabela 1. Média de pontuação atingida por G1 (material de manipulação) e G2 (desenhos) nas fases de teste inicial e final

	Teste inicial	Teste final
G1 – material de manipulação	9,7	12,7
G2 – desenhos	7,4	8,8

Fonte: as autoras.

Verificou-se que grande parte das crianças do G1 (material de manipulação) obtiveram avanços no teste final, como se pode verificar nas pontuações apresentadas na Tabela 2. Uma única criança desse grupo pontuou abaixo do esperado, quando comparado ao teste inicial, e duas delas se mantiveram no mesmo patamar de pontuação. Os demais alunos desse grupo alcançaram bons avanços, com duas das crianças alcançando 18 pontos, próximo da pontuação máxima 20 pontos.

Tabela 2. Pontuação total nas fases de teste inicial e final – G1 (material de manipulação)

	Teste inicial	Teste final
A1	7	11
A2	10	18
A3	12	12
A4	8	10
A5	11	10
A6	11	18
A7	9	13

	Teste inicial	Teste final
A8	8	12
A9	11	11
A10	10	12

Fonte: as autoras.

Na Tabela 3 é apresentada a média de pontuação do Grupo G2 (desenhos). Avanços menores, em comparação ao Grupo G1, foram observados nesse grupo que produziu desenhos, com sete crianças apresentando um pouco de avanço, duas com pontuação mais baixa no teste inicial e duas mantendo a mesma pontuação.

Tabela 3. Pontuação total nas fases de teste inicial e final – G2 (desenhos)

	Teste inicial	Teste final
B1	7	10
B2	7	14
B3	7	9
B4	11	8
B5	9	10
B6	8	10
B7	8	8
B8	6	8
B9	4	3
B10	7	8

Fonte: as autoras.

Na fase do teste inicial, foi possível observar que os dois grupos apresentaram dificuldade em enumerar as combinações que foram realizadas. Algumas crianças executavam a contagem de todos os elementos que foram elencados na resposta e não das formações de possibilidades que foram levantadas, como exemplificado na Figura 1. Trata-se de um problema de *arranjo,* no qual se tinha três carros (amarelo, azul e vermelho) e se pedia todas as possibilidades de 1º e 2º lugar em uma corrida. A Criança A2 registrou 14 possibilidades (várias delas repetidas) e respondeu que seriam ao todo 28 maneiras diferentes de se ter 1º e 2º lugar. A criança, portanto, contou os elementos e não os agrupamentos (dos elementos de dois em dois).

Figura 1. Resposta dada pela Criança A2 para o problema de arranjo no teste inicial

Fonte: as autoras.

A Figura 2 ilustra o avanço da Criança A2 no teste final. Em seu teste inicial, quando solicitada que indicasse quantos conjuntos eram possíveis entre quatros blusas (lilás, vermelha, amarela e branca) e duas calças (rosa e verde), a criança registrou onze possibilidades. Oito seria a resposta correta, portanto, elencou três possibilidades a mais. No teste final, foi solicitado que fossem formados pares de dança entre dois meninos (Pedro e Davi) e quatro meninas (Cecília, Mariana, Fernanda e Júlia), de modo que os meninos dançassem com todas as meninas. A Criança A2 conseguiu enumerar todas as oito possibilidades corretamente e atentou para a não realização de repetições, ou seja, chegou ao esgotamento de possibilidades.

Figura 2. Resposta dada pela Criança A2 para o problema de produto de medidas no teste final

Fonte: as autoras.

No teste final, muitas crianças conseguiram superar a dificuldade de contagem das possibilidades, não mais enumerando os elementos, mas, sim, as composições de elementos combinados. Apenas três crianças no G1 e três crianças no G2 não realizaram a contagem de possibilidades nos quatro problemas do teste final.

Outra dificuldade percebida no teste inicial foi o não esgotamento de possibilidades, que foi também observado em pesquisas anteriores, como as de Santos, Matias e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012). Ressalta-se que essa é a maior dificuldade das crianças – e até certo ponto esperada nesse nível de ensino – mas que pode vir a ser superada no trabalho com problemas com resultados numéricos baixos, de modo que as crianças consigam encontrar todas as possibilidades solicitadas. Por ser a maior dificuldade que as crianças tiveram, o não esgotamento de possibilidades foi muito observado entre as crianças dos dois grupos, também no teste final.

Na Tabela 4 é apresentada a pontuação obtida por cada criança do G1 nos quatro problemas combinatórios nas fases de teste inicial e de teste final. Podem-se observar os avanços nos quatro tipos de problemas: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto de medidas*. As maiores médias de pontuação no teste final se concentraram nos problemas de *combinação* e *produto de medidas*. As crianças conseguiam perceber as repetições, fazendo metade ou mais das possibilidades de resposta sem repeti-las. Já nos *produtos de medidas,* três das 10 crianças conseguiram esgotar todas as possibilidades, chegando à pontuação máxima 5.

Na mesma direção de estudos anteriores, como os de Batista e Spinillo (2008), Santos, Matias e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012), que apontaram a importância do material de manipulação na resolução de problemas, defende-se que a utilização desses materiais é fundamental no auxílio da compreensão dos problemas combinatórios, no entendimento dos variados modos de agrupar os elementos e nas diferenças que são características de cada tipo de problema.

Tabela 4. Pontuação do G1 (material de manipulação) por problema no teste inicial (I) e no teste final (F)

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produtos de Medidas	
	I	F	I	F	I	F	I	F
A1	2	3	1	3	2	2	2	3
A2	2	3	2	5	2	5	4	5

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produtos de Medidas	
	I	F	I	F	I	F	I	F
A3	4	4	3	2	2	3	3	3
A4	3	3	1	3	1	1	3	3
A5	2	3	2	3	2	1	5	3
A6	2	5	2	5	2	3	5	5
A7	2	2	1	4	3	2	3	5
A8	2	3	2	4	2	2	2	3
A9	4	2	3	3	1	3	3	3
A10	2	3	2	3	3	3	3	3
Médias	2,5	3,1	1,9	3,5	2,0	2,5	3,3	3,6

Fonte: as autoras.

Tabela 5. Pontuação do G2 (desenhos) por problema no teste inicial (I) e no teste final (F)

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produtos de Medidas	
	I	F	I	F	I	F	I	F
B1	2	3	1	3	3	1	1	3
B2	2	3	3	5	1	5	1	1
B3	3	2	1	3	1	3	2	1
B4	5	2	1	2	2	3	3	1
B5	4	3	2	3	1	2	2	2
B6	3	2	1	3	1	3	3	2
B7	5	1	1	3	1	3	1	1

	Arranjo		Combinação		Permutação		Produtos de Medidas	
	I	F	I	F	I	F	I	F
B8	3	1	1	3	1	3	1	1
B9	1	1	1	1	1	0	1	1
B10	3	3	1	3	1	1	2	1
Média	3,1	2,2	1,3	2,9	1,3	1,8	2,4	1,4

Fonte: as autoras.

No G2 (desenho), como indicado na Tabela 5, foi possível observar algumas melhoras de desempenhos, com alguns poucos casos de queda nas pontuações. O desempenho mais fraco pode ser explicado pelo fato de que as crianças desse grupo apresentaram cansaço ao dar continuidade na produção dos desenhos, mesmo sendo estimuladas a tentar. Outro fator que deve ser considerado é que a maioria das crianças que fizeram uso desse recurso concentraram-se em ilustrar, com riqueza de detalhes, os itens e o contexto do enunciado, distraindo-as do objetivo central que era a resolução dos problemas.

Mesmo com pequenos avanços nas pontuações, as crianças do G2 conseguiram apresentar um maior número de possibilidades. Durante o teste inicial, os alunos tinham pouquíssima compreensão de alguns invariantes, mostrando avanços durante a sessão de ensino, ao notarem repetições de possibilidades. Observou-se, assim, indícios de compreensão de invariantes, isto é, na ocorrência de situações combinatórias nas quais a ordem dos elementos indica ou não indica novas possibilidades.

A importância do desenho também foi investigada no estudo de Borga e Justo (2013), que observaram a importância da representação gráfica feita por crianças, estimulando a mobilização de esquemas para resolver diferentes tipos de problemas. Nessa direção, Smole, Diniz e Cândido (2000) apontam que o fato de uma criança não dominar a linguagem escrita ou matemática não é empecilho para o aprendizado matemático, já que elas podem utilizar o desenho como uma alternativa para expressarem o que pensam.

A Figura 3 exemplifica o avanço alcançado pela Criança B2 no problema de *combinação*, tendo em vista que saiu de uma pontuação mais baixa no teste inicial e no seu teste final consegue marcar 5 pontos, ou seja, alcança o esgotamento de possibilidades.

Figura 3. Resposta dada pela Criança B2 para o problema de combinação no teste final

Fonte: as autoras.

É importante chamar a atenção para uma dificuldade enfrentada pelas crianças dos dois grupos, que estava em explicitar como elas raciocinaram para resolver os problemas. Por se tratar de crianças de cinco anos de idade, era um grande desafio pensar sobre as ações tomadas para se chegar à resolução dos problemas. Mas, o que aqui era esperado, seria o envolvimento dessas crianças na resolução de problemas combinatórios, mesmo que não chegassem a esgotar todas as possibilidades ou que fossem capazes de explicitar claramente as suas resoluções, como apontado por Borba, Rocha e Azevedo (2015) e Borba (2016).

O que foi adquirido como resultado neste estudo corrobora a ideia de que a Educação Infantil pode ser um ambiente prolífero para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático que favoreça a construção de conceitos, em específico, os combinatórios. Este nível de escolarização permite ao professor uma atuação mediadora que viabiliza diferentes olhares, oportunizando a ação das crianças sobre os objetos matemáticos e proporcionando que elas desenvolvam seus diferentes modos de pensamento.

Os achados do estudo ratificam o que é proposto pelos documentos oficiais, como o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil – RCNEI (BRASIL, 1998) e as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil – DCNEI (BRASIL, 2010), os quais legitimam que o desenvolvimento global dos estudantes deve ser fomentado desde o início da escolarização. A pesquisa também confirma resultados de estudos anteriores, tais como Santos, Matias e Pessoa (2011) e Borba (2016), os quais observaram que há indícios de raciocínio combinatório em crianças, desde muito novas.

As crianças dos dois grupos apresentaram, em estágio inicial, níveis diferentes de raciocínio combinatório, e quando estimuladas durante a sessão de ensino avançaram na compreensão do que era solicitado. Mesmo não chegando ao esgotamento de possibilidades, muitas conseguiram ampliar o número de agrupamentos em suas resoluções e várias crianças tentaram sistematizar suas respostas. Estes são claros sinais de desenvolvimento de raciocínio combinatório das crianças da Educação Infantil participantes do estudo.

O QUE CONCLUÍMOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DAS CRIANÇAS DE EDUCAÇÃO INFANTIL?

A pesquisa aqui apresentada teve como ideia central levantar e analisar quais os conhecimentos que crianças da Educação Infantil (EI) já possuem a respeito de situações combinatórias, possibilitando discussões de como é possível promover, desde o início da escolarização, o desenvolvimento do raciocínio matemático – em especial o combinatório. As observações realizadas podem, assim, contribuir para que se aperfeiçoem práticas de ensino, tornando-as facilitadoras, trazendo melhores condições de progressos na aprendizagem da Combinatória por parte das crianças.

Mais especificamente, analisou-se o uso de material de manipulação e a produção de desenhos como recursos introdutórios, que podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças da Educação Infantil. Como já afirmado anteriormente, o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que necessita de um longo período para se desenvolver e a presente pesquisa buscou dialogar com outras (SANTOS; MATIAS; PESSOA, 2011; PESSOA; BORBA, 2012) que defendem o início mais precoce do trabalho com situações combinatórias na escola.

Possibilitar que esse tipo de raciocínio se desenvolva poderá promover mais avanços na aprendizagem matemática das crianças, englobando outros tipos de raciocínios, pois é uma forma de pensar que incentiva a contextualização de situações, o raciocínio hipotético e a sistematização na resolução de problemas. As situações combinatórias possuem características bem distintas, podendo-se observar, à luz da *Teoria dos Campos Conceituais* (VERGNAUD, 1986), os invariantes assimilados pelas crianças e o papel que foi exercido nas duas formas utilizadas para as representações das situações (material de manipulação e produção de desenhos).

Com base no contexto que a pesquisa foi desenvolvida – crianças da EI, sem domínio de leitura, escrita e operações aritméticas – foi viável considerar a inserção de conceitos matemáticos específicos, da Combinatória, fazendo uso de recursos que não demandam leitura e/ou escrita de palavras, nem uso de operações matemáticas formais, mas que permitem a resolução dos problemas de modo leve e lúdico.

Observou-se que a maioria das crianças compreendia, desde o início, o invariante de escolha, pois selecionavam a quantidade correta de elementos na construção dos agrupamentos solicitados, mas algumas das crianças, no teste inicial, confundiam o número de elementos enumerados com a quantidade de possibilidades levantadas. O invariante de ordenação era pouco compreendido e, assim, as crianças inicialmente erravam no levantamento de possibilidades, principalmente em problemas de *arranjo*, *combinação* e *permutação*. Muitas crianças duplicavam possibilidades e a falta de sistematização dificultava o levantamento das possibilidades, sendo o esgotamento de possibilidades a maior dificuldade observada (como também evidenciado em estudos anteriores). Além disso, as crianças não conseguiam explicitar como haviam pensado no levantamento das possibilidades enumeradas.

O uso do material de manipulação e a produção de desenhos apontaram indícios de avanços quantitativos, com o aumento de possibilidades apresentadas e um maior cuidado em evitar repetições. Em termos qualitativos, boa parte das crianças – a partir dos questionamentos da pesquisadora nos momentos de sessão de ensino – passaram a apresentar compreensão do invariante de ordem, conseguindo diferenciar quando, ou não, as ordens dos elementos indicavam possibilidades distintas. Algumas crianças conseguiram esgotar as possibilidades em alguns dos problemas do teste final, mas essa permaneceu como a maior dificuldade para grande parte dos participantes do estudo.

Com isso, é chamada a atenção para o longo tempo necessário no desenvolvimento do raciocínio combinatório e sendo possível, como o presente estudo e outros anteriores mostraram, dar início ao estudo das situações combinatórias desde a Educação Infantil. Desse modo, se estimulará que as crianças sejam capazes de realizarem associações, passo esse em que precisam classificar, ordenar e estabelecer correspondências. E este é o fundamento que antecede o caminho até se chegar ao pensamento formal, o qual possui, em sua essência, o raciocínio hipotético-dedutivo, pois "a dedução consiste, então, em ligar essas suposições, e delas deduzir suas consequências necessárias" (PIAGET, 1972, p. 189). Sendo o objetivo central da Educação Matemática o alcance dessas formas elaboradas de pensamento, esperamos que as discussões aqui suscitadas possam estimular o trabalho com a Combinatória e outros conteúdos aparentemente mais complexos desde o início da escolarização – em termos acessíveis e em quantidades adequadas à compreensão das crianças.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Adriana Maria; SPINILLO, Alina. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. *Estudos de Psicologia* (UFRN), v. 13, p. 13-21, 2008.

BORBA, Rute. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização. *In:* Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos anos iniciais. 2016. Recife. *Anais eletrônicos*... Recife, PE: SBEM/Gref/Geração, 2016.

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 29, p. 1348-1368, 2015.

BORGA, Margarete; JUSTO, Jutta. Representações gráficas espontâneas na resolução de problemas aditivos no 2º ano do ensino fundamental. *In:* CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. *Anais*... Canoas, RS: ULBRA, 2013.

BRASIL. *Lei nº 9394/96*, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília, DF: Presidência da República, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil*, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil*. Brasília: MEC/SEB, 2010.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*: ensaio sobre a construção das estruturas operatórias formais. tradução de Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. *In:* LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.* São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 8, p. 99-124, 2006.

PAIS, Luís Carlos. *Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria*. 2001. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significados.pdf. Acesso em: 06 fev. 2018.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 1, n. 1, 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/2182. Acesso em: 22. out. 2020.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? *In:* CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 36., 2012, Taiwan. *Proceedings*… Taiwan, China: PME36, 2012.

PIAGET, Jean. A teoria do Piaget. *In:* MUSSEN, P. H. *O desenvolvimento psicológico da criança*. 6. ed. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1972. p. 71-112.

SANTOS, Missilane; MATIAS, Patrícia; PESSOA, Cristiane. *O raciocínio combinatório na Educação Infantil*. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

SMOLE, Kátia. *A matemática na Educação Infantil*: a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1996.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. *Resolução de problemas:* matemática de 0 a 6. Porto Alegre: Artmed, 2000.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, v. 1, p. 75-90, 1986.

10 Recursos didáticos: uso de fichas ilustrativas e do *software* Pixton© na aprendizagem da Combinatória

Dacymere da Silva Gadelha
Rute E. de S. Rosa Borba
Juliana Azevedo Montenegro

O USO DE RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

A Combinatória está associada à ideia de combinar elementos de um ou mais conjuntos, sendo formados agrupamentos desses elementos, também conhecidos como possibilidades. A resolução de problemas dessa área da Matemática desperta a atenção dos estudantes, os quais levantam hipóteses diante de diferentes situações que envolvem relações combinatórias particulares.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório envolve a compreensão de conceitos pertencentes ao campo das estruturas multiplicativas. São, portanto, alguns dos problemas que dão sentido às operações de multiplicação e de divisão.

