Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função

ORGANIZAÇÃO

Rosinalda Aurora de Melo Teles
Veridiana Rezende
Clélia Maria Ignatius Nogueira
Marli Schmitt Zanella

Editora UFPE

Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função

ORGANIZAÇÃO

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Veridiana Rezende

Clélia Maria Ignatius Nogueira

Marli Schmitt Zanella

Editora UFPE

RECIFE
2024

Universidade Federal de Pernambuco

Reitor: Alfredo Macedo Gomes

Vice-Reitor: Moacyr Cunha de Araújo Filho

EDITORA ASSOCIADA À

Associação Brasileira das Editoras Universitárias

Editora UFPE

Diretor: Junot Cornélio Matos

Vice-Diretor: Diogo Cesar Fernandes

Editor: Artur Almeida de Ataíde

Conselho Editorial (Coned)

Alex Sandro Gomes (CIn)

Carlos Newton Júnior (CAC)

Eleta de Carvalho Freire (CE)

Margarida Maria de Castro Antunes (CCM)

Marília de Azambuja Ribeiro Machel (CFCH)

Editoração

Revisão de texto: Aline Rocha de Oliveira e Fernando Bruno Antonelli Molina Benites

Projeto gráfico: Adele Pereira

Catalogação na fonte:

Bibliotecária Kalina Ligia França da Silva, CRB4-1408

A838 Aspectos conceituais, cognitivos e didáticos de função [recurso eletrônico] / organização : Rosinalda Aurora de Melo Teles... [et al.]. – Recife : Ed. UFPE, 2024.

Vários autores.
Inclui referências.
ISBN 978-65-5962-232-0 (online)

1. Funções (Matemática). 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Prática de ensino. I. Teles, Rosinalda Aurora de Melo (Org.).

515.7 CDD (23.ed.) UFPE (BC2024-034)

Esta obra está licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Internacional.

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) o apoio financeiro para a publicação desta obra.

Sumário

Prefácio **7**

Apresentação **12**

Bloco 1 Estudos teóricos e revisão de literatura sobre o tema

1. As relações entre as ideias-base do conceito de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) **24**
   Renato Francisco Merli e Clélia Maria Ignatius Nogueira

2. Situações de função afim na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais **58**
   Clarice de Almeida Miranda e Veridiana Rezende

3. Situações de juros simples e a função afim: uma aproximação via Teoria dos Campos Conceituais **82**
   Regis Alessandro Fuzzo e Veridiana Rezende

4. Relações entre a compreensão de função e pensamento funcional **114**
Andreza Santana da Silva e Rosinalda Aurora de Melo Teles

Bloco 2 Análise do desenvolvimento do conhecimento de estudantes dos variados níveis de ensino

5. Dificuldades de constituição da generalização em situações envolvendo função afim por estudantes do ensino fundamental: as justificativas da teoria piagetiana **151**
Suzana Domingues da Silva e Clélia Maria Ignatius Nogueira

6. Conhecimentos implícitos de função mobilizados por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos **181**
Carla Larissa Halum Rodrigues, Karina Dezilio e Veridiana Rezende

7. A complexidade da variação de situações de função afim para estudantes do ensino médio **211**
Fabricia Bernardino e Veridiana Rezende

Bloco 3 Aspectos relacionados diretamente ao ensino

8. As contribuições das ações pedagógicas para a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento **249**
Luciana Del Castanhel Peron da Silva e Clélia Maria Ignatius Nogueira

9. Ideias-base de função em problemas mistos: uma análise de livro didático do 6º ano **279**
Carla Larissa Halum Rodrigues e Marli Schmitt Zanella

10. Conversões entre registros gráfico e algébrico da função afim: duas perspectivas em diálogo **308**
José Robson de Araújo, Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva e Rosinalda Aurora de Melo Teles

11. Ensino de função afim no 1º ano do ensino médio: tecendo inter-relações entre o contrato didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica **342**

José Edivam Braz Santana, Rosinalda Aurora de Melo Teles e Marcelo Câmara dos Santos

Sobre os autores **378**

Prefácio

No alto dos meus cinquenta anos de carreira como pesquisadora e educadora matemática, já li muitos textos e escrevi outros tantos, mas voltei no tempo ao receber o convite para escrever o prefácio de um livro organizado por um quarteto de mulheres professoras, pesquisadoras, mães, esposas e tudo mais que a força da mulher permite fazer concomitantemente. Primeiro, porque a porta-voz do convite foi Clélia Ignatius, colega desde a época da realização do primeiro Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem) e do início do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Sipem), com quem convivi por mais de quatorze anos no Grupo de Trabalho Educação Matemática dos Anos Iniciais – GT1. Dessa convivência nasceu, se não uma amizade "eventual", aquela que se consolida apenas

mediante encontros em eventos, uma admiração recíproca. Segundo, porque, ao formalizar o convite, Clélia me disse que, por eu ter sido uma das responsáveis pela difusão da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud no Brasil, seria uma honra que eu escrevesse o prefácio do livro organizado por ela, Rosinalda Teles (de cuja banca de mestrado fiz parte, no início dos anos 2000, momento de retorno ao Brasil de vários pesquisadores formados na França), Veridiana Rezende e Marli Zanella. Respondi de imediato que ninguém faz nada sozinho, e mergulhei em minhas lembranças.

Este livro consolida a parceria estabelecida entre essas quatro mulheres em programas de pós-graduação e grupos de pesquisa de diferentes regiões do Brasil. Embora os textos a seguir abordem também investigações relacionadas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval, sua ênfase na TCC me mostrou o quanto essa teoria está difundida no Brasil e como avançaram as pesquisas e, consequentemente, as contribuições para a ampliação da própria teoria. Este livro retrata ainda parte de uma pesquisa financiada pelo CNPq, intitulada *Campo conceitual da função afim: contribuições para a Educação Básica e Educação Superior*, que vem sendo liderada por essas mulheres, com seus orientandos de mestrado, doutorado e pós-doutorado.

Por meio deste livro, me senti recompensada. Afinal, um dos meus objetivos ao estabelecer a estrutura do Sipem mediante discussões em grupos temáticos foi

possibilitar a formação de pesquisadores brasileiros para a então jovem educação matemática, que, à época, dependia, para reconhecimento interno e externo, dos trabalhos do mestre Ubiratan D'Ambrósio. Os capítulos deste volume são oriundos dos trabalhos de dois grupos: o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa), do estado do Paraná, e o Grupo de Estudos e Pesquisa em Ciências e Educação Matemática (Semear), de Pernambuco, os quais o leitor conhecerá melhor na apresentação deste livro. Esses estudos explicitam a consolidação do meu objetivo, tanto no que diz respeito à produtividade quanto no que se refere à qualidade.

A temática abordada ao longo dos capítulos certamente instigará você, leitor, a refletir sobre as teorias que sustentam as pesquisas: Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, e Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, além, e principalmente, das reflexões acerca do campo conceitual da função afim.

Outro aspecto interessante do livro é a focalização do objeto matemático função afim, tópico de difícil aprendizado e que, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pode e deve ser abordado, de maneira implícita, desde os anos iniciais do ensino fundamental até a sua formalização no 9º ano e posterior consolidação no ensino médio. A análise é realizada mediante lentes diferentes, tanto no que se refere às teorias de sustentação (TCC ou TRRS) quanto no que tange aos enfoques, a saber: estudos teóricos, aspectos

cognitivos e relacionados ao ensino propriamente dito. Os diferentes níveis de ensino que se caracterizam como cenário das investigações corroboram um dos pressupostos básicos de TCC: o de que um conceito demanda tempo para se constituir.

O livro está dividido em três blocos. O primeiro deles concentra as investigações que envolvem aspectos epistemológicos e históricos do objeto matemático função; o segundo, os cognitivos relacionados à análise do desenvolvimento do conhecimento de estudantes dos variados níveis de ensino; e o terceiro abrange trabalhos que discutem o ensino a partir da análise de documentos curriculares, de livros didáticos, de práticas pedagógicas e de contratos didáticos estabelecidos ao se ensinar função. Na apresentação, as organizadoras, além de descreverem a estrutura do livro, trazem o resumo de cada um dos seus onze capítulos, com uma leitura que possibilita uma visão holística do todo e que, ao mesmo tempo, auxilia o leitor em sua própria trilha de leitura. Considero importante, todavia, que o primeiro capítulo seja o ponto de partida para qualquer que seja a trilha planejada.

O objetivo do livro é alcançar o professor. Por isso, houve o cuidado particular com a linguagem e com as terminologias específicas utilizadas, já que cada capítulo contou com a leitura crítica de um(a) professor(a) da educação básica, inclusive dos anos iniciais do ensino fundamental, para avaliar a sua adequação e utilidade para os docentes. No entanto, essa característica não

minimiza o rigor metodológico das investigações realizadas. Assim, os resultados aqui apresentados podem e devem ser considerados em outras pesquisas para as quais sejam pertinentes.

Nesse sentido, esta obra configura-se como uma excelente contribuição tanto para a educação matemática – aquela, com iniciais minúsculas, que é cotidianamente produzida em sala de aula, por estudantes e professores – quanto para a Educação Matemática, agora com iniciais maiúsculas, por suscitar reflexões que poderão gerar novas pesquisas a curto, médio e longo prazo.

Agradeço às autoras o convite para escrever este prefácio. Foi uma honra e prazer ler este livro. Tenho certeza de que os leitores encontrarão nele inspiração para elaborar novas tarefas em suas aulas ou pesquisas.

Boa leitura!

Tânia Maria Mendonça Campos

Apresentação

Este livro consolida uma parceria estabelecida entre dois grupos de pesquisa: o Grupo de Estudos e Pesquisa em Ciências e Educação Matemática (Semear) e o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa).

O Semear foi criado em 2015, no âmbito do desenvolvimento de um projeto de colaboração técnica da Profa. Rosinalda Teles, docente da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), com uma universidade federal do interior do estado – a antiga Unidade Acadêmica do Agreste (UAG), hoje Universidade Federal do Agreste Pernambucano (Ufape). Desde a criação do grupo, estabeleceu-se uma parceria com a Profa. Dra. Marilene Rosa dos Santos, vice-coordenadora do grupo e docente da Universidade de Pernambuco (UPE), e docente, naquela

época, do *campus* Garanhuns (PE), o que possibilitou o intercâmbio entre a Licenciatura em Pedagogia da então UAG e a Licenciatura em Matemática da UPE. O grupo Semear congrega estudantes de mestrado e doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) da UFPE e egressos desse programa. Participam também docentes de outras instituições superiores, tais como a Universidade Católica de Pernambuco (Unicap). Dada a intenção do grupo de possibilitar o fortalecimento da Educação Matemática no Agreste de Pernambuco, participam como ouvintes das reuniões de estudo professores da educação básica e estudantes de licenciatura em Pedagogia ou Matemática que tenham interesse nas discussões.

O GEPeDiMa foi criado em 2017, de maneira informal, constituído de início por estudantes do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), *campus* de Cascavel, que tinham por orientadoras as pesquisadoras Profa. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira e Profa. Dra. Veridiana Rezende. Inicialmente, o grupo tinha como principal objetivo investigar fenômenos didáticos, bem como questões teóricas e cognitivas, cujo cerne é o saber matemático, que trazem implicações para a sala de aula. Posteriormente, em 2019, passaram a integrar o grupo mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), orientados pelas duas professoras

mencionadas. A partir de 2019, consolidou-se a parceria com o Semear, liderado pela Profa. Dra. Rosinalda Aurora de Melo Teles, constituído por outros pesquisadores e por seus orientandos.

Em 2020, a Profa. Dra. Marli Schmitt Zanella passou a integrar o GEPeDiMa, a partir da realização de seu pós-doutoramento no PPGECEM, sob a supervisão da Profa. Dra. Veridiana Rezende, tornando-se uma pesquisadora relevante para o grupo. Entre as diversas parcerias, a docente tem realizado coorientações de pesquisas de mestrado e doutorado de integrantes do GEPeDiMa vinculados ao PRPGEM (Unespar) e ao PPGECEM (Unioeste).

As principais teorias de sustentação das pesquisas realizadas pelos grupos parceiros são a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), de Gérard Vergnaud, e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval. Atualmente, o programa de estudos e pesquisas do GEPeDiMa tem como foco principal mapear o campo conceitual da função afim; para tanto, diversas pesquisas foram e estão sendo realizadas nessa direção, abordando as ideias-base e/ou conceitos organizadores de função; estabelecendo a tipologia de situações relacionadas à função afim; identificando invariantes operatórios de estudantes ao resolverem situações de estruturas aditivas, multiplicativas ou mistas, e as diferentes formas de representação.

Parte do programa do GEPeDiMa, intitulado "Campo conceitual da função afim: contribuições para a educação básica e educação superior", foi proposto à chamada

18/2021 – Universal, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), em parceria com o Grupo Semear. O projeto foi aprovado pelo CNPq em março de 2022, e está atualmente em fase de desenvolvimento, tendo como foco o mapeamento do campo conceitual da função afim a partir do estabelecimento da tipologia de situações multiplicativas e mistas que dão significado a esse conceito; da identificação de esquemas e invariantes mobilizados pelos estudantes em suas resoluções; e das diferentes representações para a função afim. Os capítulos 1, 3, 4, 5, 6 e 7 desta obra refletem os primeiros resultados oriundos do referido projeto.

Os capítulos aqui apresentados são fruto de pesquisas orientadas pelas organizadoras deste livro, líderes dos grupos mencionados, cujo escopo se relaciona a aspectos da função afim.

Conforme já mencionado anteriormente, duas teorias fundamentam o conjunto das pesquisas discutidas neste livro: a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

Da TCC, consideramos, particularmente, seus pressupostos fundamentais: o de que um conceito não existe de maneira isolada, mas depende das situações que lhe fornecem o significado, de invariantes ou conceitos organizadores e das suas diferentes formas de representação. O segundo pressuposto é o de que, para a resolução de uma situação, são necessários diversos conceitos, e de que, reciprocamente, um conceito pode adquirir significado a partir de diferentes situações. O

terceiro pressuposto considera que um conceito leva tempo para ser constituído, e essa constituição realizada pelo estudante depende da variedade de situações (com cálculos relacionais diferentes) que lhe é apresentada em sala de aula. Vergnaud estabeleceu dois campos conceituais: o das estruturas aditivas, cujas situações envolvem a operação de adição e/ou subtração para sua resolução, e o das estruturas multiplicativas, com situações relacionadas às operações de multiplicação e/ou divisão. O teórico estabelece também que os problemas mistos são aqueles que envolvem pelo menos uma operação de adição (ou subtração) e uma de multiplicação (ou divisão). Devido à natureza da representação algébrica da função afim, que envolve as operações de adição e multiplicação, o GEPeDiMa mostra (ver capítulo 2) e assume que as situações relacionadas à função afim podem ser consideradas problemas mistos e são passíveis de classificações.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, é uma abordagem cognitiva que, de modo geral, analisa as dificuldades encontradas na aprendizagem da matemática e o funcionamento cognitivo peculiar dessa ciência, levando em consideração o modo de acesso aos seus objetos, a variedade de sistemas semióticos que permitem representá-los e a necessária distinção entre o objeto matemático e a sua representação. Segundo Duval, a principal dificuldade na aprendizagem da matemática decorre do fato de que

os objetos matemáticos não possuem existência física; ou seja, os objetos matemáticos, devido à abstração da própria matemática, não são acessíveis por meio de instrumentos ou empiricamente, e por isso é necessária a utilização de sistemas de representação que viabilizem o acesso a seus objetos de conhecimento. Nesse sentido, as pesquisas apresentadas neste livro, que têm como referencial teórico a TRRS, se debruçam sobre as diferentes representações da função afim, com destaque para a interpretação global de propriedades figurais e as atividades de conversão e tratamento.

As pesquisas relatadas foram realizadas em todos os níveis da educação básica, e os temas abordados envolvem aspectos teóricos, como os capítulos do bloco 1; aspectos cognitivos relacionados à análise do desenvolvimento do conhecimento de estudantes dos variados níveis de ensino em situações envolvendo função ou função afim articulada com outros conceitos, no bloco 2; e aspectos relacionados diretamente ao ensino, tais como análise de documentos curriculares, de livros didáticos e de práticas pedagógicas e contratos didáticos estabelecidos ao ensinar função, no bloco 3. A seguir, apresentamos os capítulos que constituem cada bloco.

Bloco 1: Estudos teóricos e revisão de literatura sobre o tema

No capítulo 1, intitulado "As relações entre as ideias-base do conceito de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)", de autoria de Renato Francisco Merli e Clélia Maria Ignatius Nogueira e elaborado a partir da

tese do primeiro autor, articulam-se as ideias-base com o conceito de função apresentado na BNCC, considerando os quatro níveis de compreensão do conceito de função – entendimento intuitivo, matematização inicial, abstração e formalização – para identificar as situações, os conceitos organizadores, as ideias-base e as representações presentes em cada nível de ensino (fundamental, médio e superior).

O capítulo 2, intitulado "Situações de função afim na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais", de autoria de Clarice de Almeida Miranda e Veridiana Rezende, apresenta parte dos resultados da pesquisa de mestrado da primeira autora e tem como foco mostrar que situações de função afim podem ser associadas a problemas mistos e classificadas com base nas classes de situações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo. As autoras apresentam um esquema sagital para cada problema misto associado à função afim, assegurando a sua classificação e mostrando a existência de diferentes classes de situações associadas ao conceito de função afim.

O capítulo 3, intitulado "Situações de juros simples e a função afim: uma aproximação via Teoria dos Campos Conceituais", de autoria de Régis Alessandro Fuzzo e Veridiana Rezende, apresenta uma continuidade da pesquisa de mestrado do primeiro autor. Para cada situação de juros simples analisada, baseados nas classes de situações dos Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, os autores apresentam esquemas sagitais, mostrando a aproximação de situações de juros simples,

problemas mistos e o conceito de função afim, garantindo a classificação para as situações analisadas.

O capítulo 4, intitulado "Relações entre a compreensão de função e pensamento funcional", de autoria de Andreza Santana da Silva e Rosinalda Aurora de Melo Teles, aponta, a partir de uma reflexão teórica, aspectos epistemológicos e históricos relacionados à função e ao pensamento funcional.

Bloco 2: Análise do desenvolvimento do conhecimento de estudantes dos variados níveis de ensino

O capítulo 5, intitulado "Dificuldades de constituição da generalização em situações envolvendo função afim por estudantes do ensino fundamental: as justificativas da teoria piagetiana", de autoria de Suzana Domingues da Silva e Clélia Maria Ignatius Nogueira, relata resultados da dissertação de mestrado da primeira autora e apresenta um estudo teórico a respeito da constituição da generalização segundo a teoria piagetiana, para, então, realizar uma meta-análise dos resultados das duas pesquisas realizadas, uma nos anos iniciais e outra nos anos finais do ensino fundamental, que investigaram a mobilização da ideia-base generalização, buscando esclarecer as dificuldades identificadas nessa mobilização por estudantes de ambas as fases do ensino fundamental.

O capítulo 6, intitulado "Conhecimentos implícitos de função mobilizados por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos", de autoria de Carla Larissa Halum Rodrigues, Karina Dezilio e Veridiana

Rezende, tem como objetivo identificar invariantes operatórios, relacionados ao conceito de função, mobilizados por estudantes do 5º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas mistos da classe proporção simples e transformação de medidas e da classe proporção simples e composição de medidas. O capítulo apresenta resultados das pesquisas de mestrado de cada uma das primeiras autoras.

O capítulo 7, intitulado "A complexidade da variação de situações de função afim para estudantes do ensino médio", de autoria de Fabricia Bernardino e Veridiana Rezende, é resultado da pesquisa de mestrado da primeira autora e tem como objetivo analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associada à função afim, interfere na resolução de estudantes do ensino médio.

Parte 3: Aspectos relacionados diretamente ao ensino

O capítulo 8, intitulado "As contribuições das ações pedagógicas para a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento", de autoria de Luciana Del Castanhel Peron da Silva e Clélia Maria Ignatius Nogueira, apresenta resultados da tese de doutorado da primeira autora e compartilha ações pedagógicas que foram implementadas com alunos do 5º ano, com o objetivo de promover a manifestação das formas operatória (saber fazer) e predicativa (saber explicitar o fazer) do conhecimento, correspondente às ideias-base do conceito de função.

O capítulo 9, intitulado "Ideias-base de função em problemas mistos: uma análise de livro didático do 6º ano", de autoria de Carla Larissa Halum Rodrigues e Marli Schmitt Zanella, apresenta os resultados de uma pesquisa desenvolvida com vistas a identificar e analisar problemas mistos propostos em um livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, e explicitar ideias-base de função passíveis de serem mobilizadas por meio desses enunciados.

O capítulo 10, intitulado "Conversões entre registros gráfico e algébrico da função afim: duas perspectivas em diálogo", de autoria de José Robson de Araújo, Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva e Rosinalda Aurora de Melo Teles, apresenta reflexões a partir de duas pesquisas de mestrado em educação matemática e tecnológica fundamentadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval. O trabalho trata do processo de conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim em duas perspectivas: sua abordagem em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e as estratégias mobilizadas por estudantes do ensino médio.

No capítulo 11, intitulado "Ensino de função afim no 1º ano do ensino médio: tecendo inter-relações entre o contrato didático e a teoria dos registros de representação semiótica", de autoria de José Edivam Braz Santana, Rosinalda Aurora de Melo Teles e Marcelo Câmara dos Santos, discutem-se inter-relações no contrato didático

estabelecido entre uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do ensino médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim.

Esperamos contribuir com a prática docente desse objeto de saber matemático tão importante, e cuja construção percorre toda a educação básica e demanda ações didáticas diferenciadas, em cada nível de ensino.

Desejamos uma excelente leitura!

Rosinalda, Veridiana, Clélia e Marli

BLOCO 1

Estudos teóricos e revisão de literatura sobre o tema

1. As relações entre as ideias-base do conceito de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Renato Francisco Merli
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Introdução

Este capítulo apresenta um recorte da tese de Merli (2022), com resultados sobre as relações entre as ideias-base, os conceitos organizadores da noção de função e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Inicialmente, descrevemos o que são os conceitos organizadores e as ideias-base. Na sequência, trazemos os conceitos organizadores e as ideias-base relacionados ao conteúdo de função, além da forma como são mencionados na BNCC, considerando diferentes níveis de ensino.

Por fim, realizamos uma discussão a respeito da abordagem desses conceitos ao longo dos anos escolares.

Conceitos organizadores

A noção de conceitos organizadores é inerente à Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1989; 1993; 1996a;

1996b; 1996c; 2003; 2009; 2017a; 2017b; 2019). Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) consideram que qualquer situação, da mais simples à mais complexa, possui uma estrutura conceitual formada por quatro elementos: 1) conceitos organizadores, 2) indicadores, 3) classes de situações e 4) estratégias esperadas.

No caso específico do primeiro elemento, conceitos organizadores, os autores os dividem em conceitos organizadores pragmáticos e conceitos organizadores. Os conceitos pragmáticos possuem três propriedades: 1) do ponto de vista de sua origem, são construídos na ação, ou seja, sua origem não é teórica, mas prática. Esse conceito não emana de um saber, mas de uma atividade; 2) do ponto de vista da sua função, um conceito pragmático é um conceito organizador da ação, na medida em que permite identificar em qual classe de situações um ator se encontra; 3) de uma dimensão social, um conceito pragmático é reconhecido como organizador da ação pela comunidade profissional (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Os conceitos organizadores da ação nem sempre são de origem pragmática, podendo ser conceitos científicos que exercerão a função de conceitos organizadores. Há de se destacar que os conceitos científicos/conceitos organizadores são "pragmatizados" para serem os organizadores de um esquema cujo objetivo é resolver uma situação-problema. Pode-se dizer que eles constituem a base para que o indivíduo faça um diagnóstico da situação e possa tomar as decisões necessárias a fim de resolvê-la.

Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) afirmam que os conceitos organizadores pragmáticos da ação do sujeito – implícitos ou explícitos – são os invariantes operatórios que se tornam então os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação que caracterizam um domínio de ação. Para os autores, "[...] a função primeira desses conceitos é guiar a ação, permitindo um diagnóstico preciso da ação ao selecionar a informação pertinente que vai possibilitar este diagnóstico" (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006, p. 24).

Para mostrar como os conceitos organizadores ora são pragmáticos, ora são conceitos científicos, Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) dão o exemplo de como os trabalhadores conduzem uma prensa de injeção de material plástico. Quando esses profissionais adquirem as competências necessárias para executar seu trabalho no "fazer", esses conceitos são pragmáticos e organizam a ação de execução. A passagem dessa competência, na maioria das vezes, se dá pela transmissão oral dos mais experientes, utilizando demonstrações (o como fazer pelo exemplo) e enunciações. Os especialistas enunciam ao mesmo tempo em que mostram, por exemplo: *Está vendo, ali, está enchendo; está com muito enchimento*. Os trabalhadores falam sobre o conceito de "enchimento", mas não o definem. O mais importante para eles é a transmissão de uma competência, e não a definição formal, pois o conceito organizador na forma de conceito científico cabe aos pesquisadores estabelecer (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2006).

Os *conceitos organizadores* permitem hierarquizar todas as tarefas de uma situação. Do ponto de vista pragmático ou do indivíduo em ação numa determinada tarefa para uma dada situação, o conjunto dos conceitos (organizadores pragmáticos) que organizam a ação e servem para guiá-la é designado por "estrutura conceitual da situação" (PASTRÉ, 1999). Dentro dessa estrutura, há conceitos que podem ser de origem pragmática (conceitos organizadores pragmáticos) ou científica (conceitos organizadores), sendo eles essenciais ao desenvolvimento da ação, permitindo notadamente um bom diagnóstico da situação. A partir dos estudos realizados por Pastré, Mayen e Vergnaud (2006) e Vergnaud (2019), consideramos os conceitos mobilizados pelos estudantes diante de uma situação como *conceitos organizadores* pragmáticos.

A respeito do conceito de função, admitimos que, de algum modo, as estruturas aditivas e multiplicativas são necessárias para o estabelecimento dos conceitos organizadores do conceito de função. Nesse sentido, Vergnaud (2019) afirma que alguns dos conceitos organizadores (de natureza científica) das estruturas aditivas são: "[...] quantidades discretas e contínuas, medida, estado/transformação, comparação significado/significante, composição binária (medidas, transformações, relações), operação unitária, inversão, número natural/número relativo e posição/abscissa/valor algébrico" (VERGNAUD, 2019, p. 12).

E, no cenário das estruturas multiplicativas, o autor acrescenta para além dos conceitos organizadores das

estruturas aditivas: "[...] análise dimensional, espaço vetorial, combinação linear, dependência e independência" (VERGNAUD, 2019, p. 12).

Admitindo a possibilidade de que os conceitos organizadores das estruturas aditivas e multiplicativas façam parte dos conceitos organizadores das estruturas funcionais, na próxima seção, apresentamos a noção de ideias-base, uma vez que elas são organizadoras do conceito em questão.

Ideias-base

A noção de ideias-base já vem sendo pesquisada pelo grupo do GEPeDiMa, que utiliza termos parecidos, mas com alguns significados diferentes, tais como: ideias básicas (CASTRO, 2012; CASTRO, RODRIGUES, 2013; PAVAN, 2010; PAVAN, NOGUEIRA, KATO, 2009; 2010); conhecimentos prévios (RORATTO, 2009); ideias base (sem hífen) (AMPLATZ, 2020; CALADO, 2020; CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019; DA SILVA, 2021; DA SILVA; NOGUEIRA, 2021; LORENCINI, 2019; LORENCINI; NOGUEIRA; REZENDE, 2020; MIRANDA, 2019; NOGUEIRA; REZENDE, 2018; 2019; PERON DA SILVA, 2021; REZENDE, 2018; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020); e ideias-base (RODRIGUES, 2021).

Neste texto, assumimos ideias-base a partir da tese de Merli (2022), que as considera:

> [...] como as associadas ao conhecimento científico e, quando mobilizadas pelo sujeito, consideramos como ideias-base pragmáticas, uma vez que o sujeito em ação mobiliza ideias-base, que são conceitos científicos, pragma-

> tizando-as como conceitos-em-ação, para organizar e resolver a situação-problema.

Ainda de acordo com Merli (2022, p. 144), as ideias-base são "[...] aqueles conceitos científicos já aceitos pela comunidade científica e que são essenciais ao estabelecimento dos demais conceitos", constituindo "[...] os conceitos primários de outro conceito, ou seja, elas subsidiam a elaboração do conceito em consideração". Dito de outra forma, "[...] a elaboração de um conceito está subordinada à mobilização pelo sujeito das respectivas ideias-base, sem as quais o sujeito não conceitualiza" (MERLI, 2022, p. 144).

Caracterizada a noção de ideia-base, é apresentada, no Quadro 1, a relação de alguns trabalhos de autores que pesquisaram sobre o tema e suas respectivas noções de conceitos subordinadores/organizadores do conceito de função afim, ou para nós, as ideias-base de função afim.

A partir do trabalho de Merli (2022), admitimos que, no âmbito dos conceitos organizadores, é possível reconhecer que eles se alteram ao longo do tempo; entretanto, existem conceitos organizadores que atravessam o tempo e que, portanto, são estruturas precedentes de outros conceitos, ou seja, constituem as ideias-base. Assim, a partir de um estudo histórico-cognitivo, Merli (2022, p. 165) estabeleceu como ideias-base do conceito de função os conceitos de dependência, generalização, regularidade e variável.

Quadro 1. Conceitos considerados ideias-base da função afim

Autor	Conceitos
(CARAÇA, 1998), (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019), (DA SILVA; NOGUEIRA, 2021), (KRUG; NOGUEIRA, 2022), (LORENCINI; NOGUEIRA; REZENDE, 2020), (NOGUEIRA; REZENDE, 2018) (NOGUEIRA; REZENDE, 2019), (PAVAN, 2010), (PAVAN; NOGUEIRA; KATO, 2009) (PAVAN; NOGUEIRA; KATO, 2010) (PERON DA SILVA, 2021), (PERON DA SILVA; NOGUEIRA; REZENDE, 2019), (REZENDE, 2018), (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), (MIRANDA, 2019)	variável, dependência, regularidade, correspondência e generalização.
(TINOCO, 2002), (CASTRO, 2012), (MENDES; CASTRO; RODRIGUES, 2012)	variável, dependência, regularidade e generalização.
(CASTRO; RODRIGUES, 2013)	incógnita, variável, generalização.
(CAMPITELI; CAMPITELI, 2006)	proporcionalidade, dependência, continuidade, descontinuidade, relação, variável, regularidade, correspondência e generalização.

Fonte: Merli (2022, p. 145).

Levando em consideração as ideias-base apresentadas e a constatação de que as aulas de matemática da educação básica sobre funções são geralmente iniciadas com a parte algébrica, com conceitos anteriores atrelados à teoria de conjuntos, utilizamos os resultados anteriores dos trabalhos do GEPeDiMa – incluindo a tipologia das situações-problema e os contextos a elas associadas –, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e a caracterização dos níveis de entendimento do conceito de função

de Bergeron e Herscovics (1982) para apresentar uma proposta hierarquizada para a abordagem dos conceitos organizadores e das ideias-base de função na estrutura curricular do ensino de matemática no Brasil.

De acordo com Bergeron e Herscovics (1982), os níveis de entendimento do conceito de função podem ser divididos em quatro: entendimento intuitivo, matematização inicial, abstração e formalização. O entendimento intuitivo é caracterizado pela compreensão dos pré-conceitos (ou noções iniciais) e pela percepção visual; a matematização inicial é evidenciada pela apreensão de alguns procedimentos que, coordenados com o entendimento intuitivo e os pré-conceitos, constituem uma primeira construção do conceito; a abstração de uma noção é revelada por meio da apreensão da sua generalização, pela permanência de um objeto matemático (conservação), ou pela reversibilidade das transformações; por fim, a formalização é notada quando há o uso de simbolismos ou pela justificação lógica das operações ou pela descoberta de axiomas. Nesses casos, a formalização ocorre apenas se a abstração já tiver ocorrido.

Dito de outra forma, como o conceito de função pode ser desenvolvido nos anos iniciais do ensino fundamental ao ensino superior, os níveis propostos por Bergeron e Herscovics (1982) permitirão identificar, em cada etapa do ensino, quais as situações-problema, os conceitos organizadores, as ideias-base e as representações que se fazem presentes e como esses quatro elementos são alterados por meio de uma hierarquização.

As situações-problema de cada nível de ensino apresentadas na sequência são fruto das pesquisas do GEPeDiMa, que utilizou uma tipologia baseada nos Campos Conceituais e na proposta de diversos autores de que uma situação-problema deve ser contextualizada em um sentido prático para os estudantes (FUZZO, REZENDE, 2021; GITIRANA, CAMPOS, MAGINA, SPINILLO, 2014; MAGINA, CAMPOS, NUNES, GITIRANA, 2008; MIRANDA, 2019; VERGNAUD, RICCO, 1977). Ou seja, o sentido prático aqui posto é oriundo de situações que fazem parte do cotidiano dos estudantes, e não apenas da aplicação de algoritmos e fórmulas de situações já abstraídas, a exemplo de "calcule o valor de *x* no triângulo retângulo dado".

Assim, na próxima seção, a nossa proposta de estabelecer uma sequência hierarquizada dos conceitos organizadores, das ideias-base, das formas de representação e da tarefa principal das situações-problema, por nível de escolaridade para o ensino de funções, é caracterizada e exemplificada.

Base Nacional Comum Curricular – BNCC e as articulações com as ideias-base

De acordo com a BNCC, na etapa do ensino fundamental, as diferentes áreas da matemática reúnem "[...] um conjunto de *ideias fundamentais* que produzem articulações entre elas: *equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação*" (BRASIL, 2017, p. 266). O documento cita a proporcionalidade como um exemplo de conceito que

deve estar acoplado ao estudo de "[...] operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc." (BRASIL, 2017, p. 266).

Das ideias fundamentais presentes na BNCC, apenas a ideia de aproximação não está associada às ideias-base propostas aqui. As demais ideias, em nossa perspectiva, estão presentes nas estruturas aditiva e multiplicativa.

Na unidade temática Números, os alunos precisam ser postos em contato com situações significativas que desenvolvam "[...] o processo de construção da noção de número [...], as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem" (BRASIL, 2017, p. 268).

As ideias matemáticas fundamentais associadas à unidade temática Geometria, segundo a BNCC, são construção, representação e interdependência. Em Grandezas e Medidas, espera-se que essa unidade contribua "[...] para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico" (BRASIL, 2017, p. 273).

Na unidade Álgebra, a BNCC sugere que a "[...] noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)" (BRASIL, 2017, p. 270).

A partir da articulação entre o quarteto proposto por Merli (2022), qual seja, situações-problema, conceitos organizadores, ideias-base e representações, e os quatro níveis de entendimento de função por Bergeron e

Herscovics (1982), a saber, entendimento intuitivo, matematização inicial, abstração e formalização, o Quadro 2, o Quadro 3, o Quadro 4 e o Quadro 5 foram construídos, e cada um deles se refere a um nível específico de ensino.

Nas situações-problema, para cada nível de entendimento de função é dado um exemplo de qual seria a situação a ser realizada; no caso dos conceitos organizadores, não esgotamos todas as possibilidades; nas representações, por fim, utilizamos as identificadas por Merli (2022): verbal (oral) e escrita, tabular, curvas geométricas, plano cartesiano, equações, pictórica, expressões algébricas, gráfico, expressão analítica, séries, fórmula, equação diferencial parcial, superfícies, sistema de equações, par ordenado, expressão lógica, integral, expressão booleana, diagrama de Venn, conjuntos e grafos.

O primeiro nível é evidenciado pelo conhecimento informal, uma espécie de pré-conceito baseado numa percepção visual e em aproximações do conceito. Para Bergeron e Herscovics (1982), os estudantes do final do ensino fundamental devem ter adquirido noções de variação, relação e dependência.

O segundo nível, a matematização inicial, é a posição na qual o estudante estabelece procedimentos a partir do conhecimento intuitivo do nível anterior. A matematização inicial demanda situações em que seja necessário quantificar variações e estabelecer relações por meio de medições ou tabulações de valores envolvendo as variáveis. Ainda nesse nível, é essencial a apresentação das diferentes representações, como a gráfica e a algébrica.

Na abstração, nível três, o estudante mostra evidências de generalização ou a conservação de objetos matemáticos por meio da reversibilidade de transformações. Nesse momento, é necessário distinguir a noção de relação da de função e compreender as noções de dependência e independência, domínio e imagem.

Por último, a formalização, quarto momento, acontece quando há o uso da simbologia matemática e de justificativas lógicas para as operações pela descoberta de axiomas e teoremas que explicitem os conceitos. Nesse nível, há a necessidade de compreensão de que o conceito de uma função engloba regras para determinação de uma equação (fórmula), domínio e imagem de números reais, correspondência entre variáveis por meio de tabelas, pares ordenados e diagramas de flecha. Esse modelo, além de cognitivo, também pode ser encarado como didático, uma vez que descreve o caminho pelo qual o professor pode introduzir as primeiras noções de funções até chegar ao seu conceito propriamente dito.

A título de análise do Quadro 2 e dos demais, admitimos que, à medida que se percorre cada quadro no sentido horizontal, acontece uma inclusão hierárquica de classes em cada um dos elementos do quarteto. Por exemplo, as ideias-base dependência e variável devem estar presentes não apenas no nível de entendimento intuitivo, mas também na matematização, na abstração e na formalização. O mesmo acontece em relação às formas de representação e aos conceitos organizadores.

Quadro 2. Níveis de função e o quarteto – Ensino fundamental (anos iniciais)

Quarteto/níveis	Entendimento intuitivo	Matematização	Abstração	Formalização
Situações	Observe a sequência...	Complete a tabela e construa um gráfico...	Escreva uma expressão que dê a área...	Determine o domínio, imagem....
Conceitos organizadores	Número, sistema de numeração, números naturais, números ordinais, gráficos.	Padrões figural e numérico, regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais.	Relação de igualdade em uma expressão analítica.	–
Ideias-base	Dependência, variável.	Dependência, variável e regularidade.	Dependência, variável, regularidade e generalização.	Todas
Representações	Verbal (oral) e escrita, tabular, diagrama de Venn, pictórica.	Expressões, curvas geométricas, gráfico, par ordenado, plano cartesiano.	Expressões algébricas.	Todas

Fonte: Merli (2022, p. 172).

Peron da Silva (2021) apresenta os critérios para constituição de um instrumento de produção de dados muito completo que foi aplicado a estudantes do 5º ano do ensino fundamental. A partir desse instrumento, escolhemos dois problemas para exemplificar como uma situação-problema pode mobilizar os conceitos organizadores, as ideias-base e as representações do conceito de função.

No caso do entendimento intuitivo, por exemplo, a situação apresentada no Problema 1 – Bloco 1 (Figura 1) evoca um tipo de "Observe"; no caso dos conceitos organizadores retomados, evidenciamos o conceito de número, o sistema de numeração decimal e os números naturais; a ideia-base presente é a de dependência e a representação é escrita (língua natural) e pictórica. Os processos de matematização, abstração e generalização ainda não estão presentes nesse tipo de situação-problema.

Figura 1. Problema 1 – Bloco 1

Combinação – com todo desconhecido (Pavan (2010, p. 46), baseada em Nunes (2001))

Problema 1 – Bloco 1

Julia tem três camisetas e dois shorts que ela usa para fazer caminhadas. Se ela combinar, por exemplo, a camiseta vermelha com o short verde, faz um conjunto. Se ela combinar a camiseta amarela com o short verde, faz outro conjunto diferente. Se ela combinar em cada dia uma das três camisetas com um dos dois shorts, quantos conjuntos diferentes ela pode fazer?



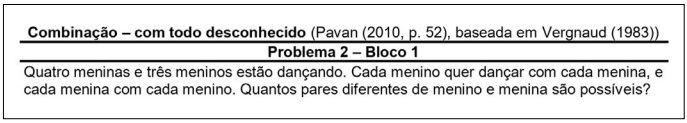
Figura - Apoio Visual do Problema 1

Fonte: Peron da Silva (2021, p. 84).

No Problema 2 – Bloco 1 (Figura 2), a situação, os conceitos organizadores e a ideia-base são os mesmos

do Problema 1. Entretanto, a representação é apenas escrita. Os demais níveis de função, matematização, abstração e generalização, não são necessários.

Figura 2. Problema 1 – Bloco 1


Combinação – com todo desconhecido (Pavan (2010, p. 52), baseada em Vergnaud (1983))
Problema 2 – Bloco 1
Quatro meninas e três meninos estão dançando. Cada menino quer dançar com cada menina, e cada menina com cada menino. Quantos pares diferentes de menino e menina são possíveis?

Fonte: Peron da Silva (2021, p. 84).

Para compreender como o conceito de função está sendo desenvolvido em outro nível de escolaridade, a própria BNCC enuncia elementos que estão presentes no nível da matematização, ou seja, o conceito de função está sendo aprimorado, avançando em relação à proposta de Bergeron e Herscovics (1982); nesse sentido, os elementos do quarteto também evoluem.

Assim, no ensino fundamental – anos finais, na temática Números, há de se ampliar a noção de número para o conjunto dos inteiros, racionais e irracionais. Espera-se também que os alunos desenvolvam o conceito de porcentagem (BRASIL, 2017).

Na unidade temática Álgebra, as ideias matemáticas fundamentais vinculadas são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade, que, "[...] por sua vez, têm como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico" (BRASIL, 2017, p. 270). Nessa unidade, os alunos precisam identificar "[...] regularidades e padrões de

sequências numéricas e não numéricas", estabelecer "[...] leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas" (BRASIL, 2017, p. 270). Dito de outra forma, o conceito de função está sendo "matematizado" (leis matemáticas) nessa etapa da escolarização.

Ainda na temática Álgebra, a BNCC indica que:

> [...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação (BRASIL, 2017, p. 270-271).

A citação anterior aponta que o desenvolvimento da Abstração é esperado nesta etapa da escolarização. As ideias matemáticas fundamentais associadas à temática Geometria são, principalmente, a construção, a representação e a interdependência (BRASIL, 2017). A partir da análise dessas informações, montamos o Quadro 3.

Calado (2020) realizou uma investigação a respeito dos invariantes operatórios relacionados à ideia-base generalização, mobilizados por estudantes dos anos finais do ensino fundamental. Do instrumento de produção de dados de Calado (2020), extraímos a situação-problema para exemplificar o nível Abstração (Figura 3).

Quadro 3. Níveis de função e o quarteto – Ensino fundamental (anos finais)

Quarteto	Entendimento intuitivo	Matematização	Abstração	Formalização
Situações	Observe a sequência...	Complete a tabela e construa um gráfico ...	Escreva uma expressão que dê a área...	Determine o domínio, imagem, ...
Conceitos organizadores	Número, sistema de numeração, números naturais, números ordinais, gráficos.	Padrões figural e numérico, regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais.	Relação de igualdade em uma expressão analítica.	–
Ideias-base	Dependência, variável.	Dependência, variável e regularidade.	Dependência, variável, regularidade e generalização.	Todas
Representações	Verbal (oral) e escrita, tabular, diagrama de Venn, pictórica.	Expressões, curvas geométricas, gráfico, Par ordenado, plano cartesiano	Expressões algébricas.	Todas

Fonte: Merli (2022, p. 173).

Figura 3. Atividade 1

Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$\ 0{,}18$ cada um.

a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães?
b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães?
c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020, p. 70).

A situação-problema apresentada por Calado (2020) encontra-se no nível de abstração, ou seja, os dois níveis anteriores (entendimento intuitivo e matematização) são considerados já apropriados pelos estudantes. Os conceitos organizadores necessários aos estudantes são: conceito de número, sistema de numeração, números naturais, números ordinais, gráficos, padrões figural e numérico, regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais e relação de igualdade em uma expressão analítica.

As ideias-base primordiais são dependência, regularidade e generalização. Entretanto, embora a BNCC considere que o desenvolvimento do nível abstração esteja efetivado nesta etapa de escolarização, a pesquisa de Calado (2020) não confirma essa expectativa. Seus resultados indicam que os alunos possuem muita dificuldade na representação algébrica, o que fica claro ao se levar em conta o elevado quantitativo de erros apresentados na letra c da Atividade 1.

Esses resultados sugerem que o desenvolvimento de todos os níveis de entendimento do conceito de função acontece em todas as etapas do ensino; contudo,

a concretização e a consolidação de cada um desses conceitos organizadores, ideias-base e representações decorrem de forma lenta e gradual.

No ensino médio, a BNCC propõe que "[...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas" e, portanto, "[...] devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2017, p. 529).

Uma das competências específicas da Matemática e suas Tecnologias, na BNCC, é "[...] compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas" (BRASIL, 2017, p. 531). Essas discussões permitiram desenvolver o Quadro 4.

Em recente texto de Fuzzo (2022), o autor estabelece uma tipologia de situações de juros simples a partir de problemas de livros didáticos do ensino médio. Entre essas situações, há o problema apresentado na Figura 4.

Figura 4. Problema sobre juros simples

> *28.* O preço à vista de uma TV é R$ 900,00. Pode-se, entretanto, optar pelo pagamento de R$ 500,00 de entrada e mais R$ 500,00 um mês após a compra.
> a) Qual é a taxa mensal de juros simples desse financiamento?

Fonte: Fuzzo (2022, p. 79)

Quadro 4. Níveis de função e o quarteto – Ensino médio

Quarteto	Entendimento intuitivo	Matematização	Abstração	Formalização
Situações	Observe a sequência...	Complete a tabela e construa um gráfico...	Escreva uma expressão que dê a área...	Determine o domínio, imagem....
Conceitos organizadores	Número, sistema de numeração, números naturais, números ordinais, gráficos.	Padrões figural e numérico, regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais.	Relação de igualdade em uma expressão analítica.	Domínio, imagem, propriedades (injetora, sobrejetora, bijetora), monotônica, contínua, tipos de função (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica).
Ideias-base	Dependência, variável.	Dependência, variável e regularidade.	Dependência, variável, regularidade e generalização.	Todas
Representações	Verbal (oral) e escrita, tabular, diagrama de Venn, pictórica.	Expressões, curvas geométricas, gráfico, par ordenado, plano cartesiano.	Expressões algébricas.	Todas

Fonte: Merli (2022, p. 174).

Essa situação-problema, para ser resolvida, necessita de algumas etapas:

> [...] identificar o montante da operação, que é o valor de R$ 500,00 (parcela após um mês); o capital financiado, que é R$ 400,00 (900 – 500), uma operação de composição de medidas do campo conceitual das estruturas aditivas; o valor dos juros na operação, que são R$ 100,00 (a diferença entre o montante R$ 500,00 e o capital R$ 400,00), uma operação de transformação de medidas; e calcular a taxa de juros a partir do valor do capital, do valor dos juros e do período, que é um mês. A última etapa é uma relação quaternária das estruturas multiplicativas da categoria *proporção simples* e classe *partição* (Fuzzo, 2022, p. 79).

Nessas etapas, os conceitos organizadores presentes são: conceito de número, sistema de numeração, números racionais, números ordinais, regularidades em sequências recursivas formadas por números racionais, relação de igualdade em uma expressão analítica e o conceito de função afim. Portanto, para a compreensão dessa situação, o nível abstração precisa estar consolidado, enquanto a formalização, pelo menos para situações contextualizadas, no sentido de ter significado para os estudantes, já alcançou um estágio de desenvolvimento adequado. Entretanto, a consolidação desse nível só será possível em cursos superiores, de maneira que não é alcançada por aqueles que não se graduam em cursos vinculados à área de exatas, por exemplo.

No Parecer Técnico do Conselho Nacional de Educação sobre as diretrizes curriculares para os cursos de

Matemática, é esperado do egresso do curso de Licenciatura em Matemática que ele tenha a "[...] habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema" (BRASIL, 2001, p. 3).

A título de exemplo e parâmetro, o Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR – Toledo possui oito disciplinas que vão trabalhar desde a noção de função até as últimas definições que incluem equações diferenciais e séries, a saber: Tópicos de Matemática A, Tópicos de Matemática B, Funções Reais de uma Variável Real, Cálculo A, Cálculo B, Sequências e Séries, Equações Diferenciais Ordinárias e Álgebra.

Entre as diferentes disciplinas, elencamos alguns objetivos focados nos conceitos de função e de pensamento funcional:

> [...] Desenvolver a capacidade de analisar, relacionar, comparar, classificar, sintetizar, avaliar, abstrair, generalizar e criar matematicamente; adquirir hábitos de rigor e precisão, de ordem e clareza e de uso correto da linguagem matemática e [...] procurar, selecionar e formular hipóteses, interpretar informações e prever resultados relativos ao problema; associar funções e seus limites (TOLEDO, 2017, p. 45).

A partir dessas considerações, temos o Quadro 5, resultado das articulações entre o quarteto e a tipificação de função no ensino superior.

No livro *Cálculo – Volume 1*, de George B. Thomas, há um problema sobre função (Figura 5).

Quadro 5. Níveis de função e o quarteto – Ensino superior

Quarteto	Entendimento intuitivo	Matematização	Abstração	Formalização
Situações	Observe a sequência...	Complete a tabela e construa um gráfico...	Escreva uma expressão que dê a área...	Determine o domínio, imagem...
Conceitos organizadores	Número, sistema de numeração, números naturais, números ordinais, gráficos.	Padrões figural e numérico, regularidades em sequências recursivas formadas por figuras, objetos e números naturais.	Relação de igualdade em uma expressão analítica.	Domínio, imagem, propriedades (injetora, sobrejetora, bijetora), monotônica, contínuas, tipos de função (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica), recursiva, iterativa, série, limite, derivada, integral, equação diferencial ordinária e parcial.
Ideias-base	Dependência, variável.	Dependência, variável e regularidade.	Dependência, variável, regularidade e generalização.	Todas
Representações	Verbal (oral) e escrita, tabular, diagrama de Venn, pictórica.	Expressões, curvas geométricas, gráfico, Par ordenado, plano cartesiano.	Expressões algébricas, séries, equações diferenciais, integrais, sistemas de equações, superfícies.	Todas

Fonte: Merli (2022, p. 175).

Figura 5. Problema de cálculo

59. *Produção de petróleo na Indonésia* A Tabela 15 apresenta a quantidade de petróleo produzida na Indonésia (em toneladas métricas) em três anos diferentes.

(a) Utilize uma calculadora ou computador para calcular a equação de regressão logarítmica natural $y = a + b \ln x$ para os dados da Tabela 15 e depois use essa equação para calcular o número de toneladas métricas produzidas na Indonésia em 1982 e em 2000. Use $x = 60$ para representar 1960, $x = 70$ para 1970 e assim por diante.