No Ensino Médio, a Combinatória é trabalhada por meio do uso de fórmulas, mas este não é o modo indicado para o estudo desse conteúdo nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Os problemas propostos para as crianças de início de escolarização podem ser solucionados por meio de desenhos e listagens, nos quais cada uma das possibilidades pode ser enumerada, já que nesse nível de ensino limita-se o número total de possibilidades solicitadas.

Dessa forma, entende-se que o modo como a Combinatória é trabalhada na sala de aula pode permitir que ela seja introduzida desde cedo na escolarização, sendo aprofundada ao longo do Ensino Básico. Sabe-se que o documento curricular vigente – BNCC (BRASIL, 2018) – aponta que os problemas de contagem, como se refere às situações combinatórias, sejam trabalhados, especialmente, os problemas de *produto de medidas*, a partir do 4º ano do Ensino Fundamental. No entanto, tal documento destaca que se deve considerar aquilo que as crianças já demonstram serem capazes de aprender. Nessa direção, estudos anteriores apontam que as crianças dos Anos Iniciais de escolarização já são capazes de desenvolver seus raciocínios combinatórios mediante situações de ensino específicas e, por intermédio do ensino, podem ser desafiadas a maiores avanços em seus modos de pensar.

Um dos aspectos apresentados como importantes pela BNCC é a proposta do uso de recursos didáticos adaptados a partir da realidade de cada nível de ensino, pois é necessário "selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender" (BRASIL, 2018, p. 17). De maneira geral, são listadas algumas opções, desde as mais tradicionais às mais atuais. Especificamente para a Combinatória, nos Anos Iniciais, é descrita a seguinte habilidade e possíveis recursos:

> Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais. (BRASIL, 2018, p. 289).

Os problemas referidos dizem respeito a um tipo específico de situação combinatória, que será tratada adiante. No entanto, retomando a ênfase sobre o uso de recursos didáticos, percebe-se que nesse trecho é indicado o uso de imagem, como também o uso do material manipulável. Entende-se que ambos os recursos podem ser utilizados com a finalidade de representar os elementos a serem combinados/agrupados, bem como na representação dos agrupamentos solicitados.

Seguindo essa perspectiva, no estudo aqui relatado foram utilizadas fichas ilustrativas e as ilustrações virtuais do *software* Pixton©. O objetivo não foi o de comparar tais recursos didáticos e nem definir se o tradicional ou o virtual é mais eficaz, mas, sim, o de verificar o quanto cada um desses recursos pode contribuir na compreensão da Combinatória por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental.

ESTUDOS ANTERIORES SOBRE O USO DE RECURSOS NO APRENDIZADO MATEMÁTICO

Estudos anteriormente desenvolvidos apresentam alguns recursos que já foram testados com estudantes de início de escolarização. Entre eles, destacam-se: Batista e Spinillo (2008), que versaram sobre o uso de materiais manipuláveis; Pessoa e Santos (2015), envolvendo o manuseio de fichas com os elementos ilustrados; e Santos, Silva e Lucena (2016), que abordaram o uso do *software* Pixton©. A seguir, serão descritos os principais resultados de cada um desses estudos.

Participaram da pesquisa de Batista e Spinillo (2008) 40 crianças da 2ª série, atual terceiro ano do Ensino Fundamental, que responderam problemas multiplicativos, tendo como auxílio materiais manipuláveis. Foram utilizadas fichas plásticas de uma mesma cor, sem nenhuma ilustração, como material concreto indefinido. Para o material concreto definido, foram utilizados carrinhos, caixinhas de papelão, flores plásticas e jarrinhos em miniaturas, representando os elementos do enunciado das questões. Os resultados mostraram que os estudantes que manusearam o material concreto definido tiveram um desempenho melhor do que o outro grupo, porque os objetos manuseados permitiram que tivessem uma melhor clareza ao identificar o divisor e o dividendo ou o multiplicando e o multiplicador. Diferentemente, o grupo do material concreto indefinido não conseguia essas distinções, devido às fichas serem lisas sem nenhuma ilustração e de uma mesma cor. Desse modo, as autoras concluíram que não é suficiente propor o manuseio do material manipulável se a representação não facilitar a compreensão do estudante.

Pessoa e Santos (2015) realizaram sua investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental, os quais solucionaram problemas combinatórios, divididos entre o grupo que manuseou fichas com ilustrações correspondentes aos elementos do enunciado e o grupo que utilizou apenas lápis e papel. Os dados analisados apontaram que os estudantes que utilizaram lápis e papel se sobressaíram ao contemplar o esgotamento das possibilidades, uma vez que usaram em todos os momentos a mesma forma de representação.

Porém, as análises qualitativas mostraram que, mesmo não havendo o esgotamento das possibilidades por parte do grupo que manuseou as fichas, foram notados avanços nas suas compreensões da Combinatória.

Santos, Silva e Lucena (2016) realizaram uma breve formação que teve como participantes três estudantes do curso de Matemática, dois graduados em Matemática e uma estudante de Pedagogia. O objetivo dos autores era analisar o uso do *software* Pixton© para a contextualização de funções matemáticas a partir da produção de Histórias em Quadrinhos (HQ).

Mediante as observações realizadas, os autores concluíram que o Pixton© contribuiu para a contextualização matemática desejada. Destaca-se, também, que o uso desse recurso permitiu aos participantes consolidarem suas compreensões no formato de HQ, como também possibilitou aos pesquisadores terem um *feedback* sobre o entendimento dos participantes.

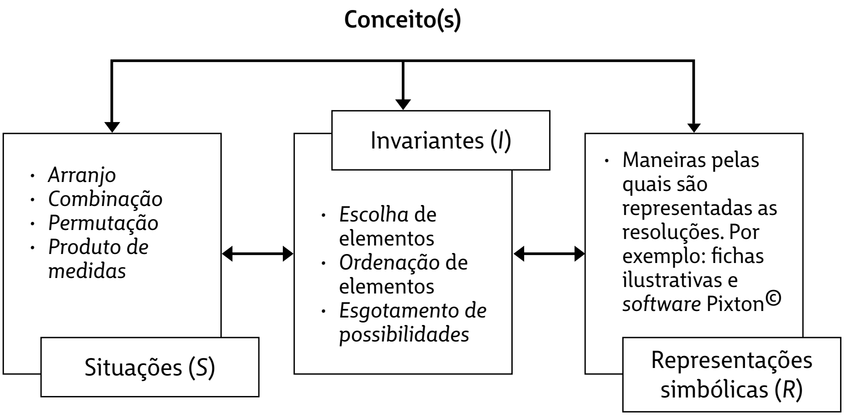
A partir desses achados no estudo aqui relatado, buscou-se repensar o uso do Pixton© para a representação das possibilidades combinatórias por meio das ilustrações disponibilizadas no *software*, aproximando-se da ideia de fichas ilustrativas, porém, em uma versão virtual. Também se avaliou o uso de fichas ilustrativas, uma versão de material manipulável concreto.

PROBLEMAS COMBINATÓRIOS NAS FICHAS ILUSTRATIVAS E COM O PIXTON©

A pesquisa aqui relatada tomou como base de organização e análise a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1996), discutida no capítulo introdutório do presente livro. Na Figura 1 pode-se observar uma síntese das situações da Combinatória consideradas, os invariantes (propriedades e relações) dessas situações e as representações simbólicas adotadas no estudo aqui discutido.

Os quatro tipos de situações combinatórias mencionadas (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos de medida*) são classificados numa organização única por Borba (2010), ao considerar que todas envolvem uma mesma forma de pensar, ou seja, a de combinar elementos. A resolução desses tipos de situações implica na *escolha* e na *ordenação de elementos,* cada uma de um modo particular, e no *esgotamento de possibilidades* para todas elas. As ilustrações em fichas e no *software* Pixton© são as representações simbólicas aqui consideradas.

Figura 1. Formação de conceitos da Combinatória fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996)



Fonte: Adaptado de Gadelha, Borba e Montenegro (2020).

Seguem-se exemplos de cada tipo de situação combinatória, a partir dos problemas que foram propostos na pesquisa. As resoluções estão representadas por meio das fichas ou de ilustrações do Pixton©.

Situação-problema de *arranjo: "Três amigos (Beto, Liz e Chico) apostaram corrida na praia de Boa Viagem. De quantas maneiras diferentes se pode ter o primeiro e o segundo lugares?"* (GADELHA, 2020).

Nesse caso, dois dos três personagens deverão ser escolhidos para constituir o primeiro e o segundo lugares. A *ordenação* definirá quem ocupará uma das duas colocações. Na Figura 2, é demonstrado como a solução desse problema pode ser representada com fichas ilustrativas.

Figura 2. Exemplo de uma situação de *arranjo* solucionada com as fichas ilustrativas

Fonte: as autoras.

Situação-problema de *combinação: "D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao Parque Diversão e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças podem brincar por vez no pula-pula?"* (GADELHA, 2020).

A princípio, esse tipo de problema se assemelha ao anterior, pelo fato de serem escolhidos alguns elementos do todo. No entanto, a *ordenação* em que os mesmos elementos são colocados não faz diferença, ou seja, optar por Bianca, Sabrina e Diego será a mesma escolha, independente de sua ordem. A Figura 3 demonstra como esse problema pode ser resolvido com fichas ilustrativas.

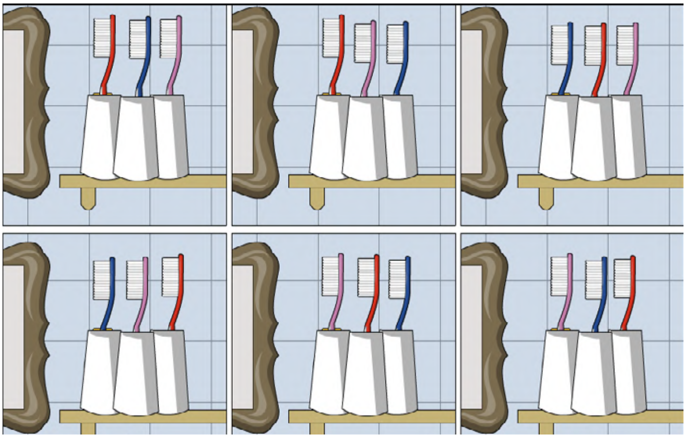
Figura 3. Exemplo de uma situação de *combinação* solucionada com as fichas ilustrativas

Fonte: as autoras.

Situação-problema de *permutação: "No porta-escovas de dentes da Suzy, há suporte para até três escovas de dentes (azul, lilás e vermelha). De quantas e quais maneiras diferentes ela pode organizar as três escovas de dentes?"* (GADELHA, 2020).

Para esse tipo de situação, todos os elementos devem ser agrupados simultaneamente e é preciso considerar que a *ordenação* indicará diferentes possibilidades. Essa relação dos invariantes de *escolha*, *ordenação* e do *esgotamento de possibilidades* podem ser observados na Figura 4.

Figura 4. Exemplo de uma situação de *permutação* solucionada no Pixton©



Fonte: Pixton© (2020).

Situação-problema de *produto de medidas*: *"Em um final de semana, Luiza foi para casa de sua tia e em sua mochila levou três blusas (branca, cinza e rosa) e dois shorts (preto e azul). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se vestir com uma blusa e um short?"* (GADELHA, 2020).

Esse tipo de situação se distingue das demais por envolver mais de um conjunto de elementos. É preciso escolher um elemento de cada conjunto, sem a necessidade de alterná-los, pois resultaria em uma mesma possibilidade. A Figura 5 apresenta as possibilidades que respondem a essa questão.

Figura 5. Exemplo de uma situação de *produto de medidas* solucionada no Pixton©

Fonte: Pixton© (2020).

Pelo exposto, observa-se que ambos os recursos – fichas ilustrativas e *software* Pixton© – podem ser utilizadas na representação de situações combinatórias e na resolução dos distintos tipos de problemas. Na próxima seção, descrevem-se as etapas da pesquisa desenvolvida e o modo como os participantes foram organizados.

COMO FOI PROPOSTO O USO DE FICHAS E DO PIXTON©

O estudo foi realizado com 36 estudantes de duas escolas da Rede Municipal do Recife do 5º ano do Ensino Fundamental. Todos os estudantes das duas turmas participantes responderam a um teste inicial usando lápis e papel, que serviu como diagnóstico de suas compreensões antes do início das sessões de ensino.

O Quadro 1 apresenta a classificação e pontuação pensada para as respostas dos estudantes. A categorização proposta baseia-se em resultados de estudos anteriores do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico – Geração, levando-se em conta as relações combinatórias referentes à escolha e ordenação de elementos e ao esgotamento de possibilidades.

Quadro 1. Classificação das respostas apresentadas nos testes

Classificação	Tipo de resposta	Pontuação
Incorreta	Escolha incorreta; ordenação incorreta; sem esgotamento das possibilidades.	0
Acerto Parcial I	Escolha adequada, mas limita-se a uma possibilidade.	1
Acerto Parcial II	Escolha adequada, mas apresenta número de possibilidades limitado ao número de elementos.	2
Acerto Parcial III	Escolha adequada, ordenação incorreta.	3
Acerto Parcial IV	Escolha correta ou adequada e ordenação correta, esgotamento das possibilidades incorreto.	4
Acerto Total	Escolha correta, ordenação correta e esgotamento das possibilidades correto.	5

Fonte: Gadelha (2020).

Mediante a pontuação obtida no teste inicial, os estudantes selecionados foram distribuídos em três grupos, sendo 12 participantes em cada, com médias próximas. Desses, dois grupos participaram de dois momentos de ensino em dias distintos: o G1, constituído por aqueles que manusearam fichas com ilustrações, e o G2, composto pelos que utilizaram o *software* Pixton©. Os estudantes do G3 não vivenciaram nenhum dos momentos de ensino.

Os 12 participantes de cada grupo de ensino formaram duplas que participaram dos momentos de ensino, em dias distintos, com duração aproximada de 1 hora e 30 minutos cada. No primeiro momento, foi apresentado o recurso didático que seria utilizado pela dupla. Em seguida, os participantes foram solicitados a solucionar os quatro primeiros problemas do teste inicial, um de cada tipo – *arranjo, combinação, permutação* e *produto de medidas*. A resolução desses quatro primeiros problemas aconteceu mediante o acompanhamento da pesquisadora, momento em que foram realizadas algumas perguntas como ponto de partida para a compreensão do problema e/ou para a verificação dos equívocos cometidos na construção das possibilidades. No segundo momento de ensino, foi dada mais autonomia aos participantes para solucionarem os demais problemas, por demonstrarem estar mais familiarizados com o manuseio do recurso utilizado e com maior compreensão em relação aos invariantes combinatórios.

Por fim, os participantes dos três grupos e os demais estudantes das duas turmas responderam a um teste final que continha a mesma estrutura do primeiro teste, ou seja, oito situações-problema, duas de cada tipo, variando entre 04 a 12 possibilidades como resposta. O teste foi realizado com lápis e papel, sem o auxílio do recurso didático utilizado nos momentos de ensino. As análises das respostas seguiram a mesma etapa anterior (teste inicial).

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO ANTES DO ENSINO

Ao longo de toda pesquisa, o acompanhamento da compreensão da Combinatória esteve voltado para os 36 estudantes que constituíram os três grupos do estudo. Na Tabela 1, são apresentadas as porcentagens de acerto por tipo de situação, de acordo com a classificação de respostas em cada grupo.

Percebe-se que as maiores porcentagens estiveram concentradas nas respostas consideradas incorretas, nos três grupos e nos diferentes tipos de situações. Nesse sentido, grande parte dos estudantes não compreendiam a ideia de agrupar elementos para a formação de possibilidades, nem dominavam as relações de *escolha* e de *ordenação* de elementos para o *esgotamento das possibilidades.*

Os poucos acertos totais foram contemplados, especialmente, nos problemas de *produto de medidas*, reforçando o que já tem sido pontuado em estudos anteriores ao justificarem que esse melhor desempenho pode estar atrelado ao fato de ser um tipo de situação explicitamente trabalhada nos Livros Didáticos dos Anos Iniciais e, consequentemente, o mais familiar aos estudantes (PESSOA; BORBA, 2009; PESSOA; SANTOS, 2015).

Tabela 1. Resultados no teste inicial de cada grupo por tipo de situação combinatória e tipo de resposta

Grupo	Situação combinatória	Classificação das respostas					
		I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
G1 – Fichas	Arranjo	83,3%	16,7%	---	---	---	---
	Combinação	66,7%	12,5%	8,3%	4,1%	8,3%	---
	Permutação	75,0%	20,8%	---	---	---	4,1%
	Produto de medidas	75,0%	4,1%	8,3%	---	---	12,5%
G2 –Software Pixton©	Arranjo	75,0%	4,1%	---	---	20,8%	---
	Combinação	66,6%	8,3%	4,1%	8,3%	12,5%	---
	Permutação	58,3%	26,6%	---	---	---	---
	Produto de medidas	62,5%	16,7%	12,5%	---	8,3%	4,1%

Grupo	Situação combinatória	Classificação das respostas					
		I	AP I	AP II	AP III	AP IV	AT
G3 – Sem ensino	Arranjo	83,3%	8,3%	---	---	4,1%	4,1%
	Combinação	75,0%	12,5%	8,3%	4,1%	---	---
	Permutação	79,1%	16,6%	---	---	4,1%	---
	Produto de medidas	70,8%	12,5%	4,1%	---	4,1%	8,3%

I: Incorreta; AP I: Acerto Parcial I; AP II: Acerto Parcial II; AP III: Acerto Parcial III; AT: Acerto Total.

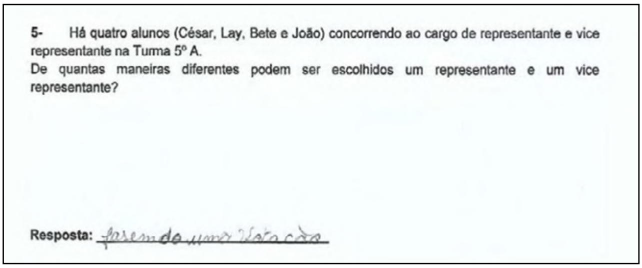
Fonte: Gadelha (2020).

No entanto, também se destaca que alguns estudantes, dos três grupos da pesquisa, indicaram ao menos uma possibilidade como resposta nos diferentes tipos de situações, sendo notado, portanto, um princípio de compreensão da Combinatória, mesmo antes das sessões de ensino. Desse modo, foi importante levantar esses conhecimentos anteriores para considerá-los nas sessões de ensino que se seguiram.

Seguem exemplos das respostas dadas no teste inicial. O primeiro exemplo (Figura 6) é de um problema de *arranjo*, no qual foram observadas as maiores percentagens de respostas incorretas, e o segundo exemplo (Figura 7) é uma *permutação* com indicação de apenas uma das seis possibilidades solicitadas.

O estudante respondeu dizendo o modo como poderiam ser definidos o representante e o vice: fazendo uma votação. Esse modo de responder, sem relação combinatória, também foi visto em outros problemas do teste inicial, não sendo apresentadas as possibilidades que responderiam ao problema.

Figura 6. Situação de *arranjo* com resposta incorreta (G2 – *Software*) no teste inicial



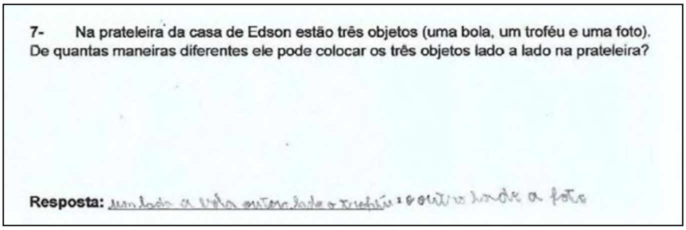
5- Há quatro alunos (César, Lay, Bete e João) concorrendo ao cargo de representante e vice representante na Turma 5º A.
De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos um representante e um vice representante?

Resposta:

Resposta: Fazendo uma votação.

Fonte: Gadelha (2020).

Figura 7. Situação de *permutação* com Acerto Parcial I (G1 – Fichas) no pré-teste



7- Na prateleira da casa de Edson estão três objetos (uma bola, um troféu e uma foto).
De quantas maneiras diferentes ele pode colocar os três objetos lado a lado na prateleira?

Resposta:

Resposta: Em um lado a bola, ao lado o troféu e no outro lado a foto.

Fonte: Gadelha (2020).

Assim, inicialmente, foram observadas muitas respostas sem relação combinatória ou respostas com apenas uma possibilidade. Vistas as dificuldades dos participantes no teste inicial, seguiu-se a segunda etapa da pesquisa – os dois momentos de ensino com cada dupla do G1 e do G2. Ao longo do ensino foram realizadas observações que serão descritas a seguir.

COMO AS FICHAS ILUSTRATIVAS CONTRIBUÍRAM PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

As fichas foram distribuídas, de acordo com o problema da vez, sobre uma mesa para facilitar a organização das combinações. Diferente do que se esperava, as fichas ilustrativas não são autoexplicativas e, para alguns estudantes, o auxílio da pesquisadora foi necessário para que compreendessem como utilizar o material disponibilizado na resolução do problema.

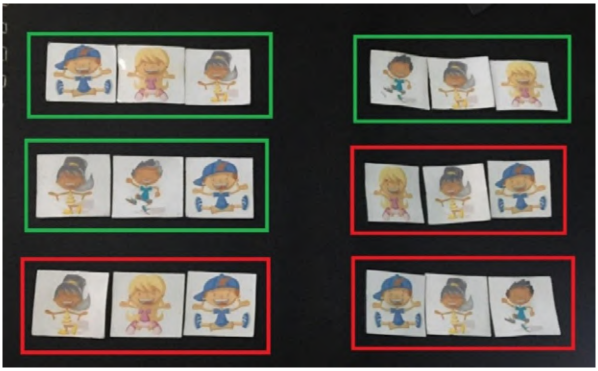
Foram realizados alguns questionamentos introdutórios como ponto de partida, como, por exemplo: *os dois primeiros lugares poderiam ser ocupados por quais personagens?* Ao ser apresentada uma provável possibilidade, a dupla era instigada a explorar outras até o esgotamento. O trabalho em dupla se mostrou bastante satisfatório, havendo parceria ao longo das resoluções, pois os participantes se ajudavam e apontavam incorreções sempre que identificavam algum erro.

Destaca-se que os questionamentos da pesquisadora foram fundamentais para que os participantes avançassem em seus raciocínios combinatórios. As perguntas feitas durante as sessões de ensino tinham o objetivo de levá-los à reflexão sobre a *escolha* e a *ordenação* dos elementos para o *esgotamento das possibilidades*.

Entre os vários registros realizados ao longo desses momentos, têm-se o exemplo da resolução de uma situação de *combinação*. A dupla de estudantes não havia considerado que, nesse tipo de problema, agrupar os mesmos elementos em ordens diferentes não gerava diferentes possibilidades. Portanto, a pesquisadora apontou para duas possibilidades repetidas, questionando-lhes se eram diferentes ou iguais. Um dos participantes afirmou que eram diferentes, pois os personagens estavam em posições diferentes. Em seguida, a pesquisadora perguntou se faria diferença a colocação dos personagens dentro do pula-pula, conforme o contexto do problema. Ambos os estudantes reconheceram que, nesse caso, a ordem dos elementos não importaria.

Na Figura 8, é apresentada a primeira versão da resposta, antes das crianças perceberem seus erros. Em seguida, a dupla reorganizou as fichas e obteve as quatro possibilidades esperadas. A resposta apresentada na Figura 8 corresponde à seguinte situação de *combinação: "D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?"* (GADELHA, 2020).

Figura 8. Resposta de um problema de *combinação* no primeiro momento de ensino com fichas ilustrativas



Em destaque na cor verde estão três das quatro possibilidades corretas e na cor vermelha as possibilidades repetidas. Situação de *combinação: D. Marta levou seus quatro filhos (Bianca, Sabrina, Diego e Felipe) ao parque e no brinquedo pula-pula só podem entrar três crianças por vez. De quantas maneiras diferentes três crianças brincarão por vez no pula-pula?*

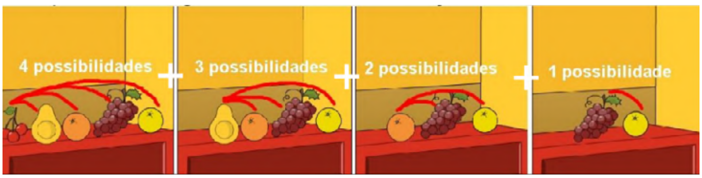
Fonte: Gadelha (2020).

COMO O *SOFTWARE* PIXTON© CONTRIBUIU PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

No primeiro momento, com cada dupla, foi apresentada a plataforma do Pixton© e as principais opções de edições necessárias para serem ilustradas as possibilidades combinatórias. Em seguida, foram disponibilizados alguns minutos para que os estudantes pudessem manusear o Pixton© livremente, para que se familiarizassem com o *software*.

Assim, como no grupo de ensino anterior, as perguntas reflexivas também foram primordiais para que os estudantes construíssem compreensões acerca das situações combinatórias. No segundo momento, muitos já se mostravam seguros em responder corretamente os problemas. Na Figura 9 pode ser observado o modo como uma dupla respondeu uma questão de *combinação* com auxílio do *software*. A situação de *combinação é a seguinte: "Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?* (GADELHA, 2020).

Figura 9. Resposta (editada) de um problema de *combinação* no segundo momento de ensino com o Pixton©



Situação de *combinação: Na barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, limão e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas. De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?*

Fonte: Gadelha (2020).

Um dos participantes inseriu todos os elementos e os repetiu após a combinação do primeiro elemento com os demais. Seu colega de dupla chamou-lhe a atenção, afirmando que seria necessário ir diminuindo a quantidade de elementos, pois a primeira fruta já havia sido combinada com as demais, demonstrando compreender que, para esse tipo de situação, a *ordenação* dos mesmos elementos não resulta em diferentes possibilidades.

Observou-se, portanto, com base em análises qualitativas, que os participantes dos dois grupos – fichas ilustrativas (G1) e *software* Pixton© (G2) – passaram a demonstrar soluções com relação combinatória desde os momentos de ensino e de interação com a pesquisadora e com seus colegas. Seguem-se análises de melhoria de desempenho dos estudantes desses grupos no teste final.

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DOS ESTUDANTES APÓS AS SESSÕES DE ENSINO

Finalizados os dois momentos de ensino com cada dupla, os estudantes das duas turmas realizaram o teste final para a verificação de suas aprendizagens. Na Tabela 2, pode-se observar os percentuais nesse teste, por tipo de situação e por tipo de resposta.

Observa-se que com apenas dois momentos de ensino, os dois grupos que trabalharam com os recursos propostos (G1 – fichas ilustrativas e G2 – *software* Pixton©*) avançaram muito em seus desempenhos. Houve grande redução nesses grupos de respostas incorretas e bom aumento em respostas parcialmente e totalmente corretas.*

A redução de respostas incorretas para os grupos que trabalharam com fichas e o *software* é justificada pelo fato de os participantes terem avançado em suas compreensões dos problemas combinatórios e das relações neles implícitas. Percebe-se que as maiores percentagens passaram a estar no Acerto Parcial IV – quando a escolha está correta ou adequada, a ordenação está correta, mas o esgotamento das possibilidades está incorreto –, etapa anterior ao do Acerto Total. Desse modo, houve avanços na compreensão da *escolha de elementos* e na relevância, ou não, da *ordenação dos elementos*, mas ainda permaneceram algumas dificuldades n*o esgotamento das possibilidades*.

Tabela 2. Resultados no teste final de cada grupo por tipo de situação combinatória e tipo de resposta

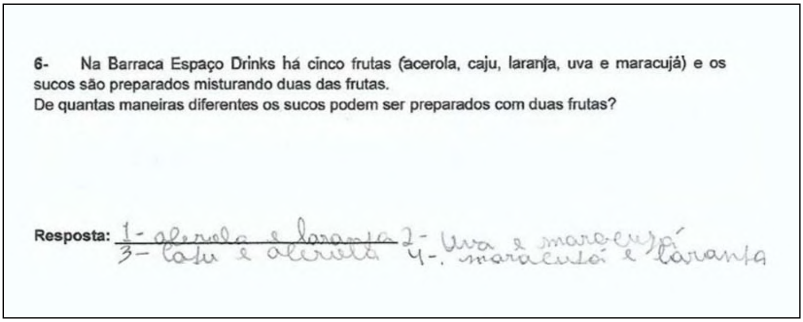
Grupo	Situação combinatória	Classificação das respostas					
		I	API	APII	APIII	APIV	AT
G1 – Fichas	Arranjo	16,6%	12, 5%	---	---	33,3%	37,5%
	Combinação	20,8%	4,1%	4,1%	16,7%	50,0%	4,1%
	Permutação	12,5%	8,3%	---	---	66,7%	12,5%
	Produto de medidas	12,5%	4,1%	---	---	25,0%	58,3%
G2 – Software Pixton©	Arranjo	8,3%	---	---	---	50%	41,6%
	Combinação	8,3%	---	4,1%	45,8%	33,3%	8,3%
	Permutação	4,1%	12,5%	---	---	58,3%	25,0%
	Produto de medidas	4,1%	---	---	---	37,5%	54,1%
G3 – Sem ensino	Arranjo	83,4%	8,3%	---	---	---	8,3%
	Combinação	66,6%	12,5%	8,3%	---	12,5%	---
	Permutação	66,6%	25%	---	---	8,3%	---
	Produto de medidas	50%	20,8%	8,3%	---	8,3%	12,5%

I: Incorreta; AP I: Acerto Parcial I; AP II: Acerto Parcial II; AP III: Acerto Parcial III; AT: Acerto Total.

Fonte: Gadelha (2020).

Na Figura 10, tem-se um exemplo de como as respostas dos estudantes passaram a ser melhor elaboradas. O estudante enumerou cada possibilidade, de modo que na contagem final dificilmente ocorreriam equívocos. Essa estratégia não foi ensinada durante os momentos de ensino. Portanto, observou-se que, conforme as crianças avançam em seus raciocínios combinatórios, novas estratégias passam a ser formuladas e há uso de representações simbólicas mais adequadas na solução dos problemas.

Figura 10. Resolução de um problema de *combinação* com acertos parciais IV (GE2 – Pixton©) no pós-teste


6- Na Barraca Espaço Drinks há cinco frutas (acerola, caju, laranja, uva e maracujá) e os sucos são preparados misturando duas das frutas.
De quantas maneiras diferentes os sucos podem ser preparados com duas frutas?

Resposta: 1- acerola e laranja 2- Uva e maracujá 3- caju e acerola 4-. maracujá e laranja

Resposta: 1 – acerola e laranja; 2 – uva e maracujá; 3 – caju e acerola; 4 – maracujá e acerola.

Fonte: Gadelha (2020).

Embora tenha listado mais possibilidades do que havia no teste inicial, o estudante não contemplou as dez possibilidades solicitadas. A falta de sistematização pode ter dificultado a percepção das seis que ainda restavam (acerola e uva; caju e laranja; caju e uva; caju e maracujá; laranja e uva; e laranja e maracujá). Avanços foram observados em termos de *escolha* e *ordenação* corretas dos elementos.

Entretanto, alguns estudantes não conseguiram esgotar as possibilidades por não serem sistemáticos em suas soluções, combinando, por exemplo, a fruta acerola com todas as demais e depois o caju com as demais e, assim, sucessivamente.

Dada a questão "*Pati ganhou quatro vestidos (azul, cinza, roxo e preto), e três tipos de calçados (chinelo, sapato e bota). De quantas e quais maneiras diferentes ela poderá se arrumar com um vestido e um tipo de calçado?*", o participante, cuja solução consta na Figura 11, respondeu de maneira semelhante ao anterior (numerando as possibilidades), no entanto, esgotou as possibilidades por ter sido sistemático em sua solução.

Figura 11. Resolução de um problema de *produto de medidas* com acertos parciais IV (GE1 – fichas) no pós-teste

8. vestidos	calçados	
azul	chinelo	1
azul	sapato	2
azul	bota	3
cinza	chinelo	4
cinza	sapato	5
cinza	bota	6
roxo	chinelo	7
roxo	sapato	8
roxo	bota	9
preto	chinelo	10
preto	sapato	11
preto	bota	12

Resposta: vestido azul e chinelo; vestido azul e sapato; vestido azul e bota; vestido cinza e chinelo; vestido cinza e sapato; vestido cinza e bota; vestido roxo e chinelo; vestido roxo e sapato; vestido roxo e bota; vestido preto e chinelo; vestido preto e sapato; vestido preto e bota.

Fonte: Gadelha (2020).

Em contrapartida aos grupos que usaram as fichas e o *software*, o grupo que não participou de nenhum momento de ensino, manteve-se com um número elevado de respostas incorretas. Desse modo, entende-se que o contato com diferentes situações-problema não seja suficiente para que os estudantes desenvolvam aprendizagens, nem mesmo o manuseio de recursos didáticos por si só. O papel do professor em realizar questionamentos sobre os problemas é crucial para auxiliar os estudantes no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE RECURSOS PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Logo de início, foi verificado que poucos estudantes demonstravam alguma noção combinatória em suas respostas. Boa parte das situações-problema foram respondidas incorretamente, por não apresentarem a ideia de possibilidades. Esse tipo de dificuldade ocorreu nos quatro tipos de situações combinatórias.

Os dois recursos didáticos propostos nessa pesquisa se mostraram eficazes para a representação das possibilidades exploradas. As fichas ilustrativas possuíam figuras fixas e pré-definidas, diferente do Pixton©, no qual as ilustrações foram organizadas pelos participantes durante os momentos de ensino. Nenhuma limitação foi percebida ao longo do manuseio dos recursos. As dificuldades se mostraram, inicialmente, pela não associação das ilustrações com as soluções dos problemas. No entanto, mediante alguns questionamentos reflexivos realizados pela pesquisadora, os participantes conseguiram contemplar todas as possibilidades. Desse modo, é destacado que o recurso didático, por si só, não permite ao estudante formular conhecimento, sendo crucial o papel do professor para orientar e questionar o manuseio.

Durante os momentos de ensino, percebeu-se que conforme um dos componentes da dupla passava a compreender melhor os invariantes combinatórios, o outro atentava aos equívocos cometidos por seu colega e enfatizava que era preciso reformular alguma resposta. Portanto, a proposta da atividade a dois se mostrou muito positiva no processo de aprendizagem.

As ilustrações das fichas e do Pixton© também facilitaram a visualização e compreensão das propriedades envolvidas nas diferentes situações combinatórias. A viabilização dos elementos ilustrados, no concreto ou no virtual, contribuiu para que os estudantes compreendessem e refletissem, a partir das perguntas feitas pela pesquisadora, sobre a relação de *escolha* e de *ordenação* dos elementos para que *esgotassem* corretamente as possibilidades.