(b) Sobreponha o gráfico da equação de regressão logarítmica ao de dispersão.

(c) Utilize o gráfico da equação da regressão para prever a produção de petróleo em 1982 e em 2000.

Ano	Toneladas métricas (em milhões)
1960	20,56
1970	42,10
1990	70,10

Fonte: Statesman's Yearbook, 129ª ed.
(Londres: The Macmillian Press Ltd., 1992).

Fonte: Thomas (2002, p. 42).

Para a solução desse problema, são essenciais os conceitos organizadores: número, sistema de numeração, números racionais, números ordinais, relação de igualdade em uma expressão analítica e o conceito de função logarítmica. Portanto, a resolução dá-se em nível de formalização, demandando todas as ideias-base do conceito de função.

Assim, além de todas as ideias-base, todos os conceitos organizadores referentes aos níveis anteriores e todas as formas de representação são necessários ao nível de formalização. Esses resultados mostram que há a inclusão hierárquica de classes entre os diferentes níveis de desenvolvimento do conceito de função, ou seja, esses níveis não são disjuntos. Tudo que está no intuitivo, está na matematização, que, por sua vez, está na abstração e na formalização. A cada novo nível de ensino são acrescidos novos elementos.

Algumas considerações

Merli (2022) considera que uma lacuna no ensino de função está na falta de diversidade entre as situações apresentadas aos estudantes, que lhes permitiriam mobilizar os conceitos, ideias-base e representações de função necessárias para as resoluções. Junto a isso, impera a necessidade de estabelecer uma estrutura hierárquica de situações e conceitos que possa subsidiar a atuação didático-pedagógica dos professores que ensinam Matemática, na abordagem do objeto de conhecimento função, nos diferentes níveis de escolarização.

Sem tais subsídios, a ação docente acaba se pautando, quase exclusivamente, em livros didáticos que, conforme pesquisas realizadas no âmbito do GEPeDiMa (KRUG, NOGUEIRA, 2022; MIRANDA, 2019; RODRIGUES, 2021; SCHMITT ZANELLA, REZENDE, 2022), não apresentam a diversidade de situações adequada nem fazem uso de diferentes formas de representação. Em geral, o ensino de funções,

quando esse objeto de conhecimento está explicitado, é focado nas representações algébricas, cujo propósito é ensinar técnicas e algoritmos, distanciando o conceito de suas aplicações, ou seja, o conceito de seu significado.

Buscando contribuir para a ação docente, este capítulo, a partir dos resultados das pesquisas realizadas no âmbito do GEPeDiMa, entre as quais está a de Merli (2022) – que apresenta o quarteto fundante de um conceito; das recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), relativas ao objeto de conhecimento matemático função; e da caracterização dos níveis de função de Bergeron e Herscovics (1982) –, estabelece uma proposta hierarquizada dos conceitos organizadores, das ideias-base, das formas de representação e da tarefa principal das situações-problema, por nível de escolaridade.

Um próximo passo é estabelecer a tipificação das situações que possam levar os estudantes a mobilizar os conceitos organizadores, as ideias-base e as representações em cada nível de função das diferentes etapas de ensino, da educação básica ao ensino superior.

Referências

AMPLATZ, L. C. *O estudo da função afim a partir da interpretação global de propriedades figurais:* uma investigação com estudantes do ensino médio. 2020. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/5152>. Acesso em: 11 ago. 2022.

BERGERON, J. C.; HERSCOVICS, N. Levels in the understanding of the function concept. *In*: CONFERENCE ON FUNCTIONS, 1.,1982, Montreal, Canada. *Anais* [...]. Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development, 1982, p. 39-55.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular – Educação é a Base. Brasília: Fundação Carlos Alberto Vanzolini, p. 600.

BRASIL, Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001 – homologado. Brasília: Diário Oficial da União, p. 8.

CALADO, T. V. *Invariantes operatórios relacionados à generalização*: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função a fim. 2020. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020. Disponível em: http://tede.unioeste.br/handle/tede/5249. Acesso em: 11 ago. 2022.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. *Funções*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 2. ed. Lisboa: Gradiva Publicações, 1998.

CASTRO, K. de O. Ideias básicas de função no 9º ano do ensino fundamental: uma sequência de atividades com o auxílio do software Winplot. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 6, n. 2, 2012. DOI: 10.5007/1981-1322.2011v6n2p49. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p49. Acesso em: 2 abr. 2022.

CASTRO, K. de O.; RODRIGUES, C. K. Generalização verbal e simbólica no trabalho com ideias de função. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba, Paraná. *Anais* [...].

Curitiba: SBEM-PR, 2013, p. 1-13. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/3357_1490_ID.pdf. Acesso em: Acesso em: 10 mar. 2023.

CIANI, A. B.; NOGUEIRA, C. M. I.; BERNS, M. A construção do conceito de função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. *In*: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Wellington (ed.). *Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade*: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p. 29-50.

DA SILVA, S. da. D. *O processo de generalização de função afim na perspeciva de Jean Piaget*. 2021. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática Universidade Estadual do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: http://biblioteca.unespar.edu.br:8080/pergamumweb/vinculos/00008a/00008acc.pdf. Acesso em: 11 ago. 2022.

DA SILVA, S. D.; NOGUEIRA, C. M. I. Dissertações brasileiras relacionadas ao ensino de função afim sob a perspectiva das teorias da Didática da Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 448-472, 2021. DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i1p448-472. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/50530. Acesso em: 1 abr. 2022.

FUZZO, R. A. *Uma tipologia de situações de juros simples com base na teoria dos campos conceituais*. 2022. 129 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/6347. Acesso em: 10 mar. 2023.

FUZZO, R. A.; REZENDE, V. Situações-problema de juros simples classificados à luz da teoria dos campos conceituais. *In*: SEMINÁRIO DE ESCRITAS E LEITURAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2021, Floria-

nópolis, Santa Catarina. *Anais* [...]. Florianópolis: SBEM-SC, 2021, p. 1-10. Disponível em: https://conferencias.ufsc.br/index.php/selem/viselem/paper/view/1863/1213. Acesso em: 15 out. 2022.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. G. *Repensando Multiplicação e Divisão*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: Proem Editora, 2014.

KRUG, C. B. S.; NOGUEIRA, C. M. I. Ideias base de função e função afim: analisando o livro didático do Ensino Médio. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, São Paulo, v. 13, n. 1, p. 1-18, 2022. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/3117. Acesso em: 13 out. 2022.

LORENCINI, P. B. M. *Possibilidades inclusivas do diálogo entre videntes e alunos com deficiência visual em uma sequência didática sobre Função Afim*. 2019. 226 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: http://tede.unioeste.br/handle/tede/4670. Acesso em: 11 ago. 2022.

LORENCINI, P. B. M.; NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Formas operatória e predicativa de conhecimentos sobre função afim identificadas a partir do diálogo entre alunos videntes e com deficiência visual. RBECM: Revista Brasileira de Ensino de Ciências da Matemática, Goiânia, Goiás, v. 3, n. 2, p. 625-653, jul./dez., 2020. Disponível em: https://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/10013. Acesso em: 11 ago. 2022.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. *Repensando Adição e Subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. 3. ed. São Paulo: Proem Editora, 2008.

MENDES, S. C. C.; CASTRO, K. DE O.; RODRIGUES, C. K. Razão áurea e ideias básicas de função: uma proposta de trabalho no 7º ano

do ensino fundamental. *Revemat: Revista E de E Matemática*, Florianópolis, Santa Catarina, v. 6, n. 2, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p37. Acesso em: 10 mar. 2023.

MERLI, R. F. *Do pensamento funcional ao campo conceitual de função*: o desenvolvimento de um conceito. 2022. 215 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/6451. Acesso em: 23 fev. 2023.

MIRANDA, C. de A. *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: http://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 10 out. 2022.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Investigando o campo conceitual das funções: Primeiros resultados. *REBECEM: Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, Cascavel, Paraná, v. 2, n. 3, p. 411-431, 2018. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/21255. Acesso em: 10 mar. 2023.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Mapeando o Campo Conceitual da função afim: primeiros passos. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 193-204, 2019. DOI: 10.23925/1983-3156.2019v21i5p193-204. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/45555. Acesso em: 1 abr. 2022.

PASTRÉ, P. La conceptualisation dans l'action: bilan et nouvelles perspectives. Éducation *permanente*, Paris, França, n. 139,

p. 13-35, 1999. Disponível em: https://hal-cnam.archives-ouvertes.fr/hal-02279882. Acesso em: 20 fev. 2022.

PASTRÉ, P.; MAYEN, Patrick; VERGNAUD, Gérard. La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie*, Lyon, França, v. 154, p. 145-198, jan.-mar., 2006. DOI: 10.4000/rfp.157. Disponível em: https://journals.openedition.org/rfp/157. Acesso em: 15 fev. 2022.

PAVAN, L. R. *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*, Maringá, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciência e a Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4378. Acesso em: 10 fev. 2021.

PAVAN, L. R.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO, L. A. As relações entre o Campo Conceitual Multiplicativo e as Ideias básicas do conceito de função: um estudo com crianças da 4ª série (5º ano) do ensino fundamental. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EPREM), 10., 2009, Guarapuava. *Anais* [...]. Guarapuava: Unicentro / SBEM Paraná, 2009, p. 15-35.

PAVAN, L. R.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO, L. A. A Mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. *Anais* [...]. Salvador: SBEM, 2010, p. 1-11.

PERON DA SILVA, L. Del C. *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função*. 2021. 555 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel,

2021. Disponível em: http://tede.unioeste.br/handle/tede/5773. Acesso em: 11 ago. 2022.

PERON DA SILVA, L. Del C.; NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V. Análise de problemas do campo conceitual multiplicativo presentes em livros didáticos de 5º ano ofertados pelo PNLD. *Ensino de Matemática em Debate*, São Paulo, v. 6, n. 3, p. 89-119, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/44521. Acesso em: 15 out. 2022.

REZENDE, V. Ideias base do conceito de função mobilizadas (ou não) por estudantes de diferentes níveis de ensino. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., Foz do Iguaçu, 2018. *Anais* [...]. Foz do Iguaçu, Paraná: SBEM-PR, 2018, p. 1-12.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, Santa Catarina, v. 13, n. 2, p. 25-50, nov., 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/62643. Acesso em: 10 mar. 2023.

RODRIGUES, C. L. H. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: <http://tede.unioeste.br/handle/tede/5815>. Acesso em: 11 ago. 2022.

RORATTO, C. *A história da matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função*. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciência e Educação) – Educação para a Ciência e a Educação, Universidade

Estadual de Maringá, Maringá, 2009. Disponível em: http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4373. Acesso em: 24 mai. 2021.

SCHMITT ZANELLA, M.; REZENDE, V. Ideias-base de função a partir de situações multiplicativas em livros didáticos dos anos iniciais. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, Campo Mourão, Paraná, v. 11, n. 25, p. 152-177, 2022. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5166. Acesso em: 5 dez. 2022.

THOMAS, G. B. *Cálculo – Volume 1*. São Paulo: Pearson, 2002.

TINOCO, L. A. de A. *Construindo o conceito de função*. 4. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2002.

TOLEDO, Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR. Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática. Toledo: UTFPR, Toledo, p. 135.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, v. S6, p. 47-50, Samedi 26 août, 1989. Disponível em: http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_47_0. Acesso em: 25 mar. 2021.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de janeiro. *Anais* [...]. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-27.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. *In*: Brun, Jean (ed.). *Didáctica da Matemática***.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 155-192.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. *In*: Brun, Jean (ed.). *Didáctica das Matemáticas***.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996b. v. único, p. 155-191.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEEMPA*, 1996c, p. 9-19.

VERGNAUD, G. A gênese dos Campos Conceituais. *In*: Grossi, Esther Pillar (ed.). *Por que ainda há quem não aprende?* 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2003, p. 21-64.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, Basel, Switzerland, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009. DOI: 10.1159/000202727.

VERGNAUD, G. História de elaboração da Teoria dos Campos Conceituais. *In*: COLÓQUIO INTERNACIONAL SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS, 2., 2017a, Brasília. *Anais* [...]. Brasília: Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia da Pesquisa e Ação (GEEMPA), 2017a, p. 5-27.

VERGNAUD, G. *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud*: Teoria dos Campos Conceituais. Coleção Campos Conceituais, Porto Alegre: GEEMPA, 2017b.

VERGNAUD, G. Quais questões a teoria dos campos conceituais busca responder? *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, Aracaju, Sergipe, v. 9, n. 1, p. 5-28, 2019.

VERGNAUD, G.; RICCO, G. Psychogenese et programme d'enseignement: differents aspects de la notion de hierarchy. *Bulletin de Psychologie*, v. 330, n. 17, p. 877-882, 1977.

2. Situações de função afim na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais

Clarice de Almeida Miranda
Veridiana Rezende

Introdução

Neste capítulo, apresentamos reflexões sobre análises de estruturas de situações que envolvem o conceito de função afim. Os resultados apresentados são parte da dissertação de mestrado da primeira autora, que teve por objetivo estabelecer classes para tais situações, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990; 2009a; 2009b).

De acordo com o documento que norteia o sistema educacional no Brasil, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), o conceito de função deve ser estudado no 9º ano do ensino fundamental e aprofundado no 1º ano do ensino médio. O mesmo documento recomenda que ideias de função sejam propostas aos estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental, por meio de situações que possibilitam,

por exemplo, o reconhecimento de padrões (regularidade) para completar sequências de números naturais, objetos ou figuras, de acordo com a lógica do padrão mostrado (BRASIL, 2018).

Pesquisas como as de Pavan, Nogueira e Kato (2009) e Magina e Porto (2018) discutem o pensamento funcional presente em situações das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas voltadas para os anos iniciais. Pavan, Nogueira e Kato (2009) indicam a manifestação de ideias-base de função, variável, dependência, regularidade e generalização por parte dos estudantes da 4ª série, correspondente ao 5º ano, ao resolverem situações de estruturas aditivas e multiplicativas. Magina e Porto (2018), por sua vez, verificam os indícios do pensamento funcional na resolução de problemas de proporção simples por estudantes do 5º ano do ensino fundamental.

Essas pesquisas foram base para a construção das primeiras hipóteses dessa investigação, de forma que pudéssemos explorar as situações envolvendo o conceito de função afim levando em consideração os estudos das situações das estruturas aditivas e multiplicativas estabelecidas por Vergnaud, ou seja, tomando como base as classes de situações do campo conceitual aditivo: composição de medidas, transformação de medidas, relação entre medidas, composição de transformações, transformação de relações e composição de relações; e as classes de situações do campo conceitual multiplicativo: proporção simples, comparação multiplicativa, produto de medidas, proporção dupla e proporção múltipla.

Perguntamo-nos, por fim, se seria possível uma classificação para situações que envolvem o conceito de função, mais particularmente o conceito de função afim.

Assim, com vistas a alcançarmos uma classificação de estruturas de situações relacionadas à função afim, levamos em consideração quatro aspectos: (i) o conceito de função afim é diretamente relacionado às operações de adição de multiplicação, sendo possível verificar essa ideia a partir de sua representação algébrica, $f(x)=ax+b$, com $a \neq 0$; (ii) situações que envolvem os conceitos de adição e de multiplicação podem ser analisadas e classificadas a partir das estruturas aditivas e multiplicativas, estabelecidas por Vergnaud (1990; 2009a; 2009b); (iii) de acordo com Vergnaud (2009b), é possível estudar problemas mistos, nos quais são contempladas as operações de adição ou subtração e de multiplicação ou divisão, simultaneamente; (iv) Vergnaud (2009b) não apresenta uma classificação para os problemas mistos.

Elementos da Teoria dos Campos Conceituais

O pesquisador e professor Gérard Vergnaud propôs a Teoria dos Campos Conceituais com o objetivo de compreender o desenvolvimento e a aprendizagem de competências complexas ao longo da experiência de um sujeito (VERGNAUD, 1993). Um dos pressupostos defendido pelo pesquisador é que o sujeito adquire uma nova competência ou compreende um novo conceito por meio da experiência, ao longo de vários anos, incluindo as experiências escolares. Esse processo de formação de

um conceito novo percorre numerosas etapas, filiações e rupturas[1] (VERGNAUD, 2011).

Considerando esse processo de formulações e reformulações de conhecimentos por meio da experiência, Vergnaud (2009a) considera que conhecer é se adaptar, e que o sujeito se adapta às situações que lhe são propostas. Portanto, "[...] é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança" (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Vergnaud (2009b, p. 15) afirma que "[...] os conhecimentos que a criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, a criança, é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói".

Ao longo da ação do sujeito mediante uma situação, os conhecimentos mobilizados durante suas formulações podem ser explícitos ou implícitos, denominados, na teoria, de invariantes operatórios – teoremas em ação e conceitos em ação. Já a organização invariante da atividade, ao resolver situações de uma determinada classe de problemas, é denominada de esquema (VERGNAUD, 1993; 2009a; 2009b). O esquema, por sua vez, é composto por objetivos, subobjetivos e antecipações; regras de ação; invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação; e inferências (VERGNAUD, 2009a).

1 As filiações são aquelas ideias de que o sujeito dispõe e que podem ser complementadas na aprendizagem para a constituição de uma ideia nova; já as rupturas se referem às reformulações necessárias, as rupturas com conhecimentos locais, para a aprendizagem de um conhecimento novo (VERGNAUD, 2011; 2017).

Considerando o processo de adaptação de esquemas para a construção de um conhecimento, Vergnaud (1993; 2009a; 2009b) compreende o conceito como algo que não se desenvolve sozinho e isoladamente. O pesquisador defende que a compreensão de um conceito se dá mediante o seu *Campo Conceitual*, o qual se refere a outros conceitos, situações, representações, propriedades relacionadas ao conceito em questão.

Para o pesquisador, um conceito é estabelecido por meio da terna de conjuntos indissociáveis (S, I, R), sendo S o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência); I o conjunto de invariantes (propriedades e relações) utilizado na resolução das situações, na organização da atividade, nos esquemas (o significado); e R o conjunto de representações simbólicas necessárias para representar o próprio conceito, suas relações, ou ainda as situações e os esquemas (o significante) (VERGNAUD, 1993; 2009a, 2009b).

Para as situações, Vergnaud (1993) distingue duas ideias principais: (i) a de variedade, ao considerar a existência de uma variedade de situações em um determinado campo conceitual, o que nos permite distinguir classes de situações; e (ii) a de história, uma vez que os conhecimentos são elaborados mediante as situações progressivamente enfrentadas e dominadas pelo sujeito.

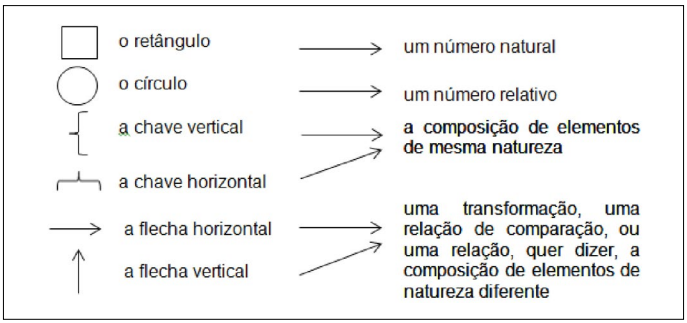
De acordo com Vergnaud (1993), as situações se apresentam no sentido de tarefas a serem realizadas, e as situações mais complexas podem ser entendidas como um conjunto de subtarefas a serem compreendidas e desenvolvidas pelo sujeito.

Vergnaud (2009a; 2009b; 1993) estruturou dois campos conceituais que são bem difundidos: o campo conceitual das estruturas aditivas, relacionado às operações de adição e subtração, e o campo conceitual das estruturas multiplicativas, relacionado às operações de multiplicação e divisão. Tais campos conceituais contemplam classes de situações que dão sentido aos conceitos adição e multiplicação, respectivamente.

Vergnaud (2009b), ao realizar estudos das relações entre as medidas presentes em situações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, verificou que as medidas se relacionam por meio de relações binárias, ternárias e quaternárias, que colocam em relação duas, três e quatro medidas, respectivamente.

Essas relações podem ser representadas por um esquema relacional (VERGNAUD, 2009b) que permite explicitar as relações entre as medidas de uma situação utilizando códigos, conforme mostra a Figura 1.

Figura 1. Código para a representação de um esquema relacional



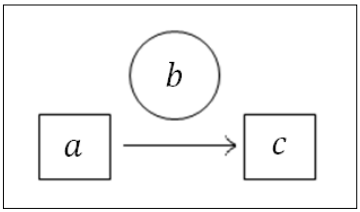
Fonte: Vergnaud (2009b, p. 201).

As classes de situações das estruturas aditivas estabelecidas por Vergnaud (1993) são: 1) composição de duas medidas em uma terceira; 2) transformação de uma medida inicial em uma medida final; 3) relação de comparação entre duas medidas; 4) composição de duas transformações; 5) transformação de uma relação; 6) composição de duas relações.

No Quadro 1, apresentamos um exemplo de situação referente a cada uma das classes citadas e o seu respectivo esquema relacional.

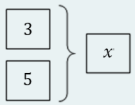
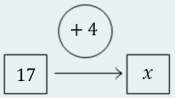
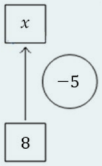
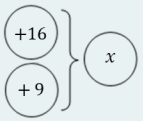
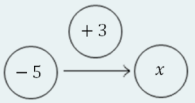
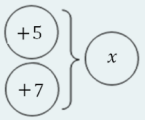
Para cada classe de situações, existem subclasses em que alguns elementos podem modificar a dificuldade do tipo das relações estabelecidas na situação. Por exemplo, em situações de transformação de medidas, que podem ser representadas pelo esquema relacional da Figura 2, as subclasses de problemas relacionadas à classe de transformação são definidas "conforme seja a transformação b positiva ou negativa; conforme seja a pergunta concernente ao estado final c (conhecendo-se a e b), à transformação b (conhecendo-se a e c), ao estado inicial (conhecendo-se b e c)" (VERGNAUD, 2009b, p. 207).

Figura 2. Esquema relacional de uma transformação de medidas



Fonte: As autoras.

Quadro 1. Estrutura de situações do campo aditivo

Classe	Exemplo de situação	Esquema relacional
Composição de medidas	Hoje, na minha sala de aula, estão presentes 3 meninos e 5 meninas. Quantas pessoas vieram à aula hoje? (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 27).	
Transformação de medidas	Havia 17 pessoas dentro de um ônibus, subiram 4. Quantas pessoas estão ali dentro, agora? (VERGNAUD, 2009b, p. 207).	
Relação entre medidas	Paulo tem 8 bolinhas de gude. Tiago tem 5 a menos que Paulo. Quantas bolinhas de gude tem Tiago? (Adaptado de Vergnaud (2009b, p. 203)).	
Composição de transformações	João jogou duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida, ele ganhou 16 bolinhas. Na segunda partida, ganhou 9. Ao final, o que aconteceu? (VERGNAUD, 2009b, p. 217).	
Transformação de relações	No campeonato brasileiro de voleibol, a seleção do Rio tinha 5 pontos a menos do que a seleção de Minas. Nessa última rodada, a diferença entre as pontuações das equipes diminuiu 3 pontos. Quantos pontos a mais ou a menos tem a seleção do Rio em relação à de Minas? (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 48).	
Composição de relações	Denise tem R$ 5,00 a mais do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$ 7,00 a mais que Lilian. Quanto Denise tem a mais do que Lilian? (ZANELLA; BARROS, 2014, p. 55).	

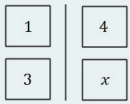
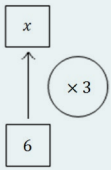
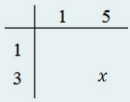
Fonte: As autoras.

Além da medida desconhecida, outra variação do problema refere-se aos números relativos (inteiros) em cada classe de situação (exceto composição de medidas), que podem ser positivos ou negativos, modificando (ou não) o grau de dificuldade da situação.

Para o campo conceitual das estruturas multiplicativas, Vergnaud estabelece cinco classes de problemas: 1) proporção simples ou isomorfismo de medidas; 2) comparação multiplicativa; 3) produto de medidas ou produto cartesiano; 4) proporção dupla ou função bilinear; 5) proporção múltipla (VERGNAUD, 2009b; GITIRANA *et al.*, 2014).

No Quadro 2, apresenta-se uma situação para as três primeiras classes identificadas no campo multiplicativo, e seus respectivos esquemas relacionais.

Quadro 2. Estruturas de situações do campo multiplicativo

Classe	Exemplo de situação	Esquema relacional
Proporção simples ou isomorfismo de medidas	Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho? (VERGNAUD, 2009b, p. 239).	
Comparação multiplicativa	Uma loja do shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto a mesma sandália custa na loja do shopping? (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 46).	
Produto de medidas ou produto cartesiano	A sala de aula da Escola Divertida tem um formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula? (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 73).	

Fonte: As autoras.

Da mesma forma que nas estruturas aditivas, as situações das estruturas multiplicativas podem ou não ter a dificuldade modificada para a sua resolução, de acordo com a medida desconhecida ou com a natureza da medida, medidas discretas ou contínuas etc. Especificamente, na classe de situações comparação multiplicativa, caso a comparação multiplicativa, medida *a*, seja, por exemplo, "vezes menor", ou "metade", a comparação será feita por meio de uma divisão.

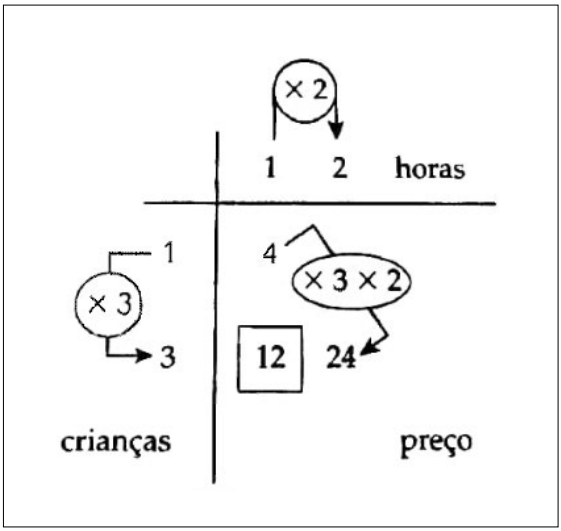
A quarta categoria de problemas das estruturas multiplicativas é denominada de função bilinear ou proporção dupla. Segundo Gitirana *et al.* (2014), esses tipos de situações são contemplados no estudo dos problemas de regra de três composta.

Essas situações "envolvem ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), em que uma delas é proporcional a duas outras, separadamente" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 81). Segundo Vergnaud (1993), essas situações colocam em relação as medidas duas a duas, por exemplo, *x* proporcional a *y*, *y* proporcional a *z*.

Uma situação que ilustra essa categoria é: "Um parque de diversão cobra R$ 4,00 para cada criança brincar em qualquer brinquedo durante 1 hora. Dona Lulu levou seus 3 filhos para brincar no parque durante 2 horas. Quanto ela pagou?" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 81). Essa situação pode ser presentada pela Figura 3.

A quinta categoria de problemas das estruturas multiplicativas é denominada proporcionalidade múltipla. Nesse caso, temos que uma medida *z* é proporcional a *x*

Figura 3. Esquema relacional de um problema do tipo função bilinear



Fonte: Gitirana *et al.* (2014, p. 84).

e a *y*, porém *x* e *y* são independentes entre si (VERGNAUD, 1993). Segundo Gitirana *et al.* (2014), essa categoria dá significado à multiplicação, tratando-se de uma composição de duas proporções simples. Como exemplo, temos: "A receita da massa de pastel do 'seu' Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha ele vai precisar?" (GITIRANA *et al.*, 2014, p. 86). Nesse caso, a proposta de representação para a questão é o seguinte diagrama (Figura 4).

Vergnaud (2009b) menciona que esses tipos de problemas permitem que sejam elaboradas perguntas intermediárias. Na situação anterior, por exemplo, poderíamos

primeiro questionar quantos ovos utilizaríamos para dois copos de leite. Essa possibilidade de elaborar perguntas intermediárias remete à ideia de subtarefas em uma situação, que foi necessária para compreendermos as situações relacionadas à função afim.

Figura 4. Representação do esquema relacional de uma situação do tipo proporcionalidade múltipla

Copos de leite	Ovos	Copos de farinha
	1	2
1	3	
2		?

Fonte: As autoras.

Com o foco nas situações, a intenção da presente pesquisa foi estabelecer uma forma sistemática de analisar e distinguir classes de situações relacionadas à função afim, apresentando uma variedade de situações (s) para o conceito de função afim.

Para tanto, realizou-se uma análise das relações estabelecidas entre medidas em jogo em cada situação, com base nas classificações de dois campos conceituais bem estabelecidos por Vergnaud: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Problemas mistos e a função afim

Em seus estudos, Vergnaud (2009b) considera um terceiro conjunto de situações, denominando-o problemas

mistos. Essas situações exigem operações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo.

Os problemas mistos são complexos, pois colocam várias relações e questões em jogo (VERGNAUD, 2009b). De acordo com Vergnaud (2009b), o estudo das relações elementares das estruturas aditivas e multiplicativas é "[...] insuficiente para dar uma imagem completa das questões que existem na solução de problemas de aritmética" (VERGNAUD, 2009b, p. 269).

No Quadro 3, apresentamos um problema misto proposto por Vergnaud (2009b), no qual nos baseamos para a organização e a análise das relações entre medidas em enunciado de situações relacionadas à função afim.

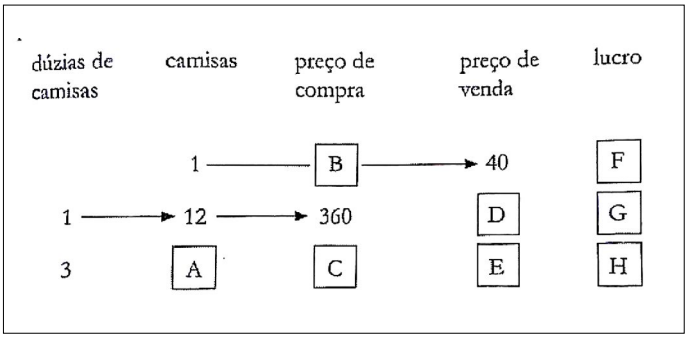
Quadro 3. Exemplo de problema misto

Um comerciante de camisas compra 3 dúzias de camisas a R$ 360,00 a dúzia e revende-as a R$ 40,00 a peça. Colocar as informações em uma tabela de correspondência, fazendo a previsão de uma coluna para os lucros. Encontrar todas as perguntas que cabem nessa tabela e todos os caminhos que permitam encontrar apenas o lucro total do comerciante de camisas.

Fonte: Vergnaud (2009b, p. 288).

A representação sugerida por Vergnaud (2009b) para problema misto permite observar as perguntas intermediárias possíveis, de acordo com as medidas apresentadas no enunciado e as relações estabelecidas entre elas (Figura 5).

Figura 5. Esquema relacional de um problema misto



Fonte: Vergnaud (2009b, p.289).

Segundo Vergnaud (2009b), as perguntas relacionadas a cada letra em caixa alta na Figura 5 são:

A Número total de camisas;
B Preço de compra de uma camisa;
C Preço de compra de três dúzias de camisas;
D Preço de venda de 12 camisas;
E Preço de venda de 3 dúzias de camisas;
F Lucro em 1 camisa;
G Lucro em 12 camisas; e
H Lucro em 3 dúzias de camisas.

Vergnaud (2009b) sugere que a representação das medidas seja um dos princípios indispensáveis para a análise das relações e transformações em jogo em uma situação, pois a resolução desse tipo de situação se dá pelo desenvolvimento da prática de formular perguntas intermediárias, sem que essas tenham, necessariamente, relação direta com o enunciado.

Uma vez considerada a representação da Figura 5, de acordo com Vegnaud (2009b), é possível melhor identificar possibilidades de caminhos que levem à solução da situação, como por exemplo: BFGH – cálculo do preço da compra (B); cálculo do lucro de uma camisa (F); cálculo do lucro para 12 camisas (G); e cálculo do lucro para três dúzias (H).

A partir da organização sugerida por Vergnaud (2009b) para problemas mistos, sendo possível estabelecer equações para se obter o resultado esperado por meio do estudo das relações entre medidas, estabelecemos como hipótese que as situações relacionadas à função afim são passíveis de ser analisadas a partir das classificações das estruturas aditivas e multiplicativas. Portanto, aceitamos que é possível estabelecer uma classificação para as situações que podem ser modeladas de acordo com a expressão $y = ax + b$, tal que $a \neq 0$, analisando como se estabelecem as relações de adição/subtração e multiplicação/divisão nessas situações.

Neste capítulo, apresentamos a análise de três situações pertencentes a classes distintas, de acordo com as relações entre medidas identificadas: a primeira refere-se a uma circunstância do tipo proporção simples e composição de medidas; a segunda, à proporção simples e transformação de medidas; e a terceira circunstância remete a uma situação do tipo comparação multiplicativa e composição de medidas.

A primeira situação foi escolhida em um livro didático do 9º ano do ensino fundamental que introduz os

estudos de função afim a partir do contexto de uma corrida de táxi. A Situação 1 (Figura 6) permite a representação algébrica de uma função afim quando estabelecida a relação entre os x quilômetros percorridos e o valor em dinheiro y a ser pago ao final da corrida.

Figura 6. Situação 1

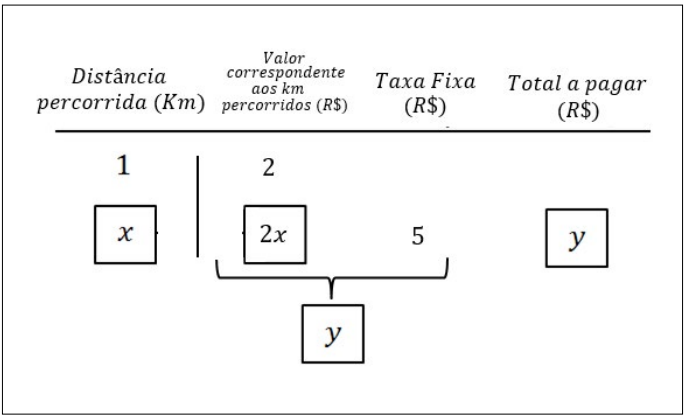


Fonte: Balestri (2016, p. 68).

Com base na análise de um problema misto (Figura 5), construímos o esquema da Figura 7, de forma a representar as informações e as relações estabelecidas entre as medidas presentes na situação.

Nesse esquema, x representa a distância de quilômetros percorridos, e y ,o total a ser pago ao fim da corrida, para que a função da situação seja expressa em termos de x e y. Nesse caso, tem-se representado y em função de x, permitindo substituir y por $f(x)$.

Figura 7. Esquema relacional para a análise da Situação 1



Fonte: As autoras.

Analisando o esquema de resolução da situação na Figura 7, verificamos que a pergunta a ser respondida é "qual o total *y* a ser pago ao percorrer *x km*?", sendo que tal valor será composto de uma parte fixa (5 reais) e de uma parte variável (de acordo com *x km* rodados). Logo, temos que:

total a pagar = valor correspondente aos quilômetros percorridos + taxa fixa.

Essa informação não é suficiente para responder à questão principal da situação, pois precisamos compreender a relação dos quilômetros percorridos *x* com o valor a ser pago por quilômetro rodado.

Considerando o esquema representado na Figura 7, proposto para a resolução da situação, nas duas primeiras colunas verificamos a existência de uma relação

quaternária, uma correspondência entre elementos (medidas) de conjuntos de natureza distinta, sendo as medidas envolvidas diretamente proporcionais.

Trata-se da estrutura proporção simples do tipo um para muitos, de uma situação do campo conceitual multiplicativo. Assim, o valor a ser pago que corresponde aos x quilômetros percorridos é $2x$.

A segunda relação que podemos considerar é aquela cujo resultado representa o total a ser pago, que se trata da composição de duas medidas de mesma natureza (reais), *total a pagar = valor correspondente aos quilômetros percorridos + taxa fixa*. Interpretamos que se trata de uma situação de composição de medidas do campo aditivo, que pode ser representada algebricamente por:

$$y = 2x + 5 \text{ ou } f(x) = 2x + 5$$

Assim, a situação em questão se trata de um problema misto, pois há uma relação multiplicativa do tipo proporção simples, quando obtemos o valor a ser pago de acordo com os quilômetros percorridos; e uma relação aditiva do tipo composição de medidas, quando definimos o total a ser pago composto pelo valor que depende dos quilômetros percorridos mais a taxa fixa, considerando que esses valores em dinheiro serão juntados.

A Situação 2 aborda um contexto de esvaziamento de um reservatório. Como representado no Quadro 4, esta situação solicita a relação que represente a quantidade q de água do reservatório após a passagem de um determinando tempo t.

Quadro 4. Situação 2

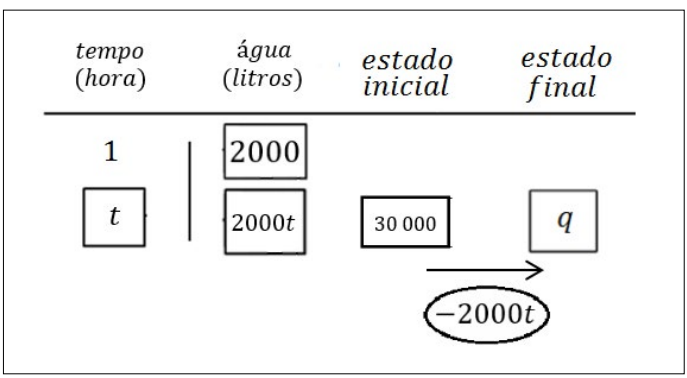
32. Para esvaziar um reservatório que está com 3000*L* de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2000*L* de água por hora.

a) Escreva uma função que permita calcular a quantidade de água *q* no reservatório em função do tempo *t* de funcionamento da bomba.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 97).

Nota-se que as relações dessa situação não dizem respeito a um fenômeno estável: as medidas variam de um estado inicial para um estado final de acordo com a passagem de tempo *t*. Outro aspecto é analisar a vazão de 2000 $\frac{l}{hora}$ da saída (retirada) de água, pois trata-se de uma taxa de variação que é constante no caso de relações em que há proporcionalidade entre as medidas em jogo, considerando uma relação de proporção simples. Representamos essas relações no esquema da Figura 8.

Figura 8. Esquema relacional para Situação 2



Fonte: As autoras.

De acordo com a Situação 2, a quantidade inicial de água no reservatório é de 3000 litros (estado inicial do reservatório), e é retirada a uma taxa de 2000 litros por hora. A transformação, nesse caso, é resultado de uma relação diretamente proporcional entre a quantidade de água e o tempo, e, assim, ela foi analisada como uma relação quaternária de proporção simples, de modo que obtemos uma transformação variável igual a 2000t.

A saída de água do reservatório, que leva do estado inicial para um estado final após *t* horas passadas, é uma transformação negativa, afinal, o reservatório "perdeu" água; assim: $q = 30000 - 2000t$.

A Situação 2 é um problema misto, pois há uma relação multiplicativa do tipo proporção simples, quando obtemos a quantidade de água retirada do reservatório em *t* horas; e uma relação aditiva do tipo transformação de medidas, quando consideramos que a vazão da água do reservatório faz com que a quantidade de água do reservatório passe de um estado inicial para um estado final.

A Situação 3 aborda um contexto do salário mensal de um vendedor e solicita a relação que represente tal valor, composto de uma parte fixa de R$ 1200,00 mais uma parte variável em função de suas vendas *v* no mês (Quadro 5).

Nessa situação, o salário mensal *s* de Júlio varia de acordo com suas vendas *v*. O valor referente às vendas recebido é 5% do valor total da venda, que se trata de uma porção do valor das vendas. Dessa forma, a

Quadro 5. Situação 3

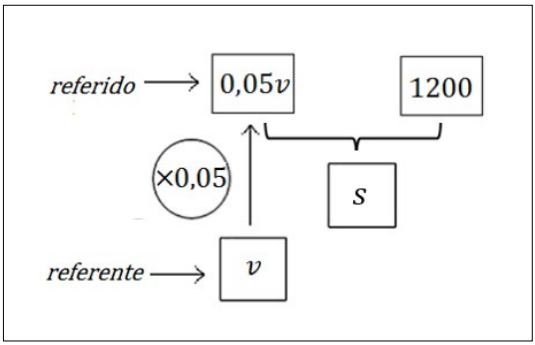
9. Júlio trabalha como vendedor em uma loja, e seu salário mensal é calculado da seguinte maneira: uma quantia fixa de R$ 1200,00 mais 5% do valor das vendas que ele efetuar no mês.

a) Escreva uma função que permita calcular o salário *s* de Júlio em função do valor das vendas *v* efetuadas por ele.

Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 78).

porcentagem é considerada como a relação de uma comparação multiplicativa, um escalar que separa duas medidas de mesma natureza, nesse caso, o referido e o referente. Assim, apresentamos as relações dessa situação por meio do seguinte esquema relacional (Figura 9).

Figura 9. Esquema relacional para a análise da Situação 3



Fonte: As autoras.

Considerando como referente o valor das vendas (v) realizadas no período, o referido é a quinta parte de cem do valor em questão, ou seja, 5% = $\frac{5}{100}$ = 0,05.

Pela relação considerada, tem-se que a parte variável do salário é $0{,}05v$ se realizadas v vendas no período. Desse modo, o salário total pode ser dado por uma composição algebricamente representada por: $0{,}05v + 1200 = s$, ou ainda, $s(v) = 0{,}05v + 1200$.

A estrutura identificada nesta pesquisa como a classe de problemas mistos do tipo de comparação multiplicativa e composição de medidas é composta por uma relação ternária do campo multiplicativo e uma relação ternária do campo aditivo.

Considerações finais

Constatamos, nesta investigação, que as situações relacionadas ao conceito de função afim podem ser analisadas com base na Teoria dos Campos Conceituais para a análise de problemas mistos que envolvem operações do campo aditivo e do campo multiplicativo.

As situações apresentadas neste capítulo possuem características de problemas complexos, que, de acordo com Vergnaud, apresentam "[...] várias relações e várias questões possíveis [...] em jogo" (2009, p. 269). As situações apresentam pelo menos duas relações das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas.

Além disso, conforme a Teoria dos Campos Conceituais, é a diversidade de situações vivenciadas pelo sujeito que dá sentido a um conceito. Portanto, com esta pesquisa, mostramos que as situações relacionadas à função afim podem ser diversificadas, dependendo de suas estruturas e classificações, podendo gerar maior

ou menor complexidade aos estudantes durante as suas resoluções. Nesse sentido, esperamos contribuir com a constituição do campo conceitual da função afim e também com as escolhas teóricas e didáticas do professor no contexto escolar.

Referências

BALESTRI, R. *Matemática*: interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 1.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018.

GITIRANA, V. *et al*. *Repensando multiplicação e divisão*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA, S.; PORTO, R. S. de O. É possível se ter Raciocínio Funcional no nível dos anos iniciais? Uma investigação com estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. *In*: VII *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Foz do Iguaçu, 2018.

PAVAN, L. R.; NOGUEIRA, C. M. I.; KATO, L. A. As relações entre o Campo Conceitual Multiplicativo e as ideias básicas do conceito de função: um estudo com crianças da 4ª série (5º ano) do Ensino Fundamental. In: *X ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*.2009, Guarapuva. *Anais* [...]. Guarapuva: Unicentro, Guarapuava, 2009.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática*. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, J.; PATARO, P. M. *Vontade de saber matemática*. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels: recherche en didactique des mathématiques. *Grenoble*: la pensée sauvage, v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. *In*: *1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO DO RIO DE JANEIRO. 1993, Rio de Janeiro. Anais [...]. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ*, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. O que é aprender. *In*: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: CRV, 2009a. p. 13-35.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009b.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. In: *Educar em Revista*, Curitiba, n. Especial 1, p. 15-17, 2011.

VERGNAUD, G. *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud*: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

3. Situações de juros simples e a função afim: uma aproximação via Teoria dos Campos Conceituais

Regis Alessandro Fuzzo
Veridiana Rezende

Introdução

Este texto apresenta uma análise de situações relacionadas aos juros simples e ao conceito matemático da função afim, com base na Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Para tanto, damos continuidade às análises dos resultados obtidos na dissertação de mestrado do primeiro autor, a qual foi desenvolvida com o objetivo de estabelecer uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais. Para caracterizá-las, utilizaram-se os seguintes aspectos da TCC: tipo de relações – ternárias e quaternárias; classes de situações das estruturas aditivas e multiplicativas; situações aditivas, multiplicativas ou mistas, ou seja,

aquelas que envolvem operações aditiva e multiplicativa ao mesmo tempo; e esquemas relacionais.[1]

A dissertação de mestrado intitulada "Uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais" é de caráter documental e adotou como fonte de dados as três coleções de livros didáticos de matemática do ensino médio mais selecionadas em âmbito nacional, conforme dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) (BRASIL, 2021). Para a identificação das situações de juros simples, em cada coleção foi considerado o capítulo específico de matemática financeira, que trata desse conceito.

Identificaram-se 33 situações, as quais apresentaram a característica de problemas complexos (VERGNAUD, 2009), ou seja, contextos que envolvem várias relações e questões. Para cada situação identificada, buscou-se apresentar classificações[2] e esquemas relacionais, com base nas classes dos campos conceituais aditivo e multiplicativo estabelecidos por Vergnaud (1993, 2009), e na pesquisa de Miranda (2019), que apresenta esquemas

1 Esquemas relacionais são representações associadas às relações de cada situação, e auxiliam na interpretação das regras de conduta do cálculo. Como exemplo, temos "linhas, flechas, regiões do espaço, localizações" (VERGNAUD, 2009, p. 86).

2 Um conjunto de situações pode ser categorizado por uma combinação de relações de base que correspondem ao número de questões possíveis.

relacionais e classificação para situações-problema[3] de função afim, com base na TCC.

Entretanto, a proposta deste texto vai além da dissertação mencionada, uma vez que pretende-se apresentar uma análise de situações relacionadas aos juros simples que se aproximam ao conceito matemático da função afim, e que podem ser modeladas pela forma analítica da função a partir da perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.

Na próxima seção, apresentamos alguns aspectos teóricos sobre juros simples, conceito matemático privilegiado nas situações analisadas nesta investigação.

Juros simples: conceito matemático da investigação

A matemática financeira se destina, em síntese, a estudar o valor do dinheiro em um determinado intervalo de tempo. Seu objetivo é analisar e comparar as entradas e saídas de dinheiro em diferentes momentos. Adiar o recebimento de um valor por certo tempo envolve renúncia, para a qual deve haver uma compensação definida pelos juros (ASSAF NETO, 2019).

O juro (J) é a remuneração obtida, a qualquer título, a partir do capital, ou seja, uma espécie de aluguel mediante uma taxa. Castelo Branco (2012) apresenta essa remuneração a partir de dois olhares: o do pagador, para quem o juro pode ser chamado de despesa

3 Usamos o termo situação como sinônimo de problema, situação-problema e tarefa, conforme proposto por Santana e Lima (2017) ao analisarem as situações que dão sentido ao conceito e que o tornam significativo.

financeira, custo, prejuízo, entre outros; e o de quem recebe, por quem pode ser entendido como um rendimento, receita financeira, ganho. Para o referido autor, há incidência de juros se houver um capital empregado, seja ele próprio ou de terceiros.

De acordo com o regime de capitalização simples, os juros gerados em cada período são constantes e dados pelo produto do capital pela taxa. $J = C \cdot i$. Sendo J o juro auferido, que corresponde à variação do capital C a uma taxa i dada na mesma unidade temporal do intervalo t, o juro simples é dado como $J_t = C \cdot i \cdot t$.

Os juros simples são resultantes do produto do capital pela taxa e pelo período da operação. Observamos que, nessa fórmula, o prazo t deve estar expresso na mesma unidade temporal de i, isto é, se a taxa i for definida em meses, o prazo t deverá estar em meses.

Seja M_t o montante acumulado em um intervalo de t períodos, que corresponde à soma do capital C e dos juros acumulados, o montante simples é dado por:

$$M_t = C + J_t$$

$$M_t = C + C \cdot i \cdot t$$

Para o montante simples $M = C + J = C + C \cdot i \cdot t$, em que a equação é válida para grandezas discretas e para grandezas contínuas, o gráfico se comporta como uma função afim. Dessa forma, propomos uma associação entre o conceito de juros simples e o montante simples com o conceito matemático da função afim.

Assim, consideramos como hipótese para a presente análise:

Montante simples:

$M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0, uma interpretação analítica da função afim do tipo $f(x) = a \cdot x + b$.

Nesse caso, a variável dependente é o montante $M(t)$, enquanto a variável independente é o período t. Assume como coeficiente linear b o valor do capital C, e como coeficiente a o valor de $C \cdot i$.

Juros simples:

$J(t) = C \cdot i \cdot t$, para t ≥ 0, uma função linear do tipo $f(x) = a \cdot x$.

A variável dependente é o juro $J(t)$, enquanto a variável independente é o período t. Assume como coeficiente a o valor de $C \cdot i$. Nesse caso, o coeficiente linear $b = 0$, o que significa que os juros podem ser representados pela forma analítica de uma função linear.

Lima *et al*. (2006) definem para função afim: "uma função $f: R \to R$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in R$ tais que $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in R$" (LIMA *et al*., 2006, p. 87), e sua forma analítica é dada por $y = a \cdot x + b$. Um caso particular de função afim é a função linear, $f: R \to R$ definida por $f(x) = a \cdot x$ para todo $x \in R$.

Os coeficientes a e b podem ser denominados taxa de variação para o coeficiente numérico a, e como coeficiente linear para b. O coeficiente b, por vezes, chamado

de valor inicial da função, é o valor que $f(x) = a \cdot x + b$ assume quando $x = 0$, ou seja, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

Em relação ao coeficiente a Lima *et al.* (2006) inferem que ele possa ser determinado a partir de dois pontos quaisquer distintos, x_1 e x_2 em que a função assume os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, respectivamente. Dessa forma, temos:

$$\{f(x_1) = a \cdot x_1 + bf(x_2) = a \cdot x_2 + b$$

Resolvendo,

$$f(x_1) - a \cdot x_1 = f(x_2) - a \cdot x_2$$

$$a \cdot x_2 - a \cdot x_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Seja uma função $f: R \to R$. Dado $h \neq 0$, $h \in R$, então, para todo $x \in R$, chama-se taxa de variação ou taxa de crescimento da função f o número $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, no intervalo de extremos x e (x + h).

A taxa de variação de qualquer função afim, $f: R \to R$ definida por $f(x) = a \cdot x + b$, no intervalo $[x, x + h]$ para $x \in R$ e todo $x + h \in R$, com h ≠ 0, é a constante a.