Mesmo com os avanços já observados nos momentos de ensino, foi realizado um teste final que serviu de parâmetro comparativo com os dados do teste inicial. Os resultados finais mostraram que os grupos que utilizaram os recursos propostos tiveram uma grande melhora em seus desempenhos nos quatro tipos de situações combinatórias, passando a contemplar mais acertos parciais e acertos totais. Diferentemente, o G3, que não participou de sessões de ensino com ilustrações concretas ou virtuais, permaneceu demonstrado um número elevado de respostas sem relação combinatória.

Portanto, pode-se concluir que, além do trabalho em sala de aula com a variedade de situações combinatórias, faz-se necessário o estímulo ao entendimento dos invariantes combinatórios e ao uso de variadas representações simbólicas para que os conceitos sejam apreendidos. Conclui-se, também, que os recursos didáticos são aliados que facilitam a compreensão do conteúdo, mas que requerem a mediação do professor para estimular a aprendizagem.

O objetivo central da pesquisa aqui relatada foi verificar se tanto fichas ilustrativas, quanto o *software* Pixton©, podem contribuir no avanço da compreensão das situações combinatórias. A partir dos resultados positivos obtidos, é sugerido que ambos os recursos sejam utilizados para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BATISTA, Adriana Maria; SPINILLO, Alina. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. *Estudos de Psicologia* (UFRN), v. 13, p. 13-21, 2008.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., Salvador, 2010. *Anais...* Salvador, BA: SBEM/UFRB, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, DF: MEC, 2018.

GADELHA, Dacymere. *Resolução de Problemas Combinatórios nos Anos Iniciais:* uso de material manipulável concreto (fichas) e de material manipulável virtual (Pixton©). 2020. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

GADELHA, Dacymere; BORBA, Rute; MONTENEGRO, Juliana. *Software Pixton©:* uma proposta de um recurso de HQ para a ilustração de possibilidades combinatórias. 2020. No prelo.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. p.105-150. *Zetetiké – Revista de Educação Matemática*, Campinas, SP, v. 17, n. 31, dez., 2009.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita. Resolução de problemas combinatórios a partir de material manipulativo e de lápis e papel: intervenções no 5º ano do ensino fundamental. *Revista Educação Online*, n. 18, p. 1-26, 2015.

PIXTON, C. *A melhor maneira de criar quadrinhos.* Disponível em: https://www.Pixton©.com/br/ Acesso em: 18 fev. 2020.

SANTOS, Hádallan; SILVA, Raíke; LUCENA, Rosilângela. Funções matemáticas em quadrinhos: contextualização com o Pixton. *In:* CONGRESSO INTERNACIONAL DE TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO, 14., 2016, Recife, 2016. *Anais...* Recife, PE: Fecomércio/Sesc/Senac Pernambuco, 2016.

VERGNAUD, Gerard. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In:* BRUM, Jean, (org.) Didáctica das Matemáticas. *Horizontes Pedagógicos*, Lisboa, 1996.

PARTE 3

Propostas de educação inclusiva para a aprendizagem de Combinatória e de Probabilidade

11 Inclusão nas aulas de Matemática: desenvolvendo materiais para a aprendizagem de Combinatória

Flávia Myrella T. Braz
Rute E. de S. Rosa Borba

A INCLUSÃO NAS ESCOLAS

Nas últimas décadas, tem crescido o número de matrículas de estudantes com deficiência nas escolas regulares de Educação Básica, o que é resultado das inúmeras discussões realizadas, nacional e internacionalmente, sobre inclusão, refletindo-se em políticas públicas e diversos documentos que foram elaborados, como a Declaração de Salamanca (UNESCO, 1994), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), o Decreto Legislativo nº 186 (BRASIL, 2008), a Lei de Inclusão da Pessoa com Deficiência (BRASIL, 2015), entre outros. Desse modo, esforços têm sido realizados para se implementar uma educação inclusiva, visto que pode trazer benefícios tanto para a socialização e inclusão das pessoas com deficiências, como para a sociedade em geral.

O aumento do ingresso desses estudantes no ensino regular trouxe a demanda por maiores conhecimentos dos profissionais da educação acerca das especificidades dos mesmos. Causou, também, maior necessidade de recursos que possibilitem a todos os estudantes o acesso ao conhecimento e à construção de aprendizagens, respeitando-se as suas particularidades.

Diversos estudos vêm sendo desenvolvidos a fim de enriquecer as discussões sobre o tema da Educação Inclusiva. Há pesquisas que objetivam auxiliar os professores e a comunidade escolar quanto a métodos e recursos possíveis para o desenvolvimento da inclusão e da aprendizagem dos estudantes com Necessidades Educacionais Específicas (NEE) nas diversas áreas de conhecimento.

Entre as pesquisas voltadas, especificamente, para a Matemática e o estudante com deficiência visual, foco deste capítulo, destacam-se a de Healy e Fernandes (2011), que aborda o ensino e a aprendizagem de Simetria por um aluno com deficiência visual; a de Kaleff *et al.* (2013), referente ao ensino de Área para alunos do Ensino Médio com deficiência visual; e a de Santos e Borba (2019), relativa ao trabalho sobre Probabilidade com um estudante cego. Esses estudos têm em comum o uso de materiais manipuláveis que permitiram aos estudantes a identificação dos elementos estudados, o estabelecimento de relações necessárias à formação dos conceitos tratados e a construção de aprendizagens.

Em relação à *Combinatória*, as pesquisas realizadas por Segadas *et al.* (2015), Araújo e Santos (2019; 2020), além do estudo[1] desenvolvido

---

1 O estudo relatado neste capítulo foi fruto de um Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) de Pedagogia da Universidade Federal de Pernambuco e pode ser conferido na íntegra no blog do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico – Geração, pelo link https://drive.google.com/file/d/1_5Ecmtyk83KCvvFRXg6_JLd_2t6xMGhl/view.

por Braz, Braz e Borba (2014), que será discutido neste capítulo, trazem exemplos de recursos que podem ser utilizados com estudantes cegos e com videntes, numa perspectiva inclusiva.

A partir do exposto, surgem os seguintes questionamentos: como estudantes com deficiência visual podem resolver problemas combinatórios, já que a solução desses pode, muitas vezes, se basear em recursos primordialmente visuais, como é o caso dos quadros e árvores de possibilidades? Que materiais podem auxiliar estudantes cegos e, também, videntes na resolução de tais problemas?

Visando responder tais questionamentos, foram elaborados materiais manipuláveis que possibilitaram a um estudante cego, participante do estudo, resolver problemas combinatórios a partir dos sentidos do tato e do olfato. O estudo realizado por Braz, Braz e Borba (2014) buscou desenvolver materiais que considerassem as especificidades do estudante para possibilitar a identificação de elementos e resolução dos problemas propostos. Embora se relate aqui o uso do material por um deficiente visual, o material pode ser usado também por videntes – em uma proposta inclusiva[2].

Antes de apresentar o estudo desenvolvido, discute-se, nas duas próximas seções, a construção de conceitos, em particular os referentes à *Combinatória*.

A CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS POR PESSOAS COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Diante das especificidades próprias dos estudantes com deficiência visual, e compreendendo-se que a educação deve estar pautada na

2 Encontra-se em andamento um estudo de mestrado que busca discutir o uso de material semelhante ao aqui exposto, mas que foi testado a partir da interação de uma criança cega com uma criança vidente.

inclusão de todos no direito de aprender e de conviver em sociedade, bem como na legitimação e valorização das diferenças, faz-se necessário considerar práticas pedagógicas que criem alternativas que proporcionem a todos os estudantes o acesso à informação e à construção de conceitos e conhecimentos. Isso porque a inclusão se faz respeitando-se as semelhanças e particularidades de todos.

A deficiência visual se caracteriza como o comprometimento total ou parcial da visão, podendo se apresentar de duas formas: cegueira ou baixa visão. Como pessoa cega, entende-se aquela que possui a perda completa da visão, ou, ainda, que possua resíduos mínimos que lhe permitam ver vultos ou perceber alguma luminosidade (BRASIL, 2013). Pedagogicamente, é o estudante que necessitará do Braille para a escrita e a leitura, além de outros recursos e metodologias que possibilitem seu aprendizado. Já a pessoa com baixa visão, é capaz de ler impressos à tinta com fonte ampliada ou com o apoio de instrumentos ópticos específicos que possibilitem sua visualização.

É importante frisar que a ausência ou o comprometimento parcial do sentido da visão não impossibilita a aprendizagem, visto que, como apontam Vygotski (1997), Healy e Fernandes (2011) e Lira e Brandão (2013), a pessoa com deficiência visual pode construir conceitos a partir dos demais sentidos, como o tato, o olfato e a audição, pois estes também são canais para a obtenção de informações e para o estabelecimento de relações para a construção de conhecimento. Nesse aspecto, ressalta-se a importância do professor e sua intencionalidade pedagógica na adaptação ou construção de recursos que possibilitem ao estudante com deficiência visual o acesso ao conhecimento.

Vygotski (1997), Healy e Fernandes (2011), Santos e Borba (2019) e Santos, Borba e Braz (2020) apontam, ainda, a importância da mediação em processo de ensino, inclusive, com a exploração dos diferentes sentidos com materiais manipuláveis, dos contextos dos problemas tratados e das intervenções realizadas. Ressalta-se, também, a importância da linguagem na construção de conceitos por estudantes cegos, visto que, mais do que sua função comunicativa, ela também contribui para a organização e desenvolvimento do pensamento (VIGOTSKI, 2011). A linguagem e a exploração tátil, segundo Gil (2000), permitem que a pessoa com deficiência visual possa obter as informações necessárias à formação de conceitos, sendo, dessa forma, o sistema háptico, fonador e auditivo, mediadores no processo de aprendizagem (SANTOS; BORBA; BRAZ, 2020).

É importante que, cada vez mais, estudos sejam desenvolvidos como modo de trazer possibilidades de trabalho aos professores da Educação Básica e contribuir para que o estudante com deficiência visual não seja apenas espectador nas aulas, em especial nas de Matemática, mas seja sujeito atuante de sua aprendizagem. Para tal, serão apresentados, a seguir, estudos desenvolvidos voltados para o ensino e a aprendizagem de *Combinatória*.

A COMPREENSÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS POR ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Segundo a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), proposta por Vergnaud (1986), conceitos se desenvolvem em campos conceituais e, nestes, há um conjunto de conteúdos, conceitos e relações e operações de pensamento que contribuem para a construção de um conhecimento. Em conformidade com a referida teoria, Pessoa e Borba (2009) afirmam que conceitos combinatórios são melhor desenvolvidos quando trabalhados de forma conjunta, possibilitando que os estudantes possam estabelecer relações entre os diferentes problemas, compreendendo suas características e invariantes. Braz, Braz e Borba (2014) ressaltam que este trabalho é importante, inclusive, para estudantes cegos.

Estudos específicos sobre a *Combinatória* destacam o caráter visual das resoluções de problemas combinatórios, como é o caso de Pessoa e Borba (2009), que classificaram estratégias utilizadas para a resolução de problemas combinatórios por estudantes do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, como *listagem de possibilidades*, *diagramas*, *desenhos* e *árvores de possibilidades;* Azevedo e Borba (2012), que averiguaram as contribuições do *software* Diagramas de Árbol para a construção de *árvores de possibilidades* na resolução de problemas de *Combinatória*; e Borba e Braz (2012), que investigaram a resolução de problemas combinatórios condicionais em turmas dos 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, sendo também observadas estratégias, como *desenhos*, *algoritmos* e *listagens*, usadas pelos estudantes envolvidos. A partir das estratégias citadas, observa-se como a visão pode ser muito útil para a apreensão das distintas possibilidades enumeradas.

Há estudos específicos visando atender as particularidades dos estudantes com deficiência visual e possibilitar o desenvolvimento dos seus conhecimentos matemáticos, inclusive, em relação à *Combinatória*. Segue-se a breve descrição de algumas pesquisas nas quais foram desenvolvidos materiais para o tratamento de problemas combinatórios por parte de estudantes com deficiências específicas.

Segadas *et al.* (2015) desenvolveram um estudo com estudantes surdos do Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES) e com estudantes cegos e com baixa visão do Instituto Benjamin Constant (IBC), ambas instituições localizadas no Rio de Janeiro. Para auxiliar na diferenciação dos elementos pelos estudantes com deficiência visual foram utilizados materiais com a escrita Braille, fontes em tamanho ampliado, além de diferentes texturas. Os estudantes do 9º ano do IBC solucionaram problemas combinatórios utilizando-se desses materiais texturizados que lhes permitiam a identificação e diferenciação dos elementos e a resolução dos problemas. Nesse trabalho, a mediação dos pesquisadores nas discussões de acertos e erros foi muito importante, levando os estudantes a refletir por intermédio de uma "metodologia de solução" (SEGADAS *et al.*, 2015) e sistematizarem as possibilidades combinatórias solicitadas.

Araújo e Santos (2019; 2020) realizaram trabalhos com uma estudante com deficiência visual do 2º ano do Ensino Médio da rede pública de Pernambuco, partindo da resolução de problemas de *produto cartesiano* (*produto de medidas*) (ARAÚJO; SANTOS, 2019), *arranjo* e *combinação* (ARAÚJO; SANTOS, 2020). Para tanto, também foram desenvolvidos materiais manipuláveis que exploravam diferentes texturas como forma de possibilitar à estudante a diferenciação de seus elementos e a resolução dos problemas. Com o uso dos materiais manipuláveis desenvolvidos, a estudante pôde representar possibilidades, além de generalizar resultados. Quando questionada pelas pesquisadoras, durante a mediação, sobre o número de possibilidades que teria se acrescentasse outro elemento, demonstrou que compreendera as relações envolvidas nos problemas.

As autoras ressaltam a importância do material manipulativo para a construção do conhecimento combinatório através de materiais concretos, mas reconhecem suas limitações ao se pensar em um número maior de possibilidades. Apesar disso, é notável sua contribuição para o desenvolvimento desse tipo de raciocínio. Ressaltam, ainda, a importância da mediação, uma vez que os questionamentos levam às reflexões sobre as relações necessárias para se compreender os problemas e para a construção do conhecimento.

Em suma, os três estudos citados evidenciam a relevância da mediação dos pesquisadores para o aprofundamento das discussões e estabelecimento das relações envolvidas nos problemas. Enfatizam, ainda, que os materiais manipuláveis contribuíram para que os estudantes identificassem e diferenciassem os elementos nas situações-problema, bem como representassem e levantassem possibilidades, permitindo, assim, refletir sobre as que já foram listadas. Tais estudos, assim como o de Kaleff *et al.* (2013), destacam a importância dos materiais concretos para os estudantes se apropriarem de conceitos abstratos.

Na sequência, apresenta-se o estudo do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de Braz, Braz e Borba (2014), referente à resolução de problemas combinatórios por um estudante cego. São discutidos os materiais desenvolvidos, as situações tratadas e os resultados obtidos.

OS PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA, OS MATERIAIS E OS SENTIDOS EXPLORADOS

O estudo foi desenvolvido no ano de 2014, com um estudante do 4º ano de uma escola da rede estadual, localizada na cidade de Recife-PE. O estudante, que era cego congênito, participava das aulas regulares e também era atendido no contraturno pela profissional de Atendimento Educacional Especializado (AEE), sendo esta professora que estava alfabetizando-o na escrita Braille.

Na primeira etapa do estudo foram realizadas entrevistas com as professoras da sala de ensino regular e a do AEE, bem como com a família do estudante, visando conhecer suas especificidades. Na sequência, foram elaborados e experimentados, junto à criança, oito problemas combinatórios (Quadro 1), sendo dois de cada tipo (*permutação, produto de medidas, combinação* e *arranjo*)[3], pensados para a exploração via tato e/ou olfato.

Foram construídos materiais manipuláveis que possibilitassem ao estudante identificar os elementos das situações-problema e realizar as representações de possibilidades. Para isso, os materiais apoiavam-se nos sentidos do tato e do olfato, além de possuir a escrita Braille em determinados elementos. Ressalta-se que esses materiais foram desenvolvidos de modo que também fossem significativos para estudantes videntes, estimando-se que possam ser utilizados com todos os alunos.

O número de elementos criados com os materiais foi maior que o necessário para a obtenção das respostas corretas, visto que se objetivava que o estudante tivesse certeza de que havia esgotado todas as possibilidades e não se baseasse pelo esgotamento do material. Vale salientar que a profissional de AEE apresentou grandes contribuições, compartilhando seus conhecimentos, sugerindo materiais que pudessem atribuir diferentes texturas e que fossem de fácil reconhecimento pelo aluno, além de participar dos momentos de aplicação junto ao estudante.

A aplicação dos oito problemas combinatórios se deu em três momentos e em todos eles foram exibidos os materiais ao estudante. Inicialmente, pensou-se em realizar quatro problemas no primeiro dia, quatro no segundo e o último dia se destinaria à retomada de problemas que o aluno tivesse tido maiores dificuldades. Porém, problemas estruturais na escola (os alunos foram dispensados antes do horário final por falta d'água) e o fato de o aluno estar mais agitado e disperso em um dos encontros, fizeram com

3 Maiores informações sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios e suas características podem ser encontrados no capítulo introdutório deste livro.

que os problemas fossem aplicados nos três dias. E a discussão dos problemas que o aluno apresentou dificuldades ocorreu no desenvolvimento do trabalho. Os principais resultados serão apresentados a seguir e detalhes dos itens utilizados para a confecção dos materiais manipuláveis podem ser encontrados em Braz, Braz e Borba (2014).