Como

$f(x) = a \cdot x + b$ e $f(x + h) = a \cdot (x + h) + b = a \cdot x + a \cdot h + b,$

Então

$f(x + h) - f(x) = a \cdot h.$

Logo, temos:

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a \cdot h}{h} = a.$

Desse modo, uma função afim é crescente quando sua taxa de variação é positiva, ou seja, quando o coeficiente a é positivo ($a > 0$). A função será decrescente quando sua taxa de variação for negativa, ou seja, quando o coeficiente a for negativo ($a < 0$). Se $a = 0$, trata-se de uma função constante, pois não há variação em y de acordo com as variações de x.

Como mencionado, um caso específico da função afim é a função linear. Lima *et al.* (2006) afirmam que a função linear é o modelo matemático utilizado para problemas de proporcionalidade, sendo, provavelmente, "[...] a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios" (LIMA *et al.*, 2006, p. 92).

Tendo a definição da função linear $f: R \to R$ definida por $f(x) = a \cdot x$, se existe $a \in R$ para todo $x \in R$, uma proporcionalidade é uma função $f: R \to R$ tal que, para quaisquer números reais k e x, tem-se $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(k \cdot x) = \frac{f(x)}{k}$, se $k \neq 0$ (proporcionalidade inversa).

Assim, essa definição pode ser interpretada como: a grandeza y é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado de constante de proporcionalidade) tal que $y = a \cdot x$ para todo $x \in R$.

Esses pressupostos nos permitem utilizar propriedades, representações e características da função afim para subsidiar e avançar as análises de situações de juros simples relacionadas à função afim.

Na próxima seção, apresentamos alguns aspectos teóricos da TCC, dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, e de problemas mistos, que foram os aportes teóricos deste texto.

Pressupostos teóricos: a Teoria dos Campos Conceituais

Essa teoria visa a fornecer uma estrutura coerente e princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas (VERGNAUD, 1993). Segundo Vergnaud (1996), um conceito não pode ser reduzido à sua definição, especialmente quando nos interessamos por sua aprendizagem e ensino. Para o pesquisador, um conceito adquire sentido para o aluno por meio das situações e dos problemas a resolver.

Uma das possibilidades de se compreender o desenvolvimento cognitivo durante a experiência, inclusive a escolar, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, é considerar como objeto de estudo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos que fazem parte do que foi denominado por Vergnaud (2013a) de campo conceitual.

Na Teoria dos Campos Conceituais, a definição de situação é posta no sentido de situações a serem enfrentadas pelo sujeito. Assim, "[...] toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades específicas devem ser bem conhecidas" (VERGNAUD, 1993, p. 9).

Vergnaud (1993) estabeleceu dois campos bem difundidos e reconhecidos pela comunidade científica: o das estruturas aditivas e o das multiplicativas.

Para as análises dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, Vergnaud (2009) propôs a utilização de códigos para representar os esquemas relacionais, a fim de facilitar a interpretação das relações envolvidas em cada situação. Essas relações podem ser estabelecidas entre duas (binária), três (ternária) ou quatro (quaternária) grandezas na situação.

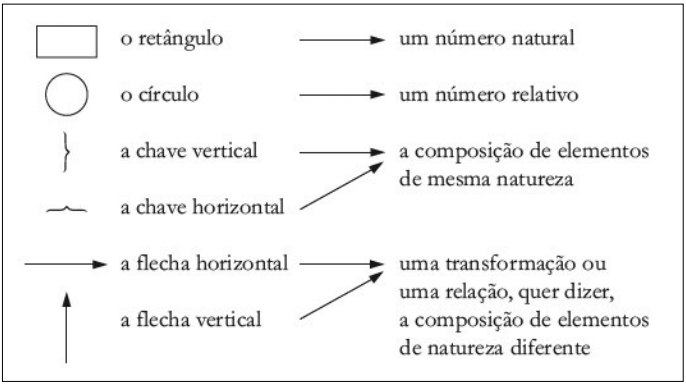
Vergnaud (2009, p. 37) compreende que "[...] a noção de cálculo relacional[4] contribui para esclarecer e explicitar a noção, muito vaga, de raciocínio", podendo ser representada pelos esquemas relacionais.

Para esses códigos, Vergnaud faz associações aos conjuntos numéricos envolvidos nas situações e na elaboração dos esquemas relacionais. Ele considera os números naturais $N = \{0,1,2,3...n...\}$ como "nem positivos nem negativos, [...] números sem sinal" (VERGNAUD, 2009, p. 198), por corresponderem a uma medida. Já os números relativos, como designado por Vergnaud (2009), correspondem ao conjunto dos números inteiros

4 Vergnaud (2009, p. 37) compreende cálculo relacional como uma noção que "[...] se aplica a todos os tipos de relações, binárias, ternárias, quaternárias, e que ela tem ligações estreitas com a noção de regra de conduta". Sobre conduta, Vergnaud (2013a) afirma que ela não se compõe apenas de ações, mas também de tomar as informações necessárias para a continuidade da atividade, e das verificações que permitem ao sujeito certificar-se de que fez o que pensou.

$Z = \{...-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,3...n...\}$ sendo utilizados para representar as transformações positivas ou negativas.

Figura 1. Códigos para representar os esquemas relacionais

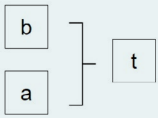
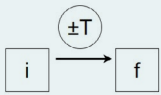
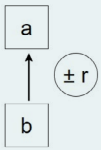
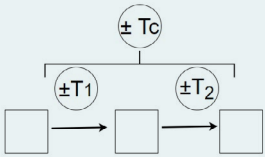
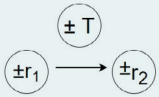
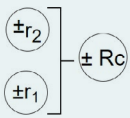


Fonte: Vergnaud (2009, p. 201).

Contudo, Vergnaud (2009) afirma que essas denominações de "número natural" e "número relativo" foram utilizadas por um abuso de linguagem. Em diversas situações apresentadas por Vergnaud (2009), são utilizados números decimais, além de números negativos, para representar medidas, como exemplo das situações que envolvem a grandeza temperatura.

O campo conceitual das estruturas aditivas é "[...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (VERGNAUD, 1993, p. 9). Para esse campo conceitual, Vergnaud (1993) estabeleceu seis classes de problemas, a saber:

Quadro 1. Classes de problemas do campo das estruturas aditivas

Número	Nome da classe aditiva	Descrição	Esquema relacional
1	Composição de duas medidas em uma terceira.	Duas partes que compõem um todo.	
2	Transformação de uma medida inicial em uma medida final.	Estado inicial e uma transformação que levam ao estado final.	
3	Relação de comparação entre duas medidas.	Relacionar duas quantidades e compará-las.	
4	Composição de duas transformações.	Dadas duas transformações, busca-se uma terceira transformação.	
5	Transformação de uma relação.	Dada uma relação estática e uma transformação, busca-se outra relação.	
6	Composição de duas relações.	Duas relações estáticas se compõem em outra relação estática.	

Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Vergnaud (2009) e Santana (2012).

O campo conceitual das estruturas multiplicativas é "[...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações" (VERGNAUD, 1993, p. 10). Conforme Vergnaud (2009), Gitirana *et al.* (2014) e Magina *et al.* (2014) há cinco classes de situações, a saber:

Quadro 2. Classes das estruturas multiplicativas

Número	Nome da classe multiplicativa	Descrição	Subclasses
1	Proporção simples (isomorfismo de medidas)	Dadas quatro grandezas, duas a duas de mesma natureza, se tem uma relação de proporcionalidade.	Multiplicação – um para muitos
			Partição ou distribuição
			Cota
			Quarta proporcional
2	Comparação multiplicativa	Dadas duas grandezas de mesma natureza, são comparadas de forma multiplicativa por um escalar (razão ou relação).	Referente desconhecido
			Referido desconhecido
			Relação desconhecida
3	Produto cartesiano (produto de medidas)	Uma nova grandeza é obtida como produto de duas (ou mais) outras grandezas.	Combinação
			Área (duas grandezas de mesma natureza)
4	Função bilinear (proporção dupla)	Dadas ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), cada uma proporcional a duas outras, separadamente.	Um para muitos
			Muitos para muitos

Número	Nome da classe multiplicativa	Descrição	Subclasses
5	Proporção múltipla	Dadas ao menos seis grandezas (três pares de mesma natureza), uma é proporcional às outras duas, sendo estas independentes entre si.	Um para muitos
			Muitos para muitos

Fonte: Baseado em Gitirana *et al.* (2014), Vergnaud (1993), Magina *et al.* (2014).

Vergnaud (2009) apresenta estudos para algumas situações que denominou problemas mistos. Para a sua resolução, é necessária pelo menos uma operação aritmética de adição ou subtração, e pelo menos uma operação de multiplicação ou divisão.

Para o exemplo do problema misto, Vergnaud (2009) propõe análise dos possíveis caminhos para resolução das relações entre as grandezas presentes no enunciado e dos tipos de situações que caracterizam essas relações.

Buscando evidenciar as aproximações entre situações de juros simples e os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, as análises também foram baseadas na pesquisa de Miranda (2019), que estabeleceu classificações de problemas relacionadas ao conceito de função afim a partir de um conjunto de situações identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio.

Miranda (2019) adota como base para a sua investigação os critérios estabelecidos por Vergnaud para

a classificação de situações presentes nas estruturas aditivas e multiplicativas. Os critérios elencados pela autora são: as relações – ternárias e quaternárias – estabelecidas entre as grandezas presentes nos problemas; os tipos de relações envolvidas (classes e subclasses de problemas das estruturas aditivas e multiplicativas) e sua classificação (puramente aditiva, puramente multiplicativa ou problema misto); e as possíveis combinações dos tipos de situações.

Miranda (2019) utilizou um conjunto de 89 situações de função afim, identificadas em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio, para as quais estabeleceu as classificações de situações relacionadas ao conceito de função afim, com base nas possíveis combinações. Como resultado dessa investigação no conjunto de situações em livros didáticos analisados, foram identificadas e classificadas nove situações de problemas mistos: 1 – proporção simples; 2 – produto cartesiano; 3 – composição de medidas; 4 – proporção simples e composição; 5 – proporção simples e transformação de medidas; 6 – comparação multiplicativa e composição de medidas; 7 – comparação multiplicativa e transformação de medidas; 8 – proporção simples, composição de transformações e transformação de medidas; 9 – comparação multiplicativa e proporção simples.

O estudo de problemas mistos torna-se importante para a presente investigação. Para interpretar as situações de juros simples, como sugerido por Vergnaud

(2009) para problemas mistos, propomos analisar os possíveis caminhos para resolver a situação, as relações estabelecidas entre as grandezas do enunciado, e as possíveis situações que são estabelecidas por meio das relações.

Na próxima seção, apresentamos a metodologia e os direcionamentos para realizar as análises do texto.

Metodologia e direcionamento das análises

Vergnaud (1996) considera que o conjunto de situações é fundamental para o desenvolvimento de determinado conceito para o sujeito. Juros simples é o conceito matemático das situações analisadas e, conforme a BNCC (2018), pode ser estudado pelos alunos em qualquer série do ensino médio. A BNCC (2018) menciona esse conceito como objeto do conhecimento mobilizado para interpretar e comparar situações, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear.

Considerando a premissa de que o livro didático é relevante para o aluno ao propiciar enfrentamento de situações, e, também, importante para a prática do professor, propomos uma análise bibliográfica por situações de juros simples e definimos o livro didático (LD) do ensino médio como fonte de dados para a pesquisa.

Optamos por selecionar as três coleções mais adotadas em nível nacional, por considerarmos sua representatividade no contexto escolar do ensino de matemática como fonte de dados para identificar as situações presentes no capítulo específico de matemática financeira

que trata de juros simples, de acordo com os dados estatísticos das tiragens de cada coleção (aquisições de todos os volumes da coleção) aprovada no PNLD de 2018 para o ensino médio.

Investigamos as situações contidas na parte do LD que trata de atividades propostas aos alunos, ou seja, os exercícios a serem solucionados pelos alunos após a apresentação, formalização e exercícios resolvidos relacionados ao conceito de juros simples.

Para estabelecer o cálculo relacional das situações de juros simples e categorizá-las, as análises foram embasadas na TCC, buscando identificar suas relações como aditivas, multiplicativas ou problemas mistos. Para categorizar os tipos de situações, buscamos elaborar esquemas relacionais para cada situação e utilizamos, essencialmente, a classificação de classes e subclasses das situações das estruturas aditivas e multiplicativas estabelecidas por Vergnaud (1993, 2009) e explicitadas em Gitirana *et al*. (2014).

Para as relações entre as grandezas, como exemplo, entre capital e taxa, ou entre juro e período, foram elaboradas representações dos cálculos relacionais baseadas nos códigos estabelecidos por Vergnaud (2009). Essas situações foram identificadas e relacionadas a uma das seis classes de situações do campo conceitual aditivo e/ou uma das cinco classes do campo multiplicativo.

As situações de juros simples analisadas apresentaram características de problemas mais complexos em que "[...] várias relações e várias questões possíveis

estão em jogo" (VERGNAUD, 2009, p. 269). Assim, para os problemas com várias relações necessárias para resolução, essas foram denominadas "etapas intermediárias".

Como as situações de juros simples apresentam etapas intermediárias para alcançar a questão principal do enunciado, propomos representar essas relações em um esquema relacional principal. Esse esquema proposto para cálculo relacional apresenta uma associação dos esquemas relacionais intermediários necessários para resolução.

Para representar essas relações mais complexas das situações de juros simples, que buscam contemplar as relações e operações envolvidas na situação, adotamos os códigos estabelecidos por Vergnaud (2009).

Para distinguir os esquemas relacionais intermediários dos esquemas relacionais principais, propusemos uma adaptação dos códigos estabelecidos por Vergnaud, como apresentado no Quadro 3.

Consideramos pertinente a utilização desses códigos em linhas tracejadas, tendo por base a Teoria dos Campos Conceituais, para caracterizar as situações de juros simples das etapas intermediárias. Contudo, para aquelas relações que fazem referência ao questionamento principal da situação, mantemos os códigos em linhas contínuas, por se tratar da mesma ideia de representação estabelecida por Vergnaud (2009).

Essa distinção entre os traços dos códigos utilizados nos esquemas relacionais visa a apresentar uma característica de complexidade dessas situações, uma vez

Quadro 3. Código adaptado para esquema relacional das etapas intermediárias

Código	Descrição
	Retângulo tracejado – um número para representar medidas em etapa intermediária.
	Círculo tracejado – número relativo para representar transformações em etapa intermediária.
	Flechas tracejadas – uma transformação, relação de comparação, ou uma relação.
	Chaves tracejadas – composição de grandezas de mesma natureza.

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009, p. 201).

que há diversas relações e questões envolvidas nas situações de juros simples, como mostram as análises desta pesquisa.

Para as situações de juros simples que possibilitam uma aproximação com a função afim, utilizamos as classes estabelecidas para situações relacionadas ao conceito de função afim identificadas como possibilidades de classificação, mencionadas por Miranda (2019).

A possibilidade de combinação entre as classes aditivas e as classes multiplicativas se dá pelo fato de que Miranda (2019) analisa os termos da função afim da seguinte forma, para a sua representação algébrica $f(x) = a \cdot x + b$, para $a e b \in R$:

O termo $a \cdot x$ é considerado uma relação das estruturas multiplicativas;

O termo $a \cdot x + b$ é considerado uma relação das estruturas aditivas entre o termo $a \cdot x$ e o termo b.

Considerando a representação algébrica da função linear $f(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$, caso específico da função afim, Miranda (2019) estabelece que essas relações, em determinada situação, podem ser somente do campo multiplicativo.

Por outro lado, considerando a representação analítica da função afim $f(x) = a \cdot x + b \in \mathbb{R}$, Miranda (2019) estabelece que essas relações, em determinadas situações, são problemas mistos.

São essas relações estabelecidas por Miranda (2019) que consideramos para os casos em que seja possível associar as situações de juros simples com os campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, utilizando-nos da forma analítica de função dos juros e montante simples. Para essas aproximações, temos a seguinte hipótese:

Juros simples: $J(t) = C \cdot i \cdot t$, para t ≥ 0,

$C \cdot i \cdot t$, relação das estruturas multiplicativas. Contudo, consideramos uma relação multiplicativa entre $C \cdot i$ e uma relação multiplicativa entre o termo $(C \cdot i)$ com o termo t, ou seja, $(C \cdot i) \cdot t$.

Montante simples: $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0,

$C \cdot i \cdot t + C$, relação das estruturas aditivas entre o termo $C \cdot i \cdot t$ com o termo C.

Na próxima seção, apresentamos análise de uma classe de situação relacionada aos juros simples e sua

aproximação com a função afim na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, utilizando como fonte de dados o livro didático de matemática do ensino médio, aprovado pelo PNLD em 2018.

Análises e discussão dos dados

O resultado da pesquisa de mestrado (FUZZO, 2022) à qual damos continuidade com as análises deste texto identificou classes para a questão principal das situações de juros simples (com etapas intermediárias), como composição de medidas, proporção simples, e proporção simples e transformação de medidas.

Especificamente para este texto, apresentamos a análise de uma situação relacionada aos juros simples da classe proporção simples e transformação de medidas e sua aproximação com o conceito da função afim pela ótica da Teoria dos Campos Conceituais.

As situações de juros simples em que a questão principal foi classificada como proporção simples e transformação de medidas apresentam as características de situações complexas, pois demandam etapas intermediárias para resolução.

Para o exemplo dessa análise, identificamos que essa situação estabelece relações com o conceito de montante (M), que faz parte do questionamento principal do enunciado. A estrutura principal das situações de juros simples que envolvem o conceito de montante é do tipo mista, pois estabelece, ao menos, uma relação aditiva e uma relação multiplicativa.

O montante simples (M) pode ser modelizado como uma função afim do tipo $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para t ≥ 0, e permite estabelecer relações entre as grandezas conforme o campo conceitual das estruturas multiplicativas e das estruturas aditivas.

Apresentamos como exemplo dessa classe a situação contida no livro didático LD1:

Figura 2. Proporção simples e transformação de medida com etapas intermediárias

> *22.* Bira fez um empréstimo de R$ 250,00 com um amigo e combinou de pagá-lo ao final de quatro meses, acrescido de juros simples de 6% a.m. Qual será o total que deverá ser desembolsado por Bira após esse período?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 162).

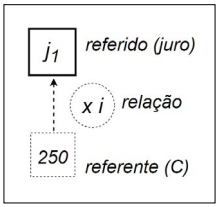
O questionamento principal da situação é calcular o montante (M) a ser acumulado durante um período (t) de quatro meses em que um capital (C) é aplicado a uma taxa (i) de 6%/mês. O valor do montante (M) é o resultado da soma entre o capital (C) e os juros (J) obtidos durante o período.

O enunciado fornece os dados das grandezas da taxa (i) e do período (t) da operação na mesma unidade de medida temporal e, portanto, permite estabelecer uma relação de comparação entre o capital (C) e o valor do juro para o período unitário mensal, considerada uma etapa intermediária para auferir o valor dos juros (J) no período estabelecido pela situação.

Para a taxa de 6%/mês, o juro para o período unitário (j_1) é o valor referido a um mês, que, algebricamente,

constitui $j_1 = C \cdot i = 250 \times \frac{6}{100} = 15$, ou seja, o juro (j_1) para o período unitário de um mês é de 15 reais.

Podem-se representar essas relações a partir do esquema relacional:

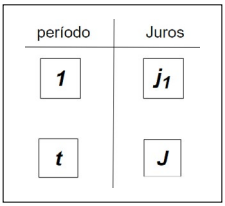


O esquema relacional é uma relação ternária das estruturas multiplicativas, da classe comparação multiplicativa com referido desconhecido, em que foi dado o referente (capital *C*), a relação (taxa *i*) e busca-se o referido, que é o juro (j_1) para o período unitário de um único mês.

O valor dos juros (J) cobrado durante todo o período da transação para o período de 4 meses são 15 reais por mês; algebricamente, tem-se:

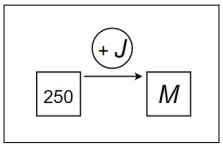
$$J = j_1 . t = 15 \times 4 = 60$$

Os juros (J) são uma relação quaternária das estruturas multiplicativas, podendo ser representados pelo seguinte esquema relacional:



Assim, enquadra-se na classe proporção simples e subclasse um para muitos a estrutura para se obter o valor dos juros.

A questão principal da situação é encontrar o valor do montante *M*, que é uma relação dinâmica e resulta de uma transformação da medida inicial, nesse caso, o capital *C*, pelos juros *J* auferidos no período. Pode-se representar o esquema relacional como:



Trata-se então de uma relação ternária das estruturas aditivas, da classe transformação de medidas, na qual busca-se a medida final, sendo uma transformação positiva. Algebricamente, escreve-se $M = C + J = 250 + 60 = 310$.

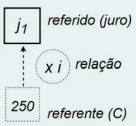
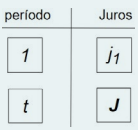
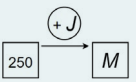
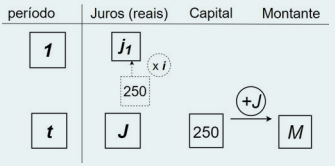
Consideramos as relações identificadas nessa situação como etapas intermediárias necessárias para resolver o questionamento principal do enunciado, que solicitou o valor do montante ao final do período de uma aplicação.

A etapa para obter o valor de juro unitário (j_1) é da classe de comparação multiplicativa, e utilizam-se os códigos em linha tracejada para caracterizá-la como etapa intermediária, à exceção da grandeza juro (j_1) que representamos em linha contínua por compreendermos que faz parte da questão principal da situação.

As etapas para obtenção dos juros (J) e para cálculo do montante (M) foram representadas pelos códigos em

linha contínua, por fazerem parte da estrutura principal da situação. Consideramos, ainda, essa relação específica uma etapa intermediária, pois a partir da combinação dela com as demais etapas intermediárias é que propomos a estrutura do esquema relacional principal conforme o Quadro 4, com as expressões numéricas e os esquemas relacionais das etapas.

Quadro 4. Esquemas de proporção simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias

Etapa	Expressão numérica	Esquema relacional	Classe
Intermediária	$250 \times \frac{6}{100} = 15$		Comparação multiplicativa.
	$15 \times 4 = 60$		Proporção simples (um para muitos).
	$250 + 60 = 310$		Transformação de medidas.
	Esquema relacional principal 		Proporção Simples e transformação de medidas, com etapas intermediárias de comparação multiplicativa.

Fonte: Os autores.

Como nomenclatura do esquema relacional principal, consideramos a questão principal do problema e as etapas intermediárias. Nesse caso, a questão principal foi obter o montante (M). Assim, propôs-se a nomenclatura proporção Simples *e* transformação de medidas, com etapas intermediárias de comparação multiplicativa.

A partir da Teoria dos Campos Conceituais, identificamos que as situações do exemplo apresentado neste texto estabelecem uma aproximação com o conceito de função afim, podendo ser modelizadas pela forma analítica.

Para os juros simples, em que $t \geq 0$:

$$J(t) = C \cdot i \cdot t = 250 \cdot 0{,}06 \cdot t = 15 \cdot t,$$
$$J(t) = 15 \cdot t$$

Para o montante simples, em que $t \geq 0$:

$$M(t) = J(t) + C = C \cdot i \cdot t + C = 250 \cdot 0{,}06 \cdot t + C$$
$$M(t) = 15 \cdot t + 250$$

A forma analítica dos juros simples, $J(t) = 15 \cdot t$, remete a uma função linear do tipo $f(x) = a \cdot x$. A variável dependente é o juro $J(t)$, enquanto a variável independente é o período t. Assume como coeficiente a, o valor de $C \cdot i = 250 \cdot 0{,}06 = 15$, que representa o valor do juro unitário para um único mês. Quando $t = 0$, temos $J(0) = 15 \cdot 0 = 0$, ou seja, para o período inicial da transação financeira não há incidência de juros.

Considerando a proporcionalidade direta de uma função afim é $f: R \to R$ tal que, para quaisquer números reais k e x, tem-se $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, podemos verificar a

proporcionalidade direta da função linear dos juros do exemplo. Para $J(t) = 15 \cdot t$:

$$J(k \cdot t) = k \cdot J(t) = k \cdot 15 \cdot t$$

$$J(t) = \frac{k \cdot 15 \cdot t}{k}$$

$$\frac{J(t)}{t} = 15.$$

Logo, o juro (J) é diretamente proporcional ao período t, sendo 15 a razão entre as grandezas.

Por outro lado, a forma analítica do montante simples, $M(t) = 15 \cdot t + 250$ remete a uma função afim do tipo $f(x) = a \cdot x + b$. Assume como coeficiente a, o valor de $C \cdot i = 250 \cdot 0{,}06 = 15$, que representa o valor do juro unitário para um único mês em função do tempo.

O coeficiente linear para b, por vezes chamado de valor inicial da função, é o valor que $f(x) = a \cdot x + b$ assume quando $x = 0$, ou seja, $f(0) = a \cdot 0 + b = b$. Para o exemplo da Figura 2, quando $t = 0$, temos $M(0) = 15 \cdot 0 + 250 = 250$, ou seja, para o período inicial da transação financeira, o montante é equivalente ao capital inicial, pois não houve decurso do período, visto que se trata de uma relação dinâmica, uma relação de transformação de medida.

A taxa de variação de qualquer função afim, $f: R \to R$ definida por $f(x) = a \cdot x + b$, no intervalo $[x, x + h]$ para $x \in R$ e todo $x + h \in R$, com $h \neq 0$, é a constante a.

Como

$$M(t) = 15 \cdot t + 250 \text{ e}$$

$$M(t + h) = 15 \cdot (t + h) + 250 = 15 \cdot t + 15 \cdot h + 250,$$

Então

$$M(t+h) - M(t) = 15 \cdot h.$$

Logo, temos:

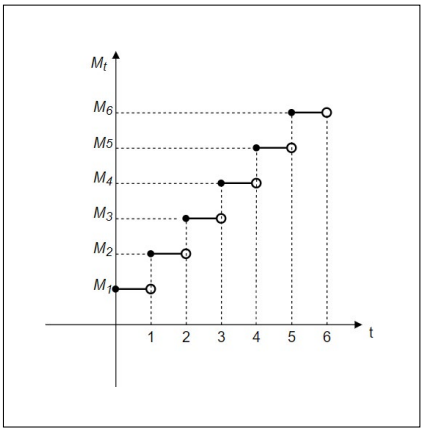
$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = \frac{15 \cdot h}{h} = 15.$$

Desse modo, o coeficiente linear 15 é a taxa de variação da função afim montante simples, $M(t) = 15 \cdot t + 250$, em que a variação é positiva, pois o coeficiente $a > 0$.

Em relação às situações de juros simples quando associadas à função afim, temos que analisar a variável independente, o período (t), quando seu domínio é uma grandeza contínua ou uma grandeza discreta.

Barros (2013) propõe uma análise do gráfico do montante simples, que ocorre no regime de capitalização simples quando a grandeza é discreta. Nesse caso, temos:

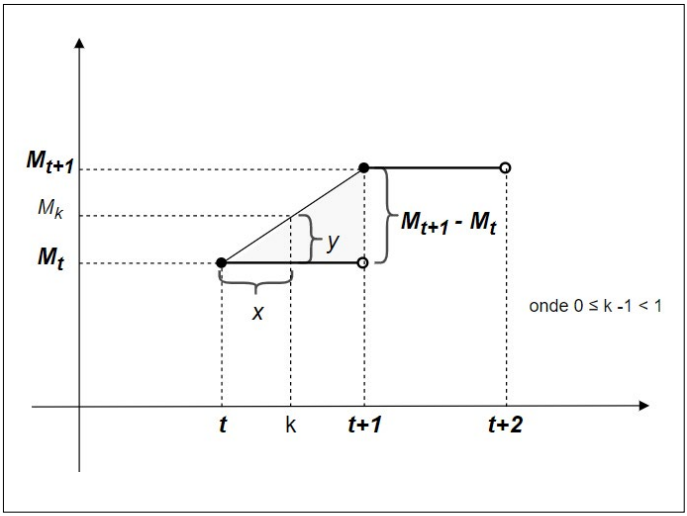
Figura 2. Gráfico do montante simples no regime descontínuo



Fonte: Baseado em Barros (2013).

Por outro lado, Barros (2013) indica que se adote a convenção linear para determinar a formação dos juros simples, ao longo de um período considerado, para t valores fracionados. Para isso, propõe realizar uma interpolação linear de dois valores, M_t e M_{t+1}, em que t e $t+1$ são valores inteiros para função montante simples.

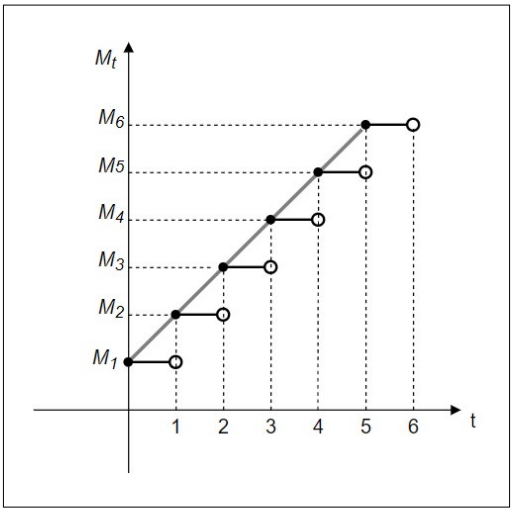
Figura 3. Interpolação linear do montante simples



Fonte: Baseado em Barros (2013).

Pela convenção do resultado obtido na interpolação linear ($M_k = C + C \cdot i \cdot k$), a equação do montante simples $M_t = C + C \cdot i \cdot t$ é válida, tanto para t inteiro como fracionado, ou seja, é válida para grandeza discreta ou para utilização de grandeza contínua, como mostra a Figura 4:

Figura 4. Gráfico do montante simples (grandeza discreta e contínua)



Fonte: Baseado em Barros (2013).

Nota-se que o gráfico do montante simples é uma reta quando utilizamos grandezas contínuas, com $t \geq 0$, após utilizarmos a interpolação linear. A interpretação da grandeza ser contínua ou discreta depende do contexto da situação que a transação financeira percorre ao longo do período. Como exemplo, a capitalização simples do cheque especial de uma conta corrente ocorre diariamente. Nesse caso, o período trata-se de uma grandeza discreta, pois não há como capitalizar 0,5 dia ("meio dia").

À guisa de uma conclusão

Este texto é resultado de uma continuação das análises da pesquisa de mestrado (FUZZO, 2022) do primeiro autor, orientado pela segunda autora, com objetivo de

apresentar uma aproximação entre situações relacionadas aos juros simples e a função afim pela ótica da Teoria dos Campos Conceituais.

A partir das análises das situações e da forma analítica do juro simples $J(t) = C \cdot i \cdot t$, para $t \geq 0$, consideramos uma aproximação com o conceito de função linear, por meio da relação dos seus termos a partir do campo conceitual das estruturas multiplicativas, ou seja, consideramos uma relação multiplicativa entre $C \cdot i$ e uma relação multiplicativa entre o termo $(C \cdot i)$ com o termo t, ou seja, $(C \cdot i) \cdot t$.

Por outro lado, para as situações que envolvem montante simples e a forma analítica do montante simples $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, para $t \geq 0$, consideramos uma aproximação com a função afim, devido às relações do termo $C \cdot i \cdot t$ com o campo conceitual das estruturas multiplicativas, e o termo $C \cdot i \cdot t$ com o termo C, uma relação do campo conceitual das estruturas aditivas, . $C \cdot i \cdot t + C$

Essa investigação poderá inspirar pesquisadores a aprofundar os estudos sobre situações de juros simples em busca de uma aproximação de um campo conceitual próprio. Além disso, poderá inspirar professores, ao associar situações de juros simples à função afim, com possibilidades de diversificar classes de situações em suas aulas.

Referências

ASSAF NETO, A. *Matemática financeira e suas aplicações*. 14. ed. São Paulo: Atlas, 2019.

BARROS, L. E. W. B. de. *Cálculo:* um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica. 2021. 103 f. Dissertação (Mestrado em) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)* Brasília: MEC 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 20 mai. 2019.

BRASIL. *PROGRAMAS DO LIVRO – DADOS ESTATÍSTICOS.* FNDE, 2021. Disponível em: http://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos. Acesso em: 21 de ago. 2021.

CASTELO BRANCO, A. C. *Matemática financeira aplicada:* método algébrico, HP-12c, Microsoft excel. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

FUZZO, R. A. *Uma tipologia de situações de juros simples com base na Teoria dos Campos Conceituais*. 2021. 129 f.Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022.

GITIRANA, V. *et al*. *Repensando a Multiplicação e a Divisão:* contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

IEZZI, G.; DEGENSZAJN, D.; ALMEIDA, N.; DOLCE, O.; PÉRIGO, R. *Matemática: ciências e aplicações*. 9. São Paulo ed. Saraiva Educação, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM: Rio de Janeiro, 2004. v. 2.

MAGINA, S. M. P.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. dos. O Raciocínio de estudantes do ensino fundamental na resolução de situações

das estruturas multiplicativas. *Ciência e Educação*, UNESP, v. 20, 2014. p. 517-533.

MIRANDA, C. A. *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim:* uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

SANTANA, E. R. S. *Adição e subtração:* o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante? Ilhéus: Editus, 2012.

SANTANA, E. R. S; LIMA, D. C. Teoria dos Campos Conceituais. *In:* SANTANA, E. R. S; LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A. (Org.). *Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º ano.* Itabuna: Via Litterarum, 2017.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. *Anais* [...]. Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. *In*: BRUN, Jean (Org.). *Didáctica das Matemáticas.* Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-192.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino de Matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. A Conceptual Development and Learning. *Revista Qurriculum*, Santa Cruz de Tenerife, Espanha, v. 26, p. 39-59, 2013.

4. Relações entre a compreensão de função e pensamento funcional

Andreza Santana da Silva
Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Professores de matemática e pesquisadores concordam que são inúmeras as dificuldades encontradas na compreensão, no ensino e no aprendizado de conceitos matemáticos, considerando que tais dificuldades se devem a diversos fatores, seja a abstração matemática, sua linguagem própria ou ainda a hierarquização dos seus conceitos (SILVA, 2020). Algumas justificativas para isso são: a forma como a linguagem matemática é utilizada no ensino de função na matemática escolar; o modo como são abordadas as representações, muitas vezes de forma desconexa, sem que sejam explicitados os elementos importantes e conceituais existentes em cada uma delas; a descontextualização do conceito, apesar da aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento,

como a biologia e física, e até mesmo em situações cotidianas que podem ser exploradas por meio de função.

Para serem organizadas, pelos docentes, práticas que tencionem minimizar dificuldades e potencializar o aprendizado de função, são necessários conhecimentos sobre a evolução do conceito de função, tanto do ponto de vista histórico e epistemológico, aos quais tomamos como base Sierpinska (1992), quanto da perspectiva didática e cognitiva, que buscamos envolver por meio das atividades de pensamento funcional (SMITH, 2008).

Este capítulo, recorte de uma tese de doutorado ainda em construção,[1] objetiva apontar as relações entre a compreensão de função sob o ponto de vista de Sierpinska (1992) e as atividades ligadas ao pensamento funcional na perspectiva de Smith (2008). Para isso, exemplificamos as possíveis relações por meio de situações criadas e extraídas de contextos históricos, assim como das representações que se tornam necessárias para sua compreensão e resolução.

Na tese em desenvolvimento, adotamos a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval; elas não serão exploradas neste capítulo, porém, é necessário explicitar que entendemos situações com base em Vergnaud (1996c), que as define no sentido de tarefa, tendo em vista que o sujeito age sobre ela mediante o seu repertório

1 No ano de 2023, a primeira autora desenvolve seu doutoramento em Educação Matemática e Tecnológica no Edumatec (UFPE), sob orientação da segunda autora.

de conhecimentos frente às organizações mentais. Classificamos as representações enquanto externas e simbólicas, pelas quais os objetos matemáticos se tornam acessíveis (DUVAL, 2009). É importante destacar que não há foco apenas no ato de representar de maneiras distintas, mas na articulação, complementando e relacionando as propriedades existentes entre elas, pois só assim pode-se apreender o objeto matemático.

No que diz respeito ao pensamento funcional, entendemos que existem diferentes vertentes, mas, neste texto, optamos pela visão de Smith (2008), por compreender que ela não se caracteriza como, simplesmente, um ato de pensar, ou apenas como noções iniciais; ela envolve diferentes atividades e formas de agir sobre uma relação entre duas grandezas, incluindo as representações que a compõem, que ocorrem desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio.

Envolvemos discussões históricas e epistemológicas, pois Sierpinska (1992) formula sua compreensão de função com base nessas reflexões. Entendemos epistemologia não como um método de reprodução dos processos históricos, mas como o ato de compreender a sua formação:

> A origem dos conceitos constitui um método muito fecundo na Didática da Matemática, onde não se pretende reintroduzir o método histórico no ensino, mas estudar os processos que os conceitos matemáticos seguiram em sua formação e em seu desenvolvimento, os mecanismos de produção destes saberes, e, em geral, conhecer as características da atividade matemática (HIGUERAS, 1994, p. 58).

Para além dos processos de constituição do conceito na sua perspectiva histórica, a epistemologia intervém de maneira decisiva na configuração dos elementos que constituem sentido para um determinado conceito, isto é, os seus diferentes significados analisados em seu surgimento, assim como as suas adaptações para resolver diferentes problemas (HIGUEIRAS, 1994).

Por conseguinte, delimitamos as reflexões sobre a compreensão de função com base na história da matemática e no estudo epistemológico de Sierpinska (1992); posteriormente, relacionamos as atividades que Smith (2008) expõe para o desenvolvimento do pensamento funcional.

Compreensão de função por meio de um estudo histórico e epistemológico

Conhecer o papel da epistemologia é necessário para entender a compreensão de função, com base em Sierpinska (1992). Estudá-la é entender como aconteceu o processo de formação dos conceitos e de que maneira isso se aplica ao ato de fazer matemática, o que gerou de evolução não apenas nesse conhecimento, mas, de maneira geral, na matemática e em conhecimentos de outras ciências.

Uma análise epistemológica poderá permitir colocar em evidência:

> Toda pluralidade de pontos de vista possíveis que historicamente estão associados, diferenciar as representações e modos de tratamentos que lhes foram associados e observar

> sua adaptação mais ou menos boa em resolver este ou aquele tipo de problema. [...] Ajudará também o professor a lutar contra a ilusão de transparência da comunicação didática induzida por modos empiristas de aprendizagem, permitindo-lhe diferenciar o conhecimento que o ensino quer transmitir e os conhecimentos efetivamente construídos pelos alunos (ARTIGUE, 1989, p.14).

Ao encarar a epistemologia do conceito arrazoando de que forma ela pode afetar os aspectos didáticos do professor e, consequentemente, a compreensão desses conceitos pelo aluno, somos levados a nos questionar quando seria possível dizer que determinado objeto matemático[2] foi compreendido:

> É somente quando vemos instâncias e não instâncias do objeto definido, quando podemos dizer o que é esse objeto e o que não é, quando tomamos consciência de suas relações com outros conceitos, que percebemos que essas relações são análogas às relações que conhecemos, quando apreendemos a posição que o objeto definido tem dentro de uma teoria e quais são suas possíveis aplicações, podemos dizer que entendemos algo sobre ele (SIERPINSKA, 1992, p. 26).

A autora citada anteriormente apresenta quatro categorias que elucidam atos de compreensão, também

2 Falar em objeto matemático não é o mesmo que falar em conceito matemático. Para conceito matemático, defendemos o tripé exposto por Vergnaud (2009): situações, invariantes operatórios e representações. Por outro lado, entendemos objeto matemático como um sinônimo de conteúdo. Por exemplo: ao objeto matemático função, podemos destacar como o conceito de função, a variedade de situações, os conceitos em ação e teoremas em ação envolvidos e as diferentes formas de representá-los.

consideradas por outros pesquisadores: identificação, discriminação, generalização e síntese.

O ato de identificação, como a própria palavra já diz, consiste em identificar/reconhecer um objeto em detrimento de outros. Por exemplo, quando o estudante se depara com situações de diferentes conhecimentos: função polinomial do primeiro grau, equação polinomial do primeiro grau e sistema de equações do primeiro grau, os quais já conhece, e consegue, em cada questão, identificar o conhecimento que possibilitará resolvê-la, ele é capaz identificar o objeto matemático que lhe subjaz. É preciso considerar ainda que existem objetos matemáticos que são suportes de outros, e que os estudantes também precisam identificá-los por meio de seus conhecimentos construídos anteriormente (SIERPINSKA, 1992).

Quando Sierpinska (1992) trata de "discriminação", não se refere ao sentido de segregação ou de separação, mas ao ato de compreender diferenças e propriedades relevantes aos objetos matemáticos comparados. Entende-se, por exemplo, que um estudante atingiu esse grau de compreensão quando, ao se deparar e comparar dois objetos matemáticos, tais como função polinomial do primeiro grau e equação polinomial do primeiro grau, ele consegue expor propriedades específicas e importantes a cada um – ao falar de equação, a parte literal é chamada de incógnita, e cabe encontrar um valor específico –, e ao se tratar de função, a parte literal é chamada de variável, então, cabe a esta diferentes valores que se relacionam a outra variável dependente da anterior,

entre outras características que devem ser levantadas e comparadas pelos estudantes.

No que se refere ao ato de generalização, entende-se que o estudante compreende o objeto matemático se ele considera suas possibilidades e diversidades de aplicação. Para exemplificarmos, podemos tomar a noção de função[3] enquanto relação entre grandezas, e verificarmos que é possível aplicá-la em diversas situações do dia a dia, e, inclusive a outras ciências: a relação do tempo de viagem com uma determinada distância está em função da velocidade percorrida; o número da sandália de uma mulher está relacionado ao tamanho de seu pé; e até a quantidade de bactérias em uma colônia, em um determinado tempo, está em função de sua proliferação por dia. Se formos mais específicos em relação à função polinomial do primeiro grau, podemos expor sua aplicação em relação ao cálculo de juros simples, o lucro das peças de um produto em relação à quantidade de peças vendidas, entre outros casos.

Entende-se que o estudante atinge o quarto ato de compreensão, a síntese, quando percebe ligação entre propriedades, relações e objetos. Como exemplo, ele pode perceber a relação do estudo de função afim com a equação da reta na geometria analítica, conectando as propriedades existentes em cada conteúdo.

3 A expressão "noção de função" remete a ideias-base, tais como os conceitos de regularidade, dependência e generalização, por exemplo.

Em linhas gerais, elegendo palavras-chave, podemos sintetizar os quatro atos de compreensão no Quadro 1.

Levando em consideração essas categorias de compreensão, embasadas na construção histórica do conceito de função e na análise das dificuldades de estudantes em sala de aula ao serem confrontados com esse conhecimento, Sierpinska (1992) construiu dezenove condições para que aconteça a compreensão do conceito de função, as quais se encontram dispostas de acordo com a categoria de compreensão no Quadro 2. Posteriormente, explicaremos o contexto histórico que existe por trás de cada categoria.

As condições relacionadas à categoria de identificação estão intrinsecamente ligadas à gênese do conceito de função, já que sua noção surgiu como forma de lidar com as mudanças que foram observadas e vivenciadas ao nosso redor. A matemática se preocupa com problemas práticos, foram eles que deram subsídios à construção de conhecimentos que pudessem explicar esses fenômenos, como é o caso das funções.

Quadro 1. Características dos atos de compreensão

Atos de compreensão	Características
Identificação	Reconhecimento do objeto.
Discriminação	Comparação com destaque para as diferenças e propriedades importantes.
Generalização	Aplicação do objeto nas diferentes áreas do conhecimento.
Síntese	Ligação/relação entre propriedades.

Fonte: As autoras.

Quadro 2. Condições para que aconteça a compreensão

Identificação	1 A identificação das mudanças observadas no mundo como um problema prático para resolver; 2 A identificação de regularidades nas relações entre mudanças como forma de lidar com essas mudanças; 3 A identificação dos objetos da mudança no estudo das mudanças.
Discriminação	4 Discriminação entre dois modos de pensamento matemático: um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, e outro em termos de quantidades variáveis e constantes; 5 Discriminação entre as variáveis dependentes e independentes; 7 Discriminação entre número e quantidade; 9 Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas às vezes usadas para descrever sua lei; 10 Discriminação entre definições matemáticas e descrição dos objetos; 12 Discriminação entre os conceitos de função e relação; 13 Discriminação entre as noções de função e sequência; 14 Discriminação entre as coordenadas de um ponto de uma curva e os segmentos de reta que cumprem alguma função para a curva; 15 Discriminação entre os diferentes meios de representação nas funções e as próprias funções; 19 Discriminação entre as noções de relações funcionais e causais.
Generalização	6 Generalização da noção de número; 17 Generalização da noção de variável.
Síntese	6 Síntese da noção de número; 8 Síntese entre o conceito de lei e o conceito de função; em particular, a consciência do possível uso de funções na modelagem de relações entre magnitudes físicas ou outras; 11 Síntese da concepção geral da função como objeto; 16 Síntese das diferentes formas de dar funções, representar funções e falar funções; 18 Síntese dos papéis das noções de função e de causa na história da ciência: consciência do fato de que as buscas por relações funcionais e causais são expressões do esforço humano para compreender e explicar as mudanças no mundo.

Fonte: As autoras com base em Sierpinska (1992).

Caraça (1951), ao denotar o caráter histórico e epistemológico do conceito de função, explicita-o a partir das leis naturais do mundo real e da ciência, e reforça que o desenvolvimento dos problemas físicos foi propulsor para o desenvolvimento do conceito de função. Por exemplo, a percepção de mudança na planta ou no ser humano em decorrência do tempo, ou de outros fatores como o sol, condições climáticas, alimentação, cuidados, sendo que, para cada um desses, é possível traçar relações específicas. É possível ver a erosão que acontece no solo com o passar dos anos, em decorrência das chuvas.

Além disso, destaca-se que os fenômenos explicitados não são estáticos; eles mudam, e cada um de acordo com suas especificidades. Identificar, por exemplo, o crescimento da planta, e condicionar esse fenômeno à produção de fotossíntese, devido às condições climáticas favoráveis à planta, aos nutrientes extraídos do solo, e à proporção em que isso favorece o crescimento. Ou, ainda, identificar a erosão do solo como um objeto de mudança, e perceber que essa mudança é proporcional à quantidade de chuva que acontece no local. Na matemática, ao observar uma sequência, identificar a mudança e de que forma ela acontece, é compreender qual operação é realizada entre os objetos da sequência. Aqui, o que se sobressai não é a mudança por si só, mas os fatores que a fizeram ocorrer, ou seja, como os fenômenos mudaram.

É isso que está presente na função: existe um fator que é o responsável pela mudança, que provoca algo

que segue um padrão lógico, a regularidade, a qual discutiremos adiante.

Por isso, "[...] talvez, no ensino, as funções devam aparecer primeiro como modelos de relações. Foi assim que elas surgiram na história" (SIERPINSKA, 1992, p. 32, tradução nossa). Os estudantes, portanto, precisam primeiramente se interessar pela variabilidade e procurar regularidades, para chegarem às funções elementares com definições formais.

Essa variabilidade e busca por regularidades pode acontecer por meio de uma situação problema, de uma situação envolvendo tabela, ou mesmo de uma situação envolvendo figuras ou sequências. Quando tratamos de regularidade, estudos como os de Nogueira (2014), Miranda (2019) e Merli (2022) a colocam como ideia-base[4] para o conceito de função. Vai ao encontro desse entendimento a linha de estudos sobre o pensamento funcional, o qual Smith (2008) afirma que se refere aos processos mentais em que um sujeito relaciona duas ou mais quantidades que variam. O ato de relacionar possibilitará analisar a regularidade, já que, por meio dessa relação, ele poderá perceber não apenas a mudança, mas como ela acontece. Smith (2008) especifica seis atividades implícitas no pensamento funcional:

1. Engajar-se em algum tipo de atividade física ou conceitual.

4 Merli (2022) assume como ideias-base os conceitos de: dependência, generalização, regularidade e variável.

2. Identificar duas ou mais quantidades que variam no curso da atividade e enfocar a relação entre essas duas variáveis.
3. Registrar os valores correspondentes dessas quantidades, em forma de tabelas, gráficos ou ícones.
4. Identificar padrões nos registros.
5. Coordenar os padrões identificados com as ações envolvidas na execução das atividades.
6. Usar essa coordenação para criar uma representação do padrão identificado na relação (p. 143-144).

Ao observar as seis atividades, conseguimos perceber nuances de regularidade, seja na identificação da relação, dos padrões ou na coordenação entre eles. Todas essas atividades podem ser abordadas em qualquer nível escolar, pois não existe a obrigatoriedade da utilização da linguagem formal algébrica, utilizada apenas a partir dos últimos anos finais do ensino fundamental e continuamente no ensino médio, mesmo que a autora tenha um enfoque maior no pensamento representacional da relação entre duas ou mais quantidades que variam (MESTRE, 2014); essa representação, contudo, não precisa ser necessariamente por meio de símbolos algébricos.

No que tange à categoria "discriminação", exposta por Sierpinska (1992), constata-se dez condições para a compreensão do conceito de função. No entanto, elas se alinham em três vertentes gerais, quando falamos da: 1 – distinção entre o conceito de função e outros conceitos que, inclusive, se alinham a ele; 2 – distinção entre os elementos conceituais e ou propriedades que fazem

parte estritamente do conceito de função; e 3 – distinção entre função e suas representações. É o que retrata o Quadro 3:

Quadro 3. Vertentes gerais para as condições de compreensão relacionadas à discriminação

Distinção entre o conceito de função e outros conceitos	4 Discriminação entre dois modos de pensamento matemático: um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, e outro em termos de quantidades variáveis e constantes; 12 Discriminação entre os conceitos de função e relação; 13 Discriminação entre as noções de função e sequência.
Distinção entre os elementos conceituais e/ou propriedades que fazem parte estritamente do conceito de função	5 Discriminação entre as variáveis dependentes e independentes; 7 Discriminação entre número e quantidade; 10 Discriminação entre definições matemáticas e descrição dos objetos; 14 Discriminação entre as coordenadas de um ponto de uma curva e os segmentos de reta que cumprem alguma função para a curva; 19 Discriminação entre as noções de relações funcionais e causais.
Distinção entre função e suas representações	9 Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas às vezes usadas para descrever sua lei; 15 Discriminação entre os diferentes meios de representação nas funções e as próprias funções.

Fonte: As autoras.

As três condições relacionadas à vertente da distinção entre o conceito de função e outros conceitos compõem conceitos matemáticos com os quais o docente irá se deparar ao abordar função, ou mesmo em outro momento poderá relacioná-los de forma a diferenciar as especificidades de cada um, para não haver confusão na compreensão dos estudantes.