Quadro 1. Problemas elaborados e sentidos explorados com o estudante cego

Situações-problema	Tipo de problema combinatório	Sentido foco[4]
1. Na brincadeira, Carlos e Neto querem estacionar seus carrinhos de brinquedo em três vagas de estacionamento. Os brinquedos são: um carrinho, um caminhãozinho e uma moto. De quantas formas diferentes eles podem estacionar seus carrinhos nas três vagas?	Permutação	Tato
2. Brincando com blocos lógicos, João propôs um desafio para Caio. Disse que o Caio só poderia organizar três blocos (quadrado, triângulo e círculo) de três formas diferentes: quadrado, triângulo e círculo; triângulo, quadrado e círculo... O João está certo? De quantas maneiras diferentes Caio poderia organizar os sólidos?	Permutação	Tato
3. Beto possui três camisas (de botão, lisa e de bolinhas) e duas bermudas (de listras e com cinto). Quantos trajes diferentes ele pode montar?	Produto de medidas	Tato

4 Atribuiu-se o termo “sentido foco” àquele que se pensou como referência para a identificação dos elementos do problema, diferenciação e análise.

Situações-problema	Tipo de problema combinatório	Sentido foco[4]
4. Luíza quer tomar um delicioso sorvete e pode escolher um entre seus sorvetes favoritos (baunilha, abacaxi), na casquinha ou no copinho. De quantas maneiras diferentes Luíza pode montar seu sorvete com apenas um sabor e um recipiente?	Produto de medidas	Olfato
5. Marina pode escolher duas frutinhas para lanchar. As frutinhas são laranja, goiaba e maçã. De quantas maneiras diferentes Marina pode combinar as frutas para o seu lanche?	Combinação	Olfato
6. Ana, Maria, Beto e Lucas precisam formar trios para realizar um trabalho da escola. De quantas formas diferentes eles podem se organizar em trios?	Combinação	Tato
7. Quero criar uma senha para o meu celular. Quantas senhas de dois algarismos diferentes eu posso formar utilizando os algarismos 1, 2 e 3?	Arranjo	Tato
8. Maria, Ana e Tina estão participando de uma corrida na escola. De quantas maneiras diferentes podemos obter os dois primeiros lugares?	Arranjo	Tato

Fonte: Braz, Braz e Borba (2014).

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS PELO ESTUDANTE CEGO PARTICIPANTE DO ESTUDO

Nesta seção, apresentam-se as principais observações e os resultados extraídos dos momentos com o estudante participante da pesquisa. À medida que cada problema combinatório era apresentado, foram necessárias intervenções específicas, adequações e reorganização das questões, como discutido a seguir.

Nos primeiros problemas apresentados, no caso os Problemas 1 e 2 de *Permutação* (Quadro 1), foram necessárias intervenções por parte das pesquisadoras e da professora de AEE para que o aluno pudesse compreender o que estava sendo solicitado, visto que não possuía familiaridade com os materiais, nem com os problemas combinatórios. Nesse sentido, nas primeiras questões, o estudante necessitou de alguns exemplos de possibilidades possíveis, para que compreendesse o que precisava fazer. Ao apresentar ao estudante alguns exemplos, solicitava-se que ele representasse os demais e verificasse quantas possibilidades seriam encontradas.

Ressalta-se, nesse sentido, a importância da mediação na apresentação das situações-problema como forma de propiciar a compreensão pelo aluno do que está sendo proposto. Ou seja, o diálogo entre o professor e o aluno se faz fundamental. Esse fato vem em consonância com o defendido por Vigotski (2011), Healy e Fernandes (2011) e Santos, Borba e Braz (2020), tendo em vista que apenas os materiais manipuláveis e as situações-problema talvez não tenham sido suficientes para a compreensão e resolução dos problemas propostos por parte do aluno.

Nesse primeiro contato, observaram-se alguns limites quanto à dimensão dos materiais utilizados no Problema 1 (à esquerda na Figura 1) que, apesar de permitirem a fácil diferenciação entre os objetos pelo estudante, ocupavam grande espaço na mesa, dificultando a percepção das possibilidades já listadas e das ainda necessárias. Adaptações foram necessárias no sentido de delimitar as garagens, usando-se tiras de folhas de cartolina guache (papel mais resistente) fixadas à mesa.

No Problema 2 (à direita na Figura 1), apesar dos materiais (figuras geométricas) possuírem um tamanho adequado à manipulação e disposição na mesa de trabalho, foi necessário prendê-los com fita adesiva para que não se misturassem e descaracterizassem as possibilidades já representadas pelo aluno. Durante a resolução desses problemas de *permutação*, percebeu-se a importância de o estudante manusear previamente os materiais, para perceber suas características, estabelecer familiaridades e relacioná-los aos elementos propostos no contexto dos problemas.

Figura 1. Resolução dos Problemas 1 e 2 com materiais manipuláveis

Fonte: Braz, Braz e Borba (2014, p. 11 e 16).

O primeiro contato com o estudante e sua interação com os materiais e as situações-problema também determinou algumas alterações nas questões que seriam realizadas posteriormente, como a redução do número de possibilidades, buscando que não se dispersasse durante as atividades. Isso porque o propósito era entender as diversas relações combinatórias e não se cansar com um número muito elevado de possibilidades a serem enumeradas. Também ocorreu a substituição das personagens nos enunciados de alguns problemas para que o estudante conseguisse, a partir de sua vivência, pensar nas diferentes possibilidades, sendo incluído o próprio estudante, a professora de AEE ou as pesquisadoras nos contextos dos problemas.

Nesses primeiros problemas (de *permutação*), o aluno necessitou bastante do auxílio das pesquisadoras e da professora para compreender o que lhe era solicitado, ou seja, que seria necessário combinar os elementos entre si para obter as possibilidades, estar atento ao que era solicitado para o uso correto dos elementos e que repetições não deveriam ser consideradas. Feitas as adaptações necessárias nos materiais, e com o auxílio das profissionais envolvidas, o estudante foi se familiarizando com os materiais e os problemas apresentados, percebendo que seria necessário combinar os elementos para descobrir o número total de possibilidades.

Os problemas de *produto de medidas* – Problemas 3 e 4 – tinham como objetivo a utilização do tato e do olfato (Figura 2), respectivamente. No caso do Problema 4, com o uso do olfato, os sabores dos sorvetes também estavam escritos em Braille, como forma de auxiliar o estudante, caso não conseguisse identificar os sabores dos sorvetes pelas essências utilizadas com aromas de abacaxi e baunilha. Foram utilizadas folhas de registro de possibilidades com espaços delimitados com velcros e números em alto-relevo.

Figura 2. Resolução dos Problemas 3 e 4 nas folhas de registro

Fonte: Braz, Braz e Borba (2014, p. 17 e 19).

As folhas tinham como objetivo facilitar a fixação dos elementos e representações das possibilidades, como também auxiliar na contagem das possibilidades representadas. No entanto, elas não atenderam aos objetivos a que se propunham, em razão de o estudante buscar os espaços mais próximos a si e não seguir a ordem de organização das representações e numérica, preestabelecidas na folha (à direita na Figura 2). As folhas não possuíam os numerais escritos em Braille, apenas a grafia do número em alto-relevo. O estudante, porém, não conhecia essa escrita numérica. Desse modo, não tomou a numeração como referência e utilizou os espaços além do que fora delimitado, visto que tomou por referência a linha horizontal. No encontro seguinte, as folhas passaram a incluir, além da numeração em alto-relevo, também em Braille, mas, ainda assim, o aluno concentrava suas resoluções nos espaços mais próximos a si.

O uso dos materiais possibilitou que o aluno representasse todas as possibilidades, tanto no Problema 3 (seis possibilidades), quanto no Problema 4 (quatro possibilidades). Porém, foi preciso a mediação das pesquisadoras e da professora de AEE para que ele percebesse os casos de repetições, bem como para localizar e contar as possibilidades encontradas.

Os problemas de *combinação*, assim como os de *produto de medidas*, envolveram os sentidos do olfato (Problema 5) e do tato (Problema 6). A escrita Braille também foi incluída nos elementos do Problema 6, combinando as texturas que diferenciavam as personagens da questão.

No Problema 5, o estudante conseguiu reconhecer com facilidade as frutas por meio do olfato. Em sua resolução, apresentou sistematização ao fixar as laranjas em alguns pratos, mas não percebeu de início que haveria, ainda, uma última possibilidade, sendo necessária a intervenção das pesquisadoras nesse sentido. Foi necessário pedir-lhe que verificasse o que havia sido feito para que, então, ele conseguisse esgotar as três possibilidades possíveis (à esquerda na Figura 3) para o referido problema. Também foi necessária a intervenção quanto às escolhas que seriam necessárias para resolvê-lo, pois, inicialmente, o estudante tentou resolver o problema permutando as três opções de frutas, no lugar de combinar duas delas por vez, como solicitado no problema.

Em relação ao Problema 6 (à direita na Figura 3), o estudante pode diferenciar com facilidade as personagens do problema, através das diferentes texturas que as constituíam, além de poder recorrer, com o suporte da professora de AEE, aos seus nomes escritos em Braille. Também foi disponibilizada a folha de registro para auxiliá-lo a fixar os elementos e organizar as possibilidades representadas. Porém, assim como ocorreu nos problemas de *produto de medidas*, ele não se baseou pela organização da folha, utilizando inicialmente os espaços mais próximos. Mesmo o deixando à vontade para representar as possibilidades nos espaços próximos a si, era preciso ajudá-lo a posicionar os elementos onde os velcros estavam localizados, para que estes não se movimentassem ao toque.

Figura 3. Resolução de problemas de *combinação*

Fonte: Braz, Braz e Borba (2014, p. 20-21).

Com base no exposto, compreende-se que as delimitações de espaços com o intuito de organizar o modo de representar as possibilidades desejadas não foram válidas para o estudante, visto que utilizou os espaços mais próximos a ele. Observa-se, também, que a folha de registro disponibilizada pode aumentar a dependência em relação ao professor, considerando a necessidade do outro para se localizar no espaço delimitado.

O desconhecimento do estudante quanto ao termo "trio" nos indica a importância da elaboração de problemas para contextos familiares ao dos estudantes. Foi preciso explicar-lhe do que se tratava o termo e reapresentar o enunciado substituindo a palavra por "grupo de três".

Nos Problemas 7 e 8, relacionados a *arranjos*, o aluno já se mostrava mais familiarizado com problemas combinatórios, demonstrando maior interesse na resolução. Ele considerava as atividades como um jogo, em que ia passando de fase.

No Problema 7 (à esquerda na Figura 4), também foi disponibilizada uma folha de resposta para o estudante, porém, sem delimitações de ordem de listagem por número e sentidos convencionais. A princípio, foram apresentados os espaços, mas, como em outras situações, ele registrava onde lhe fosse mais confortável, atentando apenas para verificar se já não havia possibilidade representada no espaço desejado.

Ainda no Problema 7, após esgotar as possibilidades (seis), o estudante demonstrou compreender que não havia mais nenhuma, pois afirmou que outras somente seriam possíveis se houvesse repetições de algarismo na mesma senha (por exemplo: 4-4, 5-5 etc.). Assim como ocorreu nas demais atividades, o estudante necessitou de auxílio para localizar e contar as possibilidades que havia listado.

Figura 4. Resolução dos Problemas 7 e 8 de *arranjo*

Fonte: Braz, Braz e Borba (2014, p. 22-23).

No Problema 8 (à direita na Figura 4) foram utilizados os mesmos materiais do Problema 6. Foi observado que disponibilizar grande número de elementos ao estudante o deixava confuso, pois apresentava dúvidas sobre quais já havia, ou não, utilizado. Buscou-se deixar à sua disposição, então, apenas os elementos que poderia utilizar no desenvolvimento de cada possibilidade.

O estudante esgotou todas as possibilidades (seis) e, apesar de demonstrar ter compreendido os invariantes do tipo de questão, considerando-se encerrada aquela questão, desejou partir para uma nova "fase do jogo", acrescentando o 3º lugar às possibilidades criadas. O material se mostrou lúdico e interessante para o estudante, levando-o, inclusive, a solicitar à professora de AEE que realizasse mais atividades como aquelas propostas.

As colocações apresentadas sinalizam a importância das mediações no processo de compreensão e resolução de problemas de *Combinatória*. Nesse sentido, os resultados desse estudo vão na mesma direção dos encontrados por Araújo e Santos (2019; 2020) e por Segadas *et al.* (2015), referentes à relevância da mediação dos pesquisadores e professores no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes cegos.

IMPLICAÇÕES PARA O USO EM PERSPECTIVA INCLUSIVA DO MATERIAL DESENVOLVIDO

As atividades realizadas neste estudo, em consonância com Segadas *et al.* (2015) e Araújo e Santos (2019; 2020), indicam que estudantes com deficiência visual, a exemplo do aluno participante da pesquisa, podem compreender e resolver situações-problema de *Combinatória*, independentemente de sua especificidade. As atividades combinatórias podem se apresentar de uma forma mais contextualizada para os estudantes, inicialmente com número reduzido de possibilidades e com uso de materiais manipuláveis, e, no decorrer da escolarização, ir se tornando mais complexas e abstratas.

Os materiais manipuláveis desenvolvidos neste estudo possibilitaram ao estudante cego a identificação e diferenciação dos elementos presentes nas questões, possibilitando a escolha, ordenação e representação de possibilidades dos problemas propostos. Apresentaram-se lúdicos e dinâmicos, despertando o interesse do estudante ao ponto de considerar as atividades como um jogo em que ia "passando de nível". Nesse sentido, os materiais manipuláveis são ótimos recursos pedagógicos para serem usados em sala de aula, uma vez que auxiliam na construção de conhecimentos abstratos a partir do concreto (KALEFF *et al.*, 2013).

Mostrou-se importante, também, proporcionar que o estudante explore previamente os materiais manipuláveis, reconhecendo suas características, estabelecendo relações com o que conhece e com os elementos do problema proposto. No entanto, é preciso estar atento ao seu tamanho, à distribuição que tomará no espaço ao organizar o total de possibilidades e ao local onde serão organizados para a representação de possibilidades, visto que o estudante cego pode se utilizar de espaços mais próximos a si. Assim, não é necessário delimitar espaços específicos para induzir o posicionamento das possibilidades, deixando o estudante à vontade para posicioná-las do modo que preferir.

É importante, porém, disponibilizar materiais que impeçam que as possibilidades formadas deslizem ao serem tocadas. O estudo de mestrado em andamento, em continuidade ao aqui relatado, vem utilizando o feltro, por exemplo, para proporcionar esse atrito, acrescido da parte mais rígida dos velcros fixada ao verso dos materiais, impedindo que os elementos deslizem com facilidade. Desse modo, o uso do feltro na mesa e velcros no verso dos materiais tem se mostrado eficaz a esse problema.

Durante a aplicação dos problemas, percebeu-se a necessidade de se reduzir e alterar os nomes dos personagens nos enunciados das questões para maior compreensão das possibilidades pelo estudante. Utilizar os nomes dos colegas de turma em situações hipotéticas pode ajudar, pois o fato da deficiência visual ser congênita ou adquirida, assim como experiências escolares e cotidianas, podem influenciar na forma como os estudantes compreendem e resolvem problemas de *Combinatória*. Os materiais e problemas propostos neste estudo se caracterizam como sugestões, visando inspirar o professor, que pode adaptá-los de acordo com sua realidade e especificidades de seus alunos.

Ressalta-se, ainda, a relevância da mediação para a compreensão de alguns problemas, assim como também apontado nos estudos realizados por Segadas *et al.* (2015) e Araújo e Santos (2019; 2020). Compreende-se, dessa forma, a importância da linguagem (VIGOTSKI, 2011), dos materiais atrelados às experiências táteis (GIL, 2000) e outras experiências sensoriais, como a olfativa, e do contexto das atividades para a compreensão e desenvolvimento do pensamento combinatório dos estudantes cegos.

Com o estudo apresentado, espera-se contribuir com as discussões voltadas à Educação Inclusiva no âmbito acadêmico e formativo, uma vez que os materiais foram desenvolvidos para serem interessantes e significativos para alunos cegos e videntes, podendo ser utilizados pelos professores em sala de aula, por profissionais de AEE e por pesquisadores. Particularmente, espera-se favorecer a aprendizagem de *Combinatória* de estudantes cegos em escolas regulares, possibilitando-lhes acesso ao conhecimento e uma perspectiva voltada para a sua inclusão.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Gerlaine; SANTOS, Jaqueline. Materiais manipuláveis: recurso para a resolução de problemas de produto cartesiano por uma aluna com deficiência visual. *Educação matemática em revista – RS*, v. 20, n. 20, p. 157-162, 2019.

ARAÚJO, Gerlaine; SANTOS, Jaqueline. "Eles me ajudam a não esquecer o que coloquei": o uso de materiais manipuláveis na resolução de problemas de arranjo e combinação por uma aluna com deficiência visual. *Educação matemática em revista*, Brasília, v. 25, n. 66, p. 26-38, jan./mar., 2020.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. O ensino da Combinatória por meio da Construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. *In:* ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 16., 2012, Canoas. *Anais...* Canoas, RS: ULBRA, 2012.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais. *In:* SIMPÓSIO INTERNACIONAL

DE PESQUISA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. *Anais*... Fortaleza, CE: UNI7, 2012.

BRASIL. *Lei nº 9394/96*, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília, DF: Presidência da República, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. *Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva*. Brasília, DF: MEC, 2008.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas Estratégicas. *Diretrizes de Atenção à Saúde Ocular na Infância*: detecção e intervenção precoce para prevenção de deficiências visuais. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2013.

BRASIL. Lei nº 13.146, de 06 de julho de 2015. Lei brasileira de inclusão da pessoa com deficiência. *Diário oficial da União*, Brasília, DF, 07 jul. 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm.

BRAZ, Flávia M. T.; BRAZ, Ana L.; BORBA, Rute E. S. R. *Educação inclusiva de alunos com deficiência visual:* desenvolvimento de materiais manipulativos para o ensino de combinatória. 2014. 26 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Pedagogia) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0ByUlyzknmdPLYnVWbUVjRmJLams/view. Acesso em: 20.10.2020.

GIL, Marta. *Deficiência visual*. Brasília: MEC/SEED, 2000.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange H. A. A. Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. *Educar em revista*, Curitiba, n. Especial 1, p. 227-243, 2011.

KALEFF, Ana; ROSA, Fernanda; OLIVEIRA, Matheus; OHANNA, Mourão. Dois experimentos educacionais para o ensino de áreas para alunos com deficiência visual. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba. *Anais*... Curitiba, PR: SBEM/PUCPR, 2013.

LIRA, Ana; BRANDÃO, Jorge. *Matemática e deficiência visual.* Fortaleza: Edições UFC, 2013.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. *Quem dança com quem:* o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetike* (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009.

SANTOS, Jaqueline; BORBA, Rute. Relações entre ferramentas materiais e mediação na construção de conhecimento probabilístico de um estudante cego. *In:* CONGRESSO INTERNACIONAL VIRTUAL DE EDUACIÓN ESTADISTICA, 3., Rio Claro. *Anais*... Rio Claro, SP: UNESP, 2019.

SANTOS, Jaqueline; BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. Materiais inclusivos para o ensino e a aprendizagem de combinatória e de probabilidade. *In:* CARDOSO, Aureo Vandré (org.). *Práticas de Educação Inclusiva*: compartilhando experiências e saberes. Bento Gonçalves, RS: Sermo, 2020.

SEGADAS, Cláudia; BERNARDO, Fábio; MOREIRA, Júlio; BARBOSA, Paula; GARCEZ, Wagner. Introduzindo a análise combinatória no Ensino Fundamental com adaptações para deficientes visuais e surdos. *In:* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., Pirenópolis. *Anais*... Pirenópolis, GO: SBEM, 2015.

UNESCO. *Declaração de Salamanca e Enquadramento da Ação na Área das Necessidades Educativas Especiais*. Salamanca/Espanha: UNESCO, 1994.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáticas das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análises Psicológicas*, 1, 1986, p. 75-90.

VYGOTSKI. Lev. *Obras escogidas V.* Fundamentos da defectología. Tradução de J. G. Blank. Madrid: Visor, 1997.

VIGOTSKI. Lev. A Defectologia e o Estudo do Desenvolvimento e da Educação da Criança Anormal. *Educação e Pesquisa,* São Paulo, v. 37, n. 4, p. 861-870, 2011.

12 A compreensão de probabilidade por um estudante cego: possibilidades para um ensino inclusivo

Jaqueline A. F. Lixandrão Santos
Rute E. de S. Rosa Borba

IMPORTÂNCIA DO ENSINO DA PROBABILIDADE PARA TODOS

A probabilidade faz parte do currículo escolar e, também, se faz muito presente no cotidiano das pessoas. Situações como a de analisar as chances de algo ocorrer e fazer escolhas com base nessas chances – seja no contexto pessoal ou profissional – estão bem presentes nas nossas vidas. Apesar da presença cotidiana da probabilidade, dificuldades relacionadas à sua compreensão são apresentadas por muitas crianças e muitos adultos (BRYANT; NUNES, 2012). Algumas possíveis explicações são colocadas a respeito dessas dificuldades, como sua tardia inserção nos currículos do Ensino Fundamental, as metodologias utilizadas no seu desenvolvimento escolar, a falta de articulação entre os problemas cotidianos e os escolares, entre outras.

Entre as justificativas das dificuldades com a probabilidade, destacamos, também, o conteúdo e as orientações apresentadas nos Livros Didáticos – um dos principais suportes utilizados pelo professor no processo de ensino em sala de aula. O estudo realizado por Santana, Fernandes e Borba (2020) evidenciou que os Livros Didáticos deveriam orientar que a aprendizagem da probabilidade parta de noções de aleatoriedade, estimular que se realize o levantamento dos resultados de experimentos aleatórios e incentivar a avaliação de probabilidades. Tais orientações são importantes e os autores ressaltam, ainda, que:

> [...] se espera que os livros didáticos apresentem tarefas que favoreçam desde a compreensão de situações que envolvam a aleatoriedade a situações de riscos e apresentando uma maior diversidade de abordagens em relação aos contextos das tarefas (SANTANA; FERNANDES; BORBA, 2020, p. 260).

Algumas pesquisas indicam possibilidades para o ensino de probabilidade, como a de Santos (2015) que ressalta que a articulação entre a Combinatória e Probabilidade possibilita a aprendizagem com compreensão. A autora destaca, ainda, que “para que os alunos desenvolvam conceitos sobre probabilidade e consigam adequá-los a diferentes contextos, é necessário que eles sejam estudados na escola em uma dinâmica adequada” (SANTOS, 2015, p. 166).

O estudo de Silva (2016), com estudantes dos anos iniciais (descrito no Capítulo 7 desse e-book) indicou que, em situações de jogo, podem emergir conceitos de probabilidade, mas ressalta a necessidade de instrução adequada para que conceitos probabilísticos coerentes sejam construídos. Semelhantemente, por meio de situações-problema e jogos, a pesquisa de Santos (2010), com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, mostrou que em um processo de comunicação dialógica conceitos probabilísticos emergem e são ressignificados.

Percebemos, ao longo dos anos que estudamos probabilidade, que poucos estudos envolviam o ensino de pessoas com deficiência. Diante dessa observação e da importância da compreensão da probabilidade – pois é utilizada em tomadas de decisão, na compreensão da realidade, na formação do pensamento crítico, entre outras habilidades – surgiu o interesse de desenvolver estudos com estudantes com deficiência visual.

Na sequência, apresentamos alguns apontamentos sobre o ensino da pessoa com deficiência visual.

A APRENDIZAGEM DA PESSOA COM DEFICIÊNCIA VISUAL

Nos últimos anos, percebemos o aumento no número de pesquisas relacionadas à Educação Matemática Inclusiva. Para este trabalho, destacamos os estudos de Vygotski (1997), Fernandes e Healy (2008), Healy e Fernandes (2011), Marcone (2015), Vita, Magina e Cazorla (2015) e Santos e Borba (2019a).

As pesquisas nos trazem informações importantes ao proporcionarem diferentes olhares, inclusive às normativas, como a apontada por Marcone (2015, p. 30) que considera a deficiência como “uma invenção tendo um ideal de normalidade como parâmetro, muitas vezes imposto por violências simbólicas”. O referido autor pensa na deficiência como experiência, “como um lugar por onde todos estão sujeitos a passar, não uma condição a priori” (MARCONE, 2015, p. 30). Esse fato reforça a importância da inclusão em escolas de ensino regular, uma vez que cada pessoa é um ser singular e a escola deve ser um espaço de convivência e de aprendizagem com as diferenças.

Os estudos de Vygotski (1997) trazem informações importantes sobre a aprendizagem dos estudantes com deficiência. Para o estudioso, são as implicações sociais e culturais que determinam a individualidade das crianças, não a deficiência. Assim, o problema não é biológico, mas social. Ele afirma, ainda, que o desejo de superação impulsiona a pessoa com deficiência e, consequentemente, a desenvolve. O autor também faz críticas quanto aos parâmetros de análise de desenvolvimento quantitativo das pessoas com deficiência. Segundo ele, a avaliação deve se pautar nas peculiaridades qualitativas do desenvolvimento e não na mensuração quantitativa, que, de certo modo, indica a medida de incapacidade.

Para Vygotski (1997), a deficiência sensorial, a falta de um sentido, não é um empecilho para a aprendizagem escolar, mas o uso de formas inadequadas de ensino, sim, é impedimento para que se dê a aprendizagem. Ele coloca que a relação do homem com o mundo não é direta, mas mediada e complexa. A linguagem, segundo o pesquisador, tem função mais ampla que a comunicação, envolve a organização e desenvolvimento dos processos de pensamento, que são mediados por instrumentos e signos. Desse modo, indica que o trabalho pedagógico deve explorar diversos sentidos.

Fernandes e Healy (2008) e Healy e Fernandes (2011) destacam em seus estudos que o tato pode contribuir mais com a aprendizagem dos estudantes cegos que dos videntes, pois a manipulação de ferramentas materiais de forma parcelada e gradual favorece a identificação de propriedades matemáticas que podem estar ocultas quando apenas se visualiza o todo. Elas também observaram que na realização de atividades matemáticas com o uso de ferramentas materiais, os estudantes cegos não conseguem copiar diretamente gestos e estratégias utilizadas pelos colegas videntes, mas a comunicação entre eles possibilita que sejam compreendidas e processadas na resolução de problemas matemáticos. Essa compreensão também ajuda o estudante cego no desenvolvimento de formas de organizar as informações em diversas situações.

Quanto ao uso de materiais específicos de ensino, em proposta inclusiva relacionada à probabilidade para estudantes cegos, Vita, Magina e Cazorla (2015) observaram o desenvolvimento de conhecimentos probabilísticos a partir de uma maquete tátil por estudantes cegos. Nessa direção, em estudo anterior, constatamos que "os estudantes cegos podem desenvolver conceitos sobre probabilidade, [...], quando inseridos em um contexto dialógico, mediado por situações de ensino e ferramentas materiais adequadas" (SANTOS; BORBA, 2019a, p. 9).

Desse modo, pautados nas pesquisas apresentadas e no estudo anterior (SANTOS; BORBA, 2019a), apresentamos neste texto uma proposta de intervenção para aprofundamento de questões anteriormente tratadas.

A ORGANIZAÇÃO DO NOSSO ESTUDO: ALGUMAS INFORMAÇÕES

A investigação que expomos neste texto faz parte de um estudo que tinha por objetivo analisar a compreensão de demandas cognitivas da probabilidade (apresentadas no capítulo introdutório deste livro) por um estudante dos anos finais do Ensino Fundamental. O estudo foi realizado com Guilherme[1], um jovem de 16 anos, cego congênito, estudante de uma escola pública de ensino regular da cidade de Caruaru/PE. O estudo dividiu-se em dois momentos, descritos a seguir.

1 Nome fictício adotado para preservar a identidade do estudante.

A escola, na qual o estudo se desenvolveu, possui uma professora de Braille que em alguns dias da semana auxiliava Guilherme, bem como outros alunos cegos e com baixa visão, na realização de algumas atividades. A professora também ajudava os professores da sala de ensino regular na transcrição de alguns textos para Braille, na aplicação de avaliações, entre outras coisas. Na sala de aula, Guilherme participa habitualmente como ouvinte, utiliza o soroban[2], quando considera necessário, e reglete[3], para algumas anotações. Ele apresenta bom desempenho escolar, principalmente, nas aulas de Matemática. Desde a infância, Guilherme frequenta escola pública regular e salas de recursos multifuncionais, onde aprendeu Braille. O aluno possui aparelho celular e, por meio de aplicativos, utiliza os recursos como redes sociais e jogos, como os demais jovens de sua idade.

No estudo foram propostas seis situações-problema em dois momentos diferentes de ensino, a primeira no 2º semestre de 2018 e a segunda no 2º semestre de 2019. Nesses períodos, o estudante cursava, respectivamente, o 7º e o 8º ano do Ensino Fundamental. As atividades foram elaboradas com base nas demandas cognitivas apresentadas por Bryant e Nunes (2012): a *compreensão da aleatoriedade*, a *formação de espaço amostral*, a *quantificação e comparação de probabilidades* e o *entendimento da correlação entre eventos* – sendo essas demandas essenciais para a construção de conhecimentos sobre probabilidade.

Visando contribuir com a construção de representações mentais das situações-problema pelo estudante cego, organizamos ferramentas materiais que possuíam características multimodais e

2 Instrumento utilizado para realizar operações matemáticas.

3 Instrumento de escrita manual do Braille.

multissensoriais[4]. A proposta era que, a partir do contato com as ferramentas materiais, o estudante pudesse construir simulações imaginativas, não apenas para construir o espaço amostral, mas também para refletir sobre as probabilidades envolvidas nas situações.

Tendo em vista que os estudos relacionados à formação de conceitos indicam que a percepção tátil pode suprir a falta da visão, ao elaborar as situações-problema, buscamos contextos nos quais pudéssemos abordar as seguintes demandas e, também, que possibilitassem a construção de ferramentas materiais adequadas ao trabalho com deficientes visuais:

- A *compreensão da aleatoriedade*: entender a natureza de situações aleatórias, consequências e usos da aleatoriedade na vida cotidiana;
- A *formação do espaço amostral*: analisar/reconhecer o espaço amostral, ou seja, o conjunto de todos os eventos possíveis, antes de calcular probabilidades;
- A *quantificação de probabilidades*: calcular probabilidades de eventos, por meio de representação decimal, em forma de frações ou taxa percentual;
- A *comparação de probabilidades*: comparar probabilidades de dois ou mais eventos e identificar qual possui maior probabilidade.

A partir dessas demandas, elaboramos nosso estudo, cujos momentos detalhamos na sequência.

---

4 "[...] Representação de ideias matemáticas por meio de cores, sons, músicas, movimentos e texturas destinadas a impressionar diferentes canais sensoriais como, por exemplo, a pele, o ouvido e os olhos" (FERNANDES, 2017, p. 87).

PRIMEIRO MOMENTO DO ESTUDO: DIVERSAS DESCOBERTAS

No primeiro momento do nosso estudo, em 2018, elaboramos uma lista com quatro situações-problema que foram apresentadas oralmente pela pesquisadora a Guilherme. Além da apresentação oral, foram apresentadas as ferramentas materiais que poderiam auxiliar o estudante na resolução das situações. No Quadro 1, apresentamos as quatro situações-problema propostas, as demandas envolvidas e a descrição das ferramentas materiais utilizadas em cada situação. E, na Figura 1, mostramos imagem das ferramentas materiais usadas.

Quadro 1. Situações problema: primeiro momento – 2018

1. Colocando uma mini bola de basquete e uma de futebol em um saco, dá para tirar, usando uma luva, de modo que não perceba a diferença entre as bolas, uma bola de basquete? E uma de futebol? Dá para ter certeza qual será retirada? Qual você pensa ser a mais provável (ou tem mais chances) de sair?

Demanda: Aleatoriedade
Ferramenta material: uma mini bola de basquete, uma de futebol, um saco de tecido e luvas.

2. Com duas mini bolas de basquete e uma de futebol em um saco, qual a probabilidade de tirar ao acaso uma bola de basquete? E qual a probabilidade de tirar uma de futebol?

Demanda: Quantificação de probabilidades
Ferramenta material: duas mini bolas de basquete, uma de futebol e um saco de tecido.

3. Na vitrine de uma loja de esportes há alguns recipientes com mini bolas de basquete e de futebol. Analise as bolas que há em cada recipiente.
Recipiente 1: uma mini bola de basquete e uma de futebol;
Recipiente 2: duas mini bolas de basquete e duas de futebol;
Recipiente 3: uma mini bola de basquete e duas de futebol;
Recipiente 4: uma mini bola de basquete e uma de futebol.

a. Suponha que você fosse retirar, sem identificar, uma bola do Recipiente 3. Qual bola provavelmente você iria retirar? Por quê?
b. De qual recipiente seria mais provável retirar uma bola de futebol? Justifique sua resposta. c. Seria mais fácil retirar uma bola de basquete do Recipiente 1 ou do Recipiente 2? Explique o porquê de sua resposta.

Demanda: Comparação de probabilidades
Ferramenta material: recipientes, mini bolas de basquete e de futebol.

4. Se tiver duas meninas, Ana e Bia, e dois meninos, Carlos e Daniel, participando de uma brincadeira e dois deles forem escolhidos, ao acaso, para iniciá-la, é mais provável que sejam duas meninas, dois meninos ou uma menina e um menino? Pensando nesta situação, analise as frases a seguir e classifique-as como verdadeiras ou falsas:
(a) É mais provável saírem duas meninas.
(b) É mais provável saírem dois meninos.
(c) É mais provável sair uma menina e um menino.
(d) Há mesma chance de sair duas meninas que sair dois meninos.
(e) Há mesma chance de sair duas meninas que sair uma menina e um menino.
(f) Há mesma chance de sair dois meninos que sair uma menina e um menino.

Demanda: Espaço amostral e comparação de probabilidades
Ferramenta material: círculos representando as meninas e quadrado os meninos. Ambas as formas possuíam cortes para diferenciar uma criança da outra. Um dos círculos tinha uma abertura, como uma fatia de pizza retirada e um dos quadrados, uma abertura que lembrava uma bandeira de festa junina.

Fonte: Adaptado de Santos e Borba (2019a).

No início da resolução de cada situação-problema, as ferramentas materiais eram apresentadas e exploradas pelo estudante. Além disso, um diálogo era proposto, buscando compreender se Guilherme identificava as características dos materiais, suas semelhanças e diferenças, para, então, iniciar a resolução de cada uma das situações-problema, que foram resolvidas na sequência disposta no Quadro 1.

Figura 1. Ferramentas mediadoras: primeiro momento do estudo

Fonte: Santos e Borba (2019a).

A primeira situação-problema tinha como objetivo verificar se Guilherme entendia a natureza da situação, se compreendia que se tratava de uma situação aleatória, na qual se tem ideia dos possíveis resultados, mas não se tem a certeza de qual será. As ferramentas materiais (uma mini bola de basquete, uma de futebol, um saco de tecido e luvas) foram facilmente identificadas por Guilherme. Como mencionado, as situações-problema foram apresentadas oralmente ao estudante e, a partir de sua apresentação, diálogos eram estabelecidos entre a pesquisadora e o estudante. Na sequência, apresentamos trechos do diálogo que tratou especificamente da situação proposta (Quadro 2).