O ato de discriminar termos de quantidades conhecidas e desconhecidas de quantidades variáveis e constantes tem sua importância desde Euler, com as apresentações da análise (SIERPINSKA, 1992). Para essa discriminação, elucidamos dois conceitos distintos, mas que também se complementam: equação e função.

Quando tratamos de equação, queremos encontrar uma quantidade desconhecida representada por uma parte literal. É válido destacar que a equação é também composta por quantidades conhecidas, que tornam mais fácil encontrar qual a parte que precisamos conhecer. Por exemplo: $3a + 2 = 8$; explicando a resolução para essa equação, sabemos que o resultado é 8, mas se subtrairmos 2, e, dividirmos por 3 o resultado dessa operação, vamos encontrar o valor de a. Então, a é a quantidade desconhecida, e os demais valores, as quantidades conhecidas.

Ao tratarmos de função, o que buscamos encontrar são as quantidades variáveis, em detrimento das quantidades constantes. No entanto, as quantidades variáveis, como o próprio nome já diz, não são estáticas, nem compõem um mesmo valor, como no caso da equação. Essas quantidades variáveis não são independentes entre si, mas podem assumir quaisquer valores, desde que se respeite a relação de regularidade existente entre elas.

Para a compreensão do conceito de função, é necessário que o estudante diferencie estas duas – quantidades desconhecidas de quantidades variáveis –, pois ele usará conhecimentos de equação ao estudar função, e

de forma mais estritamente ligadas a esse aspecto. Ao calcular a raiz de uma função polinomial do primeiro grau, $f(x) = 2x + 1$, por exemplo, ele vai reescrever essa função como uma equação de igualdade zero, ou seja, ele quer encontrar o valor desconhecido de , quando $f(x) = 0$. Tudo isso ocorre sob o estudo da função.

Ainda sobre essa distinção entre os conceitos, diferenciar relação de função não é dizer que elas não têm algo em comum ou que sejam totalmente independentes uma da outra, mas significa dizer que uma função existirá apenas na medida em que certa propriedade de um objeto estiver relacionada a certa propriedade de um outro. Isto é, a relação faz parte do conceito de função, mas não é ele. A relação entre as variáveis da função, por exemplo, é um dos elementos importantes para a função, mas ela possui outros elementos que a tornam maior do que apenas a relação, como a regularidade, a generalização, entre outros. Isso também pode ser observado na diferenciação de função e sequência.

Da definição do conceito de função, adotamos:

> Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente (CARAÇA, 1951, p. 129).

Esta definição corrobora as que foram construídas por Nicolas Bourbaki no ano de 1939, conforme construção histórica do conceito desenvolvida por Merli (2022).

Sierpinska (1992) menciona que as sequências são um tipo privilegiado de funções, e não o contrário. É possível identificar as sequências por meio de tabelas, que, além de serem uma representação de função, ainda constituem uma das formas mais antigas de representar relações, já que, desde a época dos babilônicos e egípcios, se estabelecem relações de correspondência por meio de tabelas ou gráficos, sem que ao menos sejam citados os termos "função" ou "sequência" (RIBEIRO, CURY, 2015; ROQUE, 2012), cuja relação é apenas evidenciada.

Por exemplo, dada a série de dados exposta na Tabela 1, determinar a expressão analítica da função:

Tabela 1. Sequência numérica

X	0	0,2	1	5
Y	2	2,6	5	17

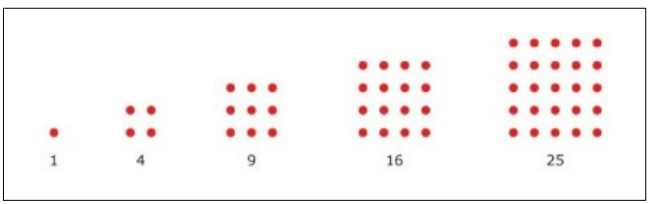
Fonte: As autoras.

Ao generalizar a sequência, percebendo sua regularidade, encontraremos a expressão analítica $y = 3x + 2$, que pode ser percebida observando a relação de x com y, tendo em vista que o valor de x, quando multiplicado por três e somado a dois, resulta nos respectivos valores de y. Outro exemplo pode ser notado por meio de sequência de figuras, que são denominadas números figurados pitagóricos.

Antes de expormos um dos exemplos, elencamos aspectos históricos sobre a composição desses números. Os números figurados pitagóricos não possuíam a

abstração que neles pode ser observada. Atualmente, Roque (2012) expõe que eles "eram constituídos de uma multiplicidade de pontos que não eram matemáticos e que remetiam a elementos discretos: pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração" (p. 104). Isso servia a eles para delimitação de uma área por meio de pontos, que sempre começava com 1, a exemplo dos números figurados quadrangulares (Figura 1).

Figura 1. Números figurados pitagóricos quadrangulares



Fonte: Roque (2012, p. 105).

Podemos tomar como n a posição de cada figura composta por triângulos, e se quisermos saber quantos triângulos a figura terá, podemos encontrar a resposta a partir da interpretação da regularidade do que está disposto na figura: S = 1, quando n = 1; S = 4, quando n = 2 e S = 9, quando n = 3. Percebemos, então, que S está em função de n; logo, $S = n^2$. Vejamos:

Para n = 1, $s = 1^2 = 1$
Para n = 2, $s = 2^2 = 4$
Para n = 3, $s = 3^2 = 9$
...
Para n = 10, $s = 10^2 = 100$

Dessa maneira, como já mencionamos, algumas sequências são tipos privilegiados de função, como foi o caso das mostradas anteriormente. Ao usá-las, temos a possibilidade de englobar diferentes tipos de função (no primeiro exemplo, função afim, e, nesse segundo, função quadrática), ou seja, elas servem de apoio para o conceito de função, mas não o constituem por si só.

Por esse motivo, algumas sequências já preparam o estudante para a aprendizagem do conceito de função em sua forma mais abrangente. Elas fazem parte do conhecimento dos estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental, e são complementares à compreensão do conceito de função por meio do pensamento funcional, principalmente na busca de regularidades e generalizações:

> As sequências com que os alunos trabalham nestes ciclos são funções de variável natural, que a cada número (ordem) fazem corresponder um dado termo – que pode ser um número, um objeto geométrico ou outro objeto qualquer (PONTE *et al.*, 2009, p. 116).

Sobre a segunda vertente, em que mencionamos os atos de discriminação para a compreensão do conceito de função embasados nas condições já explicitadas por Sierpinska (1992) e expostos no Quadro 2, enfatizamos aspectos pertencentes à função que, para serem bem compreendidos, precisam ser diferenciados, como é o caso das variáveis dependentes e independentes, número e quantidade, a definição e a descrição de funções, a coordenada de um ponto na curva e a reta que

cumpre alguma função na curva, além das relações funcionais e causais.

Quando falamos da distinção entre as variáveis dependentes e independentes da função para pessoas que já compreenderam e estudaram, elas normalmente dirão: isso é simples: o y ou f(x) é a variável dependente, e o x é a variável independente. Nesse caso, temos duas pontuações: primeiro, a distinção entre os papéis assumidos por cada um deles, e, segundo, a limitação do uso simbólico apenas como y ou f(x) e x, quando pode existir uma variedade de símbolos para substituí-los. As variáveis não estão presas a símbolos, ponto no qual iremos nos aprofundar posteriormente.

É necessário lembrar que a variável dependente é a que está condicionada às mudanças da variável independente. Por exemplo, a distância percorrida pelo automóvel em três horas de viagem está condicionada à velocidade em que esse veículo se desloca, isto é, se um automóvel se desloca a uma velocidade de 80 km/h durante três horas, a distância percorrida será de 240 km, de tal forma que a variável independente é a velocidade, e a distância é a variável dependente. Se mudar a situação, a ordem das variáveis podem ser outras.

Outro ponto a ser diferenciado diz respeito ao número e à quantidade dentro do estudo de funções. Quando Sierpinska (1992) fala em quantidade, ela está relacionando-a ao uso de variáveis condicionadas a fenômenos, sejam eles físicos ou outros, diferentemente do que ocorre quando se aborda função com uso dos números por

plena definição e sem aplicação. As letras que representam variáveis numéricas podem ser trocadas por outras letras, mas as letras que representam leis físicas, não.

Quando queremos que os estudantes compreendam a distinção entre as definições matemáticas e a descrição de objetos matemáticos, é necessário ter uma visão geral desse objeto. Deixando claro que para o caso das funções existem aspectos de funções que são observados em alguns casos e em outros não, esses aspectos não podem ser considerados como definição ou parte da definição de função, mas somente como uma descrição de objetos. E isso precisa ser claro, mas não é fácil, já que demanda um conhecimento mais geral das funções e uma percepção de seus diferentes tipos.

Essa noção geral de função é difícil de se conseguir nos estágios iniciais da experiência matemática, isto é, nos anos iniciais do ensino fundamental, pois "[...] para ver a razão de tal noção geral, não apenas deve-se ter visto os usos de seus exemplos particulares; deve-se sentir a necessidade de declarações sobre classes ou espaços de funções" (SIERPINSKA, 1992, p. 47, tradução nossa), tampouco é possível de se conseguir apenas nos estágios finais da experiência matemática, ou seja, no ensino médio. Ela requer que o estudante passe por diversas experiências que podem e devem ser proporcionadas pela diversidade de situações ao longo da escolaridade básica.

Em termos gerais, o que vai fazer com que o estudante compreenda a descrição do objeto, assim como a

definição geral da função, é como os exemplos de função serão apresentados para ele:

> Normalmente, os primeiros exemplos de funções encontrados por um aluno são contínuos em toda parte, não diferenciáveis em no máximo um número finito de pontos, constituídos por um pedaço de uma curva na representação gráfica, dada por uma fórmula (SIERPINSKA, 1992, p. 47).

Tais descrições, que são apresentadas como elementos de funções, formarão na mente do aluno um protótipo de uma função, e esse é o objeto do qual a definição deve dar conta fielmente. Mas isso, em verdade, não corresponde à definição de uma função.

Isso justifica o uso de variadas situações e do que elas fornecem de descrição do objeto, pois se os elementos mudam, a definição precisará mudar, já que se agregaram novos aportes ao protótipo primeiramente apresentado.

A distinção entre as coordenadas de um ponto em uma curva e os segmentos de reta que cumprem algum papel para a curva têm fundamentos em obstáculos epistemológicos diferentes na história da construção do conceito de função, pois as curvas não aparecem diretamente como gráficos de relações dadas. Fermat, por exemplo, descrevia curvas por proporções entre alguns segmentos de linha auxiliares, como diâmetro e eixo. "O sistema de segmentos auxiliares foi escolhido para cada curva ou classe de curvas separadamente; as coordenadas não eram números determinados por um sistema de eixo previamente escolhido" (SIERPINSKA, 1992, p. 51,

tradução nossa). Disso surgiu a ideia de coordenada como um sistema de eixos, isto é, retas em vez de pontos.

Entender as coordenadas como um ponto que tem relação com os eixos vertical e horizontal do plano cartesiano, em que a curva que representa a função está presente, é entender que ela toma valores presentes nos eixos, mas não são eles.

Tomando como base que o estudante consegue identificar o que é uma relação, o que é uma função, e diferenciar as dependências entre as variáveis, é importante que ele também saiba distinguir as relações meramente causais e as relações funcionais.

As relações funcionais são mais abrangentes que as relações causais, isto é, as relações funcionais são compostas por relações causais e não causais. Existem relações que têm uma causa definida na situação, ou seja, o acontecimento g ocorreu devido à alteração do acontecimento h.

Sugere-se a seguinte situação: estudos afirmam que estudantes que realizam o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) em salas climatizadas tiram maiores notas do que os que fazem a prova em outras salas. Neste último caso, as notas não são causadas pelo clima, mas sim por quanto conhecimento os estudantes adquiriram antes de realizar o teste; o fato da climatização é só um fator de correlação para este dado. Assim, existe uma relação funcional que é não causal.

A terceira vertente promove a distinção entre função e suas representações baseada nas condições

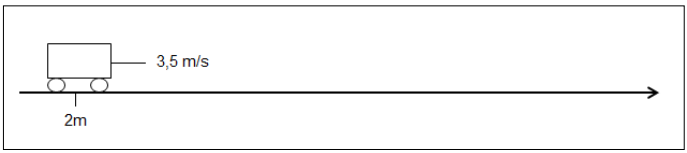
estabelecidas por Sierpinska (1992): discriminação entre função e as ferramentas analíticas que permitem descrever a sua lei de formação e entre função e as suas diferentes formas de representação.

Ambas condições se conectam, pois, para representar a lei de formação de uma função polinomial do primeiro grau, por exemplo, são utilizadas representações algébricas, por vezes convencionais. É possível escrever a lei de formação da função usando as mais variadas partes literais, a menos que estejamos falando de quantidades físicas. Podemos descrever uma mesma função como: $s = 3{,}5t + 2$ ou $f(t) = 3{,}5t + 2$ em vez de $y = 3{,}5x + 2$ ou $f(x) = 3{,}5x + 2$, por exemplo.

Nota-se a necessidade de que sejam abordadas as diferentes representações de função, sejam elas a tabela, a analítica ou o gráfico, que são as mais usadas nas aulas da educação básica, pois cada uma tem o papel de representar aspectos da função que correspondem ao seu conceito geral e possuem condições fundamentais para sua compreensão, além de não ser simples adquirir a capacidade de interpretação de gráficos e tabelas – e isso desde o surgimento do conceito de função, quem dirá pelos nossos estudantes, atualmente (SIERPINSKA, 1992). O desenvolvimento e a articulação entre as diferentes representações do conceito de função não aconteceram rapidamente, foi um processo longo e cheio de percalços, pelas dificuldades de entendimento, de organização, de falta de símbolos, e por outros fatores.

Essas muitas formas de representar uma função e seus usos possibilitam que o estudante não confunda as representações e o próprio objeto. Se tomarmos como exemplo: um carro encontra-se inicialmente na posição 2 m de uma estrada retilínea, e se desloca com velocidade constante de 3,5 m/s (Figura 2), podemos determinar a posição em que ele se encontra em cada segundo, representar a relação entre o tempo e a posição do carro por meio de uma tabela, de uma expressão analítica ou, ainda, de um gráfico.

Figura 2. Representação figural da situação



Fonte: As autoras.

Se usarmos uma tabela para representar (Tabela 2), precisamos entender o que varia e as motivações da variação. Então, percebemos que o que a questão afirma é a determinação da posição em decorrência do tempo; logo, o tempo é a variável independente, e a posição, a variável dependente.

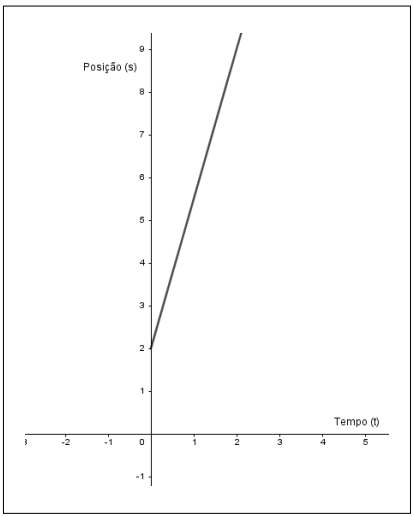
Tabela 2. Exemplo de representação em tabela

Tempo (t)	0	1	2	3	4
Posição (s)	2	5,5	9	12,5	16

Fonte: As autoras.

Embora a tabela possua poucos valores, podemos fracionar o segundo em números não inteiros e perceber que a função possui uma continuidade, como mostra a Figura 3:

Figura 3. Gráfico da posição do carro em relação ao tempo



Fonte: As autoras.

A representação analítica dessa representação gráfica pode ser descrita como $s = 3{,}5t + 2$.

Todas essas formas de representar o objeto função, nesse caso, função afim, condicionam aspectos importantes do objeto e permitem a diferenciação do que é a representação e do que é o objeto, tal qual a coordenação das mudanças que acontecem em uma representação e também em outra, cada qual dentro de suas especificidades.

Na categoria de generalização, Sierpinska (1992) engloba duas condições de compreensão do conceito de função: a generalização de número e a de variável. Nesses casos, pensamos sobre sua aplicação, haja vista que o uso da letra para representar número, em álgebra, trouxe abstração até mesmo sobre o contexto em que o número está inserido.

"As letras usadas na álgebra tornaram as noções de números e magnitudes mais abstratas. Sob essa abstração, era cada vez menos justificado fazer uma distinção entre números discretos e magnitudes contínuas" (SIERPINSKA, 1992, p. 41, tradução nossa). Isso quer dizer que é preciso ampliar a visão de como cada um desses se aplicam e como se complementam, embora ainda possa se distinguir isoladamente entre variáveis que representam conceitos físicos, como o tempo e a velocidade, e as variáveis numéricas, como vimos anteriormente.

A noção de variável, para Caraça (1951), é chamada de fluência, já que nos fenômenos físicos tudo flui, tudo muda, nada é estático.

Sobre a categoria síntese, destacam-se as relações entre objetos e/ou propriedades que, de certa forma, trazem luz às informações apresentadas até o momento deste texto, mas com a característica de estabelecer relações. Para chegar à compreensão geral do conceito de função, é necessário realizar as conexões e relações entre seus diferentes tipos, incluindo propriedades e especificidades no mesmo tipo de função, como nos casos de coordenação entre representações.

Outro ponto concerne ao número e à magnitude física,[5] o qual já abordamos usando o termo "quantidade", quando apresentamos as condições de distinção. "A percepção de funções como uma ferramenta apropriada para modelar ou matematizar relações entre magnitudes físicas (ou outras) é uma condição indispensável para dar sentido ao conceito de função" (SIERPINSKA, 1992, p. 42, tradução nossa).

Evidencia-se aqui a importância de se trabalhar situações que envolvem função na física, para possibilitar que o estudante compreenda essas distinções e complementariedades entre os números e as magnitudes físicas. Por exemplo, a situação do carro em movimento, que já vimos no caso das representações, faz parte de um conteúdo de física, a cinemática, que estuda a descrição matemática dos movimentos. O uso adequado das variáveis no problema não seria simplesmente x ou y, embora por meio da abstração matemática fosse viável, mas as que dizem respeito ao contexto físico explorado, que seriam as magnitudes de tempo (t) e deslocamento (s), respectivamente.

Por fim, resta-nos dizer que as situações envolvendo funções perpassam as relações funcionais; algumas delas são causais, e assim foram no decorrer da construção histórica desse conhecimento: "Funções, como outras construções matemáticas, nos ajudam a

5 Baseadas em Merli (2022), consideramos magnitude como uma grandeza física ao se mencionar o contexto histórico do conceito de função.

expressar certas características de regularidades causais e não causais" (SIERPINSKA, 1992, p. 56). Por isso, assim como fizemos a distinção, é necessário confrontar as relações causais com as relações funcionais.

Correlação entre as condições de compreensão de função e as atividades ligadas ao pensamento funcional

Como descrevemos e exemplificamos cada uma das condições para a compreensão de função, entendemos que as atividades ligadas ao pensamento funcional – que devem ser apresentadas aos estudantes ao longo da escolaridade básica – podem ser relacionadas, embora ordenadas e estruturadas de maneiras diferentes; por isso, como síntese e relação entre ambos, expomos o Quadro 4.

Quando mencionamos "engajar-se em algum tipo de atividade física ou conceitual", podemos estabelecer relação com as diferentes situações (Vergnaud, 2009) que os estudantes podem enfrentar para conseguir compreender e construir o conceito de função. Por isso, elencamos as condições que visam a proporcionar a apresentação dessas situações como forma de distinguir, aproximar e ampliar os conceitos, elementos, ou aspectos relacionados a outras ciências e à sociedade, com relação às funções.

O ato de "identificar duas ou mais quantidades que variam no curso da atividade e enfocar a relação entre essas duas variáveis" está estritamente ligado ao estudo das variáveis das funções; por isso, relacionamos com a discriminação entre as variáveis tratadas no estudo

das funções e incógnitas presentes na equação, pois se isso não for possível, haverá também dificuldades em compreender o que é variável, assim como entender as mudanças ocasionadas em cada uma delas e a que se deve tais mudanças, isto é, quem depende de quem e por que ocorre essa dependência.

Quadro 4. Correlação entre atividades ligadas ao pensamento funcional (SMITH, 2008) e as condições de compreensão do conceito de função (SIERPINSKA, 1992)

Pensamento funcional	Condições de compreensão do conceito de função
Engajar-se em algum tipo de atividade física ou conceitual.	1 A identificação das mudanças observadas no mundo como um problema prático para resolver; 6 Generalização e síntese da noção de número; Discriminação entre número e quantidade; 8 Síntese entre o conceito de lei e o conceito de função; em particular, a consciência do possível uso de funções na modelagem de relações entre magnitudes físicas ou outras; 12 Discriminação entre os conceitos de função e relação; 13 Discriminação entre as noções de função e sequência; 18 Síntese dos papéis das noções de função e de causa na história da ciência: consciência do fato de que as buscas por relações funcionais e causais são expressões do esforço humano para compreender e explicar as mudanças no mundo; 19 Discriminação entre as noções de relações funcionais e causais.
Identificar duas ou mais quantidades que variam no curso da atividade e enfocar a relação entre essas duas variáveis.	2 A identificação de regularidades nas relações entre mudanças como forma de lidar com essas mudanças; 3 A identificação dos objetos da mudança no estudo das mudanças; 4 Discriminação entre dois modos de pensamento matemático: um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, e outro em termos de quantidades variáveis e constantes; 5 Discriminação entre as variáveis dependentes e independentes.

Pensamento funcional	Condições de compreensão do conceito de função
Registrar os valores correspondentes dessas quantidades, em forma de tabelas, gráficos ou ícones.	9 Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas às vezes usadas para descrever sua lei; 14 Discriminação entre as coordenadas de um ponto de uma curva e os segmentos de reta que cumprem alguma função para a curva; 15 Discriminação entre os diferentes meios de representação nas funções e as próprias funções; 16 Síntese das diferentes formas de dar funções, representar funções e falar funções.
Identificar padrões nos registros.	10 Discriminação entre definições matemáticas e descrição dos objetos.
Coordenar os padrões identificados com as ações envolvidas na execução das atividades.	
Usar essa coordenação para criar uma representação do padrão identificado na relação.	11 Síntese da concepção geral da função como objeto; 17 Generalização da noção de variável.

Fonte: As autoras.

Então, situações de padrões e sequências, problemas físicos ou aplicados à sociedade, e gráficos que envolvam a relação entre as variáveis possibilitam a compreensão de tais variáveis enquanto complementares, mas também enquanto entidades distintas para as funções.

Como já mencionamos ao longo do texto, existem diferentes meios de representar as funções, então 'Registrar os valores correspondentes dessas quantidades, em forma de tabelas, gráficos ou ícones' está relacionado às condições que focam na representação como meio de compreensão para o conceito de função,

deixando claro que a representação não é a função, mas que apenas transparece parte das propriedades e elementos que ela tem.

Ao "identificar padrões nos registros", o estudante consegue discriminar definições matemáticas de descrição dos objetos, pois os padrões podem e devem ser variados. Esses padrões configuram-se como qualquer uma das situações já levantadas e podem até ser expostos em tabelas ou gráficos, desde que ofereçam descrições diferentes para as funções e que não sejam apenas exemplos prototípicos utilizados. Sendo assim, eles devem explorar a diversidade de propriedades que as funções abarcam, a fim de que os estudantes possam, a partir deles, não apenas identificar, mas traçar a definição geral para a função.

Isso só é possível se acontecer conjuntamente à coordenação dos "padrões identificados com as ações envolvidas na execução das atividades", o que não ocorre apenas no ensino médio, pois trata-se de um trabalho que envolve a relação com outros conhecimentos matemáticos e até com outras ciências e visões de mundo. Por isso, esse processo deve acontecer ao longo da escolaridade, já que a cada novo passo novas oportunidades acontecem devido à aquisição de novos conhecimentos que se relacionam com funções.

Considerações finais

Traçar essa relação entre a compreensão de função, com base em uma análise histórica e epistemológica, e as atividades ligadas ao pensamento funcional nos fornece

meios para proporcionar um ensino que possibilite a compreensão dos estudantes, já que esse método se preocupa com a análise de como o conhecimento foi construído, considerando as dificuldades enfrentadas e o modo como esse conhecimento passa a ser abordado na sala de aula.

Não raramente, os estudantes questionam: "Para que aprender isso, se não vou usar em nenhum momento de minha vida?" Frequentemente, também não conseguem ver relação entre os conhecimentos que estudaram e estudam. Se, de posse dos conhecimentos históricos e epistemológicos, compreendemos e conhecemos as características de determinada atividade matemática, a partir delas, e sem reproduzir o que foi realizado historicamente, é possível fornecer situações em que tais atividades matemáticas podem ser fonte de conhecimento. Uma vez que as relações relacionadas às funções fazem parte do cotidiano, os estudantes conseguirão compreender sua importância no dia a dia..

Para fornecer essas situações e representações, ao longo do texto, nos detemos na elucidação dos quatro atos de compreensão: identificação, discriminação, generalização e síntese (SIERPINSKA, 1992), que são, em linhas gerais, os atos de reconhecer, comparar e aplicar o conhecimento a ser estudado. Em suma: reconhecer especificidades; comparar em termos não apenas de diferenças, mas de relações entre propriedades e elementos conceituais existentes no conceito; e generalizar por meio de aplicações.

O ato de compreender funções engloba todos eles, e, com base em condições de compreensão construídas por Sierpinska (1992) a partir de sua análise epistemológica sobre a história do conhecimento de função e as dificuldades apresentadas pelos estudantes ao estudar função, relacionamos e exemplificamos situações, representações, comparações de dentro e fora da matemática que permitem ampliar o entendimento desses conhecimentos, servindo de base para o professor.

O trabalho conjunto dos aspectos históricos e epistemológicos levantados com o pensamento funcional desde os anos iniciais – a partir de padrões e sequências que permitirão perceber relações, correspondências, regularidades e generalizações – possibilitará um caminho propulsor para a construção do conceito de função, em suas formas mais geral e ampliada, em todos os tipos e em diversas aplicações.

As situações que relacionam as funções à física, a outros conteúdos matemáticos e aos conhecimentos de outras ciências e da sociedade mobilizam o estudante a perceber as variações de funções e a conhecer as diferentes propriedades dispostas em cada uma delas, assim como relacioná-las.

Acreditamos que esse caminho pode auxiliar o docente em seu planejamento e execução ao trabalhar com o conceito de função a partir do pensamento funcional desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino médio, adequando as situações e condições à sua realidade e à de seus estudantes. Chegando ao professor e

ao chão da escola, esperamos que esse entendimento alcance estudantes, possibilitando-lhes a tomada de consciência do processo e da construção desse conceito, tanto em sua formação como em seu cotidiano.

Referências

ARTIGUE, M. Epistemologie et didactique. *IREM de Paris*. IREM de Paris, 3, 1989. Cahier de DIDIREM, René Cori, 2-86612-096-5. hal-02138030. Disponível em: https://hal.science/hal-02138030/. Acesso em: 20 nov. 2022.

BLANTON, M. *Algebra and the elementary classroom:* transforming thinking, transforming practice. Portsmouth: Heinemann, 2008.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Farias e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

HIGUEIRAS, L. R. *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función*: análisis epistemológico y didáctico. 557 f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade de Granada, Granada, 1994. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LRuiz-Higueras.pdf. Acesso em: 15 nov. 2022.

MERLI, R. F. *Do pensamento funcional ao campo conceitual de função*: o desenvolvimento de um conceito. 215 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/6451. Acesso em: 27 mar. 2023.

MESTRE, C. M. M. V. *O desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano de escolaridade*: uma experiência de ensino. 379 f. Tese (Doutorado em Educação – Didática da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/jspui/handle/10451/15481. Acesso em: 12 dez. 2022.

MIRANDA, C. de A. *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais. 160f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/4671. Acesso em: 5 jan.2023.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o conceito de funções. In: NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; RAMOS, Antoneli da Silva; REJANI, Fernanda Campanha. *Teoria e Prática de Funções*. Maringá: Centro Universitário de Maringá – Núcleo de Educação a Distância, 2014.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação. 2009.

RIBEIRO, A, J.; CURY. H. N. Álgebra para formação de professores: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

ROQUE, T. *História da Matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. *In*: DUBINSKY. E.; HAREL, G (ed.) *The Concept of Function:* aspects of epistemology and Pedagogy. United Stades of America, MAA Notes, 1992. p.25-58.

SILVA, A. S. *Registros de representação semiótica e função quadrática*: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) –

Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39695#:~:-text=Andreza%20Santana%20da.-,Registros%20de%20representa%C3%A7%C3%A3o%20semi%C3%B3tica%20e%20fun%C3%A7%C3%A3o%20quadr%C3%A1tica%3A%20um%20olhar%20sobre,de%20Pernambuco%2C%20Recife%2C%202020. Acesso em 23: jan. 2023.

SMITH. E. Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. *IN*: N KAPUT, J.; CARRAGER, D.; BLANTON, M. L. (ed.) *Algebra in the Early Grades*. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 2008, p. 133-160.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. *In*: Brun, Jean (Ed.). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Intituto Piaget, 1996. p. 155-192.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

BLOCO 2

Análise do desenvolvimento do conhecimento de estudantes dos variados níveis de ensino

5. Dificuldades de constituição da generalização em situações envolvendo função afim por estudantes do ensino fundamental: as justificativas da teoria piagetiana*

Suzana Domingues da Silva
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Introdução

O conceito de função se desenvolveu sempre sob a influência e relacionado ao contexto científico de cada momento histórico; às necessidades de cada época; e ao avanço alcançado pelas ciências em geral e pela matemática em particular, de maneira que demoraram séculos para ser delineado tal como se apresenta nesta terceira década do terceiro milênio. Nesse sentido, é pertinente conjecturar que o desenvolvimento desse conceito, pelo estudante, no contexto escolar, demanda tempo e que, também, deve ser apresentado e relacionado ao contexto científico e às possibilidades de cada nível de escolarização. O capítulo 1 deste livro, de

* Este capítulo contém partes de artigo publicado na revista Schème, em 2022, o qual consta nas referências e se sustentou na dissertação de mestrado da primeira autora, orientada pela segunda.

autoria de Renato Merli e Clélia Maria Ignatius Nogueira, apresenta proposta de curricularização para a ação docente em relação ao objeto de conhecimento função, desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino superior, considerando, entre os elementos fundantes do conceito de função, suas ideias-base: variável, dependência, regularidade e generalização.

Pesquisas realizadas (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020; MANZAN, 2014; PINTO, 2014) indicam que, das ideias-base de função – variável, dependência, regularidade e generalização –, a última é a de constituição mais complexa para todos os sujeitos, desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino superior.

A generalização se concretiza, entre outros aspectos, na capacidade de representar, em linguagem algébrica, enunciados de problemas ou de leis expressas em língua natural. De acordo com Tinoco (2011), a dificuldade em constituir a generalização se deve ao fato de que o começo da utilização da linguagem algébrica causa uma ruptura na forma de pensar e agir em matemática, e que os alunos, até mesmo aqueles que apresentam mais facilidade em técnicas algébricas, dificilmente apresentarão, quando solicitado, uma situação-problema algebricamente. No entanto, "[...] o registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil" (NOGUEIRA, 2014, p. 9).

Para Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico pode assumir várias formas, sendo uma delas as

relações funcionais estabelecidas por meio da generalização de padrões numéricos. De acordo com esses autores, a generalização da aritmética e o pensamento funcional são as formas mais comuns do pensamento algébrico de estudantes dos níveis escolares elementares (BLANTON; KAPUT, 2005).

Nesse sentido, Kaput (1999, p. 6), citada por Canavarro (2007), afirma que:

> A generalização envolve a extensão deliberada do leque de raciocínio ou comunicação para além do caso ou casos considerados, identificando e expondo explicitamente o que é comum entre os casos, ou elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimento, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação) (KAPUT, 1999 *apud* CANAVARRO, 2007, p. 87).

As considerações anteriormente explicitadas ocasionaram o surgimento do problema de pesquisa: Quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas nas pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?

Com a finalidade de respondermos à questão levantada, realizamos uma meta-análise, respaldada teórica e metodologicamente nos estudos de Jean Piaget,[1] de

1 Estudos referentes à constituição, pelo sujeito, da generalização indutiva e construtiva.

dados obtidos em relação à constituição da ideia-base de generalização nas pesquisas realizadas por Pavan (2010) e Calado (2020) a respeito da elaboração do conceito de função afim por estudantes do ensino fundamental.

Piaget, em seu livro *Investigaciones sobre la generalización* (1984), faz um estudo sobre as generalizações indutivas e construtivas – estas últimas sendo a essência dessa sua obra –, explicitando sua formação e mecanismo. Para Piaget (1984), há pelo menos dois tipos de abstração, a empírica e a reflexionante; do mesmo modo, há, também, pelo menos dois tipos de generalização, a indutiva e a construtiva. O autor afirma que as generalizações advêm das abstrações, ou seja, toda generalização supõe uma abstração prévia (1995): "Com efeito, o resultado de uma abstração reflexionante é sempre uma generalização, bem como o resultado de uma abstração empírica conduz a precisar o grau de generalidade dos caracteres extraídos do objeto" (PIAGET, 1995, p. 59).

Para desenvolver uma reflexão sobre essa perspectiva, apresentamos a seguir uma abordagem teórica a respeito das abstrações empírica e reflexionante, a fim de chegarmos às generalizações indutivas e construtivas.

Abstração empírica e reflexionante

Para Piaget, a aprendizagem pode ocorrer por meio de dois tipos de experiência: a física, que consiste em agir sobre o objeto e extrair dele alguma característica; e a lógico-matemática, em que o conhecimento não é dado pelo objeto, mas é extraído das ações do sujeito sobre

o objeto ou da coordenação de suas ações sobre ele. A primeira se refere à abstração empírica; a segunda, à abstração reflexionante (RUIZ; BELLINI, 2001).

A abstração empírica consiste e se apoia nos objetos físicos, ou seja, retira propriedades e informações dos objetos, como a cor, o peso, a forma etc., assim como aspectos materiais da própria ação, a exemplo dos movimentos e empurrões (PIAGET, 1984; 1995). Piaget afirma que esse tipo de abstração, por mais elementar que possa parecer, não consiste apenas nas "leituras" dos objetos, pois, para abstrair qualquer propriedade, é imprescindível valer-se de "[...] instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significações etc.) oriundos de 'esquemas' (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito" (1995, p. 5).

Por sua vez, a abstração reflexionante não se apoia no objeto, mas se dá pelas inferências que o sujeito extrai de suas ações e coordenações sobre eles (PIAGET, 1984). Ainda, "a abstração 'reflexionante' é um processo que permite construir estruturas novas, em virtude da reorganização de elementos tirados de estruturas anteriores [...]" (PIAGET, 1995, p.193).

No processo de abstração reflexionante, as coordenações não podem ser observadas, apenas inferidas por meio de observações do comportamento, pois elas estão no cérebro, na mente; por exemplo, quando uma criança toma consciência de que o resultado da soma 3 + 3 + 3 é o mesmo que multiplicar 3 x 3, tem-se,

portanto, a coordenação de duas ações de somar em uma única de multiplicar; a coordenação é, portanto, dinâmica, não estática (BECKER, 2014).

Essa passagem de uma ou muitas coordenações numa operação a uma mais complexa faz-se por abstração reflexionante, a qual "[...] implica equilibração, por assimilações e acomodações, retirando qualidades dessas coordenações ou operações, constituindo, assim, novidades. Uma nova operação, composta de muitas coordenações de ações, mais capaz que a anterior e de maior abrangência" (Ibid., p. 107).

No processo reflexionante, tem-se ainda a tomada de consciência. Para Piaget, a tomada de consciência "é uma reconstituição conceitual do que tem feito a ação" (PIAGET, 1978 *apud* SALADINI, 2008, p. 34), além de que:

> [...] a ação, ela só tende para um alvo e ela está satisfeita quando o alvo é atingido. Ela é dominada por aquilo que eu chamaria de êxito. Enquanto que a tomada de consciência comporta mais a compreensão: trata-se de saber como se tem êxito [...]. É a interpretação e a explicação da ação. Na própria ação, a compreensão está centralizada sobre o objeto e não sobre os mecanismos que permitiram atingi-lo (PIAGET, 1978 *apud* SALADINI, 2008, p. 34).

Assim, o sujeito toma consciência de suas ações quando é capaz de explicar as coordenações necessárias pelas quais efetivamente agiu. Portanto, a tomada de consciência tem um papel fundamental nesse processo reflexionante, pois, a partir do momento em que o sujeito toma consciência dos resultados de uma

abstração reflexionante, tem-se aí a abstração refletida (PIAGET, 1995). "É através da abstração refletida que o sujeito constrói os conceitos matemáticos, abrindo caminho para sua generalização a uma grande variedade de conteúdos inacessíveis sem essa nova tomada de consciência" (MARTINS, 2007, p. 29).

Assim, conclui Becker (2014) que todas as descobertas da humanidade, desde o fogo ou a roda, passando por todas as evoluções humanas, como a lâmpada elétrica, o cálculo diferencial integral, a mecânica quântica, a internet etc., são oriundas de abstrações refletidas.

Generalização indutiva e construtiva

A generalização é um grau mais elevado do pensamento humano e está intimamente relacionada com a abstração. Como Piaget (1984)[2] afirma, as generalizações requerem uma abstração prévia; ademais, a relação entre abstração e generalização não ocorre de maneira separada, ela é construída de maneira solidária, pois uma depende da outra para acontecer.

Nessa direção, Piaget (1984) afirma que a generalização configura dois grandes mistérios do conhecimento: 1º) o fato de engendrar estruturas constantemente novas, no sentido de não estarem contidas naquelas do ponto de partida, mas que, uma vez construídas, aparecem como o produto necessário delas; 2º) esta construção se apoia

2 Todas as citações diretas ou indiretas referentes a Piaget (1984) foram traduzidas pela autora deste texto.

sobre o que está em devir de maneira mais frequente e constante do que nas construções já elaboradas.

A generalização indutiva, procedente da abstração empírica, parte de relações observadas nos objetos e se remete a eles para verificar sua validez com a finalidade de estabelecer um grau de generalização, mas sem encontrar explicações ou razões para justificar o observado (PIAGET, 1984). O sujeito não pensa *a priori*, ele se limita a raciocinar e generalizar somente o que está observando.

Piaget afirma que, ao falar sobre generalizações indutivas, não está discutindo questões da lógica, mas referindo-se às "[...] fronteiras epistemológicas entre o que provém dos objetos e o que é proporcionado pelas operações ou ações do sujeito" (1984, p. 186). Para o autor, as investigações realizadas sobre a generalização sempre partem do observável (indutivo) e vão evoluindo de acordo com as coordenações das ações do sujeito sobre o objeto até a construção de novas formas e conteúdo (construtivo).

Ainda segundo Piaget (1984), acontecem generalizações indutivas quando o sujeito, depois de encontrar uma solução, seja falsa ou verdadeira, aplica-a sem uma justificativa a novos conteúdos que já estavam presentes nas informações, mas que ainda não foram utilizados. Nesse caso, não há criação de novas formas, e também não há a construção de novos conteúdos, apenas uma simples aplicação do esquema resolutório anterior, como quando o sujeito identifica alguma regularidade para n = 1 e n = 2 e acredita ser essa a generalização

para todas as situações sem ao mesmo testar sua validez; ou mesmo testando-a acredita que a mesma regularidade se aplica num igual contexto a outras situações.

A generalização construtiva, por sua vez, se apoia em operações do sujeito ou de seus produtos. Nesse caso, ela é de natureza simultaneamente compreensiva e extensiva, e chega, portanto, à produção de novas formas e, por vezes, de novos conteúdos (PIAGET, 1984). Isto é, "[...] não se trata de assimilar conteúdos novos de formas já constituídas, mas de engendrar novas formas e novos conteúdos, ou seja, novas organizações estruturais" (PIAGET, 1984, p. 188).

A formação da generalização construtiva consiste precisamente em uma transposição de uma construção material para uma construção conceitual – partindo das observações e manipulações dos objetos à conceitualização de suas ações –, e a partir do momento em que os sujeitos conseguem ter uma abstração refletida sobre suas ações, cuja tomada de consciência condiciona os processos generalizadores, elas evoluem de um nível a outro (PIAGET, 1984).

Piaget destaca que o processo de generalização construtiva começa quando os sujeitos não se limitam à leitura dos resultados das ações ou manipulações, conseguindo assim entender o próprio esquema de construção, ou seja, começam a compreender as coordenações necessárias que dão "razões" a suas ações (PIAGET, 1984). Para Piaget, a eficácia dessas coordenações necessárias se manifesta pelo descobrimento das "razões" atribuídas às

regularidades, já que elas representam critério autêntico das generalizações construtivas (PIAGET, 1984).

A passagem de uma generalização indutiva para construtiva não acontece num "estalar de dedos", como se fosse mágica. Trata-se de um processo de evolução do sujeito em relação aos seus pensamentos, os quais estão diretamente relacionados com a abstração reflexionante e a tomada de consciência. No entanto, esse processo não acontece de maneira linear, por acúmulo de informações, mas por estádios que, de acordo com Bellini (2020, p. 171), "[...] não são uma classificação estática de comportamento, mas períodos de construção de conhecimentos distintos que levam a criança a alcançar os conhecimentos da humanidade".

Para Piaget, as generalizações indutivas e construtivas sempre se apresentam reunidas, sendo, assim, indissociáveis:

> [...] mas o fato de que no transcurso de seu desenvolvimento mudam, não somente de proporções, mas também, e, sobretudo, de subordinações, impede de falar de um processo contínuo, e implica em atribuir às formas superiores (ou mais precisamente lógico-matemáticas a partir de um nível de metarreflexão) das generalizações indutivas e das abstrações pseudoempíricas, um significado diferente ao que tenham nas formas iniciais (PIAGET, 1984, p. 69).

As evoluções "admiráveis" dos sujeitos se devem às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não somente a da tomada de consciência, mas também, e sobretudo, das

formas de abstrações que elas determinam (PIAGET, 1984, p. 68)

Como esse progresso de constituição da generalização não ocorre de maneira linear, há momentos em que os sujeitos alcançam o princípio da generalização construtiva, mas, em outros casos, voltam para a generalização indutiva mediante observações. Esse "paradoxo", tal como é referido por Piaget (1984, p. 50), é facilmente explicado pelas leis da abstração e tomada de consciência. Segundo ele, é necessário distinguir pelo menos três níveis nos dados da própria ação, incluindo as transições entre eles.

> Primeiro, partindo da periferia (a tomada de consciência procede precisamente da periferia até o centro), se tem os resultados exteriores à ação, que podem ser conhecidos pelo sujeito sem que este entenda como os tenha alcançado. [...] Em segundo lugar, a ação ocorre em seu desenvolvimento material, e o fato de tomar conhecimento ainda se situa, como no caso dos resultados externos, no nível da abstração empírica (referindo-se aos deslocamentos, às manipulações como tais...). Por fim, há a compreensão do mecanismo interno de ação, ou seja, de suas coordenações necessárias (origem das operações lógico-matemáticas), e a tomada de consciência dessa lógica praxeológica se deve, então, à abstração refletida (PIAGET, 1984, p. 50-51).

Portanto, como afirma Piaget (1984), não há nada de contraditório nas reações dos sujeitos. Quando se dificulta a ação, conseguem executá-la aos poucos, mas só percebem claramente o resultado, mesmo que distorcido, quando são questionados. Ainda para o mesmo

autor, "[...] só se tem, por meio destas observações, corretas ou não, generalizações indutivas, por falta de abstração refletida e por falta de tomada de consciência do mecanismo coordenador interno que permitiu a realização das ações" (PIAGET, 1984, p. 51).

Tendo em vista que o objetivo principal da pesquisa aqui relatada foi investigar a mobilização da ideia-base de generalização por alunos do 5° e 9° anos do ensino fundamental, em resolução de situações-problema de função afim, optamos pela teoria piagetiana, mais precisamente sobre o processo de generalização, para respaldar, teoricamente, as análises das estratégias desenvolvidas pelos alunos.

Encaminhamentos metodológicos

Nesta pesquisa, buscamos compreender, nos resultados encontrados por pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa, as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos no processo para alcançar a generalização, sob a perspectiva da epistemologia e da psicologia genética estabelecidas por Jean Piaget (1984).

Para alcançar o objetivo desta pesquisa, realizou-se uma meta-análise dos dados já obtidos na pesquisa de Pavan (2010), que tem como título *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*, e dos dados obtidos por Calado (2020), em investigação intitulada *Invariantes operatórios relacionados à generalização:*

uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim.

Segundo Bicudo (2014), meta-análise ou metassíntese é uma investigação que vai além daquelas já realizadas, e, no caso de trabalhos qualitativos que são sínteses de interpretações de dados primários, a meta-análise efetua a interpretação das interpretações das pesquisas selecionadas para análise. Ainda, para a autora, a meta-análise "é uma investigação pautada em comparações e análises dos dados primários de pesquisas, tomadas como significativas em relação ao tema posto sob foco" (BICUDO, 2014, p. 9).

Nesse sentido, buscamos, com as pesquisas de Pavan (2010) e Calado (2020), trazer novas reflexões sobre o processo de generalização pesquisado por elas, mas agora sob outra perspectiva, a de Piaget (1984).

A pesquisa de Pavan (2010), fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, teve como objetivo investigar se tarefas envolvendo estruturas aditivas ou multiplicativas possibilitam a alunos de 4ª série, atualmente 5° ano, reconhecer e mobilizar as ideias-base de função: variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização. Para isso, foram realizadas entrevistas individuais com dez crianças, valendo-se das orientações do método clínico piagetiano, tendo como instrumento de produção de dados um conjunto de onze situações-problema divididos em cinco blocos, denominados pela autora de baterias.

Sustentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993; 1996; 2003; 2007; 2009; 2020), a pesquisa

de Calado (2020) teve o objetivo de analisar invariantes operatórios relacionados à generalização e mobilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental na resolução de sete situações envolvendo função afim. A pesquisa contou com a participação de 32 estudantes do 9° ano do ensino fundamental, que foram organizados em treze grupos (duplas ou trios).

Consideramos para análise, neste capítulo, apenas o problema 2 da segunda bateria de atividades proposta por Pavan (2010), além da atividade 3 proposta por Calado (2020), pois eles permitem identificar, em detalhes, o processo de generalização em desenvolvimento pelos estudantes colaboradores das investigações.

Análise das situações-problema propostas por Pavan (2010) envolvendo a ideia-base de generalização

Discorremos, agora, sobre a meta-análise realizada na situação-problema desenvolvida por Pavan (2010), buscando identificar se os alunos alcançaram a generalização construtiva estabelecida por Piaget (1984). Para essa análise, consideramos a situação-problema 2, da segunda bateria de atividades elaborada por Pavan (2010), conforme mostra o Quadro 1.

Em relação ao item a, os alunos não tiveram dificuldades na resolução (PAVAN, 2010). Ainda segundo a mesma autora, as crianças MAR, ROB, RAF, KEM e BRU resolveram esse item por meio do algoritmo da multiplicação, isto é, para encontrar a distância percorrida pelo trem após 7 paradas, fizeram 7 x 10, e, para 12 paradas, 12 x 10.

Quadro 1. Problema 2 da segunda bateria de atividades proposta por Pavan (2010)

Problema 2 – Em uma cidade, um trem foi planejado para que a distância entre qualquer estação e a seguinte seja sempre de 10 km.



a) O que você pode dizer sobre a distância percorrida pelo trem:
   - após 7 paradas?
   - após 12 paradas?

b) É possível calcular considerando qualquer número de paradas? Como fazemos isso?

Fonte: Pavan (2010).

As crianças LUA, DJH, IGO, DIO e MIL resolveram o item a por meio da adição e contagem de 10 em 10. Questionados se havia outra maneira de resolver, apenas os alunos LUA, IGO e MIL responderam que podia ser realizada a multiplicação. Os outros se mantiveram na soma.

No item b, os alunos foram questionados se poderiam calcular considerando qualquer quantidade de paradas, ou seja, esse item solicitava aos alunos a generalização do problema.

A generalização apresentada pelos alunos BRU, LUA, DJH e DIO é do tipo indutiva, pois utilizaram exemplos específicos para generalizar, como podemos observar

no Quadro 1.1, quando a criança BRU afirma: "Se forem 99 paradas, 99 x 10". Segundo Piaget (1984, p. 186), na generalização indutiva, as inferências, sejam elas corretas ou falsas, "[...] se limitam a generalizar, de 'alguns' a 'todos', os fatos ou relações constatadas, ou seja, observações a título de conteúdos dessas constatações".

Quadro 1.1. Generalização indutiva

BRU	Generalização: "Se forem 99 paradas, 99 x 10".
LUA	Generalização: "Ele poderia fazer 10 x 30".
DJH	Generalização: "Se forem 14 paradas, 140 km, 120+20=140".
DIO	Generalização: "Contando de 10 em 10 até o tanto de paradas que o trem deu".

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

É interessante notar que os alunos que generalizaram de forma indutiva resolveram o item a pela soma das parcelas, isto é, de 10 em 10 (exceto BRU). Logo, podemos inferir que, por esse motivo, eles ainda não chegaram à generalização construtiva, pois, tal como é referido por Piaget (1984), a generalização construtiva consiste em novas organizações estruturais; no presente caso, as estruturas multiplicativas.

Os sujeitos MAR e KEM estão no nível intermediário, isto é, na passagem da generalização indutiva para os princípios da generalização construtiva. Como podemos observar no Quadro 1.2, a seguir, a criança MAR consegue apresentar uma forma mais genérica para

a situação, ao afirmar: "Sim, por vezes, cada parada que ele dava, 10 km". No entanto, o aluno acredita ser necessário trazer à tona um exemplo específico para isso, quando diz: "Exemplo: 20 x 10". Inferimos que MAR está a caminho da generalização construtiva, pois, na primeira situação-problema apresentada por Pavan (2010), generalizou de maneira indutiva; já nesse problema, consegue fundamentar seus pensamentos em esquemas que estão começando a ser construídos, ou seja, MAR está tomando consciência de seus resultados e, em um processo de abstração refletida, estruturando seus esquemas.

A criança KEM, a respeito do item b, afirma que é possível calcular considerando qualquer quantidade de paradas, mas não explicita qual conta pode ser feita para isso. Quando diz: "mas também apenas 10 km", consideramos que KEM se refere ao algoritmo da adição, contando de 10 em 10. É interessante notar que, no primeiro problema apresentado por Pavan (2010), em relação à generalização, KEM alcançou a generalização construtiva; já nesse problema 2, não podemos concluir isso.

Quadro 1.2. Progresso da generalização indutiva e princípios da generalização construtiva

MAR	Generalização: "Sim, por vezes cada parada que ele dava, 10 km". "Exemplo: 20 x 10".
KEM	Generalização: "Pode, sempre quantas paradas quiser mas também apenas 10 km".

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

De acordo com Piaget (1984), tem-se um paradoxo, pois há momentos em que os sujeitos alcançam um princípio de generalização construtiva, e, em outros casos, se limitam a generalizações indutivas. Entretanto, isso pode ser facilmente explicado pelas leis da abstração e da tomada de consciência, como afirma o autor. Para Piaget (1984), é necessário distinguir três níveis, incluindo as transições entre eles, a saber:

> Primeiro, saindo da periferia (a tomada de consciência procede precisamente da periferia ao centro), se tem os resultados exteriores da ação que podem ser conhecidos pelo sujeito sem que entenda como os tenha alcançado. [...] Em segundo lugar, a ação ocorre em seu desenvolvimento material, e o fato de tomar conhecimento ainda está situado, como no caso de resultados externos, no nível da abstração empírica (referente a deslocamentos, as manipulações como tais). E, por último, tem a compreensão do mecanismo interno da ação, ou seja, de suas coordenações necessárias (origem das operações lógico-matemáticas), e a tomada de consciência dessa lógica praxeológica se deve então à abstração refletida (PIAGET, 1984, p. 51).

Quanto aos alunos ROB, RAF e IGO, eles apresentaram de forma genérica a situação, sem recorrer a exemplos específicos, configurando, assim, a generalização construtiva, uma vez que esses sujeitos fundamentam seus raciocínios no próprio esquema de construção, extraindo dele as coordenações necessárias, conforme mostrado no quadro 1.3 (PIAGET, 1984). Já o aluno MIL não apresentou nenhum tipo de generalização.

Quadro 1.3. Generalização construtiva

ROB	Generalização: "Fazendo os 10 km vezes o tanto de paradas".
RAF	Generalização: "Sim, multiplicando os km com as paradas".
IGO	Generalização: "É possível calcular qualquer número de paradas usando 10 km e multiplicando".

Fonte: Baseado em Pavan (2010).

No decorrer das situações-problema apresentadas na dissertação, observamos que alguns alunos, como ROB e RAF, desde o primeiro problema proposto por Pavan (2010), generalizaram de forma construtiva, pois, de acordo com Piaget (1984), chegaram à abstração refletida das situações apresentadas, compreendendo o mecanismo interno de suas ações e construindo o esquema generalizador necessário. Para os alunos DIO, KEM e DJH, a generalização foi progredindo passo a passo, desde a indutiva, passando pela intermediária, até chegar à generalização construtiva. Já MIL, IGO, BRU, MAR e LUA, em algumas situações-problema, generalizaram de maneira construtiva, e, em outras, a generalização foi indutiva. Todavia, estes alunos evoluíram rumo à generalização construtiva no decorrer da implementação do instrumento de produção de dados.

Para Piaget, a "[...] evolução se deve naturalmente às relações estreitas que existem entre as transformações da generalização e as etapas, não só da tomada de consciência, mas também, e sobretudo, das formas de abstração que ela determina" (1984, p. 68).

Análise da sequência didática proposta por Calado (2020) a respeito da generalização da função afim

Discorremos, agora, sobre a meta-análise realizada na atividade desenvolvida por Calado (2020) com alunos do 9° ano do ensino fundamental, com o intuito de identificar se eles alcançaram a generalização construtiva conforme estabelecido por Piaget (1984). Para essa análise, consideramos a atividade 3, elaborada por Calado (2020), como mostra o Quadro 2.

Quadro 2. Atividade 3 da sequência didática proposta por Calado (2020)

Atividade 3 – A escola de línguas MultLingue oferece cursos de inglês, espanhol e francês. Para cursar qualquer uma dessas línguas, o aluno precisa pagar uma taxa de matrícula no valor de R$ 150,00 e ainda uma mensalidade de R$ 90,00.

a) Quanto terá gastado um aluno que realizou a matrícula, mas depois desistiu e não compareceu em nenhum dos cursos?
b) Quanto terá gastado um aluno que frequentou por 4 meses o curso de inglês?
c) Quantos meses de curso terá feito um aluno que gastou R$ 1.230,00 com o curso de espanhol?
d) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos pela escola?

Fonte: Calado (2020).

No item a da atividade 3, os sujeitos tinham que determinar o valor gasto por um aluno que realizou a matrícula, mas desistiu de fazer os cursos. De acordo com Calado (2020), nove grupos (G1, G2, G4, G6, G7, G8, G9, G12 e G13) resolveram de maneira correta,

afirmando que será gasto apenas o valor da matrícula, ou seja, R$ 150,00, já que o aluno não cursou nenhuma língua. Os grupos G3, G5 e G10 apresentaram estratégias erradas de resolução, uma vez que consideraram o valor da matrícula e mais uma mensalidade, fazendo 150 + 90 = 140. Já o grupo G11 afirmou que "ele não pagará nada pois não compareceu em nenhum curso" (CALADO, 2020, p. 115), apresentando, também, uma interpretação errada da situação.

No item b, foi pedido que os sujeitos determinassem o valor gasto por um aluno que frequentou 4 meses do curso de inglês. Para esse item, dez grupos (G1, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G12 e G13) apresentaram a mesma estratégia correta, ou seja, multiplicaram R$ 90,00 (valor da mensalidade) por 4 meses, e, posteriormente, somaram o resultado com o valor da matrícula (R$150,00) (CALADO, 2020).

Ainda no item b, três grupos (G2, G10 e G11) apresentaram soluções incorretas, pois consideraram apenas o valor das mensalidades, desconsiderando o valor da matrícula, isto é, fizeram apenas 4 x 90 = 360 (CALADO, 2020).

O item c requeria dos alunos o cálculo de quantos meses de curso de espanhol fez um aluno que gastou R$ 1.230,00. Para essa questão, de acordo com Calado (2020, p. 118), apenas o grupo G2 apresentou resposta incorreta, ao afirmar que "fez o curso por 1 ano e 1 mês". Para a pesquisadora, embora o grupo não tenha deixado clara sua resolução, acredita-se que tenha

considerado apenas os valores das parcelas, fazendo 1.230 ÷ 90 = 13,66, concluindo que o curso foi realizado em 13 meses, isto é, um ano e um mês. Os grupos G3, G5, G6 e G12 responderam corretamente à questão, mas somente afirmaram que o curso foi feito em 12 meses, não apresentando estratégias de resolução.

Os grupos G7, G8, G9 e G11 apresentaram suas estratégias corretas, fazendo 1.230 – 150 = 1.080 e, depois, 1.080 ÷ 90 = 12, concluindo que foram 12 meses de curso.

Ainda no item c, os grupos G1, G4, G10 e G13 apresentaram a resolução fazendo 90 x 12 = 1.080 e, posteriormente, calcularam 1.080 + 150 = 1.230, demonstrando que o curso foi realizado em 12 meses (CALADO, 2020). Para chegarem a esse número de 12 meses, o grupo G1, tal como é referido por Calado (2020), fez por tentativa e erro, atribuindo valores para os meses e multiplicando por R$ 90,00 o resultado obtido. Então, somaram mais R$ 150,00, que é o valor da matrícula.

O item d pedia que os alunos escrevessem uma expressão algébrica que representasse o valor a ser pago por um aluno que cursa qualquer quantidade de meses em um dos cursos oferecidos, ou seja, pedia a generalização da atividade 3. Para esse item, o grupo G10 apresentou a expressão algébrica 240 + 90x, ou seja, fizeram uma interpretação inadequada da situação, considerando o valor fixo (R$ 150,00) mais uma parcela do curso de R$90,00, ficando 150 + 90 = 240 (CALADO, 2020). Vale chamar a atenção para o fato de que esse grupo, segundo Calado (2020), apresentou resposta correta para o

item anterior, calculando o valor gasto para um curso de 12 meses; no entanto, apresentaram uma generalização incorreta. Aqui, inferimos que o grupo G10 encontra-se na generalização indutiva, pois conseguiram realizar as atividades anteriores com os dados fornecidos (manipulação com os números), mas não conseguiram generalizar todos os casos. É interessante notar também que é a primeira vez que esse grupo apresenta uma generalização do problema.

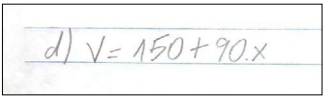
Os grupos G2, G6 e G12 apresentaram como generalização a expressão algébrica $V = 90x$ esquecendo-se do valor fixo (R$ 150,00). Notamos que o grupo G2 não considerou o valor da matrícula no item c da atividade 3, e que os grupos G6 e G12 apenas afirmaram que o aluno fez o curso em 12 meses, não apresentando estratégia de resolução. Desse modo, inferimos que esses grupos, considerando o item d, estão ainda na generalização indutiva, pois, por mais que tenham apresentado uma expressão algébrica da atividade, não conseguiram generalizar de forma correta, desconsiderando o valor da matrícula. O mesmo ocorre com o grupo G5, cuja generalização foi , somando a parte fixa à parte variável. Segundo Calado (2020), esse grupo já havia desenvolvido estratégias inadequadas no item a da atividade 3, utilizando a mesma estratégia de resolução. Portanto, esse grupo também generalizou de forma indutiva, pois utilizou a mesma estratégia de antes e não houve nenhuma criação de novas formas, nem novas construções.

Segundo Piaget, tem-se generalização indutiva:

> [...] quando o sujeito, depois de ter encontrado uma solução (falsa ou correta), aplica-a rapidamente a novos conteúdos (cores etc.) já presentes nas informações, mas que não tinham sido usados antes. Nesse caso, não há criação de novas formas, nem construção, posteriormente, de novo conteúdo, mas uma simples aplicação do esquema de resolução anterior (1984, p. 26).

Segundo Calado (2020), oito grupos desenvolveram estratégias corretas, a saber: G1, G3, G4, G7, G8, G9, G11 e G13, e as expressões algébricas variaram entre $V = 150 + 90x$ e $V = 90x + 150$, que são idênticas, devido à comutatividade da operação de adição. A Figura 1 mostra como o grupo 8 resolveu o item d.

Figura 1. Generalização do grupo G8 no item d da atividade 3



Fonte: Calado (2020, p. 121).

O Quadro 2.1, a seguir, apresenta o diálogo dos integrantes do grupo G8 no processo de generalização da situação proposta.

Quadro 2.1. Diálogo entre os integrantes do grupo G8

O grupo lê o item d.
— Pra quantos meses é pra fazer? — aluno A.
— Qualquer. Tem que colocar x — aluno B.
— Huuuum, vai ficar x o quê? — aluno A.
— X ponto 90... — aluno B.

O grupo lê novamente o item d.
— Tem que colocar o 150 da matrícula — aluno B.
— Mas daí vai fazer mais 90? — aluno A.
— Você tem que colocar vezes 90 e o 150 só paga uma vez — aluno B.
— Qualquer quantidade de meses, não precisa colocar 90, só o x que é pra qualquer quantidade de meses — aluno A.
— Mas tem que colocar o 90, porque o 90 é pra cada mês — aluno B.
— Como assim? — aluno A
— Olha só, ele só vai pagar o 150 uma vez. Digamos que ele faz 3 meses de curso, ele vai pagar 3 vezes 90 reais. Então V que é o valor pago é igual a X vezes 90 — aluno B.
— E o 150? — aluno A.
— X vezes 90 mais 150 — aluno B.
— Pode ser — aluno A.

Fonte: Calado (2020, p. 121).

Como podemos observar no diálogo do Grupo G8 transcrito no Quadro 2.1, apenas o aluno B conseguiu alcançar a generalização construtiva, pois foi capaz de explanar as coordenações necessárias que explicam suas ações, enquanto o aluno A ainda se encontra na generalização indutiva, pois não tomou consciência de suas ações, logo, não consegue transpor para um patamar superior aquilo que pode ser tirado do inferior, pois, tal como é referido por Piaget, "de maneira geral, o critério da generalização indutiva reside no fato de que se fundamenta nas descobertas ou somente no resultado das ações, enquanto a construtiva generaliza as próprias ações ou operações, ampliando e complementando suas formas anteriores" (1984, p. 41). Portanto, inferimos que o grupo G8 chegou à generalização construtiva, assim como os demais grupos (G1, G3, G4, G7, G9, G11

e G13), que também apresentaram a mesma estratégia de resolução.

De modo geral, desde a primeira atividade que Calado (2020) apresentou aos alunos, observamos que a generalização é algo bem complexo para eles, até mesmo a generalização em linguagem natural, pois, em relação à generalização construtiva, em todas as atividades o número de grupos que generalizou foi pouco. Dos treze grupos investigados, o grupo G8 generalizou de forma construtiva desde a primeira atividade; o grupo G5 generalizou de maneira indutiva somente na atividade 3 – nas demais, alcançou a generalização construtiva; o grupo G10 apresentou evolução no desenvolvimento das atividades, generalizando de forma indutiva, porém não alcançou a generalização construtiva em nenhuma delas; os demais grupos, por fim, transitaram entre a generalização indutiva e a construtiva.

Considerações finais

Considerando nosso problema de pesquisa: *quais as possíveis razões, segundo a teoria de Jean Piaget, para as dificuldades de estudantes de diferentes níveis de escolarização com o processo de generalização de função afim, identificadas em pesquisas desenvolvidas pelo GEPeDiMa?,* e considerando as meta-análises realizadas na pesquisa de Pavan (2010) e Calado (2020), sob a perspectiva de Piaget (1984), constatamos que a principal razão pela qual os alunos tiveram dificuldades de evoluir da generalização indutiva para a construtiva deve-se ao fato de

ainda não terem tomado consciência de suas ações e das formas de abstrações que a tomada de consciência determina, tal como é referido por Piaget (1984), pois, independentemente do nível de escolaridade e da idade dos alunos, identificamos, nas análises realizadas, que a partir do momento em que os alunos conseguem explicar as razões de suas ações, a generalização se torna cada vez mais construtiva.

Constatamos, também, a importância de o professor desenvolver uma sequência didática voltada para o estudo da lei de formação da função que proporcione aos alunos várias situações, a fim de que eles possam identificar, no decorrer das tarefas ou dos problemas propostos, o que está acontecendo com as informações que estão colocando em correspondência, quais variáveis estão "em jogo" e quais delas são dependentes e independentes, para, então, por meio de abstrações e tomada de consciência de suas ações, passarem da generalização indutiva para a generalização construtiva. Isso porque constatamos que todos os colaboradores, de ambas as pesquisas aqui analisadas, evoluíram durante a implementação das tarefas propostas, corroborando Pinto (2014), para quem uma sequência didática bem planejada pode ser fundamental na condução dos processos de ensino e de aprendizagem dos alunos, levando-os à efetivação do conceito estudado, que, no nosso caso, é o de função afim.

Recomendamos que as ideias-base do conceito de função sejam trabalhadas desde os anos iniciais do

ensino fundamental, para que quando os alunos chegarem aos anos finais (9° ano), em que a função afim é apresentada de maneira formal, consigam generalizar algebricamente as situações apresentadas, mas de maneira construtiva, não indutiva, como vimos na maioria das respostas de Calado (2020).

Isso porque não são somente as crianças que passam pela generalização indutiva. Não se trata somente de algo relacionado à idade, pois o processo de generalização tem duas etapas: indutiva e construtiva. Dito de outra forma, não apenas é recomendável que as ideias-base de função afim, com a generalização sendo expressa em linguagem natural, sejam abordadas só nos anos iniciais do ensino fundamental, mas é também relevante que nos anos finais sejam propostas tarefas que possibilitem aos estudantes desenvolver o processo de generalização em suas duas etapas, a indutiva e a construtiva.

Referências

BECKER, F. Abstração pseudo-empírica e reflexionante: Significado epistemológico e educacional. *Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, v. 6, n. e., p. 104-128, nov. 2014. Disponível em: http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/scheme/article/view/4276. Acesso em: 29 jul. 2020.

BELLINI, M, L. Piaget: uma teoria da ação. *Clareira*: *Revista de Filosofia da Região Amazônica*, v. 7, n. 1, p. 168-178, jan.-jul, 2020.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. *REVEMAT,* v. 9, p. 7-20, jun. 2014.

BLATON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Jornal for Research in Mathematics Education*, v. 36, n. 5, p. 412-446, 2005.

CALADO, V. C. *Invariantes operatórios relacionados à generalização:* uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

CANAVARRO, A. P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, v. XVI, n. 2, 2007. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/62447846.pdf. Acesso em: 16 fev. 2021.

MANZAN, A. P. A. *A apropriação dos conceitos de função afim e quadrática por estudantes de cursos de engenharia*. 2014. 160 f. Dissertação (Mestrado em Enfermagem) – Universidade de Uberaba, Uberaba, 2014.

MARTINS, L. C. *Abstração reflexionante e aprendizagem de proporção*. 2007. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MERLI, R. F. *Do Pensamento Funcional ao Campo Conceitual de Função*: o desenvolvimento de um conceito. 2022. 216 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. *In*: RAMOS, A. S.; REJANI, F. C. *Teoria e Prática de Funções.* Maringá: Unicesumar, 2014.

PAVAN, L. R. *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em*

situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

PIAGET, J. *Investigaciones Sobre La Generalización*: estudios de epistemoligía y psicología genéticas. Tlahuapan: Premià, 1984.

PIAGET, J. *Abstração Reflexionante*: relações lógico-matemáticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PINTO, C. F. *Dissertações Brasileiras sobre o Ensino de Função Afim, a partir da implementação de Sequências Didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012*: questões para formação de professores e para pesquisa. 2014. 199 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

REZENDE, V.; NOGUEIRA, C. M. I.; CALADO, T. V. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,* v. 13, n. 2, p. 25-50, nov. 2020.

RUIZ, A. R.; BELLINI, L. M. *Matemática:* epistemologia genética e escol*a*. Londrina: Edições CEFIL, 2001.

SALADINI, A, C. Da ação à reflexão: o processo de tomada de consciência. *Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, v. 1, n. 2, p. 31-54. jul.-dez. 2008.

SILVA, S. D; NOGUEIRA, C. M. I. O processo de generalização de função afim sob a perspectiva de Jean Piaget. *Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas*, v. 14, n. 1, p. 102-144. jan.-jul. 2022. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/13818. Acesso em: 10 jan. 2023.

TINOCO, L. A. A. Álgebra: pensar, calcular, comunicar. 2. ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2011.

6. Conhecimentos implícitos de função mobilizados por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos

Carla Larissa Halum Rodrigues
Karina Dezilio
Veridiana Rezende

Introdução

A compreensão do conceito de função é complexa para estudantes de diferentes níveis de ensino. Essa afirmação é baseada nos resultados de diversas pesquisas que mostram a dificuldade de apreensão desse conceito por parte dos estudantes da educação básica (TRINDADE, 1996; PIRES, 2016; CALADO, 2020; ARAÚJO, 2021; BERNARDINO, 2022), estudantes do ensino superior (OLIVEIRA, 1997; BIANCHINI; PUGA, 2006; ZANATTA; REZENDE, 2022) e por professores que ensinam matemática (ZUFFI, 1999; ROSSINI, 2006).

Com base na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 2009a; VERGNAUD, 2009b), partimos do pressuposto de que um conceito é desenvolvido pelo estudante ao longo do processo escolar em decorrência das

diferentes situações experimentadas. Ou seja, são necessárias várias situações que envolvem diversos outros conceitos, teoremas e representações interligadas a um mesmo conceito para que ocorra a sua compreensão.

A formalização do conceito de função deve acontecer a partir do 9º ano do ensino fundamental (BRASIL, 2018). No entanto, desde os anos iniciais a BNCC (BRASIL, 2018) recomenda que a noção intuitiva de função seja desenvolvida por meio da resolução de problemas que envolvam a variação proporcional direta entre duas grandezas, bem como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Nesse mesmo sentido, pesquisas desenvolvidas por membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPeDiMa), tais como Silva (2021), Rodrigues (2021) e Dezilio (2022), mostram que as seguintes noções, denominadas de ideias-base de função: variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização, podem ser exploradas por meio de situações que mobilizem a proporcionalidade a partir dos anos iniciais.

Entre as situações que possibilitam a manifestação de ideias-base de função, citamos os problemas mistos, que são aqueles formados por relações aditivas e multiplicativas (VERGNAUD, 2009a), ou seja, os problemas mistos são estruturados a partir das combinações de classes dos campos conceituais aditivo e multiplicativo estabelecidos por Vergnaud (2009a), e, segundo Miranda (2019), algumas classes podem ser modeladas por meio de uma função afim $f = ax \pm b$, com a , $b > 0$.

Neste capítulo, apresentamos parte dos resultados das dissertações de mestrado das duas primeiras autoras, orientadas pela terceira autora. Em ambas as pesquisas, foram analisados conhecimentos de função manifestados por estudantes do 5º ano ao resolverem problemas mistos, sendo que a pesquisa de Rodrigues (2021) considerou a classe de problemas proporção simples e transformação de medidas, e a pesquisa de Dezilio (2022) contemplou a classe *proporção simples e composição de medidas*. Essas classes foram escolhidas pois são predominantes nos livros didáticos Ápis *Matemática dos Anos Iniciais* (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

Assim, considerando as pesquisas de Rodrigues (2021) e Dezilio (2022), e com base em Vergnaud (2009a; 2009b), estabelecemos como objetivo para este capítulo: identificar invariantes operatórios, relacionados ao conceito de função, mobilizados por estudantes do 5º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas mistos das classes proporção simples e transformação de medidas e da classe proporção simples e composição de medidas.

Os invariantes operatórios são conhecimentos presentes nos esquemas de resolução de um sujeito e são diferenciados em dois tipos: conceitos em ação e teoremas em ação. "Um conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação. Um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação" (VERGNAUD, 2009b, p. 23) pelo estudante, mas que pode ser falsa do ponto de vista científico.

A seguir, apresentamos os procedimentos metodológicos e as classes dos problemas mistos contemplados nesta pesquisa.

Os procedimentos metodológicos e as classes de problemas mistos

Para alcançar o objetivo proposto, selecionamos duas situações, uma de cada pesquisa, que foram propostas aos estudantes do 5º ano de escolas públicas municipais do estado do Paraná. O nível de ensino 5º ano foi escolhido pelo fato de nessa etapa os estudantes estarem em fase de consolidação dos conceitos de adição e multiplicação (BRASIL, 2018), bem como pelo fato de o livro didático Ápis *Matemática* do 5º ano conter a maior quantidade e variedade de problemas mistos (RODRIGUES; REZENDE, 2021).

A primeira situação discutida neste capítulo pertence à classe de problemas proporção simples e transformação de medidas, e foi resolvida individualmente por 12 estudantes de quatro escolas municipais situadas na cidade de Campo Mourão, no Paraná. A resolução de quatro situações aconteceu em um único encontro, no primeiro semestre do ano de 2021. A produção dos dados ocorreu no período de pandemia da Covid-19.[1]

1 Devido à pandemia de Covid-19, a partir de março de 2020, as aulas presenciais foram suspensas e os alunos tiveram aulas remotas, ou seja, eles foram atendidos a partir do conteúdo disponibilizado de forma online, por meio de vídeos, tendo como principal recurso tecnológico o celular e como principal recurso pedagógico o livro didático e as atividades impressas buscadas por seus pais

Neste trabalho, discutimos uma das situações, denominada de situação 1. Ela foi escolhida pelo fato de permitir mostrar mais facilmente as ideias mobilizadas.

A situação 1 foi apresentada para cada estudante pela pesquisadora, primeira autora deste capítulo, por meio do aplicativo Google Meet, pois, devido à pandemia de Covid-19, as instituições de ensino estavam fechadas para atendimento presencial. A pesquisadora solicitava a foto da resolução pelo WhatsApp, a partir da qual realizava um diálogo síncrono com cada estudante, com o intuito de auxiliar as análises, e isso permitiu que a pesquisadora acompanhasse o raciocínio do aluno sem necessariamente corrigir as respostas.

A resolução individual dos estudantes foi analisada com base em seu esquema, exposto por meio de representações escritas, e no diálogo entre a pesquisadora e o estudante. As resoluções dos estudantes foram agrupadas considerando os esquemas correspondentes e, depois, foram identificados os possíveis conhecimentos de função mobilizados: teoremas em ação e conceitos em ação.

Para estabelecer as possibilidades de subclasses para problemas mistos da classe proporção simples e transformação de medidas, foram consideradas as quatro variações da classe proporção simples combinadas com as seis variações da classe transformação de

na escola. As aulas nas escolas públicas foram retornando aos poucos a partir do segundo semestre de 2021. Os alunos tiveram um déficit na aprendizagem, tanto pela falta de acesso ao conteúdo quanto pela falta de interesse.

medidas, o que possibilitou a formação de 24 subclasses, conforme apresenta o Quadro 1.

Quadro 1. Subclasses de problemas mistos do tipo proporção simples e transformação

Campo multiplicativo	Campo aditivo
Proporção simples multiplicação um para muitos.	Transformação positiva, com o estado inicial desconhecido. Transformação positiva, com a transformação desconhecida. Transformação positiva, com o estado final desconhecido. Transformação negativa, com o estado inicial desconhecido. Transformação negativa, com a transformação desconhecida. Transformação negativa, com o estado final desconhecido.
Proporção simples partição.	
Proporção simples cota.	
Proporção simples quarta proporcional.	

Fonte: Rodrigues (2021).

A situação 1, discutida nas análises desta pesquisa, é constituída pela subclasse proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido, pois essa situação permite a exploração e/ou a mobilização das ideias-base de função: correspondência, dependência, regularidade, variável e busca pelo estado final.

A situação 2 foi resolvida presencialmente por treze estudantes, divididos em seis grupos, sendo cinco duplas e um trio, num dia letivo, durante duas horas convencionais de aula de uma escola do campo da cidade de Moreira Sales, no Paraná. A produção dos dados

contou com a gravação de áudios dos estudantes, que foram transcritos; o registro escrito dos estudantes e o diário de bordo da pesquisadora.

Para a organização dos dados foram agrupados os problemas com resoluções semelhantes (esquemas), e para a análise foram consideradas as escritas dos estudantes e as gravações dos diálogos entre os integrantes de cada grupo, tendo como base a Teoria dos Campos Conceituais. Depois, identificamos em cada esquema as ideias de função envolvida: correspondência, dependência, regularidade, variável, generalização e proporcionalidade, bem como os teoremas em ação mobilizados pelos estudantes em seus esquemas e em seus diálogos.

Para estabelecer as possibilidades de subclasses para problemas mistos do tipo proporção simples e composição de medidas, foram consideradas as quatro variações da classe proporção simples combinadas com as duas variações da classe transformação de medidas, o que possibilitou a formação de oito subclasses (Quadro 2).

Quadro 2. Subclasses de problemas mistos do tipo proporção simples e composição

Campo multiplicativo	Campo aditivo
Proporção simples multiplicação um para muitos.	Composição, com o todo desconhecido
Proporção simples partição.	
Proporção simples cota.	Composição, com a parte desconhecida
Proporção simples quarta proporcional.	

Fonte: As autoras.

Neste texto, discutimos também a situação 2, constituída pela subclasse proporção simples um para muitos e composição de medidas com o todo desconhecido, pois essa situação permite a exploração e/ou a mobilização das ideias-base de função.

Na sequência, apresentamos a análise das resoluções dos alunos nas duas situações, lembrando que uma situação foi resolvida individualmente e a outra em grupos, isso porque os dados fazem parte de duas pesquisas diferentes.

Análises das resoluções dos alunos

A situação 1 pertencente à subclasse de problemas proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva com o estado final desconhecido.

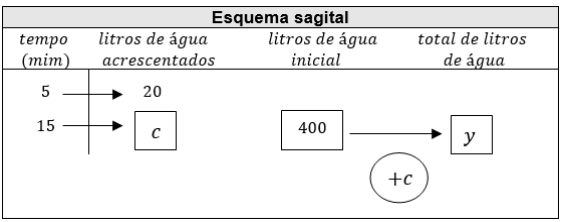
Situação 1

> A piscina de Camila está com 400 litros de água, e ela pretende enchê-la com uma torneira cuja vazão é de 20 litros de água a cada 5 minutos. Quantos litros de água terá a piscina após Camila abrir a torneira por 15 minutos?

Essa situação foi resolvida por doze estudantes individualmente, nomeados como A1, A2,... A12, e coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo quarta proporcional, do campo multiplicativo, que associa muitas quantidades de uma grandeza com muitas quantidades da outra grandeza, e a relação de transformação positiva com o estado final desconhecido, do campo aditivo, que consiste na aplicação de uma transformação ao

estado inicial para obter o estado final. Para representar essas relações, propõe-se o seguinte esquema, com base nos esquemas dos campos aditivo e multiplicativo estabelecidos por Vergnaud (2009*a*) e no esquema proposto por Miranda (2019).

Quadro 3. Representação da subclasse proporção simples do tipo quarta proporcional e transformação positiva



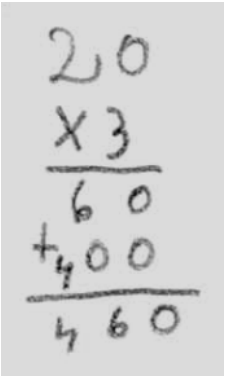
Fonte: Rodrigues (2021), adaptado de Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

Os estudantes A1, A2, A8 e A10 resolveram corretamente essa situação; e os demais estudantes, A3, A4, A5, A6, A7, A9, A11 e A12, não resolveram corretamente. Ao todo, foram manifestados dois esquemas pertinentes e quatro esquemas não pertinentes para a situação proposta. Na sequência apresentamos os dois esquemas pertinentes e um esquema não pertinente, seguido dos conhecimentos implícitos de função (teoremas em ação e conceitos em ação).

Esquema 1

Para a resolução dessa situação, os estudantes A1 e A8 utilizaram como esquema pertinente os algoritmos da multiplicação e da adição (Figura 1).

Figura 1. Esquema do estudante A8



Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes A3, A5, A6 apresentaram como esquema o algoritmo da multiplicação, ignorando a quantidade de litros de água que havia na piscina, ou seja, não estabeleceram a relação aditiva. Ao utilizar como esquema o algoritmo da multiplicação, os estudantes podem ter manifestado implicitamente um teorema em ação verdadeiro associado à propriedade linear do isomorfismo de medidas, quando realizaram a seguinte relação matemática para um caso particular: a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos é o mesmo que 3 vezes a quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 5 minutos. Para expressá-lo em termos matemáticos, consideramos: 3 equivalente à razão, $f(5)$ equivalente à quantidade de litros de água em 5 minutos, e $f(15)$ equivalente à quantidade de litros de água acrescentados na piscina em 15 minutos.

Portanto, $f(15\,minutos)$ $f(3 \times 5\,minutos)$ $3 \times f$ $(5\,minutos) = 3 \times 20$ litros de água 60 litros de água.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV1 e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme representado a seguir.

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, com $k, x \in N$ e sendo k a razão (um escalar).

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983) e Franchi (1999) ao explicitarem as estruturas multiplicativas, e identificado por Calado (2020) nas resoluções de estudantes do 9º ano do ensino fundamental e por Silva (2021) nas resoluções de estudantes do 5º ano em situações multiplicativas.

A partir do TAV1, identificamos indícios da mobilização, pelos estudantes A1, A3, A5, A6 e A8, de conceitos em ação associados ao conceito de função: correspondência, dependência, proporcionalidade, razão e variável, conforme análise a seguir:

- correspondência de muitos para muitos – 5 minutos a vazão da torneira é de 20 litros de água e 15 minutos a vazão da torneira é de 60 litros de água;
- dependência – a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende de quantos litros de água vazam da torneira em 15 minutos, e da quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos.

- variável – a variação do tempo e, consequentemente, da quantidade de litros de água acrescentada na piscina; e
- proporcionalidade – se 15 minutos é igual a três vezes 5 minutos, então três vezes 20 litros de água é igual a 60 litros de água, sendo três vezes a razão.

Ao utilizar o algoritmo da adição como esquema, os estudantes A1 e A8 mobilizaram um teorema em ação verdadeiro, que consiste em aplicar uma transformação direta de adição ao estado inicial para encontrar o estado final. Para exemplificá-lo, considera-se que a solução canônica do problema consiste em aplicar a transformação representada por 60 litros de água ao estado inicial, que diz respeito a 400 litros de água, e, assim, encontrar o estado final, 460 litros de água. Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV2, e o modelamos conforme Vergnaud (2009a), ao considerar *F* o estado final; *I* o estado inicial; e *T* a transformação, como representado a seguir.

$$\text{TAV2: } F = I + (\pm \vec{T}) \text{ com } F, I \in N \text{ e } T \in Z.$$

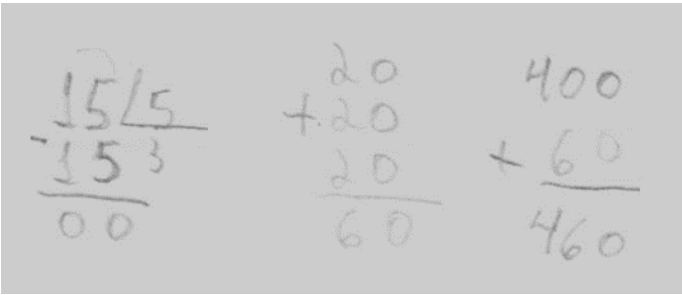
A partir do TAV2 foram identificados os seguintes conceitos em ação, mobilizados pelos estudantes A1 e A8: estado inicial, estado final e transformação.

Esquema 2

Para a resolução dessa situação, os estudantes A2 e A10 apresentaram, como esquema pertinente, uma

sequência aditiva recursiva e o algoritmo da adição. O estudante A2 também apresentou o algoritmo da divisão explicitamente para encontrar a razão (Figura 2). O estudante A7 apresentou como esquema somente uma sequência aditiva recursiva e, assim, não estabeleceu uma relação aditiva com a quantidade de litros de água que havia na piscina.

Figura 2. Esquema do estudante A2



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema, os estudantes A6, A7 e A10 podem ter manifestado um teorema em ação verdadeiro associado à propriedade linear do isomorfismo aditivo. Para exemplificá-lo, considera-se f(15 minutos) representando a quantidade de litros de água em 15 minutos, f(5 minutos) representando a quantidade de litros de água em 5 minutos, e o seguinte esquema:

f(15 minutos) = f(5 minutos +5 minutos +5 minutos) =
f(5 minutos) + f(5 minutos) + f(5 minutos) =
20 litros de água +20 litros de água +20 litros de água =
60 litros de água.

Ao adicionar ou subtrair sucessivamente $f(x)$, uma relação proporcional entre duas grandezas, constatamos um teorema em ação verdadeiro, identificado pela sigla TAV3, como representado a seguir, em um caso geral.

TAV3: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x \pm x) = f(x) \pm f(x)$ com $x \in N$.

Esse teorema em ação é mencionado por Ricco (1982), Vergnaud (1983) e Franchi (1999) e identificado por Calado (2020) nas resoluções de estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

Subjacentes ao TAV3, foram identificados os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos estudantes A6, A7 e A10: adição de funções lineares, correspondência, dependência, proporcionalidade, regularidade e variável, conforme a análise a seguir:

- correspondência muitos para muitos – 5 minutos corresponde a 20 litros de água, 10 minutos corresponde a 40 litros de água, e 15 minutos corresponde a 60 litros de água;
- dependência – a quantidade de litros de água acrescentados na piscina depende do tempo que a torneira ficou aberta e da quantidade de água que vaza da torneira em 5 minutos.
- variável – ao variar o tempo em minutos e, consequentemente, a quantidade de litros acrescentada na piscina;

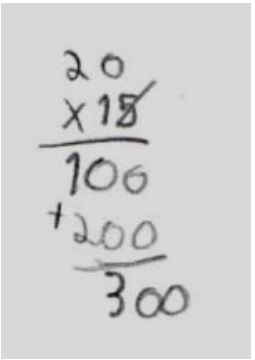
- proporcionalidade – ao adicionar 3 vezes (razão) 20 litros de água para manter a proporcionalidade – 3 vezes 5 minutos são 15 minutos, então 3 vezes 20 litros de água são 60 litros de água; e
- regularidade – ao realizarem a sequência aditiva recursiva somando mais 20 ao resultado anterior, totalizando 60 litros de água.

Ao utilizarem outro algoritmo da adição como parte do esquema, os estudantes A6 e A10 podem ter manifestado o TAV2: $F = I + (\pm T)$, com $F, I \in N$ e $T \in Z$, e os conceitos em ação de estado inicial, estado final e transformação, apresentados anteriormente.

Esquema 3

Para resolver a situação, a estudante A4 utilizou um esquema não pertinente, que consiste no algoritmo da multiplicação (Figura 3).

Figura 3. Esquema da estudante A4



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observar a resolução da estudante A4, inferimos que ela não estabeleceu uma relação aditiva com a quantidade de litros de água que já tinha na piscina, não mobilizou a ideia de proporcionalidade pertinente à solução da situação. Com isso, presumimos que a estudante A4 pode ter manifestado um teorema em ação falso, quando realizou o seguinte raciocínio: a quantidade de litros de água acrescentados à piscina em 15 minutos é o mesmo que 15 vezes a quantidade de litros de água acrescentados à piscina em 5 minutos, ou seja, em vez dela buscar a razão (k =3), multiplicou 15 (um número qualquer, que não é a razão) por 20 litros de água.

Para expressá-lo, considera-se 15 representando um número qualquer, f (15 minutos) equivalente à quantidade de litros de água acrescentada à piscina em 15 minutos, e f (5 minutos) equivalente à quantidade de litros de água acrescentada à piscina em 5 minutos. Portanto,

$$f(15\ minutos) = 15 \times f(5\ minutos) = 15 \times 20 \text{ litros de água} = ¿\ 300 \text{ litros de água.}$$

Identificamos esse teorema em ação falso pela sigla TAF1 e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação proporcional entre duas grandezas, conforme evidenciado a seguir:

TAF1: Seja f uma relação de proporcionalidade, então $f(x') = x' \cdot f(x)$, com $x \in N$ e $x > 1$.

Esse teorema em ação falso também é identificado por Ferraz (2016) nas resoluções dos estudantes do 6º ano em problemas do tipo quarta proporcional.

A partir do TAF1, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pela estudante A4: correspondência e dependência.

- correspondência muitos para muitos – em 5 minutos a torneira tem uma vazão de 20 litros de água e em 15 minutos a torneira tem uma vazão de 300 litros de água.
- dependência – a quantidade de litros de água acrescentada à piscina depende do tempo que a torneira ficou aberta.

Na sequência, apresentamos as análises das resoluções dos estudantes na situação 2 pertencente à subclasse proporção simples um para muitos e composição de medidas com o todo desconhecido. O referido problema foi apresentado aos estudantes a partir de quatro questões. No entanto, apresentamos aqui somente a questão "a" e a questão "d", pois as questões "b" e "c" são semelhantes à questão "a".

Situação 2

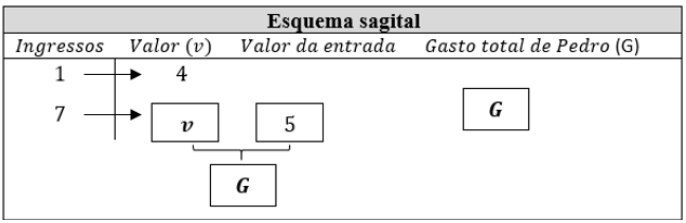
Em um parque de diversões há vários brinquedos. O valor do ingresso para cada brinquedo custa R$ 4,00, e a entrada no parque custa R$ 5,00. O gasto total no parque inclui o valor pago pelos ingressos e o valor da entrada. Com essas informações, responda:

a) Pedro entrou no parque e comprou 7 ingressos. Qual foi o gasto total de Pedro?
b) Após Pedro entrar no parque, como podemos calcular o gasto para qualquer quantidade de ingressos comprados?

Essa situação foi resolvida por 13 estudantes. Os grupos 1, 2, 3, 4 e 5 tinham 2 estudantes cada e o grupo

6, 3 estudantes. A situação coloca em jogo a relação de proporção simples do tipo um para muitos do campo multiplicativo, que associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza, e a relação de composição de medidas do campo aditivo, que consiste na composição de duas medidas para se obter o todo desconhecido (Quadro 4).

Quadro 4. Representação da subclasse proporção simples um para muitos e composição com o todo desconhecido



Fonte: Dezilio (2022), adaptado de Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

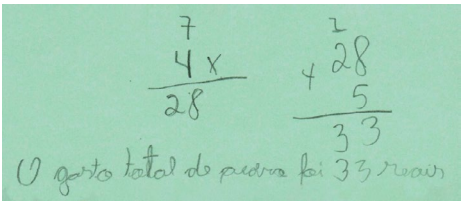
Na primeira questão da situação 2, quatro grupos de estudantes apresentaram esquemas pertinentes para a resolução da questão, sendo eles: grupos 1, 2, 3 e 6, e dois grupos apresentaram esquemas não pertinentes, sendo eles: grupos 4 e 5.

Na sequência, apresentamos os dois esquemas, seguidos dos conhecimentos associados ao conceito de função.

Esquema 1

Para a resolução da questão "a", os estudantes dos grupos 1, 2, 3, e 6 utilizaram como esquema pertinente os algoritmos da multiplicação e da adição (Figura 4).

Figura 4. Esquema do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

No esquema desses estudantes, podemos indicar a mobilização de um teorema em ação verdadeiro, quando consideraram o gasto total e os seguintes raciocínios.

$$f(1\ ingresso) = 4\times1+5 = 9$$
$$f(7\ ingressos) = 4\times7+5 = 33$$

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAV4, e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação funcional, a a taxa e b uma constante, como apresentado a seguir:

TAV4: Se f é uma relação funcional, então $f(x) = a \cdot x + b$ com $a, b, x \in N$.

Subjacente ao TAV4, identificamos os seguintes conceitos em ação mobilizados pelos grupos 1, 2, 3 e 6: constante, correspondência, dependência, proporcionalidade, taxa e variável, conforme a análise a seguir:

- correspondência de um para muitos – 1 ingresso custa 4 reais e 7 ingressos custam 28 reais. dependência – o total gasto depende da quantidade de ingressos comprados.

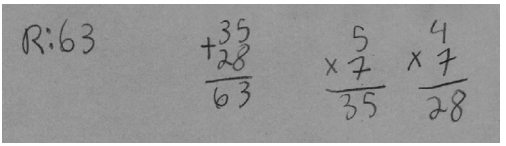
- variável – ao perceberem a variação da quantidade de ingressos e, consequentemente, do total gasto.
- proporcionalidade – ao utilizar a taxa de proporcionalidade – 4 reais por ingresso ou pela utilização da razão – 7 vezes.
- regularidade – os estudantes seguiram o mesmo raciocínio em todas as questões. Embora estejamos indicando somente uma resolução, na questão seguinte eles também mantiveram a mesma ideia, mudando apenas a quantidade de ingressos comprados, o valor de cada ingresso, e o valor da entrada foi preservado.
- constante – o valor da entrada.

Esse TAV4 também foi identificado por Rodrigues (2021) em uma situação de proporção simples do tipo cota e transformação positiva com a transformação positiva desconhecida.

Esquema 2

Os estudantes dos grupos 4 e 5 apresentaram como resposta para a questão "a" um esquema não pertinente para a situação (Figura 5).

Figura 5. Esquema do Grupo 5



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse esquema não pertinente, identificamos a possibilidade de mobilização de um teorema em ação falso quando os estudantes apresentaram a multiplicação do valor do ingresso (R$ 4,00) pela quantidade de ingressos (7), e multiplicaram o valor da entrada no parque (R$ 5,00) pela quantidade de ingressos (7) e, depois, somaram os resultados obtidos nessas multiplicações.

Identificamos esse teorema em ação pela sigla TAF2, e o modelamos ao considerar $f(x)$ uma relação funcional, a, b as taxas, como apresentado a seguir:

TAF2: Se f é uma relação funcional, então $f(x) = a \cdot x + b \cdot x$ com $a, b, x \in N$.

A partir do TAF2 identificamos os seguintes conceitos em ação manifestados pelos grupos 4 e 5: correspondência, dependência, regularidade, variável e proporcionalidade, conforme a análise a seguir:

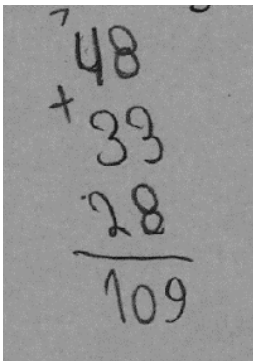
- correspondência de um para muitos – 1 ingresso custa 4 reais e 7 ingressos custam 28 reais. Também fizeram uma correspondência não pertinente para a situação, multiplicando a quantidade de ingressos pelo valor da entrada no parque (1 ingresso – 5 reais pela entrada e 7 ingressos – 35 reais pela entrada).
- dependência – o total gasto depende da quantidade de ingressos comprados.
- variável – ao perceberem a variação da quantidade de ingressos e, consequentemente, do total gasto. Também variaram o valor da entrada no parque,

mudando-o conforme a quantidade de ingressos comprados.

- proporcionalidade – ao utilizar a taxa de proporcionalidade – 4 reais por ingresso. Também fizeram uma proporcionalidade não pertinente para a situação – 5 reais da entrada pela quantidade de ingressos.
- regularidade – os estudantes seguiram o mesmo raciocínio em todas as questões. Embora estejamos indicando a resolução de apenas uma questão, na questão seguinte os estudantes também mantiveram o mesmo esquema, mudando apenas a quantidade de ingressos comprados e o valor de cada ingresso, já o valor da entrada foi preservado.

Na segunda questão, os estudantes dos grupos 2, 3, 4 e 6 não conseguiram generalizar o problema e apresentaram como resposta a soma de resultados obtidos nas questões anteriores (Figura 6).

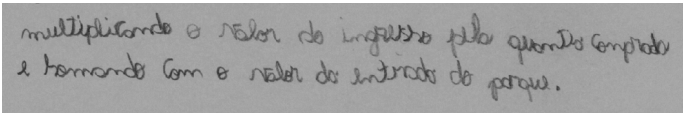
Figura 6. Esquema do Grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Já os estudantes do grupo 5 apresentaram a seguinte resposta para a questão "d": "adição e somando"; e os estudantes do grupo 1 conseguiram apresentar uma generalização para esse problema (Figura 7).

Figura 7. Esquema do Grupo 1



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se na resolução dos estudantes do grupo 1 a compreensão de um padrão quando se altera uma das variáveis. Dessa forma, eles conseguiram chegar a uma generalização por meio da língua natural. Tal fato vai em direção às pesquisas de Tinoco (2002) e Calado (2020), que indicam que a capacidade de registrar argumentos e linguagem coerentes, que justifiquem a validade da resolução para qualquer caso – a generalização –, é um passo decisivo para a construção do conceito de função, pois "[...] a generalização em linguagem natural pode auxiliar na construção da linguagem algébrica" (CALADO, p. 34). Na situação 1 não foi possível identificar a generalização pelo fato de o problema não ter uma questão que conduzisse a uma possível generalização, conforme está proposto na situação 2.

Considerações finais

A partir das resoluções dos estudantes nas subclasses distintas, proporção simples do tipo quarta proporcional

e transformação positiva com o estado final desconhecido; e proporção simples um para muitos e composição de medidas com o todo desconhecido, observa-se que eles manifestaram esquemas semelhantes e pertinentes correspondentes aos algoritmos da multiplicação e da adição, mas que estão associados a algumas ideias distintas, pois na situação 1, esquema 1, as ideias mobilizadas foram de correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, variável, estado inicial, estado final e transformação positiva; na situação 2, esquema 1, as ideias mobilizadas foram de correspondência, dependência, proporcionalidade, variável, taxa, composição e constante.

No esquema 3 da situação 1 e no esquema 2 da situação 2, os alunos utilizaram os algoritmos da multiplicação e da adição, mas não estabeleceram relações necessárias para a resolução da situação.

Os estudantes também manifestaram esquemas pertinentes e diferentes, pois na situação 1, esquema 2, eles utilizaram os algoritmos da divisão e da adição, e realizaram uma sequência aditiva recursiva, cujas ideias envolvidas são de correspondência, dependência, proporcionalidade, razão, variável, regularidade, estado inicial, estado final e transformação positiva. Na situação 2, todos os grupos apresentaram esquemas que envolvem algoritmos de multiplicação e adição, e permitem uma aproximação com a modelação da função afim: $f(x) = ax + b$. Os grupos 1 e 5 apresentaram como respostas discursivas em linguagem natural, explicitando a ideia de generalização.

Nesses esquemas foram identificados 4 teoremas em ação verdadeiros e 2 teoremas em ação falsos, sendo três teoremas em ação verdadeiros e um teorema em ação falso na situação 1, e um teorema em ação verdadeiro e um teorema em ação falso na situação 2. Os teoremas identificados nesses esquemas não são iguais, mas algum teorema poderia ter sido igual se os estudantes tivessem identificado a taxa na situação 1 ou a razão na situação 2, bem como se tivessem realizado como esquema na situação 2 uma sequência aditiva recursiva.

Nos esquemas das situações 1 e 2, nota-se a manifestação das ideias de proporção, correspondência, dependência, regularidade e variável, sendo que na situação 1 a ideia de proporção mobilizada pelos estudantes está relacionada à razão e na situação 2 a proporção está relacionada à taxa. A situação 2, por estar relacionada com a taxa, permite ao estudante manifestar uma aproximação com a modelação da função afim, da forma $f(x) = ax + b$. Além das ideias comuns às duas situações, na situação 1 identificam-se as ideias de estado inicial, transformação e estado final, já na situação 2 identificam-se as ideias de generalização, composição e constante.

Em uma situação de proporção simples multiplicação um para muitos, em que a taxa está implícita no enunciado do problema, é mais fácil para o estudante identificar a taxa, manifestar a ideia de generalização e conseguir mobilizar o TAV4. Se f é uma relação funcional, então $f(x) = a \cdot x + b$ com a, b, $x \in N$. Já em uma

situação de proporção simples do tipo quarta proporcional, em que a taxa não está implícita no enunciado do problema, o estudante do 5º ano geralmente busca a razão para resolver o problema. Com isso, inferimos que é mais difícil ele mobilizar o TAV4 em uma situação de proporção simples do tipo quarta proporcional, pois ele precisa encontrar a taxa.

Neste trabalho, mostramos que duas situações com estruturas diferentes, ou seja, pertencentes a classes distintas, possibilitam a manifestação pelos estudantes de esquemas semelhantes e diferentes, e a mobilização de teoremas e conceitos em ação associados à função que podem ser manifestados mesmo que intuitivamente nas duas situações. Por isso, defendemos a importância da divulgação de pesquisas como essas e a produção de livros como esse, que possibilitem ao professor conhecer as diferentes classes e subclasses de situações que podem ser propostas aos estudantes desde os anos iniciais e, conforme a classe, explorar as ideias-base de função.