Quadro 2. Transcrição: Situação-problema 1 – Aleatoriedade

P[5]: Colocando uma mini bola de basquete e uma de futebol em um saco, dá para tirar, usando uma luva, de modo que não perceba a diferença entre as bolas, uma bola de basquete? G[6]: Dá. P: E uma de futebol? G: Dá. P: Dá para ter certeza qual será retirada? G: Certeza, não. P: Qual você pensa ser a mais provável de sair? G: Não sei, qualquer uma das duas. P: Por quê? G: Não vou ter noção exata do que é, não estou sentindo a textura.

Fonte: Santos e Borba (2019a).

Mesmo não utilizando uma justificativa pautada em análises matemáticas de probabilidade – como as chances são as mesmas porque tem duas possibilidades: uma bola de basquete e uma de futebol –, mas uma explicação baseada em sua vivência, "não estou sentindo a textura", de maneira geral, as colocações de Guilherme indicam que ele compreendia que a situação é aleatória e que o resultado é imprevisível.

Na segunda situação-problema tínhamos como foco a demanda *quantificação de probabilidades* e as ferramentas materiais eram as mesmas que as anteriores, apenas aumentou uma mini bola de basquete. Assim, com duas mini bolas de basquete e uma de futebol, de maneira diferente da anterior, tínhamos um evento não equiprovável. Guilherme já conhecia as ferramentas materiais, mesmo

5 Pesquisadora.
6 Guilherme.

assim, antes de iniciar, a pesquisadora pediu para que colocasse a mão no saco e dissesse quais e quantas mini bolas haviam no saco. O objetivo com essa ação era que ele identificasse os elementos do espaço amostral disponíveis para depois quantificar as probabilidades. Segue-se diálogo transcorrido quanto à quantificação de probabilidades na situação proposta (Quadro 3).

Quadro 3. Transcrição: Situação-problema 2 – Quantificação de probabilidades

P: Quantas bolas têm dentro do saco?
G: Três.
P: Quantas de basquete?
G: Duas.
P: Quantas de futebol?
G: Uma.
P: Qual delas você acha que tem mais chances de ser sorteada?
G: A de basquete.
P: Por quê?
G: Tem mais bolas.
P: Qual a probabilidade de tirar ao acaso uma bola de basquete?
G: De quantos por cento seria?
P: Pode ser.
G: Talvez, sessenta e pouco por cento.
P: Como você chegou a esse número?
G: Eu fiz 33 vezes três.
P: E qual a probabilidade de tirar uma de futebol?
G: Trinta e três por cento.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Os questionamentos realizados pela pesquisadora foram importantes para que Guilherme identificasse os elementos do espaço amostral. Essa identificação foi fundamental para a quantificação do espaço amostral pelo aluno e para que a pesquisadora soubesse se essa demanda era compreendida por ele. As respostas apresentadas pelo estudante indicam que ele identificou a relação entre parte e todo, como extrair taxas percentuais e seu uso ao determinar probabilidades.

A terceira situação-problema envolvia a *comparação de probabilidades*. Para resolver essa situação era preciso analisar o espaço amostral e quantificar as probabilidades dos eventos, para então, compará-las. Quatro recipientes de plástico e as mini bolas de basquete e de futebol, utilizadas nas situações anteriores, foram usadas novamente, porém em maior quantidade. Depois da identificação do material por parte do aluno e da organização das minibolas nos respectivos recipientes, a pesquisadora iniciou um diálogo, que descrevemos na sequência (Quadro 4).

Quadro 4. Transcrição: Situação-problema 3 – Comparação de probabilidades

P: Suponha que você fosse retirar, sem identificar, uma bola do Recipiente 3. Qual bola provavelmente você iria retirar?
G: Acho que essa.

Guilherme mostrou a de futebol.

P: Por quê?
G: Está em maior quantidade.
P: Entre todos os recipientes que temos, de qual é mais provável retirar uma bola de futebol?

O aluno tateou o primeiro recipiente e disse:

G: Neste daqui eu acho que a probabilidade é igual, tem duas bolas, uma de cada.
P: E no segundo recipiente?
G: Neste daqui também é igual, por que tem duas bolas, duas iguais e duas diferentes. [Se referia às duas de basquete e às duas de futebol].
P: E no terceiro recipiente?

G: A probabilidade é maior neste, porque tem duas de futebol e um de basquete.
P: E neste último recipiente?

O aluno tateou o Recipiente 4 e voltou a tatear o 3 e disse:

G: O maior é aqui. [Se referia ao 3].
P: Por quê?
G: Por que tem três bolas e duas são de futebol.
P: Se você fosse retirar apenas uma bola, sem identificá-la, seria mais fácil retirar uma bola de basquetebol do Recipiente 1 ou do Recipiente 2?
G: A mesma, a probabilidade é a mesma.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As ações de Guilherme na resolução do problema indicam que ele identificou os elementos do espaço amostral para estimar as probabilidades de cada evento, mesmo que não as expressasse verbalmente, para, então, comparar as probabilidades. As ações também indicam a importância das ferramentas materiais para a compreensão do problema pelo aluno e criação de estratégias de resolução.

A Situação-problema 4 envolvia ferramentas materiais diferentes das utilizadas anteriormente e, mesmo a pesquisadora tendo utilizado a estratégia de apresentação como nos problemas anteriores, Guilherme demonstrou dificuldade ao realizar a última atividade, como se pode observar na transcrição do Quadro 5.

Quadro 5. Transcrição: Situação-problema 4 – Espaço amostral e comparação de probabilidades (continua)

P: Haverá uma brincadeira e serão escolhidas aleatoriamente entre quatro crianças, duas para iniciá-la. É mais provável que essa dupla seja formada por duas meninas, dois meninos ou uma menina e um menino?

G: Duas meninas.
P: Por quê?
G: Estão uma do lado da outra.

Os materiais representando as quatro crianças estavam dispostos na mesa, sendo que as que representavam as meninas estavam uma do lado da outra.

P: As pessoas não vão escolher porque elas estão próximas, é como se colocasse o nome dos quatro alunos em um saco e sorteassem dois ao acaso.

O aluno ficou tateando os materiais por um tempo, a pesquisadora percebeu que não estava conseguindo organizar as duplas com os materiais que dispunha. Resolveu então, ajudá-lo com isso.

P: Fale-me uma possibilidade de formar uma dupla entre as crianças que você tem.
G: Um menino e uma menina.
P: Então, selecione uma menina e um menino entre os materiais para organizarmos a dupla.

Ele fez o que a pesquisadora sugeriu.

P: OK, então, essa dupla seria formada por Bia e Daniel. Vamos pensar em outras.
G: Esses dois.
P: Certo, a Ana e o Carlos.

Até esse momento, Guilherme formou duas duplas com os quatro elementos que possuía. A pesquisadora percebeu que ele não estava pensando na permuta entre esses elementos e fez um questionamento:

P: Um desses dois (Carlos e Ana) poderia formar dupla com outra pessoa, por exemplo, a Ana poderia fazer dupla com quem mais?
G: Não.
P: Não? A Ana não poderia formar dupla com a Bia?
G: Poderia
P: Então, vamos formar essa dupla com os materiais. Tem outras duplas que podemos formar?
G: Tem.
P: Qual?

O aluno tateou os materiais com as duplas já formadas e pegou duas peças que representava a Ana, indicando uma nova dupla.

P: É possível formar uma dupla com as mesmas pessoas?
G: Não.

Neste momento a pesquisadora percebeu que precisava retomar oralmente as duplas já formadas, pois os materiais não estavam sendo suficientes para resolver a questão.

P: As duplas que você já formou foram: Ana e Bia, Ana e Carlos, Bia e Daniel. Vamos focar em uma criança, por exemplo, a Ana já formou dupla com Bia e com Carlos, ela poderia formar dupla com outra criança?
G: Ela formou com Carlos?
P: Sim.

Guilherme ficou manuseando os materiais e disse que seria com Daniel.

P: Ela poderia formar dupla com mais alguém ou já formou com todos?
G: Formou com todos.
P: Vamos pensar na Bia agora, ela formou dupla com a Ana somente. Ela pode formar com outras crianças?
G: Sim, com Carlos.
P: Ela pode ainda formar com outra criança?

Guilherme tateou o material com as duplas já formadas e um pouco indeciso disse:

G: Não sei.

A pesquisadora conduziu sua mão para que tateasse as duplas já formadas, ao mesmo tempo em que ia dizendo o nome das duplas.

P: Bia formou dupla com Ana, com Carlos e com Daniel. Teria mais alguém?
G: Não.
P: Vamos pensar no Carlos?

A pesquisadora repetiu o procedimento anterior, conduziu o tateamento e falou o nome das duplas já formadas por Carlos.

G: Com Daniel.

A pesquisadora entregou a ele os materiais que formaria essa dupla

P: Vamos agora pensar no Daniel.

De forma semelhante às situações anteriores, a pesquisadora o ajudou com a retomada das duplas já formadas com Daniel.

P: Tem mais alguém que ele poderia formar dupla?
G: Não.
P: Tem mais alguma dupla para ser formada?
G: Não.
P: Então, vamos relembrar todas as duplas que formamos e contá-las.

Guilherme tateou as duplas formadas, mas se esqueceu de uma que havia colocado no canto direito. A pesquisadora lhe entregou.

P: Retomando a pergunta inicial: é mais provável que essa dupla seja formada por duas meninas, dois meninos ou um menino e uma menina?
G: Um menino e uma menina.
P: Por quê?
G: Tem mais duplas formadas por um menino e uma menina.
P: Você consegue estimar essa probabilidade?
G: Todos que estão aqui são 100 por cento?
P: Sim. Quantas dessas duplas são formadas por um menino e uma menina?
G: Cinco.
P: Não, quatro. Uma dupla é formada pelas duas meninas, outra pelos dois meninos e as demais por um menino e uma menina. Então, você sabe me dizer qual é essa probabilidade?
G: De sessenta e pouco por cento.
P: Eu vou te dizer algumas frases sobre esse espaço amostral, todas as combinações que organizamos, e você vai classificá-las como verdadeiras ou falsas, tudo bem?
G: É V ou F.
P: Sim.

"Esse tipo de atividade, classificar com V ou F, verdadeiras ou falsas, as frases, parece ser algo comum para o aluno".

P: É mais provável saírem duas meninas.
G: F.
P: É mais provável saírem dois meninos.
G: F.
P: É mais provável sair uma menina e um menino.
G: V.
P: Há mais chance de duas meninas serem sorteada que uma menina e um menino.
G: F.

P: Há mais chance de dois meninos serem escolhidos que uma menina e um menino.
G: F

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As dificuldades inicialmente apresentadas por Guilherme na realização dessa atividade indicam que talvez ele não tenha vivenciado situações como essa, na qual para calcular probabilidades era preciso agrupar elementos de um conjunto para definir o espaço amostral. Pensamos que as ferramentas materiais utilizadas talvez não tenham sido adequadas à situação proposta, uma vez que precisavam ser em quantidade maior e possibilitar a contagem de todos os agrupamentos. Além disso, o espaço destinado à disposição dos agrupamentos, em cima da carteira do aluno, não contribuiu para uma organização que facilitasse a contagem ou a retomada (tateamento) das possibilidades, quando o estudante considerasse necessário.

Os trechos das transcrições indicam a importância, tanto das ferramentas materiais, como da mediação do professor, na formação de conceitos relacionados à probabilidade, como na elaboração do espaço amostral. Os materiais contribuíram para que o estudante registrasse as possibilidades, no entanto, os questionamentos e as narrativas da pesquisadora indicam, também, a importância da linguagem no processo de ensino de estudantes cegos.

O estudo realizado nos possibilitou compreender que estudantes cegos podem desenvolver conceitos relativos à probabilidade, tais como os envolvidos nas demandas apresentadas por Bryant e Nunes (2012), quando inseridos em um contexto dialógico, mediado por situações de ensino e por adequadas ferramentas materiais. No entanto, na resolução da última situação-problema, percebemos certa dificuldade do aluno ao construir o espaço amostral com os materiais apresentados. Mesmo diante da dificuldade, o problema foi resolvido pelo aluno com a intervenção da pesquisadora em um momento de interação entre ela e o aluno. Esse fato nos indica que, além das tarefas e das ferramentas mediadoras, as interações entre os participantes também precisam ser analisadas, pois pode ser um fator fundamental para que o aluno compreenda o conceito matemático proposto.

Tais observações nos conduziram a pensar em um segundo momento do estudo, com situações-problema relacionadas a outros contextos, porém, com as mesmas características do estudo anterior; com outras ferramentas mediadoras (esferas, cubos e tabuleiro formado com caixa de ovos) e com interações entre a pesquisadora e o estudante.

SEGUNDO MOMENTO DO ESTUDO: APRIMORANDO AS FERRAMENTAS, AMPLIANDO AS DISCUSSÕES

Esse momento do estudo envolveu duas situações-problema com contexto relacionado a uma questão do cotidiano das pessoas e também escolar, como nos estudos de genética realizados na disciplina de Biologia. Além disso, contemplam as seguintes demandas da probabilidade, apresentadas por Bryant e Nunes (2012): a *compreensão da aleatoriedade*, *a formação do espaço amostral*; a *quantificação de probabilidades* e a *comparação de probabilidades*.

Na sequência, apresentamos, no Quadro 6 e na Figura 2, respectivamente, as situações-problema deste momento do estudo e as ferramentas mediadoras utilizadas.

Quadro 6. Situações-problema de probabilidade do segundo momento do estudo – 2019

5. Um casal quer ter dois filhos, é mais provável que seja um menino e uma menina ou ambos sejam do mesmo sexo? Demanda: Espaço amostral, quantificação e comparação de probabilidades. Ferramentas mediadoras: 8 esferas, 8 cubos e 1 caixa de ovos de uma dúzia. 6. Uma mulher está gravida de trigêmeos, qual a probabilidade de que sejam todos do mesmo sexo? Demanda: Espaço amostral, quantificação e comparação de probabilidades. Ferramentas mediadoras: 14 esferas, 14 cubos e 2 caixas de 15 ovos.

Fonte: Adaptado de Santos e Borba (2019b).

As ferramentas mediadoras, relacionadas às figuras utilizadas no estudo de genética (círculos e quadrados), foram pensadas de modo que fosse fácil para o aluno diferenciar o sexo masculino (cubos) do feminino (esferas) e que sua organização nos tabuleiros (caixas de ovos) contribuísse com a construção, identificação e contagem das possibilidades. A quantidade maior de objetos (cubos e esferas) e de células na caixa de ovos foi colocada para que o aluno pudesse refletir sobre o esgotamento, ou não, das possibilidades, tendo em vista que ainda sobravam objetos e células disponíveis. Utilizando materiais na quantidade exata, corremos o risco de que o aluno esgote as possibilidades sem refletir ou sem ter certeza de que essas realmente sejam todas as possibilidades.

Como no primeiro momento do estudo, a interação foi desenvolvida com o aluno em todo o processo, desde a apresentação das ferramentas materiais, na leitura das situações-problema e nos diálogos estabelecidos entre pesquisadora e aluno, visando a negociação e o compartilhamento de conceitos probabilísticos.

Figura 2. Ferramentas mediadoras do segundo momento do estudo

Fonte: Santos e Borba (2019b).

Guilherme não teve dificuldade em identificar os materiais, inclusive, descreveu a quantidade de linhas e colunas que haviam nos dois tabuleiros de organização (caixa de ovos) e compreendeu a situação-problema que lhe foi apresentada. Ao se deparar com a primeira situação-problema, Guilherme disse que não era possível identificar o sexo das crianças antes do nascimento sem fazer exames. Disse, ainda, que poderiam ser do sexo feminino ou masculino. Quando questionado "Se um casal quer ter dois filhos, quais as possibilidades?", respondeu que poderia "ser duas meninas", "dois meninos" e "um menino e uma menina". Neste momento, a pesquisadora lhe perguntou o que consta no Quadro 7.

Cada possibilidade mencionada pelo estudante era registrada no tabuleiro. Ao final, a pesquisadora pediu para que Guilherme descrevesse todas as possibilidades registradas para iniciarem a discussão sobre as probabilidades. Mesmo tendo identificado as possibilidades – menina/menina, menino/menino, menino/menina e menina/menino –, Guilherme teve dificuldade em responder à pergunta "se um casal quer ter dois filhos, é mais provável que seja um menino e uma menina ou ambos sejam do mesmo sexo?". Novas intervenções foram realizadas pela pesquisadora, como se pode observar no Quadro 8.

Quadro 7. Situação-problema 5 – esgotamento de possibilidades

P: Não tem outras possibilidades?
G: Não.
P: Uma menina e um menino não é uma possibilidade diferente de um menino e uma menina?
G: É, poderia [O aluno parecia não estar muito convencido].
P: Vamos imaginar a seguinte situação: O menino é o primeiro filho e a menina a segunda, assim ele é o filho "mais velho" e ela a filha "mais nova" e a situação inversa, a filha sendo a "mais velha" e o filho o "mais novo". Mesmo tendo dois filhos de sexos diferentes não são possibilidades diferentes?
G: Sim, é.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As ferramentas mediadoras se mostraram de suma importância para a construção e registro do espaço amostral, construído com apoio de raciocínio combinatório. A intervenção promovida pela pesquisadora, por meio de questionamentos e retomada de ideias, se consolidou como instrumento mediador no desenvolvimento de conceitos probabilísticos.