Referências

ARAÚJO, J. de R. *Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim:* análise a partir da interpretação global de propriedades figurais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

BERNARDINO, F. *Função afim e problemas mistos*: uma investigação com estudantes do ensino médio. 2022. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de

Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018.

BIANCHINI, B. L.; PUGA, L. Z. *Função*: diagnosticando registros de representação semiótica. Florianópolis: Reremat, 2006.

CALADO, T. V. *Invariantes operatórios relacionados à generalização*: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

DEZILIO, K. *Ideias de função e problemas mistos*: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental. 2022. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

FERRAZ, S. R. *Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo*: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2016. 217 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos Campos Conceituais. *In*: MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara (Org.). *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 155-196.

MIRANDA, C. de A. *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da Teoria dos Campos

Conceituais. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

OLIVEIRA, N. de. *Conceito de função*: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

PAVAN, L. R. *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas*. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Programa De Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, 2010.

PIRES, R. F. O Conceito de Função: uma análise histórico epistemológica. *In*: *XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016.* São Paulo. *Anais* [...]. São Paulo. 2016, p. 1-12.

RICCO, G. Les premières acquisitions de lanotion de fonctionlinéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational Studies in Mathematics*. Springer. v. 13, n. 3, 1982, p. 289-327.

RODRIGUES, C. L. H. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2021, 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

RODRIGUES, C. L. B. H; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática*, Belém, v. 17, n. 39, p. 271-287, dez. 2021.

ROSSINI, R. *Saberes docentes sobre o tema Função*: uma investigação das praxeologias. 2006. 382 f.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

SILVA, L. D. C. P. da. *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa*: uma investigação das ideias base de função. 2021. 555 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

TINOCO, L. A. A. *Construindo o conceito de Função.* 5. ed.. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

TRINDADE, J. A. de O. *Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática*. 1996. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.

VERGNAUD, G. Multiplicative Structure. I*n*: LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press Inc, 1983, p. 127-174.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009a, p. 322.

VERGNAUD, G. O que é aprender. *In*: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Editora CRV, 2009b. p. 13-35.

ZANATTA, L. F; REZENDE, V. Conhecimentos de funções afim e quadrática manifestados por estudantes de licenciatura em matemática. *Revista Cocar*. v. 17, n. 35, 2022, p. 1-19.

ZUFFI, E. M. *O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio*:por uma aprendizagem de significados. 307 f. 1999. Tese (Doutorado em Didática – Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

7. A complexidade da variação de situações de função afim para estudantes do ensino médio

Fabricia Bernardino
Veridiana Rezende

Introdução

O conceito de função auxilia o estudante na compreensão de fenômenos do cotidiano e no estudo de elementos da matemática e de outras áreas de conhecimento, como a biologia e a química (BRASIL, 2018). Porém, seu estudo é complexo, pois o conceito proporciona dificuldades aos estudantes de diferentes níveis de ensino, devido às suas diversas representações, por exemplo (BERNARDINO, 2019; CALADO, 2020). Para sua compreensão, são necessários diversos estudos, como as ideias-base, que podem ser desenvolvidas pelos estudantes desde os anos iniciais da educação básica (RODRIGUES, 2021).

A Teoria dos Campos Conceituais parte do princípio de que um sujeito se desenvolve no decorrer do tempo e durante o processo escolar. Um dos principais conceitos estabelecidos na teoria é o de campo conceitual,

definido como um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros (VERGNAUD, 2002). O domínio de um campo conceitual pelo sujeito ocorre ao longo de vários anos. As dificuldades relativas a um conceito são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas por meio de diversas situações, tanto dentro quanto fora da escola (MAGINA *et al*., 2008).

Vergnaud (2009a) estabelece dois campos conceituais com classes de situações bem definidas: campo conceitual aditivo e campo conceitual multiplicativo. Além disso, o pesquisador define problemas mistos como situações que exigem operações dos campos aditivo e multiplicativo, problemas que envolvem pelo menos uma adição ou subtração, e, ao mesmo tempo, uma multiplicação ou divisão. No entanto, Vergnaud não apresenta uma classificação para tais situações mistas. Miranda[1] (2019) relata que é possível associar problemas mistos ao conceito matemático de função afim, pois, em sua forma algébrica, uma função afim pode ser modelada como $f(x) = ax + b$, envolvendo, portanto, as operações aditiva e multiplicativa.

Miranda (2019) fez um estudo do conceito de função afim e caracterizou as situações identificadas em livros didáticos do ensino fundamental e médio, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, e indicou

1 Membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática (GEPeDiMa).

a possibilidade de ao menos trinta classes de problemas mistos, que permitem sua modelização na forma: $y = b \pm ax$, com a e b reais positivos. Dentre as possibilidades elencadas por Miranda (2019), consta a classe contemplada nesta investigação: proporção simples e transformação de medidas. A escolha dessa classe ocorreu pela vasta possibilidade de variações que ela permite.

A pesquisa aqui apresentada é parte da dissertação de mestrado desenvolvida pela primeira autora (BERNARDINO, 2022), e teve como objetivo analisar se a variação da classe de problemas mistos proporção simples e transformação de medidas, associadas à função afim, interfere na resolução de estudantes do ensino médio. Para tanto, contamos com a participação de dez estudantes da 3ª série do ensino médio de uma escola pública de Campo Mourão, no Paraná, que resolveram quatro problemas mistos associados à função afim. Apresentamos, a seguir, os dados referentes à pesquisa e detalhamos as situações 1 e 3 da pesquisa, pelo fato de serem as situações nas quais os estudantes manifestaram menor e maior dificuldade, respectivamente, que aqui denominamos de situação 1 e situação 2.

Procedimentos metodológicos

Os participantes foram dez estudantes de uma turma da 3ª série do ensino médio de uma escola pública do interior do estado do Paraná, com idades entre 17 e 19 anos. A escolha pela 3ª série do ensino médio ocorreu pelo fato dessa ser a última etapa da educação básica. Nesse nível

de ensino, espera-se que os estudantes tenham estudado o conceito de função durante o ensino fundamental e Médio, conforme previsto pela BNCC (BRASIL, 2018).

Os conceitos de função e de função afim não foram trabalhados nas aulas com os estudantes no ano de realização da investigação, e a turma caracterizava-se por ser colaborativa, com estudantes de diversos níveis de rendimento em matemática. A produção dos dados ocorreu de dois modos: por meio dos registros escritos dos estudantes, ao resolverem em folha de papel as situações; e a partir de gravação em áudio do diálogo final entre pesquisadora e estudantes durante as correções. A proponente desta investigação era professora regente da turma, composta por onze estudantes, dos quais dez aceitaram participar da investigação.

A implementação ocorreu individualmente em sala, no horário da aula de matemática. Cada situação foi apresentada aos estudantes individualmente, em folha sulfite. Após a resolução de uma situação, era recolhido o material e entregue o seguinte.

Antes de iniciarem as resoluções, os estudantes foram orientados a utilizar apenas caneta para resolverem as situações. Além disso, eles não poderiam utilizar borracha, para que mantivessem no papel ou rascunho todas as etapas das resoluções.

Elaboração do instrumento de pesquisa

Para a elaboração do instrumento de pesquisa, os quatro problemas apresentaram a mesma padronização,

contendo três itens: a, b e c. No item a, apresentou-se uma questão a respeito de alguma informação sobre a situação, como o estado inicial, a transformação, dependendo da subclasse da situação. O item a auxiliava o estudante na obtenção de uma expressão algébrica requisitada no item b. No item c, apresentou-se uma situação sobre a transformação existente em cada situação, e a resolução poderia ser obtida por meio da expressão do item b.

Para a elaboração das situações, também foram selecionadas cuidadosamente as variáveis didáticas envolvidas. Para Guy Brousseau (2008), um sujeito se adapta às situações que enfrenta, ao passo que as variáveis relativas a um mesmo saber podem apresentar grandes diferenças de complexidade e, em consequência, levar a diferentes estratégias, maneiras diversas de mobilizar um mesmo saber.

Almouloud (2016) menciona a importância da análise das escolhas a serem feitas pelo pesquisador ao elaborar problemas para compor um instrumento de pesquisa, pois existem diversas possibilidades de variações. A variável didática de um problema é aquela cujos valores são escolhidos pelo pesquisador – se a situação terá tabelas, gráficos, números decimais –, e essas escolhas podem interferir nas resoluções dos estudantes. Na presente pesquisa, foram selecionadas três variáveis didáticas para a classe dos problemas – proporção simples e transformação de medidas; natureza e magnitude dos números reais (unidades, dezenas, centenas...); e

grandezas envolvidas – discretas e contínuas.A seleção dos valores das variáveis didáticas ocorreu com base nos critérios $y = ax \pm b$ sendo ax a transformação, b o estado inicial, e y o estado final. Um dos valores selecionados diz respeito às subclasses. Entre as vinte e quatro possibilidades de subclasses de proporção simples e transformação de medidas, buscamos contemplar as quatro subclasses de problemas de proporção simples (multiplicação um para muitos, partição, cota e quarta proporcional) e as quatro de transformação de medidas (estado inicial desconhecido, estado final desconhecido, transformação positiva desconhecida e transformação negativa desconhecida). A seguir, no Quadro 1, temos as variáveis didáticas e os respectivos valores adotados na pesquisa:

Quadro 1. Variáveis didáticas e respectivos valores

Variável didática	Valores
Classe de problema: proporção simples e transformação de medidas	Subclasses de problema: • multiplicação um para muitos com a transformação negativa e estado final desconhecido; • partição com a transformação positiva desconhecida; • cota com transformação positiva e estado inicial desconhecido; • quarta proporcional com a transformação negativa desconhecida.
Valores numéricos	Até a casa dos milhões (unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar, centenas de milhar e milhões).
Grandezas	Discretas e contínuas.

Fonte: Bernardino (2022).

Apresentação das situações e análises

Apresentamos, a seguir, duas situações pertencentes ao instrumento de pesquisa, nas quais os estudantes apresentaram maior e menor dificuldade, identificadas a partir das estratégias adequadas e inadequadas. Para cada situação, constam as variáveis didáticas e os respectivos valores; o esquema sagital que garante a sua classificação; e as análises, incluindo os erros e teoremas em ação manifestados pelos estudantes. Na apresentação e nas análises das situações, indicamos pela letra a o estado inicial; pela b, a transformação; e pela c, o estado final.

Apresentação e análises da situação 1

A situação 1 foi estabelecida pelas seguintes variáveis didáticas e pelos respectivos valores:

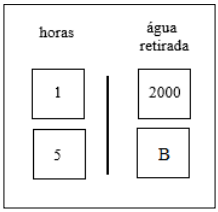
- Classe: proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa);
- Natureza dos números: naturais, na casa dos milhares; e
- Tipo de grandeza: contínua.

Para esvaziar uma piscina de 30.000 L de água, será utilizada uma bomba com capacidade para retirar 2.000 L de água por hora.

a) Após 5 horas de funcionamento da bomba, quantos litros de água ainda restarão na piscina?

b) Escreva uma expressão que permita calcular a quantidade (q) de água na piscina em função do tempo (t) em horas de funcionamento da bomba.
c) Quanto tempo será necessário para esvaziar essa piscina?

A situação 1 pertence à subclasse do tipo multiplicação um para muitos, e a transformação é negativa, pois está sendo retirada água do reservatório. À medida que se relaciona com a unidade (hora), é dada a quantidade de água que a bomba retira por hora, 2.000 L. Para determinar o valor correspondente à segunda medida (litros que a bomba retira) em 5 horas, essa relação pode ser representada conforme o esquema sagital:

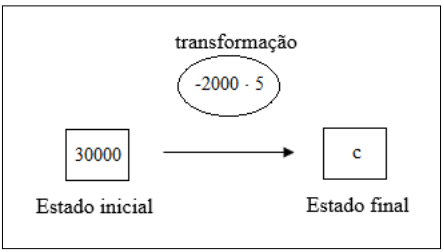


Com isso, podemos escrever:

$$\frac{1}{5} = \frac{2000}{B}$$

$$B = 2000 \cdot 5B = 10000$$

Ou seja, sendo B a quantidade de litros de água retirada pela bomba da piscina em cinco horas, temos $B = 10.000$ litros. A transformação é negativa em decorrência da bomba que está em funcionamento retirando água:



Após 5 horas do funcionamento da bomba, a piscina terá 20.000 L de água, visto que a bomba retirou 10.000 L em 5 horas.

Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), apresentam-se, no Quadro 2, o esquema sagital e a equação que representa as relações da situação 1; a equação final é representada por q(t), sendo (q) a quantidade de água na piscina em função do tempo (t); a expressão é obtida a partir do estado inicial (a), estado final (c) e transformação (b).

Quadro 2. Esquema sagital – classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final (c) desconhecido e transformação (b) negativa)

Esquema sagital				Equação
horas	água retirada	estado inicial	estado final	$B = 2000 \cdot t$
1 t	2000 B	30000 - 2000 · t	c	$c = 30000 - B$ $c = 30000 - 2000 \cdot t$ $\therefore$ $q(t) = 30000 - 2000 \cdot t$

Fonte: As autoras, baseadas em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir do esquema sagital apresentado no quadro 2, é garantida a classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa).

Análises do item a

Dos dez estudantes que resolveram a situação, nove) apresentaram estratégias adequadas. O estudante E9 apresentou uma estratégia parcialmente adequada, identificando corretamente a quantidade de água retirada pela bomba, mas não realizou a subtração necessária para identificar quantos litros ainda restavam na piscina.

Em relação às estratégias adequadas, foram identificados dois tipos na resolução do item a. Nove estudantes (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10) utilizaram a estratégia adequada: observaram que, para cada hora, a bomba retira 2.000 litros de água da piscina, e para descobrir quantos litros a bomba retira em 5 horas de funcionamento, os estudantes multiplicaram o tempo (5 horas) pela quantidade de água retirada por hora (2.000), totalizando 10.000 litros de água. E4 não apresentou estratégia escrita, mas a partir da fala do estudante, a estratégia foi identificada: "Eu fiz de cabeça, professora. A cada uma hora tira 2 mil; então, em 5 horas, é só multiplicar por 5 os 2 mil, que dá 10 mil."[2]

Com base em Vergnaud (2007), nota-se que os estudantes E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10 estabeleceram

2 As falas transcritas dos estudantes não passaram por revisões textuais.

uma relação de proporcionalidade do tipo multiplicação um para muitos, ao observarem que a bomba retira 2.000 litros de água por hora, e que para a resolução da situação, basta multiplicar 2.000 por 5, para então obter a quantidade de água retirada da piscina em cinco horas, 10.000 litros. Assim, se em 1 hora são retirados 2.000 litros, então, em 5 horas serão 5 vezes 2.000. No caso, $5 \cdot 2000=10000$. A partir da estratégia, indicamos a mobilização de um teorema em ação verdadeiro. Indicaremos os teoremas em ação verdadeiros pela sigla TAV, e os teoremas em ação falsos por TAF.

TAV1: Seja f uma relação de proporcionalidade, $1 \cdot f(t) = b \cdot t$ e $b = \frac{f(t)}{t}$ com b e $t \in N$.

Vergnaud (1996; 2007) menciona o TAV1 ao relatar a propriedade de isomorfismo das funções lineares. Esse teorema em ação também foi identificado no estudo de Rodrigues (2021), ao desenvolver uma pesquisa associada ao conceito de função, com estudantes do 5º ano do ensino fundamental; assim, chama a atenção o fato de que o TAV1 é manifestado em diferentes níveis de escolaridade.

A outra estratégia de resolução identificada foi utilizada pelo estudante E3. Ao resolver a situação por meio de subtrações sucessivas, o estudante E3 iniciou sua resolução com a anotação da capacidade total da piscina, de 30.000 litros; e realiza cinco subtrações de 2.000 litros, resultando em 20.000 litros restantes. Gitirana *et*

al. (2014) alertam que essa estratégia não é viável para números grandes, pois a adição de números com mais de 3 algarismos, por exemplo, repetidas vezes, pode gerar confusão e/ou respostas inadequadas.

Fundamentadas em Vergnaud (2007), é possível indicar a manifestação de um teorema em ação verdadeiro, designado pela sigla TAV2.

TAV2: $f(t + t + t + t + ... + t) = f(t) + f(t) + f(t) + ... + f(t)$, $com t \in \mathbb{N}$

Calado (2020) identificou a mobilização do TAV2 na resolução de estudantes do 9º ano do ensino fundamental, e Rodrigues (2021), na resolução de estudantes do 5° ano da mesma etapa da educação básica.

Após averiguar que em 5 horas a bomba retira 10.000 litros de água, nove estudantes, E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10 e E4, a partir da fala de E4, explicitada anteriormente, realizaram a subtração da quantidade de 30.000 litros de água com a piscina cheia, pela água retirada pela bomba de 10.000 litros, ficando com 20.000 litros de água na piscina.

A resolução de E9 difere das demais: após multiplicar 2.000 por 5, resultando em 10.000 litros, o estudante apresenta esse resultado como resposta, pois não observou a necessidade de subtrair os 10.000 litros retirados pela bomba dos 30.000 litros de água. Assim, é possível observar, nas resoluções de E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, e na fala do estudante E4, a manifestação

do TAV3, por meio da subtração na resolução, consistindo na transformação (b) direta do estado inicial (a) de 30.000 para encontrar o estado final (c) de 20.000.

$$\text{TAV3: } c = a + (\pm f(t)) \text{ com } a \text{ e } t \in \mathbb{N}$$

O TAV3 é mencionado por Vergnaud do seguinte modo: "se uma subtração faz passar do estado inicial para o estado final, então uma adição faz passar do estado final para o estado inicial" (2007, p. 7).

Análises do item b

Na resolução do item b da situação 1, foram observadas duas estratégias adequadas, de E2 e E5; e oito inadequadas, de E1, E3, E4, E6, E7, E8, E9 e E10. O estudante E2 apresentou uma expressão correta, na qual relaciona a quantidade (q) de água na piscina com o tempo (t) em horas que a bomba funciona. Na resolução de E2, o estudante acrescenta a letra *x* antes da expressão. A letra *x* é bastante explorada nas aulas de matemática. Segundo Lucas *et al.* (2014), a ideia apresentada indica pouca variedade de letras para representar variáveis e incógnitas, sendo que a pouca utilização e visualização de outras nomenclaturas podem provocar obstáculos para os estudantes. Na investigação realizada, Lucas *et al.* (2014) constataram que o número de respostas em branco e incorretas aumentaram ao se colocar uma letra menos habitual para simbolizar uma variável ou incógnita.

E2, após a formulação da expressão, apresentou uma complementação para conferir se a estratégia estava correta, atribuindo um valor para a variável *t* da expressão. Mesmo não sendo solicitado, isso é um fato que consideramos positivo. No caso da estratégia do estudante E2, é possível observar a conferência a partir do tempo, 5 horas, substituído na expressão resolvida pelo estudante. Essa ação se repete em outros momentos das análises, com outros estudantes. A conferência de resultados é realizada, de acordo com Zuin (2019), desde os séculos passados, e possui relevância na educação matemática, visto que, a partir desse saber, é possível verificar a veracidade de resoluções.

O estudante E5 apresentou uma resposta correta, mas, em sua resolução, observamos duas estratégias, sendo a primeira $q - 2000\,t$, e a segunda, $30000 - 2000\,t$. As duas estão corretas; elas diferem apenas pelo fato de que, na segunda, o estudante atribui um valor para a variável *q*; e, na primeira, mantém a variável. Questionado a respeito da resolução, o estudante afirmou: "Eu coloquei as duas porque pensei, ou é 30 mil, ou é uma quantidade que a gente não sabe. Já que quando não sabemos um valor, a gente coloca a letra, coloquei a letra q de quantidade."

Segundo Rosso e Berti (2010), os estudantes, ao resolverem determinada situação, em vez de apenas pensar sobre a resolução, podem apresentar uma resposta qualquer, ou a que julgam ser a esperada pelo professor. Segundo os autores, isso indica que os estudantes

não sustentam suas posições, não participam de forma ativa, e acabam desatentos em suas resoluções. As ideias elencadas por Rosso e Berti (2010) podem ser uma análise pertinente para a estratégia do estudante E5, visto que ele apresenta duas respostas, as duas adequadas, mas houve um intuito de atender às expectativas da professora/pesquisadora.

Ao analisar as resoluções dos estudantes E2 e E5, é possível observar que a quantidade de água na piscina é determinada a partir da subtração da capacidade total da piscina (30.000 litros) pela quantidade de água que a bomba retira por hora (2.000 litros), multiplicada pelo tempo (em horas). Com base em Vergnaud (2007), afirmamos que o conhecimento mobilizado pelos estudantes, ao considerarem uma função real associando a capacidade total da piscina com a quantidade de água que a bomba retira por hora, por meio de uma expressão algébrica, pode ser modelado na forma de um teorema em ação verdadeiro, associando o isomorfismo das funções lineares à propriedade das relações de proporcionalidade: a expressão, nesse caso particular, representa a quantidade de água da piscina. Assim, com base em Vergnaud (2007), e na análise das resoluções dos estudantes, indicamos a mobilização do TAV4.

A respeito do TAV4, seja *f* uma função na qual é associada a quantidade de água retirada da piscina com o tempo *t* de funcionamento da bomba, a relação pode ser obtida a partir de uma notação que estabeleça a proporcionalidade em termos genéricos. Logo, indicamos

a modelização do TAV4, pois $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t) = 30000 - f(2000\,t) = 30000 - 2000 \cdot f(t)$.

TAV4: $a \pm f(bt) = a \pm b \cdot f(t)$ *comab, et* $\in N$

Calado (2020) também identifica esse teorema em ação verdadeiro nas resoluções de estudantes do 9º ano do ensino fundamental.

Os estudantes E1, E4 e E9 apresentaram estratégias inadequadas para o item b, uma vez que não consideraram a capacidade total da piscina, de 30.000 litros, nas resoluções, e apresentaram apenas a multiplicação da capacidade de 2.000 litros da bomba pelo tempo.

A partir da resolução dos estudantes, indicamos a mobilização do TAF1, no qual o estudante não considerou o estado inicial (a).

TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ *comab, et* $\in N$

Outra estratégia inadequada foi identificada na resolução do estudante E10, que, em vez de subtrair da capacidade total da piscina, de 30.000 litros, a quantia retirada pela bomba, em função do tempo, realizou uma adição: $q(t) = 30000 + 2000 \cdot t$. Isso consiste em um erro, visto que, a partir da expressão, a quantidade de água irá aumentar, e não diminuir, conforme o contexto da situação 1.

Os estudantes E3, E6, E7 e E8 também apresentaram estratégia inadequada para o item b: em vez de subtraírem da capacidade total de 30.000 litros a quantidade de água retirada pela bomba por hora, eles subtraíram da quantidade de água retirada pela bomba por hora a capacidade total da piscina, apresentando como solução: $f(t) = 2000\,t - 30000$.

E7, após a formulação da expressão, assim como E2 e E10, apresentou uma complementação para conferir se a estratégia estava correta, atribuindo valores para a variável da expressão, mesmo que isso não tenha sido solicitado. Na resolução, é possível, de fato, observar as ideias de Zuin (2019): o estudante realiza uma conferência, e acredita em sua veracidade, mas há erros, tanto na conferência quanto na estratégia, pois deveria resultar em – 24000. No caso da estratégia de E7, é possível observar a conferência a partir do tempo 5, substituído na expressão resolvida pelo estudante.

A partir da resolução relatada dos estudantes E3, E6, E7 e E8, indicamos o TAF2.

TAF2: $a - f(bt) = f(bt) - a$ com $a, b, t \in N$

Análises do item c

Nas análises do item c, foi observado que nove estudantes (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10) apresentaram resoluções adequadas, e que um estudante (E3)

apresentou uma estratégia adequada com resposta incorreta. Foram observadas três variações de estratégias adequadas, explicitadas a seguir.

Os estudantes E1 e E2 apresentaram resoluções adequadas, ao analisarem que número, no caso o tempo (t), multiplicado pela vazão da bomba de 2.000 litros, resultaria em 30.000 litros. Os estudantes E4, E9 e E10 não apresentaram estratégias escritas, apenas a resposta: 15 horas. Questionados, os três respondem da mesma forma: "Pensei que número vezes 2 dá 30, e é 15". A partir da fala dos estudantes, identificamos a estratégia igual àquela apresentada por E1 e E2.

Os estudantes E5, E6 e E7 observaram que, se em 5 horas são retirados 10.000 litros de água, então, para retirar 30.000 litros, que é $3 \cdot 10000$, levará $3 \cdot 5 = 15$.

O estudante E8 apresentou como resposta a divisão indicada a seguir: $\frac{30000}{2000} = 15$. É possível observar que E8 dividiu a capacidade total da piscina pela quantidade de água que a bomba retira por hora, resultando nas 15 horas, de modo adequado.

A partir das análises e da fala dos estudantes, indicamos que E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 e E10 manifestaram a utilização do TAV1, pois estabeleceram uma relação de proporcionalidade do tipo multiplicação um para muitos, ao analisar que se em 1 hora são retirados 2.000 litros, então, para retirar 30.000 litros, $30000 = 15 \cdot 2000$, serão levadas 15 horas. A partir disso, indica-se que os estudantes manifestaram a utilização do TAV1, em que $f(t) = b \cdot t$, $sendo b = \frac{f(t)}{t}$ $combet \in N$.

Em relação à resolução inadequada, indicamos a do estudante E3, que respondeu: "Sobraram 20.000 litros, serão necessárias 10 horas". O estudante respondeu que seriam necessárias 10 horas, pois ele considerou que a bomba já havia retirado 10.000 litros de água, a partir do item a; então, só faltavam 20.000 litros para serem retirados. O enunciado do item c questiona quanto tempo é necessário para esvaziar a piscina. A partir disso, consideramos a resposta do estudante incorreta, mas lançando mão de estratégia adequada, visto que os valores são adequados para a situação que ele compreendeu. Consideramos que, mesmo a resposta final estando incorreta, o estudante também manifesta o TAV1, uma vez que a relação de proporcionalidade pode ser observada quando o estudante estabelece que a transformação (b) de 2.000 litros multiplicada pelo tempo *t* de 10 horas resulta nos 20.000 litros de água que restavam na piscina.

Em síntese das análises da situação 1, indicamos as estratégias e os teoremas em ação manifestados. Em relação ao item a), foram observadas dez estratégias adequadas e a mobilização de três teoremas em ação verdadeiros, TAV1, TAV2 e TAV3. No item b, houve duas estratégias adequadas e oito inadequadas. Foram mobilizados, nesse item, um teorema em ação verdadeiro (TAV2) e dois teoremas em ação falsos (TAF1 e TAF2). No item c, foram observadas dez estratégias adequadas e nenhuma inadequada, visto que, no referido item, apenas a resposta final de um dos estudantes estava

incorreta, mantendo-se adequada a estratégia. No item c, o TAV1 foi mobilizado por todos os estudantes.

Indicamos que, na situação 1, pertencente à classe proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa), os sujeitos da pesquisa responderam de forma adequada aos itens a e c; e foram observados diversos erros e estratégias inadequadas na resolução do item b: de dez estratégias, oito foram inadequadas. O item b) de cada situação está associado principalmente à ideia de generalização, uma das ideias essenciais para a compreensão do conceito de função. Como exemplo de erros manifestados no item b, citam-se, entre outros: os estudantes não consideraram a capacidade total da piscina na expressão algébrica, ou realizaram a operação de adição ao invés da subtração, desconsiderando que está sendo retirada água da piscina. Apresentamos, a seguir, as análises referentes à situação 2.

Apresentação e análises da situação 2

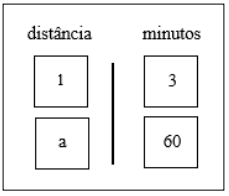
O problema misto 2 foi estabelecido pelas seguintes variáveis didáticas e valores:

- Classe: proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva);
- Natureza dos números: naturais, na casa dos milhares; e
- Tipo de grandeza: contínua.

Celina participou de um evento esportivo que consistia, em uma parte inicial, de corrida, seguida por uma parte de ciclismo. Ela corre 1 km a cada 3 minutos, e pedala a uma velocidade de 45 km/h.

a) Celina correu por 60 minutos. Quantos quilômetros teve a corrida do evento?
b) Escreva uma expressão que relacione a distância (d) com o tempo (t) em horas do percurso de Celina.
c) Quanto tempo Celina precisou pedalar, sabendo que o percurso total foi de 200 km?

O item a requisita o estado inicial; no caso, quanto Celina correu. Para obter o valor, é preciso observar que ela corre 1 quilômetro a cada 3 minutos, e que a corrida durou 60 minutos. A relação do problema pode ser vista a seguir, conforme o esquema sagital:



Assim, temos:

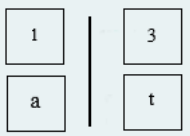
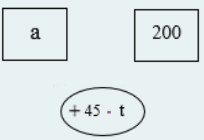
$$3a = 60$$

$$a = \frac{60}{3} \quad a = 20\ km$$

Com base em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019), o Quadro 3 apresenta o esquema sagital e a equação que

representam as relações do problema misto 3. A equação final é representada por d(t), sendo (d) a distância percorrida em função do tempo (t).

Quadro 3. Esquema sagital – proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial (a) desconhecido e transformação (b) positiva)

Esquema sagital				Equações
distância	minutos	estado inicial distância	estado final distância	
				$t = 3a$ $60 = 3a$ $a = 20$ $\therefore$ $d(t) = 20 + 45 \cdot t$

Fonte: As autoras, baseadas em Vergnaud (2009a) e Miranda (2019).

A partir do esquema sagital proposto, é garantida a classe proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva) para a situação 2.

No item b, foi requisitada uma expressão para a situação proposta, relacionando a distância (d) com o tempo (t) em horas que Celina se movimenta. Considerando que ela correu 20 km, e que pedala a uma velocidade de 45km/h, a função que permite calcular a distância (d) em função do tempo (t) em horas é dada pela soma do estado inicial 20 km com a multiplicação da velocidade média de 45 km/h pelo tempo (t) pedalado:

$$d\,(t) = 20 + 45\,t$$

O item c questionava quanto tempo levaria o percurso, sabendo que ele teve 200 km. Para a resolução, é possível substituir os dados na expressão obtida no item b. Temos, então:

$$d(t) = 20 + 45t$$

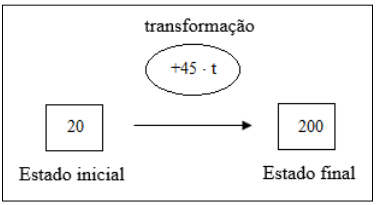
$$200 = 20 + 45t$$

$$200 - 20 = 45t$$

$$180 = 45t$$

$$t = \frac{180}{45}\ t = 4\ horas$$

Para Celina sair do estado inicial e chegar ao estado final, há uma transformação positiva, que pode ser obtida pela multiplicação da velocidade média dela pedalando, de 45 km/h, pelo tempo em horas que ela pedala:



Análises do item a

No item a da situação 2, foram observadas sete estratégias adequadas e três inadequadas. Em relação às estratégias adequadas, foram identificadas duas formas de resolução. Os estudantes E3, E4, E6, E7, E8 e E9 identificaram que Celina corre um quilômetro a cada

três minutos. Sendo assim, para identificar quantos quilômetros Celina correu, sabendo que ela correu por 60 minutos, basta dividir os 60 minutos por três, resultando em 20 quilômetros.

A outra estratégia adequada observada foi utilizada pelo estudante E5, que apresentou uma relação de proporcionalidade do tipo cota, ao estabelecer que se para cada 1 quilômetro são necessários 3 minutos, então, para a quilômetros (sendo a o estado inicial da situação), serão necessários 60 minutos. A partir da relação, o estudante estabeleceu que Celina correu 20 quilômetros, assim como os demais, que apresentaram uma estratégia adequada e manifestaram a mobilização do TAV1. A diferença foi a forma como o estudante relacionou os dados da situação, por meio de uma relação de proporcionalidade.

Em relação às estratégias inadequadas, que foram três, observamos duas formas de resolução. Os estudantes E1 e E10, em vez de dividir o tempo pela distância percorrida $\frac{60}{3} = 20$, multiplicaram, obtendo $60 \cdot 3 = 180$. Isso constitui erro. Ozores (2016) cita, em sua pesquisa, erros sistemáticos que ocorrem quando um estudante não compreende o que está sendo questionado em uma situação, e apenas reproduz processos que comumente utiliza na matemática, por precisar apresentar um resultado.

O estudante E2 também realizou um cálculo inadequado: em vez de relacionar os dados da corrida para a resolução do item a, ele utilizou os dados do ciclismo, em que Celina pedala a uma velocidade de 45 km/h.

Assim, obteve um resultado incoerente com a situação apresentada. Identificamos que o estudante não realizou uma análise coerente da situação, e, como E1, apresentou erros sistemáticos, apenas utilizando, em sua resolução, dados que fizeram sentido naquele momento.

Não identificamos, nas estratégias dos estudantes, a mobilização de um teorema em ação falso, visto que eles apresentaram erros pontuais de interpretação da situação.

Análises do item b

Na resolução do item b da situação 2, não foram observadas estratégias adequadas. Todos os estudantes apresentam respostas incorretas. Foram observadas cinco formas de resolução. Os estudantes E1, E3 e E5 apresentaram $d = t$ como resposta inadequada. Na expressão, consideraram que a distância se iguala ao tempo, o que não corresponde à situação 2, visto que a expressão correta seria $d(t) = 20 + 45 \cdot t$. Assim, os estudantes não consideraram a distância da corrida de Celina, obtida no item a), e não fizeram a relação dessa distância com a velocidade de 45 km/h a que Celina pedala.

Os estudantes E4, E6 e E8 repetiram a resposta do item anterior, apresentando como resultado $\frac{60}{3} = 20$. Os estudantes consideraram para a resposta apenas a distância corrida por Celina, e ignoraram que o evento consistia em duas partes: a inicial, de corrida, que resultou em vinte quilômetros; e a segunda, na qual Celina pedala a uma velocidade de 45 km/h.

Os estudantes E9 e E10 apresentaram como resposta a divisão $\frac{60}{t}$, que também não corresponde à situação 2. Os estudantes dividiram 60, tempo que Celina correu no evento, pela variável *t*, que também representa o tempo.

A partir das análises do item b da situação 2, observamos que os estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E9 e E10 não analisaram corretamente as informações contidas no enunciado. As respostas observadas não se assemelham à resposta correta, e nem mesmo a uma expressão algébrica de função afim.

O estudante E2 não considerou o estado inicial (a) na expressão, no caso, a distância percorrida por Celina, de 20 quilômetros. Assim, manifestou a mobilização do TAF1: ele realizou uma multiplicação da velocidade pelo tempo, uma ideia adequada, mas apresentou a necessidade de dividir esse tempo por três.

O estudante E7 também apresentou uma estratégia inadequada, sendo que seu erro consistiu em adicionar a variável *t* ao estado inicial (a) de 20.

Para a formulação de uma expressão algébrica, o estudante precisa compreender que a situação possui regularidade. No caso do item b da situação 2, a regularidade é gerada a partir da velocidade de 45 km/h a que Celina pedala. Com base nas análises das situações 1 e 2, consideramos que os estudantes não compreendem essa ideia matemática. Consta na BNCC relativa ao ensino fundamental (BRASIL, 2017) que a concepção da regularidade, com descrição de padrões observáveis, inicia-se ainda nos anos iniciais do ensino fundamental,

e que tais ideias devem ser aprofundadas no decorrer da escolarização.

A partir do exposto, nota-se que essa dificuldade apresentada pelos estudantes em relação à ideia de regularidade e à formulação da expressão algébrica vem desde o ensino fundamental. Para Ozores (2016), isso acarreta bloqueios para os estudantes sobre conceitos matemáticos: um novo tema não será compreendido visto que a dificuldade não foi sanada. Para a pesquisadora, o aluno, ao não compreender um novo conteúdo, "[...] tenta mascarar a dificuldade que possui, originada por dúvidas não esclarecidas anteriormente" (OZORES, 2016, p. 16).

Assim, baseadas em Vergnaud (2002, 2003, 2009a), reafirmamos a importância de um campo conceitual bem estabelecido, a partir de um conjunto de situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros durante todo o processo escolar.

Análises do item c

Nas análises das resoluções do item c, foram identificadas duas estratégias adequadas, dos estudantes E7 e E9, e sete estratégias inadequadas, dos estudantes E1, E3, E4, E5, E6, E8 e E10. O estudante E2 deixou em branco esse item.

Em relação às estratégias adequadas, os dois estudantes (E7 e E9) resolveram da mesma forma: multiplicaram a velocidade a que Celina pedala, 45 km/h, por 4, resultando em 180 quilômetros.

O estudante E7 multiplicou a velocidade de 45 km/h por 4 e, após a obtenção do resultado, adicionou os 20 quilômetros da corrida. A resposta final do estudante não está adequada, pois é questionado, no item c, quanto tempo Celina precisou pedalar. Porém, o estudante não apresentou como resposta o número 4 (4 horas), que aparece na resolução, e respondeu que ela pedalou 180 quilômetros. Novamente, pode ser observada apenas a necessidade de apresentar uma resposta final; o estudante utilizou como estratégia valores adequados, mas respondeu de forma incorreta.

Esta pesquisa constituiu um estudo de caso, não havendo intervenções. Porém, em estratégias observadas, acreditamos que uma intervenção poderia gerar aspectos positivos, uma vez que os estudantes teriam a oportunidade de corrigir os próprios erros. Assim, a intervenção constituiria uma proposta para pesquisas futuras: a partir de problemas mistos de função afim, oportunizar aos estudantes discussões durante as resoluções, na busca pela construção de novos conhecimentos a partir do erro.

O estudante E9 também apresentou resolução incorreta ao multiplicar a velocidade de 45 km/h por 4, resultando em 180. O estado inicial foi considerado corretamente, 20, mas é possível observar que o estudante alterou a ordem dos fatores, 20 e 200, sinalizando a subtração de 20 – 200 = 180. Isso consiste em um erro, visto que o resultado desse cálculo deveria ser – 180. Por fim, a resposta final do estudante também é incorreta: em

vez de responder 4 horas, ele respondeu 4 minutos. A partir da análise, novamente indicamos a apresentação de uma resposta incoerente, resultado de um erro sistemático, em que o estudante não compreende a situação.

Em relação às estratégias inadequadas, foram observadas três formas. O estudante E1 realizou uma subtração de 200 km por 180 km, obtendo a corrida de 20 km; no entanto, não conseguiu finalizar os cálculos, tendo multiplicado o resultado por 3. Isso constitui outro erro. Percebe-se, assim, que E1 foi utilizando valores da situação de forma aleatória, sem, de fato, fazer uma análise do que era necessário para a resolução.

O estudante E3 não considerou o estado inicial (a) de 20 km nos cálculos, manifestando a mobilização do TAF1. Em seguida, ele dividiu o percurso total de 200 km por 3. Questionado a respeito da estratégia, ele respondeu: "Eu pensei assim: se ela corre 1 km a cada 3 minutos, para eu saber quanto tempo levou os 200 km basta dividir 200 por 3, o que deu 64 minutos. Ela correu por uma hora e quatro minutos". A partir da resposta escrita e da fala do estudante, na conversa final, pode-se perceber novamente que ele não identificou que o percurso consistiu em duas partes, uma de corrida e outra de pedalada, resultando, assim, na estratégia inadequada evidenciada. Os estudantes E4, E5, E6, E8 e E10 apresentaram a mesma estratégia de resolução, não considerando o estado inicial (a) de 20 km, e dividindo 200 por 45, o que consistiu em um erro, mobilizando o TAF1.

Em síntese das análises da situação 2, indicamos as estratégias e os teoremas em ação manifestados pelos estudantes. Em relação ao item a, foram observadas sete estratégias adequadas, três inadequadas, e a mobilização de um teorema em ação verdadeiro (TAV1). No item b, as dez estratégias apresentadas foram inadequadas, e identificamos a mobilização de um teorema em ação falso (TAF1). No item c, foram observadas duas estratégias adequadas, sete inadequadas, uma em branco, além de ter sido identificada a mobilização de um teorema em ação falso (TAF1).

Indicamos que, na situação 2, pertencente à classe proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva), os sujeitos da pesquisa responderam de forma adequada o item a. Nos itens b e c, foram observados diversos erros de cálculos, de expressões sem conexão com a situação.

Os estudantes não conseguiram apresentar uma expressão algébrica adequada. Dois estudantes demostraram necessidade de adicionar a incógnita *x*, mesmo já havendo letras suficientes na expressão. Ainda, foram observados erros referentes à interpretação do problema. A partir das análises, percebe-se que os estudantes costumam adicionar a letra *x* nos cálculos, mesmo quando ela não é necessária ou requisitada, o que permite perceber um problema, uma automação: a utilização tornou-se automática, sem significado. Para Vergnaud (1993), o funcionamento cognitivo dos estudantes envolve operações que automatizam progressivamente. O estudante

confia em sua resolução baseado em seu conhecimento, implícito ou explícito, das relações entre o algoritmo e as características do problema a ser resolvido.

Considerações finais

A pesquisa foi desenvolvida com o objetivo de responder à seguinte questão: A variação de subclasses de problemas mistos influencia na complexidade das situações para estudantes do ensino médio? Com vistas a respondê-la, foi estabelecido, como objetivo geral, analisar se a variação das subclasses de problemas mistos associados à função afim – proporção simples e transformação de medidas – intervém na resolução de estudantes da 3ª série do ensino médio.

As análises mostraram que, conforme variamos as subclasses, os estudantes apresentam maiores dificuldades em determinada subclasse do que em outras; ou seja, certas subclasses de situações são mais complexas para os estudantes.

Identificamos que, entre as quatro variações contempladas, a proporção simples (cota) e transformação de medidas (estado inicial desconhecido e transformação positiva) – situação 2 – foi a classe na qual os estudantes manifestaram maior dificuldade. Nessa subclasse, o valor unitário é dado e busca-se pelo número de unidades correspondentes a uma grandeza de outra espécie dada. O estudante precisava identificar o estado inicial no item a, e a maioria dos estudantes (sete) identificou o estado inicial de forma adequada. Os erros aumentaram

nas resoluções do item b, que trata da generalização da função afim.

A classe mais simples para os sujeitos da pesquisa foi a proporção simples (multiplicação um para muitos) e transformação de medidas (estado final desconhecido e transformação negativa) – situação 1. Nessa subclasse, foram observadas estratégias inadequadas somente para o item b, que trata da generalização, e todos os estudantes apresentaram resoluções adequadas para os itens a e c.

Em relação ao item b, foi identificado maior número de estratégias inadequadas em todas as situações. A cota com o estado inicial desconhecido e transformação positiva (situação 2) foi a classe na qual os estudantes apresentaram maior número de estratégias inadequadas. A partir das resoluções do item b, identificamos que os estudantes não compreendem a ideia de generalização, e que não conseguiram identificar as variáveis dependente e independente de cada situação, ideias essenciais para a compreensão do conceito de função. Em todas as situações, a expressão algébrica poderia ser obtida a partir da soma do estado inicial (a) com a multiplicação da transformação (b) pela variável independente de cada situação. Na situação 1, por exemplo, são dados o estado inicial e a transformação, mas apenas dois estudantes apresentam uma expressão algébrica adequada.

Assim como Bernardino *et al.* (2019) e Nogueira, Rezende e Calado (2020), que mostram que a generalização gera dificuldades para os estudantes, concluímos que os estudantes participantes da investigação também

apresentam erros e equívocos em relação a essa ideia, que é uma das mais fundamentais para a compreensão do conceito de função.

Em relação ao item c, foi possível observar que os estudantes apresentaram mais estratégias inadequadas na cota com o estado inicial desconhecido e transformação positiva (situação 2). Na multiplicação um para muitos com estado final desconhecido e transformação negativa (situação 1), todos os estudantes apresentaram estratégias adequadas, confirmando que a subclasse constituiu a mais simples.

Um dos objetivos específicos estabelecidos nesta investigação foi identificar teoremas em ação associados ao conceito de função afim, manifestados nas estratégias dos estudantes. A partir das estratégias, identificamos os possíveis invariantes operatórios pertencentes ao campo conceitual da função afim na forma de teoremas em ação: quatro teoremas em ação verdadeiros e dois teoremas em ação falsos foram observados.

Identificamos que o mesmo teorema em ação foi mobilizado em diferentes situações, como é o caso do TAF1, que pode ser observado nas resoluções do estudante E4, que o mobilizou na resolução do item b da situação 1 e no item c da situação 2. Foi observada, também, a mobilização do mesmo teorema mais de uma vez na mesma situação, como é o caso do estudante E1, que mobilizou o TAF1 nos itens a, b e c da situação 2.

Constatamos a mobilização de dois teoremas em ação falsos:

- TAF1: $a \pm f(bt) = \pm f(bt)$ *comab*, *et* $\in N$;
- TAF2: $a - f(bt) = f(bt) - a$ *comab*, *et* $\in N$

Os dois teoremas em ação falsos identificados dizem respeito à generalização, o que sinaliza ausência do pensamento funcional. Para Vergnaud (2009b), um teorema em ação falso é tido pelo estudante como verdadeiro, e existem casos em que ele pode ser verdadeiro, mas localmente. Com base em Vergnaud (2009b) e Magina *et al.* (2008), afirmamos que a identificação desses conhecimentos implícitos dos estudantes pode possibilitar que os professores e pesquisadores consigam auxiliá-los na desestabilização de um teorema em ação falso e compreensão do próprio erro, pois é por meio da desestabilização desses conhecimentos errôneos que o estudante pode compreender um conceito.

Admitindo que os conhecimentos do aluno de fato se manifestam apenas pelas decisões que ele toma em problemas apropriados, o professor não pode subestimar as situações que levará para sala de aula, bem como deve propiciar variações. Para Vergnaud (1998), a compreensão de um conceito na matemática é difícil justamente por implicar uma grande variedade de situações, procedimentos e símbolos vivenciados ao longo de todo o período escolar. Brousseau (2008) afirma que aprender não consiste em cumprir ordens nem em copiar soluções para problemas: é preciso que o aluno produza seus conhecimentos em um processo autônomo. Dessa forma, concordamos com Magina *et al*. (2008), para

quem as dificuldades relativas a um conceito são superadas na medida em que são encontradas e enfrentadas por meio de diversas situações.

Referências

ALMOULOUD, S. A. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 109-141, 2016.

BERNARDINO, F. *et al.*; *In*: CEOLIM, A. J.; REZENDE, V.; HERMANN, W. (Org.). *Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade*: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p. 51-70.

BERNARDINO, F. *Função afim e problemas mistos*: uma investigação com estudantes do ensino médio. 2022. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Curricular Comum*: ensino fundamental. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Curricular Comum*: ensino médio. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao Estudo das Situações Didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CALADO, T. V. *Invariantes operatórios relacionados à generalização*: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

GITIRANA, V. *et al. Repensando multiplicação e adição*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

LUCAS, C. *et al*. O Fenômeno Didático Institucional da Rigidez e a Atomização das Organizações Matemáticas Escolares. *Revista Bolema*, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1.327-1.347, dez. 2014.

MAGINA, S. *et al*. *Repensando Adição e Subtração*: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. 3. ed. São Paulo: PROEM, 2008.

MIRANDA, C. de A. *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

NOGUEIRA, C. M. I.; REZENDE, V.; CALADO, T. V. Função afim na Educação básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. *In*: *Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 25-50, 2020.

OZORES, A. L. F. *Entendendo alguns erros do Ensino Fundamental II que os alunos mantêm no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2016.

RODRIGUES, C. L. B. H. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

ROSSO, A. J; BERTI, N. M. O erro e o ensino-aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno. *Revista Bolema*, Rio Claro, v. 23, n. 37, p. 1.005-1.035, 2010.

VERGNAUD, G. *Teoria dos Campos Conceituais*. *In*: 1º SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO DO RIO DE JANEIRO, 1993, Rio de

Janeiro. *Anais* [...]. Rio de janeiro: Instituto de Matemática da UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. *In*: BRUN, Jean (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.155-191.

VERGNAUD, G. *A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, O Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área*. Marco Antônio Moreira (Org.), v. 7, n.1, p. 7-29, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html. Acesso em: 21. jan. 2022.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. *In*. *Por que ainda há quem não aprende?* Esther Pillar Grossi (Org.). 2. ed.. Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. Forma operatoria y forma predicaiva del conocimiento. *In*: I *ENCUENTRO NACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA, 2007, Taldil, Argentina. Anais* [...]. Tandil, Argentina: Unicen, 2007.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. O que é aprender. *In*: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto. (org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: CRV, 2009b. p. 13-35.

ZUIN, E. de S. L. Prova real e prova dos nove nos exames de admissão de Carlos Góes. *In*: XVIII ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Ihéus, Bahia. *Anais* [...]. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), 2019.

BLOCO 3

Aspectos relacionados diretamente ao ensino

8. As contribuições das ações pedagógicas para a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento

Luciana Del Castanhel Peron da Silva
Clélia Maria Ignatius Nogueira

Introdução

A intenção deste capítulo é apresentar algumas ações pedagógicas que foram implementadas com alunos do 5º ano, com o objetivo de promover a manifestação das formas operatória (saber fazer) e predicativa (saber explicitar o fazer) do conhecimento, correspondentes às ideias-base do conceito de função, ações estas que foram propostas em Silva (2021), pesquisa de doutorado[1] da primeira autora.

1 A pesquisa de Silva (2021), primeira autora, tese de doutorado orientada pela segunda autora, consistiu na implementação, em grupos, de uma sequência de problemas referentes ao campo conceitual multiplicativo, focando as ideias base de função, e teve como objetivo geral: analisar as formas operatória e predicativa do conhecimento relativas às ideias base de função manifestadas por alunos do 5º ano, mediante a resolução de uma sequência de problemas de estruturas multiplicativas.

Com a descrição e exemplificação das ações pedagógicas resolução coletiva dos problemas por grupos de alunos, apresentação dos resultados dos grupos ao coletivo da classe e correções cruzadas, intencionamos subsidiar professores em suas próprias ações docentes, pois, em concordância com Vergnaud (1996), a aprendizagem se efetiva quando os alunos manifestam simultaneamente as formas operatória e predicativa do conhecimento.

O conceito de função é um dos principais na matemática, e recomenda-se que ideias associadas à função sejam desenvolvidas pelos alunos desde os anos iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 2018; PAVAN, 2010). Respaldadas em Pavan (2010) e Ciani, Nogueira e Berns (2019), e na tese de Silva (2021), assumimos que as ideias de correspondência, variável, dependência, regularidade e generalização são essenciais para a compreensão do conceito de função, sendo denominadas por estes autores como ideias base de função. Posteriormente a Silva (2021), a partir dos resultados de Merli (2022), o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) padronizou a nomenclatura como ideias-base e as fixou em quatro, a saber: variável, dependência, regularidade e generalização. Dessa forma, embora na realização da pesquisa façamos referência às ideias base, sem hífen, neste texto utilizamos a nomenclatura adotada pelo GEPeDiMa, ideias-base, com hífen.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1993, 1996, 2009a, 2009b) constituiu o suporte teórico para a elaboração do instrumento de pesquisa, uma vez

que, segundo Vergnaud (2003, p. 54), "[...] o desenvolvimento de um aluno em relação a determinado conteúdo recobre grande variedade de situações e de esquemas". Além disso, a TCC "[...] propõe uma classificação dos problemas considerando-se tanto as estruturas matemáticas associadas quanto as dificuldades dos problemas e os raciocínios requeridos para resolvê-los" (GITIRANA *et al.,* 2014, p. 44).

Assim, com respaldo na TCC, a sequência de vinte e dois problemas associados às ideias-base de função foi elaborada. Para sua implementação, os alunos foram organizados em grupos, seguindo pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) para a estruturação do *milieu*,[2] possibilitando, dessa forma, a produção de dados fidedignos ao ambiente escolar.

Teorias basilares de estudo

A TCC é "[...] uma teoria cognitiva que oferece um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas" (MAGINA, 2011, p. 67), além de fornecer "[...] elementos para a análise das dificuldades dos alunos e se constitui[r] em uma poderosa ferramenta para a construção de situações-problema" (MAGINA, 2011, p. 67), o que justifica sua adoção como suporte teórico para investigações realizadas no âmbito escolar.

2 O termo francês *milieu* ou *milieux* possui tradução para a língua portuguesa como "meio", porém a tradução do "termo não dá conta da ideia que está em jogo" (ALMOULOUD, 2007, p. 31).

Para Vergnaud (1993, p. 1), a finalidade da TCC "[...] é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos", entendendo como conhecimento "[...] tanto as habilidades quanto as informações expressas" (VERGNAUD, 1993, p. 1). As filiações e rupturas ocorrem devido à existência da continuidade no processo cognitivo, e, por essa razão, a TCC "[...] é um meio para analisar filiações e rupturas, durante um longo período de tempo" (VERGNAUD, 2017, p. 19).

De acordo com Vergnaud (2017, p. 19), "[...] os conceitos não se formam para que a gente os coloque em frases ao falar de algo, mas sim porque existem situações, problemas práticos e também teóricos que nos interessam", e, por mais elementar que uma situação possa parecer, nela estão envolvidos inúmeros conceitos, pois "[...] um conceito não assume sua significação em uma só classe de situações, e uma situação não é analisada por meio de um único conceito" (VERGNAUD, 1993, p. 25).

Por essa razão, faz-se necessário referir-se não somente à compreensão de um conceito pelo sujeito, mas também ao estabelecimento de um campo conceitual, que Vergnaud (2009b) descreve como sendo:

> [...] ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações (VERGNAUD, 2009b, p. 29).

Para Vergnaud (1996, p. 13), um dos problemas do ensino é "[...] desenvolver ao mesmo tempo a forma operatória do conhecimento, isto é, o saber fazer, e a forma predicativa do conhecimento, isto é, saber explicitar os objetos e suas propriedades". O pesquisador complementa que, em geral, não somos hábeis para a explicitação (VERGNAUD, 1996); por isso, ponderamos que, durante a escolarização, é importante que sejam oportunizados momentos em que os alunos possam desenvolver essa habilidade.

Portanto, com base em Vergnaud (1996), consideramos a importância de oportunizar aos estudantes, em ambiente de sala de aula, o desenvolvimento simultâneo das formas operatória e predicativa do conhecimento, com a intenção de proporcionar a aprendizagem das ideias-base de função. Como meio para possibilitar o desenvolvimento dessas duas formas do conhecimento – operatória e predicativa –, buscamos alicerce na TSD, idealizada por Guy Brousseau (2008), que, entre outras características, proporciona respaldo para ações de pesquisadores em situação de sala de aula no que diz respeito à organização do *milieu* e da constituição e das reformulações dos contratos didático e pedagógico.

A TSD "[...] apresenta-se como um instrumento científico. Tende a unificar e integrar as contribuições de outras disciplinas e proporciona uma melhor compreensão das possibilidades de aperfeiçoamento e regulação do ensino da matemática" (BROUSSEAU, 2008, p. 16). Em outros termos, a teoria foi desenvolvida com o "[...]

intuito de modelar o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos" (ALMOULOUD, 2007, p. 31).

Segundo Freitas (2010, p. 77), o modelo teórico da TSD "[...] trata de formas de apresentação, a alunos, do conhecimento matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da matemática". Na TSD, tem-se a valorização tanto do conhecimento que o aluno mobiliza "[...] e o seu envolvimento na construção do saber matemático" quanto do trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, "[...] em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos" (FREITAS, 2010, p. 78).

Nessa perspectiva, consideramos que a classe organizada em grupos favorece as interações dialógicas, pois, com a participação dos alunos, o debate a respeito dos conteúdos estudados é motivado, e a argumentação e a explicitação das resoluções e correções são vistas como um favorecedor da aprendizagem.

Ações pedagógicas

A pesquisa de Silva (2021) foi realizada durante o segundo semestre do ano letivo de 2019, com uma imersão de seis meses. O período de permanência da pesquisadora na escola totalizou cinquenta dias, sendo cento e noventa e seis horas em sala de aula, ao longo de todas as terças e quintas-feiras. Além das horas em sala de aula, foram realizadas mais doze horas em atividades extras, que foram: Festa Junina (atividade interna reunindo apenas alunos da escola), Festa da Primavera (atividade

externa realizada com toda a comunidade escolar) e Festejos do Dia da Criança (atividade interna apenas para alunos da escola).

O período de imersão foi composto por uma série de atividades; a primeira delas foi a observação participante. Nessa etapa, a pesquisadora participou da rotina dos trinta alunos do 5º ano, no horário regular das aulas de todas as disciplinas, atuando como auxiliar da professora regente em todas as atividades didático-pedagógicas desenvolvidas. Também acompanhava a professora regente em suas horas-atividade, e auxiliava na produção de materiais que seriam utilizados com a turma.

A segunda etapa, denominada preparação da turma colaboradora, foi o período em que foram realizadas simulações dos procedimentos que seriam adotados para a implementação do instrumento de produção de dados, por exemplo: a realização de trabalho em grupo, a gravação dos áudios durante as resoluções de atividades, e a apresentação das conclusões dos grupos ao coletivo da sala.

Finalmente, a terceira etapa consistiu na implementação do instrumento de pesquisa, e foi conduzida segundo a perspectiva da TSD, considerando os seguintes elementos: a constituição (e frequente reformulação) dos contratos pedagógico e didático e a adoção do trabalho em grupo, com objetivo de promover as interações dialógicas entre os alunos, motivando a reflexão e questionamentos a respeito dos conteúdos matemáticos estudados, na qual a argumentação e a expressão

das resoluções são vistas como um favorecedor da aprendizagem.

As etapas anteriores não são imprescindíveis para a efetivação das ações pedagógicas; elas foram descritas com o objetivo de apresentar o contexto em que as ações foram propostas. Dessa forma, a reflexão proposta neste capítulo parte das ações pedagógicas: resolução coletiva dos problemas por grupos de alunos, apresentação dos resultados dos grupos ao coletivo da classe e correções cruzadas, como ações que oportunizaram a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento. Para tanto, elegemos o Grupo 3, entre os demais grupos participantes, para exemplificar, devido à sua representatividade durante a pesquisa. Para melhor compreender as ações pedagógicas propostas, faz-se necessária breve apresentação da organização da pesquisa e do instrumento para produção de dados.

O 5º ano colaborador de pesquisa era composto por trinta alunos, e foi dividido em sete grupos. Os alunos eram identificados por um código em que o primeiro dígito correspondia ao grupo a que ele pertenceu e o segundo dígito, à ordem alfabética do seu primeiro nome. No Grupo 3 estavam quatro integrantes, denominados Aluno 31, Aluno 32, Aluno 33 e Aluno 34. Os grupos mantiveram a mesma formação durante todo o período de realização da pesquisa e desenvolveram todos os problemas propostos no espaço da sala de aula durante o horário regular, acompanhados da professora regente e da pesquisadora.

Tendo em vista os pressupostos da TCC, para a elaboração dos problemas do instrumento de pesquisa referentes ao campo conceitual multiplicativo, focando as ideias-base de função, foram consideradas as pesquisas de Vergnaud (2009a), Pavan (2010), Tinoco (2002), Gitirana *et al.* (2014) e Santana *et al.* (2017); e também os seguintes documentos: BNCC (BRASIL, 2018), Matriz de Referência de Matemática do SAEB: Temas e seus Descritores para o 5º ano do Ensino Fundamental referentes à Prova Brasil, Currículo da Associação dos Municípios do Oeste do Paraná (AMOP, 2014, 2019) e o planejamento do 5º ano da disciplina de matemática da rede municipal de ensino do município onde se localiza a escola colaboradora de implementação.

O instrumento de pesquisa consiste em quatro blocos, totalizando vinte e dois problemas, conforme descrito no Quadro 1. Cada bloco de problemas foi organizado de modo a enfatizar uma das ideias-base do conceito de função, porém os problemas permitem que, além da ideia privilegiada, as demais ideias sejam manifestadas durante as resoluções.

Todos os grupos receberam uma folha colorida com o problema impresso, na qual deveriam registrar todas as resoluções, e cada integrante recebeu uma cópia do problema, que deveria ser anexada ao caderno de matemática com o registro correspondente à aula do dia. Inicialmente, foram propostos mais de um problema por aula, porém, foi observado que esse procedimento não estava sendo adequado, devido ao tempo necessário

Quadro 1. Organização dos problemas no instrumento de pesquisa

Bloco/ problema	Ideia-base de função priorizada	Classificação dos problemas	Referência base	Conjunto Numérico e valores	Apoio visual
1/1	Correspondência	Combinação – com todo desconhecido	Pavan (2010, p. 46) (baseada em Nunes (2001))	Naturais (≤ 3)	Representação pictórica
1/2	Correspondência	Combinação – com todo desconhecido	Pavan (2010, p. 52) (baseada em Vergnaud (1983))	Naturais (≤ 4)	–
1/3	Correspondência	Combinação –- com todo desconhecido	Pavan (2010, p. 60)	Naturais (≤ 3)	–
1/4	Correspondência	Combinação – com parte desconhecida	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 9)	Representação pictórica
1/5	Correspondência	Combinação – com parte desconhecida	Santana *et al.* (2017, p. 46) Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 15)	–
1/6	Correspondência	Combinação – com parte desconhecida	Gitirana *et al.* (2014, p. 78)	Naturais (≤ 12)	–
1/7	Correspondência	Combinação – com todo desconhecido e com parte desconhecida	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 4)	Representação pictórica

Bloco/ problema	Ideia-base de função priorizada	Classificação dos problemas	Referência base	Conjunto Numérico e valores	Apoio visual
1/8	Correspondência	Área – configuração retangular	SAEB (2009) Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 18)	Representação pictórica
1/9	Correspondência	Área – configuração retangular	Vergnaud (2009a, p. 254) Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 4)	–
1/10	Correspondência	Área – configuração retangular	SAEB (2009) Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 6)	Representação pictórica
2/1	Dependência	Proporção simples – um para muitos	Pavan (2010)	Naturais (≤ 8)	–
2/2	Dependência	Proporção simples – um para muitos Proporção simples – cota	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 46)	–
2/3	Dependência	Problema misto	Magina e Porto (2018) Pavan (2010)	Naturais (≤ 5)	–
3/1	Regularidade	Proporção simples – um para muitos Proporção simples – cota	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 84)	Tabela
3/2	Regularidade	Proporção simples – um para muitos Proporção simples – cota	Pavan (2010, p.102) (baseada em Imenes, Jakubo e Lellis, (2002))	Naturais (≤ 222)	Tabela

Bloco/ problema	Ideia-base de função priorizada	Classificação dos problemas	Referência base	Conjunto Numérico e valores	Apoio visual
3/3	Regularidade	Problema misto	Tinoco (2002, p. 33) Pavan (2010)	Naturais (≤ 25)	Representação pictórica Tabela
3/4	Regularidade	Problema Misto	Tinoco (2002) Pavan (2010)	Naturais (≤ 15)	Representação pictórica Tabela
4/1	Variável e generalização	Proporção simples – um para muitos	Pavan (2010, p. 71)	Naturais (≤ 8)	–
4/2	Variável e generalização	Proporção simples – partição Proporção simples – cota	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 24)	–
4/3	Variável e generalização	Proporção simples – cota	Gitirana *et al.* (2014)	Naturais (≤ 16)	–
4/4	Variável e generalização	Proporção simples – quarta proporcional	Gitirana *et al.* (2014, p. 65)	Naturais (≤ 15)	–
4/5	Variável e generalização	Proporção simples – quarta proporcional com medidas que são múltiplas	Pavan (2010, p.110)	Naturais (≤ 18)	–

Fonte: Silva (2021).

para a resolução e à indisciplina gerada a cada apresentação dos grupos. Dessa forma, a partir do sétimo problema do Bloco 1, após avaliação parcial da implementação, foi estipulado apenas um problema por aula.

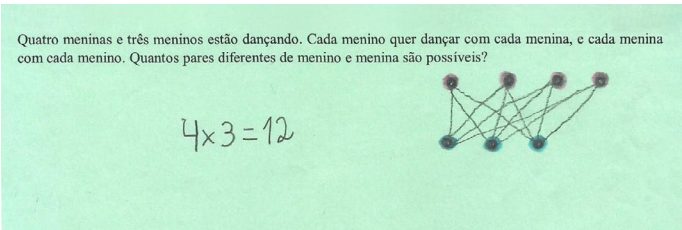
Em relação à ação pedagógica resolução coletiva dos problemas por grupos, a intenção foi oportunizar aos grupos um tempo de debate anterior à resolução, em que fosse possível uma conversa a respeito de como resolveriam os problemas e também a necessidade de chegarem a um acordo quanto à resposta que seria apresentada. Afirmamos que essa dinâmica favorece a manifestação das duas formas de conhecimento, principalmente a forma predicativa, pois o "saber fazer" (VERGNAUD, 1996, p. 13), que é a forma operatória, pode ocorrer individualmente durante o registro escrito da resolução da atividade, enquanto a predicativa, que envolve a "explicitação do objeto e suas propriedades" (VERGNAUD, 1996, p. 13), pode ser motivada quando o aluno é instigado a explicar para um colega a sua resolução.

Os problemas que são apresentados neste capítulo foram definidos considerando a possibilidade de exemplificar os resultados de um mesmo grupo, com representatividade na pesquisa, em relação às três ações pedagógicas implementadas que são abordadas neste texto. O primeiro problema selecionado é: "Quatro meninas e três meninos estão dançando. Cada menino quer dançar com cada menina, e cada menina com cada menino. Quantos pares diferentes de menino e menina são possíveis?" (PAVAN, 2010, p. 52, baseada em Vergnaud

(1983)). Trata-se de um problema da classificação combinação[3] – com todo desconhecido. Nesse problema, informamos duas grandezas que, ao realizarmos a junção (produto), resultam em outra grandeza. Esse tipo de problema envolve a "[...] 'quantidade discreta' ou 'a contagem'", como ressalta Gitirana *et al.* (2014, p. 76).

O Grupo 3 apresentou em seu protocolo escrito a seguinte resolução:

Figura 1. Resolução do problema 2, Grupo 3



Fonte: Silva (2021).

No protocolo do registro escrito, o grupo apresentou a operação de multiplicação 4 x 3 = 12, quatro bolinhas que representavam as meninas, e três bolinhas representando os meninos, bem como as correspondências realizadas para a formação dos 12 pares possíveis, manifestando a forma operatória do conhecimento.

A partir das análises realizadas das transcrições dos áudios, identificamos que os integrantes do Grupo 3 manifestaram a compreensão de que o total de pares

3 Apresentamos um problema de combinação justamente para exemplificar a ideia de correspondência, até então assumida pela pesquisadora.

era formado pela correspondência entre cada uma das meninas com cada um dos meninos, conforme excerto a seguir:

> **Aluno 33:** Vou ler a 2 (...leitura do problema).
> **Aluno 34:** 12.
> **Aluno 33:** Por que 12, se só tem 3 meninas? Não, tem 4 meninas e 3 piás? Dá 7.
> **Aluno 34:** Não é de mais é de vezes, 4 vezes 3, 12.
> **Aluno 32:** E tu, Aluno 31, não tá nem tentando.
> **Aluno 33**: Eu vou fazer de mais, 3 mais 4, 7.
> **Aluno 34:** Não é de mais, é de vezes. Desenha para ver.
> **Aluno 32:** Não sei fazer, vou fazer pessoas de palitinho.
> **Aluno 34:** Faz bolinha.
> **Aluno 32:** Bolinha por quê?
> **Aluno 34:** Para fazer de conta que é as meninas e os meninos e ver que dá 12 par quando liga todas as meninas com todos os meninos.
> **Aluno 32:** Ah tá, agora sim, dá 12.

Nesse trecho, o Aluno 34 esforça-se para justificar aos colegas a solução do problema, uma vez que ele primeiro realizou a operação de multiplicação, e a representação pictórica foi realizada posteriormente para confirmar a resposta encontrada no algoritmo. Sendo assim, as relações dialógicas estabelecidas exigiram que fosse manifestada a forma predicativa do conhecimento.

Muniz (2009, p. 50) indica a importância do "pensar como eu pensei" pelo aluno, pois, além da reflexão a respeito do fazer matemático, corrobora para que ele possa "[...] tomar consciência dos caminhos e descaminhos que percorreu para produzir o procedimento". Por

essa razão, defendemos a necessidade de proporcionar momentos de interação em que os alunos, em ambiente escolar, possam refletir a respeito do fazer matemático e, com a progressiva tomada de consciência do seu conhecimento operatório, ter melhores condições para atingir a forma predicativa, seja oralmente ou na escrita. Dessa forma, em alguns problemas foram acrescentadas perguntas que direcionavam os alunos a explicarem como resolveram, ou ainda, como pensaram para resolver os problemas.

A outra ação pedagógica proposta durante a pesquisa foi a apresentação dos resultados dos grupos ao coletivo da classe, o que ocorreu até a realização do Bloco 3. Nesse momento, o combinado era que, após as discussões e registro na folha colorida quanto à resolução do problema, o grupo elegesse um representante que apresentaria aos demais grupos as conclusões que tiveram. Esse momento era aguardado por alguns alunos, que, durante as resoluções, até treinavam como fariam a apresentação, conforme trecho a seguir, em que discutiam outro problema:

> Aluno 33: Quem vai lá na frente explicar?
> Aluno 34: Eu vou.
> Aluno 33: Eu também, faz uma e eu outra, vamos treinar, lê a 1.
> Aluno 34: *Julia tem três camisetas e dois shorts que ela usa para fazer caminhadas. Se ela combinar, por exemplo, a camiseta vermelha com o short verde, faz um conjunto. Se ela combinar a camiseta amarela com o short verde, faz outro conjunto diferente. Se ela combinar em cada dia uma das*

três camisetas com um dos dois shorts, quantos conjuntos diferentes ela pode fazer?

Aluno 34: Vou explicar assim, a gente juntou o amarelo com o verde e com o roxo, depois a gente pegou e juntou o verde com o verde, o verde com o roxo e o vermelho com o verde e com o roxo, e deu 6 conjuntos pra ela usar.

Aluno 33: Não pode esquecer 3 vezes 2 igual a 6, então a gente tem que fazer essa tabuada, e, na outra, 4 vezes 3 igual 12, e o resto eu sei falar.

Mesmo com a realização de ensaios anteriores, no momento efetivo da apresentação alguns acontecimentos ocorreram fora do combinado, conforme podemos verificar nos diálogos estabelecidos:

Pesquisadora: No grupo 3, quem irá representar?

Aluno 33: Sou eu!

Pesquisadora: Quer explicar e depois registrar?

Aluno 33: Pode ser só explicar. A gente, antes de fazer a conta, nós desenhamos umas bolinhas que dava para ser as 4 meninas e depois os 3 meninos, as meninas são as bolinhas rosa e os meninos as azuis. Então, nós fomos ligando uma menina com todos os meninos, a outra menina com os meninos, a terceira menina com os meninos e a última menina com os 3 meninos, esses eram os pares para dançar, aí nós contamos quanto deu e fizemos a conta de 4 meninas vezes 3 meninos que dá os 12 pares de dança.

Pesquisadora: Muito boa a sua explicação, Aluno 33, e a representação das bolinhas ajudou a encontrar a resposta.

Aluno 34: Fala a verdade, menina. Professora, ela queria a resposta 7 e tinha feito de mais igual a eles, mas eu falei: faz as bolinhas que vai ajudar a entender que não é de mais, que é de vezes.

> **Pesquisadora:** Olha só, esse é o objetivo: o grupo conversar sobre a tarefa e chegar a um acordo, e que ótimo quando chegam a um acordo e que a resposta está certa. Muito bem ao amigo que ensinou também.

A partir da análise dos diálogos, inferimos que o Aluno 33, que mostrou dificuldades durante a resolução, após as explicações do Aluno 34 ao grupo, conseguiu explicitar o pensamento que utilizou para chegar à resolução adequada do problema, manifestando a forma predicativa do conhecimento.

Na apresentação ao coletivo da classe por meio da linguagem natural: "Então, nós fomos ligando uma menina com todos os meninos, a outra menina com os meninos, a terceira menina com os meninos e a última menina com os 3 meninos, esses eram os pares para dançar". O aluno mostrou saber que o conjunto que representa a solução do problema é formado pela correspondência entre todos os elementos dos conjuntos que representam as partes, e que, a partir da mudança de um dos elementos dos conjuntos que representam as partes, os elementos do conjunto solução são distintos.

Ainda no trecho "[...] aí nós contamos quanto deu, e fizemos a conta de 4 meninas vezes 3 meninos, que dá os 12 pares de dança", o aluno mostra saber que o total de combinações pode ser encontrado a partir da contagem ou listagem das correspondências realizadas, ou pela operação de multiplicação entre as quantidades dos elementos dos conjuntos que representam as

partes, conforme Silva (2021) aponta em seus resultados de pesquisa.

As contribuições das apresentações dos resultados dos grupos ao coletivo da classe foram evidentes na questão do trato com os erros, pois, a partir das apresentações, os grupos identificavam que haviam utilizado esquemas inadequados e se esforçavam no sentido de reorganizá-los, além de auxiliar os alunos no desenvolvimento da argumentação matemática. Entretanto, tal ação foi suspensa a partir do Bloco 3, pois, com o decorrer da implementação, as apresentações foram se tornando repetitivas, ou seja, as interações dialógicas produzidas a partir da apresentação que os grupos realizavam de sua produção escrita consistia basicamente em uma repetição dos diálogos que ocorriam durante a resolução. Algumas manifestações distintas surgiram devido à mediação da pesquisadora no sentido de incentivar os alunos a falarem a respeito do porquê decidiram resolver daquela maneira, o que direcionou para a estratégia utilizada.

Outra razão para a decisão de suspensão foi em decorrência da animosidade que existia entre os alunos, que fazia com que o momento fosse marcado por indisciplina, implicâncias e, por vezes, *bullying*. Dessa forma, frente aos desconfortos que ocorriam durante as apresentações dos resultados dos grupos ao coletivo da classe, a turma, durante a assembleia de avaliação da implementação, propôs que a ação passasse a ser voluntária; desse modo, apresentavam apenas os grupos que

se sentiam à vontade para fazê-lo, otimizando o tempo de correção e evitando repetições e desentendimentos.

Na citada assembleia de avaliação da implementação, timidamente, uma aluna expressou que seria válido se um grupo corrigisse os problemas do outro grupo. Com essa fala, os demais alunos ficaram eufóricos e entusiasmados, e começaram a falar que eles seriam os professores e dariam até nota para os colegas. Como aparentemente gostaram da ideia, ficou estabelecido que a pesquisadora e a professora regente conversariam a respeito da sugestão e que apresentariam uma proposta nesse sentido.

Assim, ficou definido que, a cada dia de implementação, os alunos de um grupo teriam que realizar a correção do problema resolvido na implementação anterior por outro grupo de colegas. Deveriam descrever as correções realizadas com as devidas justificativas, e, por fim, na devolutiva, se necessário, em caso de dúvidas, deveriam argumentar a respeito da correção realizada, evitando o máximo de equívocos e desconfortos entre os grupos (SILVA, 2021).

Iniciamos então a ação correção cruzada, que foi denominada "Você é o professor". O novo formato consistiu em os grupos resolverem os problemas normalmente e entregarem a folha de cor verde para a pesquisadora, que ficava responsável por efetuar suas cópias. A resolução original permanecia com a pesquisadora, e os alunos recebiam, na aula seguinte, uma cópia não identificada, para efetuar a correção e os apontamentos.

O grupo corretor tinha a liberdade para estabelecer seus critérios de correção e de pontuação, desde que primasse pela isonomia. Ao final da correção, a pesquisadora encaminhava a correção feita aos grupos de origem, e, em caso de reclamações ou discordância, um debate era promovido. Então, a partir do Problema 2 do Bloco 3, iniciou-se a correção cruzada.

O dispositivo pedagógico da correção cruzada permitia que a correção dos problemas fosse conduzida pelos próprios alunos, que, para realizarem a tarefa, deveriam estar bem convictos de suas resoluções, ou seja, terem pleno domínio da forma operatória do conhecimento, para assim elaborarem boas justificativas ao indicar ao grupo de colegas as correções que deveriam ser feitas. Dessa forma, os alunos passaram a exercitar a forma predicativa do conhecimento tanto na oralidade quanto na escrita.

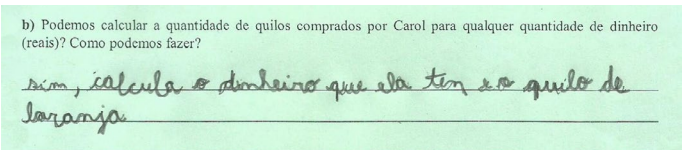
Para exemplificar as contribuições da correção cruzada, trazemos o desempenho do Grupo 3, tanto na resolução quanto na realização da correção do seguinte problema*:* Carol gastou 12 reais comprando laranjas. O quilo da laranja é 2 reais. Quantos quilos ela comprou? a) E se tivesse gastado 16 reais, quantos quilos de laranja teria comprado? b) Podemos calcular a quantidade de quilos comprados por Carol para qualquer quantidade de dinheiro (reais)? Como podemos fazer? Trata-se de um problema da classificação proporção simples – cota, conforme Gitirana *et al.* (2014).

Consideramos que a variação entre o valor gasto na primeira e na segunda questão, além de possibilitar a

mobilização da ideia de variável, pode contribuir para a compreensão da generalização do problema, que é o que se espera na questão "b". A ideia de variável está relacionada à quantia em reais, e a ideia de generalização refere-se a identificar como se calcula a quantidade de quilos de laranja que podem ser comprados para qualquer que seja a quantia de reais (SILVA, 2021).

Vamos analisar especificamente na questão b a resposta dada pelo Grupo 3.

Figura 2. Resolução problema 3, Grupo 3



Fonte: Silva (2021).

Ao escrever como poderiam saber a quantidade de quilos para qualquer valor, os integrantes do grupo cometeram alguns equívocos entre o que foi falado e o que foi escrito, como podemos verificar nos trechos que seguem:

> **Aluno 34:** Vamos terminar, b) Podemos calcular a quantidade de quilos comprados por Carol para qualquer quantidade de dinheiro (reais)? Como podemos fazer?
> **Aluno 31**: Podemos, foi o que fizemos nessas contas, quando a gente dividiu o dinheiro que ela tem e o quilo de laranja.
> **Aluno 33:** Nós só dividimos os dois.
> **Aluno 34:** A resposta é sim, calculando os reais que ela tinha e o quilo da laranja, desse jeito vai saber quantos quilos ela comprou.

Os integrantes manifestam oralmente saber resolver o problema e especificam a operação adequada para fazê-lo, porém, ao efetuar o registro escrito, não mencionaram a operação de divisão. Entretanto, no momento em que realizaram a correção da atividade que outro grupo resolveu, foram mais específicos, conforme mostra a Figura 3. O Grupo 4 apresentou como resposta para a questão b: "Sim, dividindo e diminuindo". Ao proceder à correção cruzada, o Grupo 3 sugere: "O grupo está de parabéns, mas faltou dizer que era o dinheiro que ia dividir pelo preço de 1 quilo de laranja, ou ir tirando o preço de 1 quilo até dar zero reais". Dessa forma, inferimos que o grupo corretor manifesta a forma predicativa do conhecimento da ideia-base de generalização.

Para a elaboração dessa justificativa, os diálogos realizados entre os integrantes do grupo foram:

> **Aluno 34:** Gente, como assim, esse grupo respondeu a letra "b" muito sem explicação, dividindo e diminuindo, tá... mas... nem falaram que números.
>
> **Aluno 31:** Vamos começar das de cima, depois a gente vê essa, pode ser?
>
> **Aluno 34:** Pode, eu sou meio rápido nas coisas, vamos ver a primeira.
>
> **Aluno 32:** Eles fizeram um monte de conta de menos.
>
> **Aluno 33:** Pra que isso?
>
> **Aluno 34:** Eles pegaram os 12 reais que ela gastou e foram tirando 2 por vez, até dar zero, daí eles viram quantos quilos ela comprou. Dá certo desse jeito, só que é trabalho demais.
>
> **Aluno 32:** E aí foram dividir e colocaram um zero na frente do 6; gente, que doideira.

Aluno 34: Sabe o que acontece, pode ser que eles pensaram que 1 não dá para dividir por 6, aí coloca o zero na chave, mas esqueceram que tinha que pegar o 2 e dava 12, mas não tem vírgula, então, de boa, aí na resposta colocaram só 6 quilos, acho que foi só besteira mesmo.

Aluno 31: Resumindo, a questão tá certa, pode dar a nota aí.

Aluno 34: Sim, tá certa.

Aluno 32: A letra "a", a questão tá certa, mas passou a resposta errada, passou 6 ao invés de 8.

Aluno 34: Verdade, nem tinha notado, acontece isso sempre né, fazer as contas certas e, na hora de passar, trocar os números.

Aluno 32: Acontece porque ficam conversando tipo gralha e não se concentram, lembram o Aluno 62, que na prova da secretaria passou as respostas no gabarito, acabou o gabarito e sobrou questão sem responder, acha que aconteceu o que, errou tudo.

Aluno 34: Sim, já pensou que *bad*.

Aluno 33: Gente, e nessa última, errado, né?

Aluno 32: Eu acho que vale um meio certo, afinal eles fizeram de menos e de dividir, mas faltou explicar como chegar na resposta.

Aluno 31: Vamos descontar na nota, dar uns 90 e escrever o que faltou.

Aluno 34: Faltou escrever que era para dividir o dinheiro dela pelo preço de 1 quilo de laranja; está escrevendo, Aluno 31?

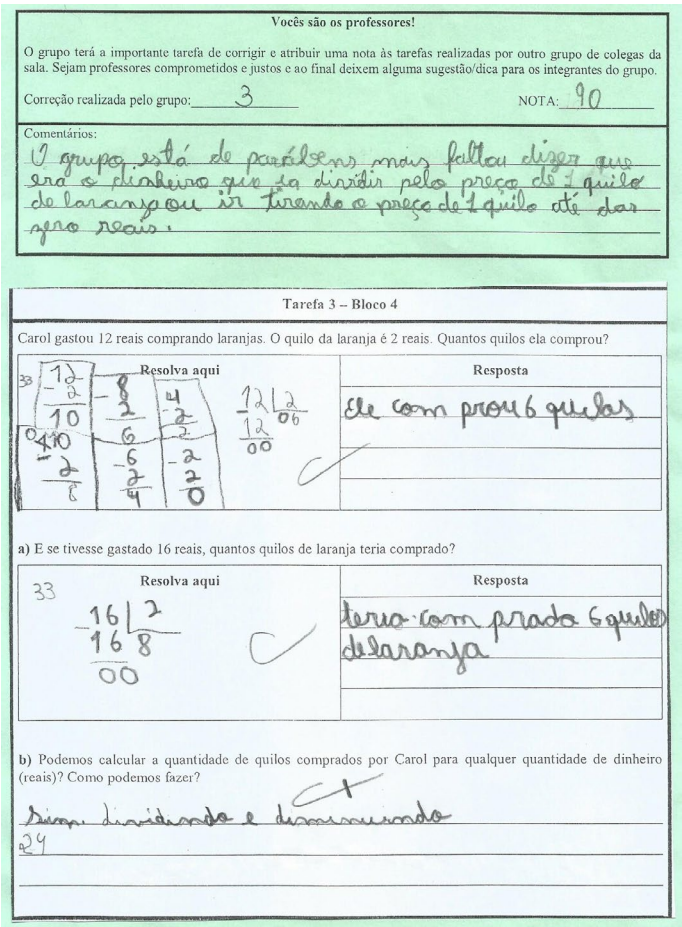
Aluno 31: Calma, estou sim.

Aluno 34: Ou ir tirando o preço de 1 quilo até dar zero reais, assim que a gente ia chegar no resultado para qualquer dinheiro que ela gastar.

Aluno 32: Chegar ia, mas de dividir é muito melhor, né?

Aluno 34: Com certeza, e na última dá 24, aí fecha 90 de nota.

Figura 3. Correção cruzada realizada pelo Grupo 3



Vocês são os professores!

O grupo terá a importante tarefa de corrigir e atribuir uma nota às tarefas realizadas por outro grupo de colegas da sala. Sejam professores comprometidos e justos e ao final deixem alguma sugestão/dica para os integrantes do grupo.

Correção realizada pelo grupo: 3 NOTA: 90

Comentários:
O grupo está de parabéns mas faltou dizer que era o dinheiro que ia dividir pelo preço de 1 quilo de laranja ou ir tirando o preço de 1 quilo até dar zero reais.

Tarefa 3 – Bloco 4

Carol gastou 12 reais comprando laranjas. O quilo da laranja é 2 reais. Quantos quilos ela comprou?

Resolva aqui	Resposta
12 − 2 = 10; 10 − 2 = 8; 8 − 2 = 6; 6 − 2 = 4; 4 − 2 = 2; 2 − 2 = 0	Ele comprou 6 quilos

a) E se tivesse gastado 16 reais, quantos quilos de laranja teria comprado?

Resolva aqui	Resposta
16 | 2 / 16 | 8 / 00	Teria comprado 8 quilos de laranja

b) Podemos calcular a quantidade de quilos comprados por Carol para qualquer quantidade de dinheiro (reais)? Como podemos fazer?

Sim. Dividindo e diminuindo 2 4

Fonte: Silva (2021).

No diálogo, verificamos um esforço inicial dos integrantes do Grupo 3 para entender o pensamento que o Grupo 4 efetuou para elaborar suas respostas. Nessa ação, estão exercitando a forma predicativa do

conhecimento, que, posteriormente, passa a ser escrita na folha que será devolvida ao grupo. A partir das interações ocorridas na correção cruzada, identificamos uma melhora quanto à forma predicativa do conhecimento expressa em sua forma escrita, pois o grupo, ao realizar a correção, sugeriu respostas explicitando a ideia-base de generalização.

As transcrições dos áudios da correção cruzada nos permitiram identificar variadas opiniões que os alunos têm a respeito da resolução de problemas e das correções de atividades avaliativas, além de trazer informações a respeito de concepções quanto à presença de cálculos e representações pictóricas.

Considerações finais

Ao retomarmos os registros de tese focando as ações pedagógicas que foram propostas ao longo da pesquisa com o objetivo de motivar os alunos quanto à manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento, inferimos a respeito da necessidade constante do professor/pesquisador avaliar seu plano de trabalho docente e metodologia, pois, como os resultados comprovaram, a variação de dispositivos pedagógicos mantém os alunos motivados a realizar as atividades em sala de aula. Por mais que uma metodologia se apresente como adequada, é salutar que ela seja alternada com outras durante o período escolar.

A proposta da resolução dos problemas do instrumento de pesquisa por meio de grupos foi fundamental

para que ocorressem as interações dialógicas entre os alunos, favorecendo a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento. Por essa razão, defendemos que tal prática seja proposta durante as aulas de matemática.

A apresentação dos resultados dos grupos ao coletivo da classe foi constituída por importantes momentos em que os alunos se viam na obrigação de justificar matematicamente as suas resoluções e escolhas perante os colegas de classe, e, dessa forma, deveriam estar convictos dos esquemas empregados, ou seja, dominar a forma operatória do conhecimento, para, então, realizar a argumentação necessária na forma predicativa do conhecimento.

Identificamos que, com a realização da correção cruzada, os grupos puderam ampliar seus esquemas de resolução a partir dos esquemas mobilizados por outros grupos, ou seja, essa ação incorporada ao *milieu* favoreceu novas aprendizagens aos alunos, possibilitando a explicitação e o aprimoramento da forma predicativa do conhecimento.

Durante as interações da correção cruzada, os grupos apresentaram mais argumentos, ao identificar nas respostas escritas de outros grupos lacunas e incompletudes, ou seja, ao realizar as correções e apontamentos, manifestavam que compreenderam a resolução e em que sentido deveriam melhorar.

Concluímos, a partir dessa reflexão, que as ações pedagógicas sugeridas neste capítulo representaram

para os alunos colaboradores da citada pesquisa uma oportunidade para a manifestação das formas operatória e predicativa do conhecimento, tendo potencial para ser replicadas em outros ambientes de ensino, desde que sejam consideradas as características e realidades dos alunos envolvidos e que sejam efetuadas constantes avaliações e ações de viabilidade das propostas pelos professores envolvidos.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

AMOP – ASSOCIAÇÃO DOS MUNICÍPIOS DO OESTE DO PARANÁ. DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO. *Currículo básico para a escola pública municipal*: educação infantil e ensino fundamental (anos iniciais). Cascavel: AMOP, 2014.

AMOP – ASSOCIAÇÃO DOS MUNICÍPIOS DO OESTE DO PARANÁ. DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO. *Proposta Pedagógica Curricular:* educação infantil e ensino fundamental (anos iniciais) – Rede Pública Municipal – Região da AMOP. Cascavel: ASSOESTE, 2019.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Base Nacional Curricular Comum (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 de nov. 2019.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CIANI, A. B.; NOGUEIRA, C. M. I.; BENS, M. A construção do conceito de função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. *In*: CEOLIM, A. J.; REZENDE, V.; HERMANN, W. (Org.). *Diálogos entre a Educação*

Básica e a Universidade: reflexões acerca do conceito de função nas aulas de Matemática. Curitiba: CRV, 2019. p. 29-50.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Educação Matemática*: uma (nova) Introdução. 3. ed. rev. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-111.

GITIRANA, V. *et al*. *Repensando a multiplicação e a divisão*: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

MAGINA. S. A pesquisa na sala de aula de matemática das séries iniciais do ensino fundamental. Contribuições teóricas da psicologia. *Educar em Revista*, Curitiba, n. especial, p. 63-75, 2011.

MERLI, R. F. *Do pensamento funcional do Campo Conceitual de Função*: o desenvolvimento e um conceito. 2022. 216 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022.

PAVAN, L. R. *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas*. 2010. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

SANTANA, E. R. dos S.; LAUTERT, S. L.; CASTRO FILHO, J. A. de. (Org.). *Ensinando multiplicação e divisão no 4º e 5º ano*. Itabuna: Via Litterarum, 2017.

SILVA, L. D. C. P. *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa*: uma investigação das ideias base de função. 2021. 555 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

TINOCO, L. A. A. *Construindo o conceito de função*. 4. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2002.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 1993, Rio de Janeiro. *Anais* [...]. Rio de Janeiro, 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEEMPA*, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. *In*: GROSSI, E. P. (Org.). *Por que ainda há quem não aprende?*: a teoria. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 21-60.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*: problemas do ensino de Matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. O que é aprender? *In*: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: CRV, 2009b. p. 13-35.

VERGNAUD, G. A didática é provocação: ela é um desafio. Entrevista concedida em 1995. *In*: GROSSI, E., P. *Piaget e Vygotski em Gerard Vergnaud*: Teoria dos Campos Conceituais TCC. Porto Alegre: GEMPA, 2017. p. 12-37.

9. Ideias-base de função em problemas mistos: uma análise de livro didático do 6º ano

Carla Larissa Halum Rodrigues
Marli Schmitt Zanella

Introdução

Uma das teorias que tem apresentado contribuições para a educação matemática contemporânea é a Teoria dos Campos Conceituais. Suas ideias têm auxiliado pesquisadores a entender a formação de conceitos matemáticos por parte dos estudantes, a partir de observações de suas estratégias na resolução de diferentes situações envolvendo um mesmo conceito.

Para Vergnaud (2009a), o processo de aprendizagem está relacionado ao conhecimento que o sujeito adquire em toda sua vida, seja no contexto escolar ou não, em diversas modalidades de aprendizagem e formação. Para o autor, conhecimento é adaptação, e esta, por sua vez, é compreendida sob dois aspectos, a saber: o primeiro diz respeito à adaptação do sujeito às diferentes situações que vivencia, e o segundo aspecto refere-se à

evolução da organização da ação desenvolvida em diferentes situações que requerem a adaptação do sujeito.

Consideramos, assim, que é ao longo da experiência escolar, não escolar ou profissional que o sujeito se depara com situações às quais deve se adaptar. Assim, se estamos interessados em elaborar situações de aprendizagem, é necessário que elas sejam desenvolvidas de modo diversificado e que contemplem diferentes conceitos a partir de variadas situações.

De acordo com Vergnaud (1996; 2013), a relevância em se considerar as diferentes variações e estabelecer uma classificação para as situações multiplicativas e aditivas permitiu que os estudos provenientes da Teoria dos Campos Conceituais fossem expandidos também para outras áreas, além da matemática, mostrando quão profícua é a variedade de situações relacionadas ao mesmo conceito para o seu processo de conceitualização.

Entre as situações matemáticas, temos os problemas complexos, que envolvem várias relações e questões. Esses problemas podem ser do tipo aditivo puro, do tipo multiplicativo puro e do tipo misto (multiplicativo e aditivo) (VERGNAUD, 2009a). Nesta investigação, o foco são os problemas mistos, que colocam em jogo as relações multiplicativa e aditiva. Rodrigues e Rezende (2021) identificaram em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental 46 problemas mistos, que foram classificados em 7 subclasses.

No que diz respeito ao livro didático, ele é um material pedagógico entregue para todas as escolas públicas para

ser utilizado pelo professor no preparo de suas aulas e pelo estudante para realização das tarefas. De acordo com Bittar (2017, p. 365), "[...] seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor. Consequentemente, é importante conhecer as propostas do livro didático, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos".

O contato dos estudantes com os problemas mistos permite a mobilização das ideias-base de função, mesmo que intuitivamente (PAVAN, 2010; CALADO, 2020; SILVA, 2021; RODRIGUES, 2021; BERNARDINO, 2022; DEZILIO, 2022). Considerando os aspectos históricos e epistemológicos para a construção do conceito de função, apoiados em Merli (2022), adotamos nesse estudo como ideias-base de função aquelas ideias que servem para todas as funções, e isso ocorre com as ideias-base de variável, dependência, regularidade e generalização.

Com base no que foi exposto acima, essa investigação foi desenvolvida com vistas a identificar e analisar problemas mistos propostos em um livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental, na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais, e explicitar ideias-base de função possíveis de serem mobilizadas por meio desses enunciados. Para tanto, realizamos uma análise do referido livro da coleção "A conquista da Matemática", de autoria de Giovanni Jr. e Castrucci (2018), da Editora FTD, por se tratar da obra de maior distribuição em território brasileiro (BRASIL, 2020). Com base nos pressupostos teóricos de Vergnaud (1996, 2009a)

e Miranda (2019), relacionados à classificação dos problemas mistos, apresentamos uma tipologia para essas situações identificadas, explicitando os esquemas relacionais e as ideias-base de função que podem ser mobilizadas a partir dos enunciados dessas situações.

Os problemas mistos com aporte da Teoria dos Campos Conceituais

Vergnaud (1996) estabelece a ideia de campo conceitual, que emerge a partir de um conjunto de situações com ampla variedade de conceitos, de procedimentos, de representações simbólicas e de invariantes. Isso significa que um conceito não se encontra isolado; por isso, em sala de aula, é necessário trabalhar os diferentes significados de um conceito por meio da variedade de situações. Isso remete à importância dada pelo autor à classificação de situações dos campos conceituais das estruturas aditiva e multiplicativa.

É a partir da variedade de conceitos em diversificadas situações que um campo conceitual é modelado. Vergnaud (1993, p. 11) afirma que "existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis". Para o autor, as experiências do aluno não se repetem da mesma forma nas diferentes situações, embora possam existir regularidades na construção da experiência.

A Teoria dos Campos Conceituais tem por objetivo estudar em que condições o aluno pode compreender,

assimilar e acomodar um determinado conceito oriundo do saber escolar. Para Vergnaud (2009b), as diferentes situações em uma mesma classe admitem uma complexidade progressiva das competências matemáticas.

Tal complexidade depende dos enunciados das situações, da estrutura cognitiva dos educandos, do contexto envolvido, da característica numérica dos dados e de sua apresentação aos estudantes, o que justifica a relevância desse estudo ao analisar as diferentes situações do tipo mistas apresentadas em um livro didático e caracterizar suas tipologias.

Gitirana *et al*. (2014) esclarecem que não basta o aluno realizar um cálculo numérico adequado; é preciso compreender e experimentar diferentes situações relacionadas ao conceito em questão, o que permitirá ao aluno mobilizar diferentes raciocínios e estratégias. Isso pressupõe que o professor conheça diferentes classes de situações relacionadas a um determinado campo conceitual, para evitar a proposição de problemas que requeiram somente o mesmo raciocínio ao longo do processo escolar.

Possibilitar aos estudantes durante o processo escolar acesso às diferentes classes de situações permitirá o desenvolvimento de novos raciocínios matemáticos para lidar com essas situações. Por isso, considera-se importante diversificar as situações desde os anos iniciais do ensino fundamental (ZANELLA; REZENDE, 2022).

Entre os campos conceituais associados a conceitos matemáticos estabelecidos por Vergnaud (1993, 1996;

2009a), tomamos como base para o desenvolvimento desta pesquisa dois deles: o campo conceitual da estrutura aditiva e o campo conceitual da estrutura multiplicativa.

O campo conceitual da estrutura aditiva é constituído pelo conjunto das situações que envolvem uma ou várias adições e subtrações, além do conjunto dos conceitos e teoremas interligados a essas situações. São componentes das estruturas aditivas os conceitos de cardinal, medidas, adição, subtração, transformação de tempo, relações de comparação e composição de quantidade, inversão, número natural e número relativo. Vergnaud (2009a) apresenta seis classes de problemas aditivos: composição de medidas; transformação de medidas; comparação de medidas; composição de duas transformações; transformação de uma relação e composição de duas relações, sendo elas relações ternárias que ligam três elementos entre si.

O campo conceitual da estrutura multiplicativa é o conjunto das situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões e, além disso, compreende o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como atividades matemáticas. Para os problemas de estruturas multiplicativas, Vergnaud (1996; 2009a) estabeleceu cinco classes: comparação multiplicativa; produto de medidas; proporção simples; proporcionalidade múltipla e função bilinear.

Essas classes são frequentemente representadas por um esquema relacional que, de acordo com Vergnaud (2009*a*), permite estabelecer e explicitar os cálculos

relacionais próprios da estrutura de cada problema. O autor definiu esquemas relacionais compostos por símbolos e códigos (Quadro 1), auxiliando na visualização do tipo de relação estabelecida entre as medidas presentes no enunciado do problema.

Quadro 1. Símbolos que compõem os esquemas relacionais.

Nomenclatura	Símbolo	Significado
Retângulo		número natural
Círculo		número relativo
Chave vertical		composição de elementos de mesma natureza
Chave horizontal		
Fecha horizontal		uma transformação ou uma relação, quer dizer a composição de elementos de natureza diferente
Fecha vertical		

Fonte: Adaptado de Vergnaud (2009a, p. 201).

Vergnaud (2009a) define como problemas mistos aqueles aritméticos constituídos por várias relações e questões que envolvem ao menos uma relação aditiva e uma multiplicativa, e, dessa forma, permitem ao aluno resolver o problema por diferentes caminhos. Os problemas mistos carecem de interpretações para que os alunos identifiquem as relações existentes entre os elementos do campo multiplicativo e do campo aditivo, e desenvolvam os cálculos relacionais e numéricos para encontrar o procedimento que possibilite resolvê-los.

Miranda (2019) identificou, em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio,

oitenta e nove problemas mistos relacionados à função afim. A autora estabeleceu a priori 30 possibilidades de classes para os problemas mistos, com base nos campos aditivo e multiplicativo (VERGNAUD, 2009*a*). Para cada classe de problema, uma expressão analítica da função correspondente é explicitada, por exemplo, proporção simples e composição de medidas são explicitadas por $y = ax \pm b$, o que trouxe indicativos para estabelecer aproximações entre problemas mistos e noções de função em situações relacionadas às estruturas aditivas e às estruturas multiplicativas.

Algumas pesquisas defendem que estudantes manifestam as ideias-base de função (variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização) ao resolverem problemas mistos, e que as ideias-base podem ser desenvolvidas pelos alunos desde os anos iniciais (PAVAN, 2010; CALADO, 2020; SILVA, 2021; RODRIGUES, 2021; BERNARDINO, 2022; DEZILIO, 2022). De acordo com os pressupostos de Merli (2022), assumimos nesta pesquisa as ideias-base de função descritas no Quadro 2.

As ideias apresentadas são essenciais para a construção do conceito de função e devem ser introduzidas aos poucos e gradativamente, à medida que os conteúdos desenvolvidos com estudantes oferecem oportunidades (TINOCO, 2002).

Considerando a classificação de problemas mistos estabelecidos por Miranda (2019) e Vergnaud (1996, 2009a), adotamos como fonte de dados um livro didático de matemática do 6º ano, com a finalidade de analisar

e classificar os problemas mistos presentes na obra. Os procedimentos metodológicos e a análise dos dados estão descritos nas próximas seções.

Quadro 2. Ideias-base de função

Ideia-base	Descrição
Dependência	Ocorre entre grandezas variáveis. Em uma relação funcional, uma das grandezas, denominada variável dependente, é determinada pela variação da outra grandeza, denominada variável independente.
Variável	Representa um número qualquer de um conjunto, mas não é um número específico. Pode-se utilizar um símbolo ou uma letra para representar uma variável, referindo-se a um número arbitrário, um valor desconhecido.
Regularidade	Permite identificar a ocorrência regular de um determinado fenômeno, e constitui uma das primeiras noções para a construção do conceito de função.
Generalização	Observa-se em fenômenos que ocorrem regularmente e, portanto, podem ser generalizados. Envolve também a abstração e a argumentação, favorecendo verificar a validade de uma certa lei para quaisquer casos.