Quadro 8. Situação-problema 5 – comparação de probabilidades

P: Vamos pensar nas seguintes afirmações: "é mais provável que seja um menino e uma menina", "é mais provável que ambos sejam do mesmo sexo" ou "as probabilidades são as mesmas". Qual você acha que se aplica a essa situação?
G: São as mesmas.
P: Qual a probabilidade de os dois filhos serem do mesmo sexo.
G: Eu tenho duas de quatro.
P: Sim.
G: Então, é 50%.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

A segunda situação-problema era mais complexa que a anterior, por acrescentar mais um elemento ao contexto, mas o fato de Guilherme ter vivenciado contexto semelhante na situação anterior foi um facilitador. Ele demostrou maior segurança ao dar suas respostas. Assim que foi questionado sobre as possibilidades desse problema, disse que poderia ser "três meninos, três meninas, dois meninos/uma menina e duas meninas/um menino". Quando questionado sobre outras possibilidades, ficou pensativo. A pesquisadora iniciou a intervenção direcionando as mãos do estudante sobre a última possibilidade elencada (duas meninas e um menino) e seguiu-se o diálogo apresentado no Quadro 9.

Depois que determinou o espaço amostral, Guilherme conseguiu responder que a probabilidade de que as crianças fossem do mesmo sexo era de "dois em oito, de 25%" e de que fossem de sexos diferentes, de 75%, e, assim, que era mais provável que fossem de sexos diferentes.

Quadro 9. Transcrição – Situação-problema 6 – esgotamento de possibilidades

P: Da forma como apresentou essa possibilidade dá a entender que as duas meninas nasceram primeiro e o menino depois, certo?
G: Sim.
P: Poderia ser diferente a ordem?
G: Não sei.
P: Poderia ter nascido o menino primeiro e depois as duas meninas?
G: Sim.
P: Então, essa possibilidade é diferente da anterior ou não?
G: É.
P: Já registramos duas meninas e um menino, um menino e duas meninas. Tem outra forma de organizarmos essa combinação?
G: Tem. Uma menina, um menino e outra menina.
P: Será que tem outras possibilidades com essa combinação?
G: Acho que não.
P: Ok. Vamos voltar a analisar essa outra possibilidade que registrou "dois meninos e uma menina". Tem outras possibilidades?

Ele ficou um tempo tocando as combinações, até que formou as outras possibilidades (OOO, AAA, OOA, AAO, OAA, AOA, AOO, OAO)

P: Quantas possibilidades construímos ao todo?
G: Oito

Fonte: Elaborado pelas autoras.

As discussões evidenciaram que a construção do espaço amostral era um desafio para Guilherme. No entanto, as ferramentas mediadoras e a intervenção da pesquisadora contribuíram para que ele realizasse essa tarefa. Quanto à quantificação e comparação das probabilidades, essa tarefa parecia ser mais fácil para ele, uma vez que não possui dificuldade em realizar cálculos mentais, como o de porcentagem.

As ferramentas mediadoras utilizadas neste estudo se mostraram significativas para a construção do espaço amostral pelo estudante cego. Também se mostraram como um instrumento de registro dos eventos possíveis para as situações-problema propostas. A funcionalidade do material para o estudante cego também foi algo que observamos, tendo em vista que o aluno poderia construir e descontruir seu registro de forma rápida, o que não seria possível se fosse feito em Braille. Este registro escrito poderia ser feito em um segundo momento, após o levantamento com o material disponibilizado.

As observações quanto às interações realizadas nos levaram a ver que não é possível prever com certeza quais serão os debates desenvolvidos na interação, mas é importante que o pesquisador/professor tenha em mente o foco que pretende discutir e os objetivos que visa alcançar – no nosso caso, o levantamento de espaço amostral, a comparação e a quantificação de probabilidades. O diálogo deve ser conduzido de modo que o estudante não apenas resolva o problema, mas que reflita e compreenda os conceitos que estão envolvidos nas debates efetuados.

Quanto à compreensão das demandas cognitivas relativas à probabilidade, acreditamos que a proposta realizada atingiu os objetivos pensados, mas destacamos a importância de apresentar diferentes situações e contextos que favoreçam reflexões e interpretações relacionadas à probabilidade.

Acreditamos que as situações-problema propostas possam ser resolvidas por estudantes cegos e videntes em um contexto colaborativo, semelhante ao desenvolvido neste estudo, tendo em vista que as interações podem contribuir não apenas com a aprendizagem dos estudantes cegos, mas dos demais estudantes também. Dessa forma, cremos que a proposta aqui apresentada pode contribuir para uma educação, de fato, inclusiva, pois as ferramentas materiais e atividades propostas podem ser trabalhadas por alunos videntes e por alunos cegos em aulas de escolas de ensino regular.

No estudo de estágio pós-doutoral, concluído recentemente no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), partimos das ferramentas materiais e situações-problema aqui apresentadas para discutir com especialistas na área de ensino de pessoas com deficiência visual as possíveis contribuições da proposta desenvolvida no processo de ensino dos estudantes cegos. Também promovemos uma formação para professores de Matemática da rede regular de ensino e outros profissionais – professores de Atendimento Educacional Especializado (AEE), professores de Braille e profissional de apoio educacional – que atuam com estudantes com deficiência visual.

Os especialistas afirmaram que as atividades e as ferramentas materiais propostas podem contribuir com a compreensão da *aleatoriedade* apresentada nas situações-problema propostas, a *formação do espaço amostral* (registro das possibilidades) e a organização de ideias para a *quantificação e comparação de probabilidades*. Destacaram, ainda, que os materiais utilizados são de baixo custo e acessíveis, facilitando sua aquisição e construção pelo professor e possibiltam que o raciocínio probabilístico dos estudantes vá emergindo de forma natural e gradual.

A formação realizada com professores de Matemática e profissionais da área da inclusão indicaram a importância de desenvolvimento de formações continuadas na perspectiva colaborativa, envolvendo profissionais com diferentes formações e experências profissionais. O ensino na perspectiva inclusiva se mostra bastante complexo e o debate entre os diferentes profissionais contribui não apenas com o desenvolvimento de práticas inclusivas mais eficazes, mas também para uma formação mais ampla dos profissionais.

REFERÊNCIAS

BRYANT, Peter. NUNES, Terezinha. *Children's understanding of probability:* a literature review. Nuffield Foundation. 2012. Disponível em: https: //www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acesso em: 15 out. 2020.

FERNANDES, Solange. Educação Matemática Inclusiva: Adaptação x Construção. *Revista Educação Inclusiva*, Campina Grande/PB, v. 01, n. 01, p. 78-95, jul./dez., 2017. Disponível em: http://revista.uepb.edu.br/index.php/REIN/article/view/3879/2230. Acesso em: 15 out. 2020.

FERNANDES, Solange; HEALY, Lulu. Educação matemática e inclusão: abrindo janelas teóricas para a aprendizagem de alunos cegos. *Educação e Cultura Contemporânea,* v. 5, p. 91-105, 2008. Disponível em: http://www.matematicainclusiva.net.br/publicacoes.php. Acesso em: 15 out. 2020.

HEALY, Lulu; FERNANDES, Solange. Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. *Educar em Revista*, v. Esp, p. 227-244, 2011. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22632/14857. Acesso em: 06 out. 2019.

MARCONE, Renato. *Deficiencialismo:* a invenção da deficiência pela normalidade. 2015. 170 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2015.

SANTANA, Michaelle; FERNANDES, José; BORBA, Rute. Análise das demandas cognitivas nas tarefas de Probabilidade propostas em livros didáticos dos primeiros anos de escolarização. *Revista Paranaense de Educação Matemática* (RPEM), Campo Mourão, PR, v. 09, n. 18, p. 243-262, jan./jun., 2020. Disponível em: file:///C:/Users/pvc/Downloads/2078-8100-1-PB.pdf. Acesso em: 21 out. 2020.

SANTOS, Jaqueline. *O movimento do pensamento probabilístico mediado pelo processo de comunicação com alunos do 7º ano do Ensino fundamental.* 2010. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

SANTOS, Jaqueline. *A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora.* 2015. 191 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

SANTOS, Jaqueline; BORBA, Rute. Relações entre ferramentas materiais e mediação na construção de conhecimento probabilístico de um estudante cego. *In:* CONGRESO INTERNACIONAL VIRTUAL DE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA, 3., 2019, Granada. *Anais*… Granada: Universidade de Granada, 2019a. p. 1-10. Disponível em: http://digibug.ugr.es/handle/10481/55205. Acesso em: 08 out. 2020.

SANTOS, Jaqueline ; BORBA, Rute. Um cenário de aprendizagem de probabilidade: uma possibilidade para alunos com deficiência visual. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA INCLUSIVA, 1., 2019b, Rio de Janeiro. *Anais*... Rio de Janeiro/RJ: SBEM, 2019b. p. 1-11. Disponível em: http://eventos.sbem.com.br/index.php/GT-13/ENEMI2019/paper/view/929/744. Acesso em: 21 out. 2020.

SILVA, Rita. É a moeda que diz não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. 2016. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

VITA, Aída; MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene. A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, v. 8, p. 55-97. 2015.

VYGOTSKI. Lev. *Obras escogidas V.* Fundamentos da defectología. Tradução de J. G. Blank. Madrid: Visor, 1997.

SOBRE AS AUTORAS

ANA PAULA B. DE LIMA

Professora da Educação Básica, possui licenciatura em Matemática, especialização em Programação de Ensino em Matemática, mestrado e doutorado em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Sente-se muito motivada pela pesquisa na área e encara o ensino de Matemática como um desafio, buscando contribuir para a aproximação de resultados de investigações acadêmicas às práticas em sala de aula. Tem interesse particular em pesquisar a formação de professores que ensinam Matemática. Maiores informações de sua atuação e produções podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/5722655710803641

ARIEDJA DE CARVALHO SILVA

Com licenciatura em Pedagogia e mestrado em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), tem se empenhado em investigar o desenvolvimento matemático de crianças novas, em particular as da Educação Infantil. Tem se dedicado também a estudos em Psicologia Cognitiva – área correlata da Educação Matemática – com o objetivo de contribuir para melhor entendimento de processos que levam ao aprendizado da Matemática. Informações de sua atuação e produções podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/0198425290356141

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA

Licenciada em Matemática, especialista em Matemática Comercial e Financeira, mestre e doutora em Educação Matemática e Tecnológica, tem se dedicado ao ensino e à pesquisa na área. Atuou como professora da Educação Básica e Técnica de Ensino de Matemática do Estado de Pernambuco e, atualmente, é docente do Curso de Matemática – Licenciatura da UFPE no Campus de Caruaru. Busca se aprofundar nos conhecimentos matemáticos e pedagógicos que possam servir de base para o desenvolvimento de práticas adequadas ao ensino que levem os estudantes a amplos avanços no que diz respeito à compreensão de conceitos matemáticos. Outras informações de sua atuação e produções estão em: http://lattes.cnpq.br/8817258970099014

DACYMERE DA SILVA GADELHA

No curso de Pedagogia se envolveu em grupos de pesquisa e na época iniciou sua formação em investigações em Educação Matemática. Desenvolveu Trabalho de Conclusão de Curso na área e deu continuidade à pesquisa no mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Atua como professora de Matemática em anos iniciais do Ensino Fundamental e busca colocar em prática resultados de estudos e investigações realizadas por ela ou outros pesquisadores, testando recursos que possam auxiliar o desenvolvimento matemático de estudantes do Ensino Básico. Mais informações sobre sua atuação e produções podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/6319506130089856

DANIELLE AVANÇO VEGA

Pedagoga, especialista em Psicopedagogia e mestre em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), tem se dedicado, com afinco, a estudos e pesquisas da área desde a sua graduação. Tem atuado na docência no Ensino Superior e também nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Sua curiosidade a leva a investigar questões que podem explicar o desempenho de crianças, adolescentes e adultos em conteúdos matemáticos. Sua atuação e produção podem ser vistas em: http://lattes.cnpq.br/2514302222515433

EWELLEN TENÓRIO DE LIMA

Desde a graduação – Licenciatura em Matemática – tem se interessado por investigações em Educação Matemática. Dando continuidade a seus estudos, concluiu o mestrado com pesquisa na área e encontra-se em doutoramento no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (UFPE). Paralelamente, tem atuado como professora da rede pública estadual da Paraíba. Assim, tem articulado seus estudos acadêmicos com sua atuação junto a estudantes do Ensino Médio, no desejo de ensinar a Matemática de modo atraente e que encante a todos. Mais informações, incluindo suas produções em eventos e periódicos, encontram-se em: http://lattes.cnpq.br/5200627737222609

FLÁVIA MYRELLA TENÓRIO BRAZ

Formada em Pedagogia e mestranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), desde a graduação tem se entusiasmado pela pesquisa na área. Como professora de anos iniciais do Ensino Fundamental, também tem se empenhado em oferecer ensino de qualidade às crianças de suas classes. Em particular, tem se dedicado em estudar e investigar a Educação Matemática de alunos com necessidades educacionais especiais, em busca de amplo desenvolvimento de todos. Mais informações sobre suas atividades podem ser vistas em: http://lattes.cnpq.br/6687717622620930

GLAUCE VILELA MARTINS

Professora de anos iniciais, do ensino regular e da Educação de Jovens e Adultos, tem se empenhado ativamente, e com paixão, para a melhora do aprendizado matemático de crianças, de jovens e de adultos. Formada em Pedagogia, com mestrado em Educação e doutorado em andamento em Educação Matemática e Tecnológica, ambas as pós-graduações na UFPE, tem investigado, com afinco, recursos didáticos para o trabalho de conceitos matemáticos e como podem ser melhor aproveitados para o avanço do raciocínio matemático dos estudantes. Maiores informações de suas produções podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/1256097595210222

JAQUELINE A. F. LIXANDRÃO SANTOS

Licenciada em Matemática e em Pedagogia, sempre desejou conhecer mais sobre processos de ensino e de aprendizagem. Prosseguiu estudos em mestrado e doutorado e concluiu recentemente pós-doutoramento, buscando melhor entendimento de recursos que possibilitem avanços no pensamento matemático, em particular em uma visão inclusiva – respeitando as diferenças entre os estudantes. Docente do Centro Acadêmico do Agreste, Campus Caruaru (UFPE), tem ensinado em cursos de formação inicial, realizado e orientado pesquisas e produzido textos de divulgação de resultados de investigações científicas. Mais informações de sua produção são encontradas em: http://lattes.cnpq.br/4866964083641498

JULIANA AZEVEDO MONTENEGRO

Pedagoga, mestre e doutora em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), tem lutado, com afinco, pela melhoria da qualidade do ensino da Matemática. Com ampla formação em pesquisa em Educação Matemática, tem trazido contribuições ao estudo do desenvolvimento de conceitos por estudantes da Educação Básica. Tem atuado na formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental, como professora do Curso de Pedagogia da UFPE, e publicado textos que os auxiliam em suas práticas de ensino de Matemática. Mais informações sobre as atividades por ela desenvolvidas e suas produções podem ser vistas em: http://lattes.cnpq.br/9069007873489006

MICHAELLE RENATA M. DE SANTANA

Cursou Pedagogia e durante o curso tomou gosto pela investigação em Educação Matemática. Como professora da rede municipal de Recife e técnica de ensino na rede estadual de Pernambuco tem atuado com dedicação para a melhoria do ensino, em particular de Matemática, nas escolas públicas da cidade e do estado. Além da graduação, concluiu cursos de especialização, de mestrado e de doutorado, desenvolvendo relevantes pesquisas em temáticas variadas em Educação Matemática. Maiores informações sobre suas atuações e publicações podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/8895570775162297

RITA BATISTA

Grande entusiasta pelo ensino da Matemática, licenciou-se e especializou-se na área. Como professora da rede pública de ensino de Pernambuco, tem atuado na Educação de Jovens e Adultos e no Ensino Médio, cativando os estudantes em seus aprendizados matemáticos. Com mestrado concluído e doutorado em andamento em Educação Matemática e Tecnológica (UFPE), tem investigado temáticas da área e se dedicado, com afinco, na formação de professores e na produção de material didático voltado ao Ensino Básico. Mais informações sobre sua atuação na área podem ser encontradas em: http://lattes.cnpq.br/6751381687321527

RUTE E. DE S. ROSA BORBA

Apaixonada pela Matemática desde menina, licenciou-se e ensinou por 10 anos a disciplina no Ensino Médio. Desejosa de saber mais sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática e de ajudar outros a ganharem gosto pela disciplina, fez mestrado, doutorado e pós-doutorado, estudando temáticas da Educação Matemática. Há mais de 25 anos, como professora da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), tem realizado pesquisas na área, participado de formações iniciais e continuadas de professores que ensinam Matemática e divulgado estudos em eventos e periódicos científicos. Maiores informações sobre as suas atividades profissionais e suas publicações estão em: http://lattes.cnpq.br/6244946561746497

Título Investigações em ensino e em aprendizagem: uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração)
Organização Rute E. de S. Rosa Borba, Juliana Azevedo Montenegro e Jaqueline A. F. Lixandrão Santos

Formato E-book (PDF)
Tipografia Tasman (texto), Big City Grotesque e Filson Pro (títulos)
Desenvolvimento Editora UFPE

Editora UFPE
Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20, Várzea, Recife-PE
CEP: 50740-530 | Fone: (81) 2126.8397
editora@ufpe.br | www.editora.ufpe.br

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
EDUMATEC
UFPE

GERAÇÃO UFPE
grupo de estudos em raciocínios combinatório e probabilístico