Fonte: Adaptado de Zanella e Rezende (2022).

Procedimentos metodológicos

A fonte de dados utilizada para esta investigação refere-se ao livro didático de matemática destinado ao 6º ano. Com base nas informações de distribuição das obras aprovadas pelo Programa Nacional do livro e do Material Didático (PNLD) de 2020, selecionamos a coleção "A conquista da Matemática", de autoria de Giovanni Jr. e Castrucci (2018), da Editora FTD, por se tratar da coleção

que o maior número de escolas no território brasileiro adotou (BRASIL, 2020).

Para identificar problemas mistos no material selecionado, consideramos todas as páginas do livro, pois os conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão estão presentes ao longo da obra e relacionam-se também com outros conceitos. Para cada problema misto identificado, analisamos minuciosamente as relações aditivas e multiplicativas presentes no enunciado das situações e representamos essas relações na forma de esquema relacional e equação, baseados em Vergnaud (1996, 2009a) e Miranda (2019), para então apresentar a classificação para o referido problema. Para a elaboração dos esquemas relacionais, utilizamos os códigos do Quadro 1, propostos por Vergnaud (2009a).

Por fim, analisamos todos os problemas mistos selecionados para identificarmos, em cada classe e subclasse, a possibilidade de explicitarmos as ideias-base de função: dependência, variável, regularidade e generalização, conforme os pressupostos de Caraça (1998), Tinoco (2002), Pavan (2010) e Merli (2022). Essas ideias-base de função não estão explícitas nos enunciados das situações, mas podem ser identificadas a fim de favorecer o desenvolvimento do conceito de função durante todo o processo escolar, uma vez que o livro didático, considerado uma ferramenta base para o planejamento de aulas (FREITAS; ALMOULOUD, 2016), está presente nas práticas pedagógicas do professor, cujas escolhas didáticas podem elucidar algumas ideias-base de função desde

o ensino fundamental, como veremos nas análises dos enunciados dos diferentes problemas mistos.

Análise dos dados

A partir das análises de todas as situações multiplicativas no livro didático, identificamos a presença de quarenta problemas mistos, pertencentes a onze classes distintas, a saber: proporção simples – multiplicação um para muitos e composição de medidas (7); proporção simples – cota e composição de medidas (2); proporção simples partição e composição de medidas (3); proporção simples – multiplicação um para muitos e transformação de medidas (4); proporção simples cota e transformação de medidas (1); proporção simples partição e transformação de medidas (2); proporção simples – multiplicação um para muitos, transformação e composição de medidas (1); comparação multiplicativa e transformação de medidas (3); comparação multiplicativa e composição de medidas (11); produto de medidas – área e composição de medidas (4); produto de medidas – área, composição e transformação de medidas (2).

A seguir, apresentamos e analisamos 9 classes de problemas mistos, dentre as 11 classes identificadas na coleção, pois selecionamos as situações que envolvem apenas uma classe aditiva e uma classe multiplicativa. Assim, desconsideramos nesta análise 2 situações da subclasse produto de medidas – área, composição e transformação de medidas, e uma situação da classe

proporção simples – multiplicação, transformação e composição de medidas.

Proporção simples – multiplicação um para muitos e composição de medidas

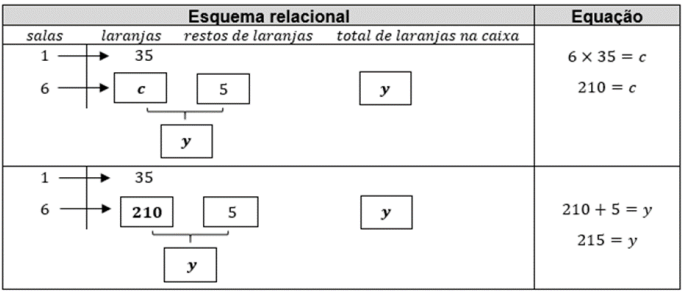
No livro analisado, foram identificados sete problemas mistos, com diferentes estruturas, pertencentes à classe proporção simples – multiplicação um para muitos e composição de medidas. A seguir, apresentamos um exemplo pertencente a essa classe, extraído de Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 57): "Uma escola recebeu uma caixa com certa quantidade de laranjas para a merenda das crianças. Essa quantidade foi repartida entre as 6 salas da escola, sendo que cada sala recebeu 35 laranjas, e ainda restaram 5 laranjas na caixa. Quantas laranjas havia inicialmente na caixa?"

Esse problema associa a unidade de uma grandeza com muitas quantidades de outra grandeza e a relação de composição de medidas com o todo desconhecido. Para resolvê-lo, é necessário determinar a quantidade total de laranjas que a escola entregou para cada uma das 6 salas. Para determinar a quantidade de laranjas que havia inicialmente na caixa, utiliza-se uma relação de composição de medidas entre o total de laranjas distribuídas nas 6 salas e aquelas que sobraram na caixa, conforme representado no esquema relacional da Figura 1.

Podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: dependência – a quantidade de laranjas depende do número de salas; variável –

conforme se altera a quantidade de salas, se altera a quantidade de laranjas; e regularidade – 1 sala recebe 35 laranjas, 6 salas recebem 210 laranjas. As demais ideias-base não são favorecidas nesse enunciado.

Figura 1. Esquema relacional de proporção simples – multiplicação e composição de medidas



Fonte: As autoras.

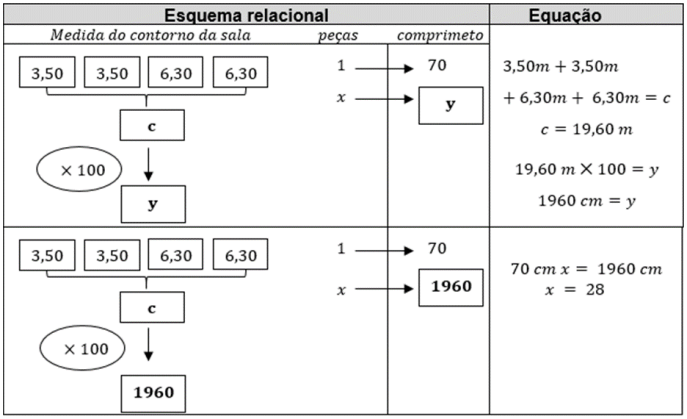
Proporção simples – cota e composição de medidas

No livro analisado, foram identificados dois problemas mistos pertencentes à classe proporção simples – cota e composição de medidas. Exemplificamos essa classe com o seguinte problema misto, extraído de Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 256): "Um gesseiro está colocando uma faixa de gesso em todo o contorno de uma sala. Essa sala tem 3,50 m de largura por 6,30 m de comprimento. Se cada peça de gesso tem 70 cm de comprimento, quantas peças serão usadas para fazer o contorno dessa sala?"

Uma solução para essa situação consiste em somar o comprimento de cada lado da sala, por meio da relação

de composição de medidas. É necessário realizar a conversão de medidas referente ao comprimento da sala (etapa intermediária – comparação multiplicativa). Na sequência, para determinar a quantidade de peças de 70 cm, utiliza-se a relação de cota entre a quantidade de peças e o seu comprimento. Desse modo, serão usadas 28 peças para fazer o contorno dessa sala, conforme explicitado na Figura 2.

Figura 2. Esquema relacional de proporção simples – cota e composição de medidas



Fonte: As autoras.

Podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: dependência – a quantidade de peças depende do comprimento da sala; variável – conforme se altera o perímetro da sala, se altera a quantidade de peças; e regularidade – 1 peça tem 70 cm, 2 peças têm 140 cm, 28 peças têm 1.960 cm. A generalização não é manifestada nesse enunciado.

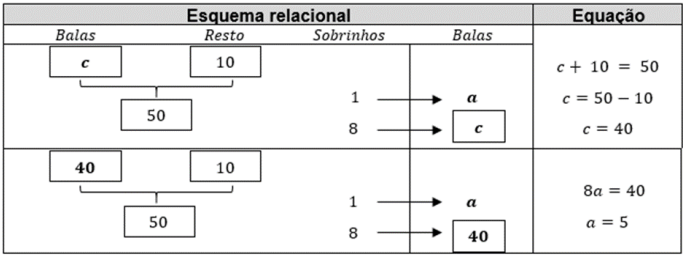
Proporção simples – partição e composição de medidas

No livro analisado, foram identificados três problemas mistos da classe proporção simples – partição e composição de medidas. Elegemos o seguinte problema misto para representar essa classe, disponível em Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 56): "Dona Luísa comprou um saco de 50 balas para distribuir igualmente entre seus 8 sobrinhos. Quantas balas deverão ser dadas a cada sobrinho para que restem 10 para Dona Luísa?"

Esse problema coloca em jogo a relação de proporção simples – partição, em que você tem o valor de muitos e deseja saber o valor unitário, e a relação de composição de medidas com a parte desconhecida, que consiste na relação entre o todo e uma parte, em que se deseja obter a outra parte. Uma solução é subtrair a quantidade de balas que restará do total; para isso, utiliza-se uma relação de composição de medidas, e, depois, é preciso determinar quantas balas serão dadas a cada sobrinho, por meio da relação de partição entre a quantidade de sobrinhos e a quantidade de balas, de modo que cada sobrinho receberá 5 balas (Figura 3).

A partir desse problema misto, podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: dependência – a quantidade de balas que cada sobrinho receberá depende da quantidade de sobrinhos; variável – conforme se altera a quantidade de sobrinhos, se altera a quantidade de balas; regularidade – 1 sobrinho receberá 5 balas, 2 receberão 10 balas, 8 sobrinhos receberão 40 balas. A generalização não é manifestada nesse enunciado.

Figura 3. Esquema relacional de proporção simples – partição e composição de medidas



Fonte: As autoras.

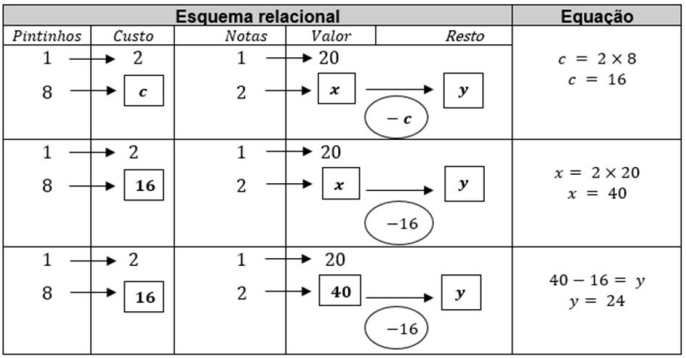
Proporção simples – multiplicação um para muitos e transformação de medidas

Nas análises, foram identificados três problemas mistos com diferentes estruturas pertencentes à classe proporção simples – multiplicação um para muitos e transformação de medidas. Apresentamos um exemplo de problema misto pertencente a essa classe, extraído de Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 71): "Isabel foi a uma feira de animais e comprou 8 pintinhos. Cada um custou 2 reais. Isabel tinha 2 notas de 20 reais. Com quanto Isabel ficou?"

Para resolvê-lo, é necessário determinar o custo de oito pintinhos e o total, em dinheiro, que Isabel tinha. Para isso, considera-se a relação de proporção simples entre a quantidade de pintinhos e o custo, e entre a quantidade de notas e o seu valor. Depois, busca-se quanto sobrou para Isabel por meio de uma relação de transformação de medidas, sendo o estado inicial o valor que ela tinha; a transformação, o custo dos pintinhos; e o estado

final, o resto. Portanto, Isabel ficou com 24 reais. Essas relações estão indicadas na Figura 4.

Figura 4. Esquema relacional de proporção simples – multiplicação e transformação de medidas



Fonte: As autoras.

A partir desse problema misto, podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: regularidade – 1 pintinho custa 2 reais, 8 pintinhos custam 16 reais; dependência – o custo total depende da quantidade de pintinhos comprados; variável – alterando-se a quantidade de pintinhos, altera-se o custo total. A generalização não é favorecida por esse tipo de enunciado.

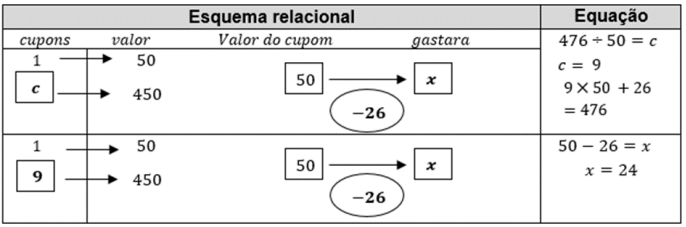
Proporção simples – cota e transformação de medidas

Foi identificado um problema misto pertencente à classe proporção simples – cota e transformação de medidas. Apresentamos esse problema misto, extraído de Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 56): "Gláucia fez

compras na loja Compra Feliz e gastou 476 reais. A cada 50 reais gastos, recebe-se um cupom para o grande sorteio. Quantos cupons Gláucia ganhou e quantos reais ela precisa gastar para receber um novo cupom?"

Uma possível solução para esse problema consiste em determinar quantas cotas de 50 reais obtêm-se com 476 reais. Para isso, utiliza-se uma relação de proporção simples – cota. Para encontrar quantos reais ela precisa gastar para receber um novo cupom, utiliza-se uma relação de transformação de medidas, sendo o estado inicial o valor do cupom; a transformação a parte do valor gasto, menor que 50 reais; e o estado final o valor necessário para obter 50 reais. Portanto, Gláucia ganhou 9 cupons e precisa gastar 24 reais para receber um novo cupom (Figura 5).

Figura 5. Esquema relacional de proporção simples – cota e transformação de medidas



Fonte: As autoras.

A partir desse problema misto, podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: regularidade – 1 cupom vale 50 reais, 9 cupons valem 450 reais; dependência – a quantidade de cupons

depende do valor gasto; variável – ao alterar o valor gasto, altera-se a quantidade de cupons. Generalização não se manifesta nesse enunciado.

Proporção simples – partição e transformação de medidas

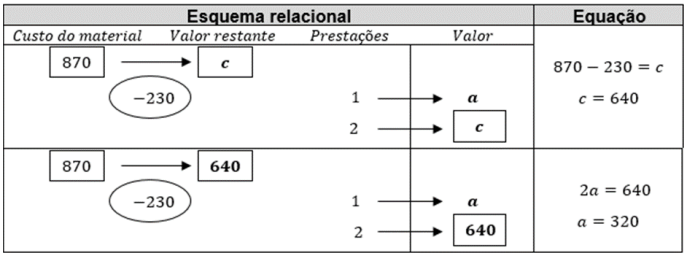
No livro analisado, foram identificados dois problemas mistos com diferentes estruturas pertencentes à classe proporção simples – partição e transformação de medidas. Apresentamos um exemplar para essa classe, disponível em Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 72): "Gustavo comprou a prazo o material escolar de seu filho. Deu uma entrada de 230 reais e dividiu o restante em duas prestações iguais. Se o material custou 870 reais, qual o valor de cada prestação?"

Para resolver esse problema misto, primeiramente é necessário determinar o valor restante após a entrada. Para isso, utiliza-se uma relação de transformação de medidas, sendo o estado inicial o custo do material, a transformação o valor da entrada, e o estado final o valor restante. Na sequência, determinar o valor de cada prestação, por meio da relação de partição, entre a quantidade de prestações e o valor correspondente, de modo que cada prestação é R$ 320,00 (Figura 6).

A partir desse problema misto, podem-se explorar com os estudantes as seguintes ideias-base de função: regularidade – 1 prestação custa 320 reais, 2 prestações custam 640 reais; dependência – o valor de cada prestação depende do custo do material; variável – alterando-se a quantidade de prestações, altera-se o valor

de cada prestação. A generalização não se manifesta a nesse enunciado.

Figura 6. Esquema relacional de proporção simples – partição e transformação de medidas



Fonte: As autoras.

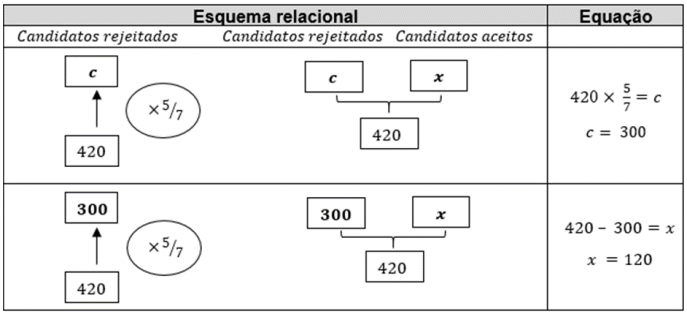
Comparação multiplicativa e composição de medidas

No livro analisado, foram identificados onze problemas mistos com diferentes estruturas pertencentes à classe comparação multiplicativa e composição de medidas. Apresentamos um exemplar para essa classe, extraído de Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 168): "Foram entrevistados 420 candidatos a determinada vaga de emprego. Sabe-se que $\frac{5}{7}$ desse número de candidatos foram rejeitados, então, quantos candidatos foram aceitos?"

Esse problema misto relaciona o raciocínio envolvido na comparação multiplicativa, que compara duas grandezas de mesma natureza, e a composição de medidas com a parte desconhecida, que subtrai uma parte do todo para obter a outra parte. Uma solução consiste em determinar a quantidade de candidatos rejeitados, por meio da relação de comparação: considerando 420,

o total de candidatos, como o referente, $\frac{5}{7}$ é a relação, e os candidatos rejeitados, o referido. Para obter a quantidade de candidatos aceitos, utiliza-se uma relação de composição de medidas, conforme explicitado na Figura 7, concluindo que foram aceitos 120 candidatos a essa determinada vaga de emprego.

Figura 7. Esquema relacional de comparação multiplicativa e composição de medidas



Fonte: As autoras.

A partir desse enunciado, pode-se explorar com os estudantes a ideia-base dependência – a quantidade de candidatos aceitos depende do total de candidatos rejeitados. Não são manifestadas as ideias-base variável, regularidade e generalização nesse enunciado. Mas ressaltamos que, com adaptações, elas podem ser incluídas para que sejam desenvolvidas com os estudantes.

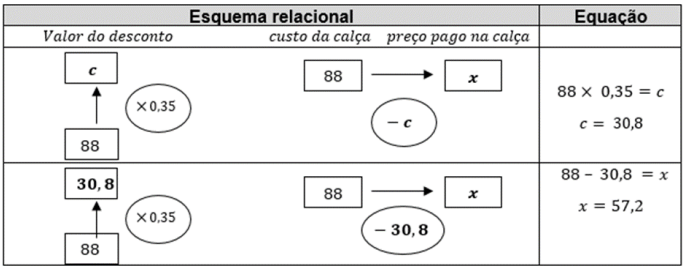
Comparação multiplicativa e transformação de medidas

No livro analisado, foram identificados três problemas mistos com diferentes estruturas pertencentes à classe

comparação multiplicativa e transformação de medidas. A seguir, um exemplo de problema misto pertencente a essa classe, disponível em Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 191): "Na loja do sr. Freitas, uma calça custa R$ 88,00. Para atrair mais compradores, ele resolveu dar um desconto de 35% sobre o preço de todas as mercadorias da loja. Determine o desconto no preço de uma calça e o preço pago em uma calça."

Uma solução para esse problema misto consiste em determinar o valor do desconto, por meio de uma relação de comparação multiplicativa, sendo o desconto (referido) a trigésima quinta parte de cem do valor em questão, ou seja, $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$ (relação) de 88 (referente). Para encontrar o preço pago, utiliza-se uma relação de transformação, sendo o estado inicial o custo da calça; a transformação, o valor do desconto; e o estado final, o preço pago pela calça. Portanto, o valor do desconto é R$ 30,80 e o preço pago por uma calça é R$ 57,20, conforme mostra a Figura 8.

Figura 8. Esquema relacional de comparação multiplicativa e transformação de medidas



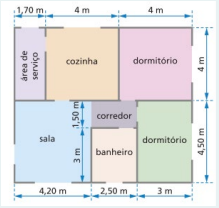
Fonte: As autoras.

A partir desse enunciado, pode-se explorar com os estudantes as ideias-base dependência – o valor do desconto depende do custo da calça; variável dependente – desconto, e variável independente – preço da calça. As demais ideias-base não são mobilizadas nesse enunciado.

Produto de medidas – área e composição de medidas

No livro analisado, foram identificados quatro problemas mistos pertencentes à classe produto de medidas – área e composição de medidas. Apresentamos um exemplar pertencente a essa classe (Quadro 3).

Quadro 3. Exemplo de problema misto do tipo produto de medidas – área e composição de medidas



Observe a planta de um apartamento:

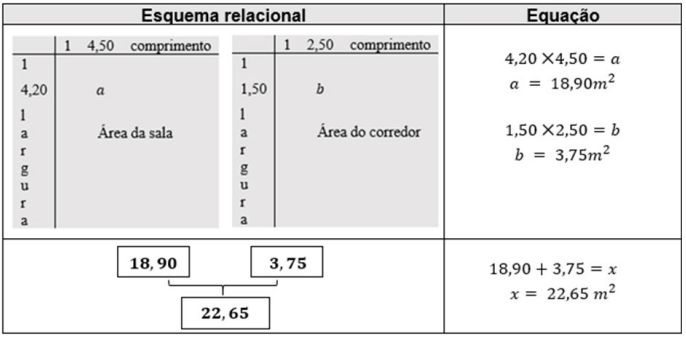
Agora, responda:
Quantos metros quadrados de carpete são necessários ao todo para cobrir o piso da sala e do corredor?

Fonte: Giovanni Jr. e Castrucci (2018, p. 253).

Para resolver esse problema misto, é necessário encontrar a área de cada parte da casa; para isso, utiliza-se uma relação de produto de medidas, em que se multiplica a largura pelo comprimento de cada parte da casa. Na sequência, para encontrar o total de metros quadrados de carpete que são necessários para cobrir o

piso, é preciso somar a área de cada parte, por meio da relação de composição de medidas. Para cobrir o piso da sala e do corredor, são necessários 22,65 m² de carpete, conforme esquema relacional explicitado na Figura 9.

Figura 9. Esquema relacional do tipo produto de medidas – área e composição de medidas



Fonte: As autoras.

A partir desse enunciado, pode-se explorar com os estudantes a ideia-base dependência – a área depende da largura e do comprimento. As ideias-base variável, regularidade e generalização não podem ser manifestadas a partir da classe de produto de medidas, pois não há uma relação funcional estabelecida entre largura e comprimento, como explicitado também por Zanella e Rezende (2022).

Considerações finais

Neste estudo, identificamos 40 problemas mistos, que foram classificados em 11 subclasses, em um livro didático do 6º ano. Os problemas mistos são considerados

problemas complexos (VERGNAUD, 2009a), principalmente por envolverem, ao mesmo tempo, relações dos campos conceituais aditivo e multiplicativo, e também por estarem associados a outras ideias e conceitos matemáticos, a exemplo do conceito de função (MIRANDA, 2019).

A partir das análises de todas as situações multiplicativas do livro didático, identificamos a presença de quarenta problemas mistos pertencentes a onze classes distintas, a saber: proporção simples – multiplicação um para muitos e composição de medidas (7); proporção simples – cota e composição de medidas (2); proporção simples – partição e composição de medidas (3); proporção simples – multiplicação um para muitos e transformação de medidas (4); proporção simples – cota e transformação de medidas (1); proporção simples – partição e transformação de medidas (2); proporção simples – multiplicação um para muitos, transformação e composição de medidas (1); comparação multiplicativa e transformação de medidas (3); comparação multiplicativa e composição de medidas (11); produto de medidas – área e composição de medidas (4); produto de medidas – área, composição e transformação de medidas (2).

As subclasses que apresentaram maior número de situações são de proporção simples multiplicação um para muitos e composição de medidas (7 situações), em que as ideias-base dependência, variável e regularidade podem ser mobilizadas a partir dos enunciados elaborados pelos autores do livro didático, e comparação

multiplicativa e composição de medidas (11 situações), nas quais apenas a ideia-base dependência pode ser mobilizada a partir do enunciado.

Inferimos que a ideia-base generalização não é favorecida nesses enunciados, uma vez que os autores do livro didático não têm essa intenção. Mas, com adaptações, essas classes de situações podem manifestar também essa ideia-base, com exceção da classe de produto de medidas, que não apresenta uma relação funcional entre as grandezas envolvidas.

Defendemos a importância da proposição de problemas mistos desde os anos iniciais de escolarização, e argumentamos a favor da classificação desses problemas, para que os professores possam ter ciência de sua diversidade, não apenas no que se refere ao contexto, mas em relação às suas estruturas, uma vez que cada subclasse possui estrutura própria que possibilita diferentes raciocínios, esquemas e representações a serem desenvolvidos pelos alunos ao longo do processo escolar, em decorrência das situações vivenciadas.

Referências

BERNARDINO, F. *Função afim e problemas mistos*: uma investigação com estudantes do ensino médio. 2022. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetike*, Campinas, v. 25, n. 3, p. 364-387, set./dez. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. *PNLD 2020*: Guia digital. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, 2020.

CALADO, T. V. *Invariantes operatórios relacionados à generalização*: uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 2020. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais de Matemática*. 2. ed.. Lisboa: Gradiva, 1998.

DEZILIO, K. *Ideias de função e problemas mistos: um estudo com alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2022. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, 2022.

FREITAS, R. L.; ALMOULOUD, S. A. Análise de livro didáctico e a construção de um processo de ensino por meio de tarefas e técnicas: contribuições da TAD. *In*: SALAZAR, J. F.; GUERRA, F. U. (Org.). *Investigaciones en educación matemática*. PUCP, Lima, Fondo Editorial, 2016, p. 217-237.

GIOVANNI JR., J. R.; CASTRUCCI, B. *A conquista da Matemática*: 6º ano – ensino fundamental anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

GITIRANA, V; MAGINA, C.; SPINILLO, A; CAMPOS, T. M. M. *Repensando multiplicação e adição*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

MERLI, R. F. *Do pensamento funcional ao Campo Conceitual de Função*: o desenvolvimento de um conceito. 2022. 216 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2022.

MIRANDA, C. A. *Situações-problemas que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais. 2019. 158f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2019.

PAVAN, L. R. *A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas*. 2010. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa De Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2010.

RODRIGUES, C. L. H. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2021. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

RODRIGUES, C. L. H.; REZENDE, V. Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v. 17, n. 39, p. 271-287, dez. 2021.

SILVA, L. D. C. P. *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função.* 2021. 555 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021.

TINOCO, L. A. A. *Construindo o conceito de função*. 5. ed.. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? *In: Infancia y Aprendizaje*, Londres, v. 2, n. 36, p. 131-145, 2013.

VERGNAUD, G. *A Criança, a matemática e a Realidade.* Trad. Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Editora UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. The Theory of Conceptual Fields. *In*: *Human Development*, v. 52, n. 2, Karger, p. 83-94, 2009b. Disponível em: http://www.karger.com/hde. Acesso em: 10 de mai. 2024.

VERGNAUD, G. *A Teoria dos Campos Conceituais*. *In*: BRUN, Jean (Org.). *Didáctica das Matemáticas*. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos Conceituais. *In*: *1º* SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1993, Rio de Janeiro. *Anais* [...]. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-26.

ZANELLA, M. S.; REZENDE, V. Ideias-base de função a partir de situações multiplicativas em livros didáticos dos anos iniciais. *Revista Paranaense De Educação Matemática*, Campo Mourão, v. 11, n. 25, p. 152–177, 2022.

10. Conversões entre registros gráfico e algébrico da função afim: duas perspectivas em diálogo

José Robson de Araújo
Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva
Rosinalda Aurora de Melo Teles

Introdução

Este capítulo apresenta reflexões a partir de duas pesquisas de mestrado em Educação Matemática e Tecnológica desenvolvidas pelos dois primeiros autores, Araújo (2021) e Silva (2022), ambas orientadas pela terceira autora. Fundamentadas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, tratam do processo de conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim em duas perspectivas: sua abordagem em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e as estratégias mobilizadas por estudantes do ensino médio.

O interesse pela compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem do objeto de conhecimento função afim tem gerado várias pesquisas no campo da

educação matemática, uma vez que o conceito de função é relevante para o ensino de matemática, principalmente por ter como cerne a ideia de relação e pelo fato de que "mesmo noções mais elementares, como números, em significado de contagem, têm por base a ideia de relação funcional" (GITIRANA, 2009, p. 214).

Pesquisadores como Delgado (2010) e Lago (2018) investigaram aspectos relacionados às dificuldades dos estudantes na compreensão do objeto de conhecimento função afim, especialmente as relacionadas à mobilização e articulação de suas representações, tais como: língua natural, expressão algébrica, tabela de valores e representação gráfica.

Segundo Silva (2020), a linguagem matemática abstrata pode ser um fator que contribui para as dificuldades dos alunos. De acordo com a autora, se a variabilidade dessas representações simbólicas não for trabalhada com os estudantes de modo consistente, especialmente no intuito de auxiliar a compreensão da linguagem matemática abstrata, possivelmente haverá lacunas na aprendizagem do conceito de função. Portanto, ela defende a importância de considerar as características presentes nas diversas representações (gráfica, algébrica, tabular e língua natural) e pensar nas possibilidades de construção do conceito de função antes de sua formalização.

Nessa perspectiva, o currículo de Pernambuco expressa preocupação com a sistematização precoce desse objeto de conhecimento, ou seja:

> O estabelecimento de relações entre grandezas deve ser tomado como ponto de partida para o estudo da noção de função. O aprofundamento dessa noção deve ter sua origem em atividades ligadas a situações do cotidiano do estudante, evitando-se a sistematização precoce. Situações que envolvam a proporcionalidade também podem ser aprofundadas nessa fase. Em particular, a articulação de problemas envolvendo proporcionalidade com o estudo da função linear constitui um tópico relevante (PERNAMBUCO, 2018, p. 382).

Esse documento propõe, para os anos finais do ensino fundamental, que o conteúdo deve ser abordado a partir de relações entre grandezas e situações do cotidiano, bem como destaca o papel central das representações no ensino de matemática:

> A língua natural, a linguagem simbólica, os desenhos, os gráficos, as tabelas, os diagramas, os ícones, entre outros, desempenham papel central, não só para representar conceitos, relações e procedimentos, como também para a própria formação deles (PERNAMBUCO, 2018, p. 352).

Em âmbito nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de 2017, apresenta o conhecimento matemático como necessário a todos os estudantes da educação básica, devido a sua grande aplicação na sociedade contemporânea, "[...] pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (BRASIL, 2017, p. 265).

> A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do

> mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2017, p. 265).

No tocante às dificuldades na compreensão do conceito de função afim, Duval (2011a) afirma que "[...] a razão profunda dessas dificuldades não se deve procurar nos conceitos matemáticos ligados à função afim, mas na falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (DUVAL, 2011a, p. 97).

A prática profissional dos mestrandos, atuando como professores de matemática e formadores de professores na Rede Estadual de Ensino de Pernambuco, motivou o estabelecimento do diálogo, neste texto, entre os dois estudos realizados por eles. As dificuldades de estudantes de ensino médio relacionadas à aprendizagem de função afim identificadas em avaliações externas teriam alguma relação com a abordagem desse objeto de conhecimento em livros didáticos? Evidentemente, outros questionamentos poderiam ser formulados, por exemplo, acerca das práticas de ensino realizadas sobre o assunto. Porém, apesar de não desconsiderarmos outras questões, o objetivo deste capítulo é refletir sobre a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim, realizadas por estudantes do ensino médio ao responder a um teste diagnóstico (ARAÚJO, 2021), e também sobre fenômenos de congruência e não congruência semântica

nas conversões propostas nos livros didáticos de matemática para o 9º ano (SILVA, 2022). No tópico a seguir, são discutidos elementos da teoria que fundamentou os dois estudos.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS): alguns aspectos

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval, estabelece que o acesso aos objetos matemáticos, abstratos por natureza, se dá apenas por meio de registros de representação semiótica (DUVAL, 2003). Desse modo, a aprendizagem está diretamente relacionada com a capacidade que o estudante tem de transitar entre os diferentes registros de representação.

Para a TRRS, existem dois tipos de transformações semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos necessitam de apenas um registro de representação, ou seja, as transformações se dão apenas em um registro. Por exemplo, dada a lei da função afim $f(x) = 2x + 1$, calcular o valor de $f(10)$.

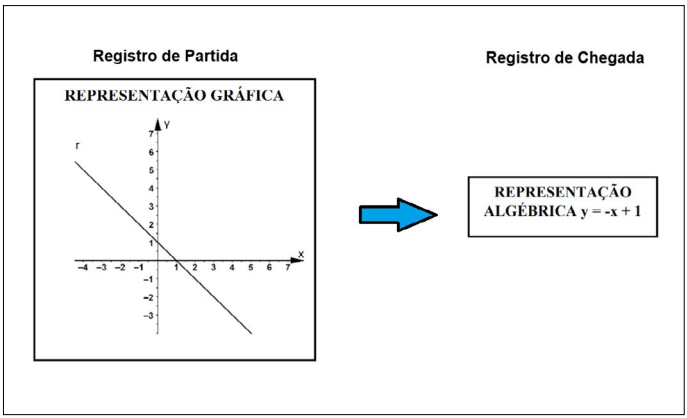
$$f(10) = 2.10 + 1$$
$$f(10) = 20 + 1 = 21$$

Já as transformações, em que ocorre a produção de uma representação semiótica distinta daquela de partida, são denominadas por Duval (2011b) de conversões, ou seja, o registro de chegada é diferente do registro de partida. Um exemplo seria o esboço do gráfico (registro

gráfico) de uma função afim a partir da lei da função (registro algébrico).

Nas conversões, mudam-se os sistemas de representação, mas conserva-se a referência aos mesmos objetos (DUVAL, 2011a). Este capítulo terá como foco o processo de conversão, em particular, as conversões que envolvem os registros gráfico e algébrico. Na Figura 1, a seguir, ilustramos uma conversão.

Figura 1. Conversão do registro gráfico para o registro algébrico



Fonte: Os autores.

No caso da conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim, como acima exemplificado, Duval (2011b) afirma que "[...] a articulação entre o registro das representações gráficas e das equações parece não se estabelecer mesmo depois que os alunos tenham tido aulas sobre funções afins" (DUVAL, 2011b, p. 97).

Ainda em relação às conversões, Duval (2003) identifica o surgimento de dois fenômenos: as variações de congruência e de não congruência semântica e a heterogeneidade dos dois sentidos da conversão.

O primeiro está relacionado ao custo cognitivo para a realização de uma conversão, enquanto o segundo expõe que existe diferença no custo cognitivo quando observamos o sentido da conversão, conforme apresentado abaixo:

a) As variações de congruência e não congruência semântica

Realizar uma conversão pode ser uma tarefa simples ou complexa. Duval (2009) argumenta que a correspondência das unidades de significado presentes nos dois registros pode ser clara ou não. Desse modo, existe congruência semântica quando podemos estabelecer uma correspondência direta entre elementos de significado dos registros envolvidos na conversão, por exemplo, localizar pontos no plano cartesiano a partir de uma tabela é uma conversão do registro tabular para o registro gráfico, e se dá de maneira direta e clara; assim, dizemos que existe congruência semântica nessa conversão. Para Silva (2022), a conversão:

> [...] pode ser não congruente, por exemplo, partindo do registro gráfico de uma função para o registro algébrico (lei da função) não encontramos de forma imediata uma correspondência semântica entre unidades de significado dos dois registros, caracterizando-se como um caso de conversão não congruente (SILVA, 2022, p. 26).

Para a análise de congruência ou não congruência semântica, Duval (2009) estabeleceu os seguintes critérios, conforme mostra o Quadro 1, a seguir.

Quadro 1. Critérios de não congruência semântica

I. Correspondência semântica dos elementos significantes	Para cada unidade de significado simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar.
II. Univocidade semântica terminal	Estabelece que cada elemento significante elementar da representação de partida corresponde a um mesmo significado na representação de chegada.
III. Ordem dentro da organização das unidades compondo cada uma das duas representações	Refere-se a ordens em que estas unidades se apresentam em cada uma das representações.

Fonte: Adaptado de Duval (2009, p. 68-69).

Uma conversão é congruente quando satisfaz os três critérios. Se um ou mais critérios não são satisfeitos, temos um caso de não congruência semântica.

b) A heterogeneidade dos dois sentidos da conversão

O fenômeno da heterogeneidade dos dois sentidos se refere ao custo cognitivo da conversão, que é diferente a depender do sentido.

A conversão do registro algébrico (lei da função) para o registro gráfico (reta no plano) pode ser feita sem maiores dificuldades a partir da abordagem ponto a ponto; no entanto, o sentido contrário da conversão gera dificuldades, uma vez que precisaríamos recorrer

a procedimentos que a abordagem ponto a ponto não contempla. Nesse sentido, a heterogeneidade no sentido da conversão está relacionada com o fenômeno de congruência semântica.

Duval (2003) alerta que, quando um sentido é privilegiado, tem-se a ideia de que o treinamento nesse sentido desenvolve automaticamente o sentido oposto, o que de fato não é verdade. Por esse motivo, o autor propõe a abordagem de interpretação global de propriedades figurais para as conversões que envolvem os registros gráfico e algébrico, por ela considerar as variáveis visuais próprias do registro gráfico e as unidades simbólicas significativas presentes no registro algébrico.

Conversão entre os registros gráfico e algébrico

Segundo Duval (2011a), as conversões que envolvem os registros gráfico e algébrico podem ser realizadas a partir de três abordagens:

i) Abordagem ponto a ponto – consiste em atribuir alguns valores para x e encontrar os valores de f(x) correspondentes, e com os pontos encontrados, traçar o gráfico no plano cartesiano. Essa abordagem favorece o sentido de conversão registro *algébrico → registro gráfico*.
ii) Abordagem de extensão do traçado – difere da abordagem ponto a ponto, por considerar uma quantidade infinita de pontos e corresponde a atividades de interpolação e extrapolação.

iii) Abordagem global de propriedades figurais – estabelece correspondência semântica entre as unidades simbólicas significativas (lei da função) e as variáveis visuais (gráfico).

Duval (2011a) faz duras críticas à abordagem ponto a ponto, afirmando, inclusive, que ela contribui para as dificuldades dos estudantes, uma vez que, segundo ele, seu procedimento esvazia o sentido da conversão e não leva em conta a correlação entre as unidades simbólicas e as variáveis visuais. Duval argumenta que essa abordagem não possibilita a conversão do registro gráfico para o registro algébrico:

> Quando se trata de partir da representação gráfica para encontrar, por exemplo, a equação correspondente, ou para utilizar o conceito de inclinação ou de direção, é esta abordagem de interpretação global que se torna necessária. A razão disto se deve ao fato de que o recurso à abordagem ponto a ponto é totalmente inoperante, uma vez que tira a atenção das variáveis visuais. A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é, em geral, deixada de lado no ensino, uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica (DUVAL, 2011a, p. 99).

As regras de correspondência semiótica entre tais registros são tratadas na TRRS através da abordagem de interpretação global de propriedades figurais, visto que, de acordo com essa teoria, as modificações realizadas no registro de representação gráfico implicam em modificações no registro de representação algébrico

correspondente, determinando o que Duval (2011b) classifica como "[...] variável visual pertinente para a interpretação gráfica" (DUVAL, 2011b, p. 99). Portanto, segundo o autor, se faz necessária a observação das modificações conjuntas dos dois registros.

Para que ocorra a observação conjunta desses registros, deve-se proceder, segundo a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, à articulação entre as variáveis visuais do registro gráfico e a unidades simbólicas do registro algébrico, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2. Valores e variáveis visuais para y = ax + b no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011b, p. 101).

Sendo assim, "[...] a interpretação das representações gráficas cartesianas depende de uma identificação precisa de todos os valores das variáveis visuais pertinentes e do reconhecimento qualitativo das unidades da expressão simbólica correspondente" (DUVAL, 2011b, p. 111).

Portanto, faz-se necessário adotar uma abordagem que articule o significado de um elemento em mais de um registro de representação, a exemplo da função afim, cuja conversão do registro de representação gráfico para o algébrico requer que o estudante compreenda,

entre outras relações, a existente entre o módulo do coeficiente "a" da lei de formação (registro algébrico) $f(x) = ax + b$ e a inclinação da reta (registro gráfico).

Na sequência, discutiremos alguns recortes dos resultados das pesquisas de Araújo (2021) e Silva (2022), fundamentadas na TRRS, com destaque para a interpretação global de propriedades figurais. Silva (2022) analisou atividades de tratamento e conversão; em particular, investigou as abordagens adotadas na conversão entre os registros algébrico e gráfico, em livros didáticos de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental. Araújo (2021) analisou a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim realizada por estudantes do Ensino Médio, a partir da interpretação global de propriedades figurais.

Resultados das pesquisas: algumas reflexões

Como já exposto anteriormente, a motivação principal deste capítulo é refletir sobre possíveis relações entre a conversão que envolvem os registros de representação gráfico e algébrico da função afim, realizadas por estudantes do ensino médio ao responderem a um teste diagnóstico (ARAÚJO, 2021), e acerca de fenômenos de congruência e não congruência semântica nas conversões propostas nos livros didáticos de matemática para o 9º ano do ensino fundamental (SILVA, 2022). *Seria uma relação de causa e efeito?* Deixamos esse questionamento para o leitor conjecturar a partir dos resultados que apontamos a seguir.

Análise de livros didáticos: conversões e congruência semântica

Nesta seção, apresentamos um recorte dos resultados da pesquisa de Silva (2022), em nível de mestrado, desenvolvida no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) da Universidade Federal de Pernambuco. A pesquisa, intitulada "Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental" objetivou analisar, à luz da Teoria de Registros de Representação Semióticas, a abordagem da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental. Esse recorte tem foco em um dos objetivos específicos da pesquisa, que visava a "analisar atividades de tratamento e conversão, em particular, investigar as abordagens adotadas na conversão entre os registros algébrico e gráfico, em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental".

A pesquisa de Silva (2022) analisou cinco livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental. Os livros didáticos analisados na pesquisa foram os cinco mais solicitados pelas escolas públicas brasileiras, de acordo com dados do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD, 2019), obtidos no portal do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). O Quadro 2 indica as obras selecionadas para este estudo e suas respectivas codificações.

Na Tabela 1 está a distribuição, em percentual, das conversões e seus respectivos sentidos.

Quadro 2. Livros didáticos selecionados e sua codificação

Nome do livro didático	Código
A conquista da Matemática, 9º ano, Ensino Fundamental, Anos Finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedito Castrucci – 4ª edição – São Paulo, FTD, 2018.	LD-1
Teláris Matemática, 9º ano, Ensino Fundamental, Anos Finais / Luiz Roberto Dante – 3ª edição – São Paulo, Ática, 2018.	LD-2
Matemática – Bianchini, 9º ano, Ensino Fundamental, Anos Finais / Edwaldo Bianchini – 9ª edição – São Paulo, Moderna, 2018.	LD-3
Araribá mais – Matemática, 9º ano, Ensino Fundamental, anos finais / Organizadora Editora Moderna, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, editores responsáveis Maria Garcia Gay, Willian Raphael Silva – 1ª edição – São Paulo, Moderna, 2018	LD-4
Matemática realidade & tecnologia, 9º ano, Ensino Fundamental, Anos Finais / Joamir Roberto de Souza – 1ª edição – São Paulo, FTD, 2018.	LD-5

Fonte: Silva (2022).

Tabela 1. Percentuais de atividades de conversão e seus respectivos sentidos

Registro de partida	Registro de chegada	LD-1	LD-2	LD-3	LD-4	LD-5
Algébrico	Língua natural	6,67%	41,46%	16,30%	10,42%	13,51%
Algébrico	Gráfico	50,00%	15,85%	23,91%	21,88%	13,51%
Algébrico	Tabular	3,33%	0,00%	0,00%	3,13%	0,00%
Língua natural	Gráfico	0,00%	3,66%	3,26%	7,29%	0,00%
Língua natural	Algébrico	23,33%	20,73%	16,30%	20,83%	13,51%
Língua natural	Tabular	0,00%	0,00%	1,09%	2,08%	2,70%
Gráfico	Língua natural	3,33%	8,54%	13,04%	16,67%	2,70%
Gráfico	Algébrico	10,00%	7,32%	25,00%	13,54%	40,54%
Gráfico	Tabular	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Tabular	Algébrico	3,33%	1,22%	1,09%	4,17%	10,81%
Tabular	Língua natural	0,00%	1,22%	0,00%	0,00%	2,70%
Tabular	Gráfico	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

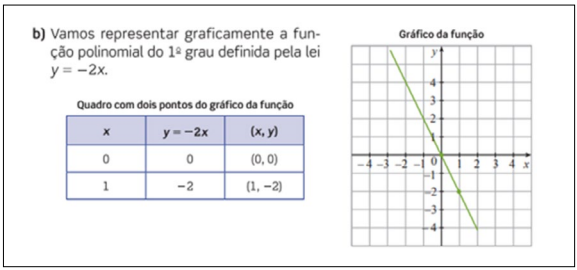
Fonte: Silva (2022).

Os dados da Tabela 1 apontam que as conversões mais frequentes envolvem os registros algébrico, gráfico e língua natural, com destaque para os sentidos algébrico → gráfico; língua natural → algébrico; gráfico → algébrico; e algébrico → língua natural.

Para a TRRS, é importante desenvolver os dois sentidos nas conversões. Segundo Duval, "geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido" (2003, p. 20). Nessa perspectiva, estão mais alinhados com o que a TRRS defende os livros didáticos LD-3 e LD-4, que contemplam de modo mais equilibrado as conversões envolvendo os diversos registros e os dois sentidos.

Em sua pesquisa, Silva (2022) constatou que a abordagem adotada na conversão do registro algébrico para o registro gráfico em todos os livros didáticos analisados era a abordagem ponto a ponto. A Figura 3 exemplifica essa abordagem.

Figura 3. Conversão do registro algébrico para o registro gráfico utilizando a abordagem ponto a ponto



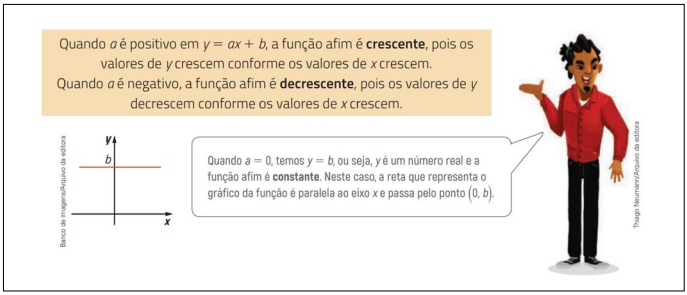
Fonte: Bianchini (2018, p. 231).

Silva (2022) constatou que a abordagem ponto a ponto está presente na parte expositiva de todos os livros didáticos, mas foi possível identificar alguns elementos da abordagem global de propriedades figurais nos livros LD-2, LD-3 e LD-4.

> O LD-2 apresenta a abordagem ponto a ponto assim como os demais, entretanto é possível perceber elementos da abordagem global de propriedades figurais quando, por exemplo, o livro didático explicita a relação entre crescimento ou decrescimento da função com o sinal do coeficiente "a" (SILVA, 2022, p. 74).

Esses elementos da abordagem global de propriedades figurais podem ser observados na Figura 4.

Figura 4. Correlação entre coeficiente "a" e crescimento ou decrescimento da função



Fonte: Dante (2018, p. 133).

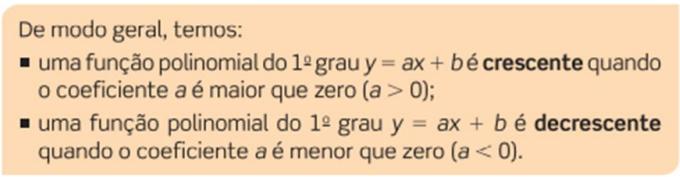
A Figura 4 contém elementos da abordagem global de propriedades figurais, uma vez que estabelece uma correspondência semântica entre o coeficiente "a" e o comportamento da função crescente/decrescente. A

imagem trata do caso particular da função constante, quando a =0 e "b" é o ponto onde a reta intercepta o eixo y; entretanto, Silva (2022, p. 75) destaca que "[...] o livro não explora de maneira geral, apenas no caso pontual da função constante, a relação entre o coeficiente 'b' e o ponto em que a reta intercepta o eixo y".

De modo semelhante, o LD-3 também apresenta elementos da abordagem global de propriedades figurais, em um quadro-resumo ilustrado na Figura 5.

De modo análogo ao exemplo anterior, o texto da Figura 5 contribui para estabelecer uma correspondência semântica, ou seja, correspondência de significado entre o crescimento/decrescimento da função ao "sinal" do coeficiente "a". Entretanto, segundo Silva, "[...] não é abordado, até esse momento, todas as relações entre unidades simbólicas e variáveis visuais" (2022, p. 75).

Figura 5. Crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 1º grau


De modo geral, temos:

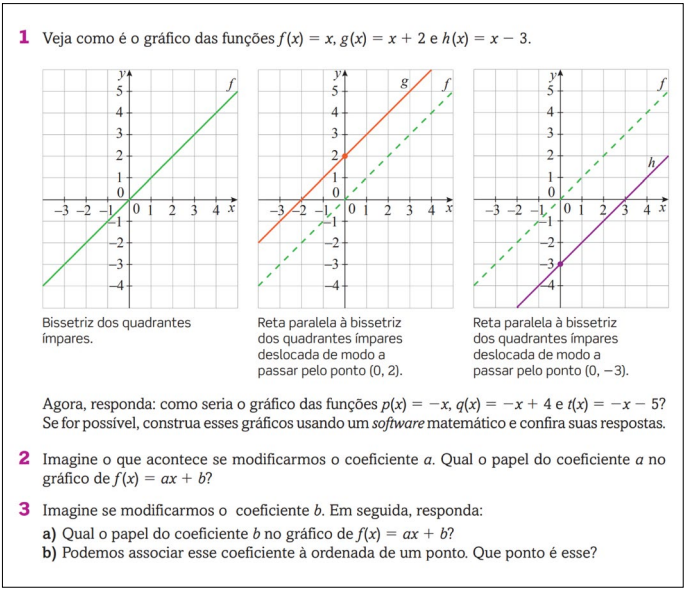
- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente a é maior que zero ($a > 0$);
- uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$ é **decrescente** quando o coeficiente a é menor que zero ($a < 0$).

Fonte: Bianchini (2018, p. 231).

Nesse sentido, observando as atividades encontradas nos livros didáticos, Silva (2022) destaca que algumas atividades que utilizam *softwares* de geometria dinâmica podem contribuir para estabelecer a correspondência

semântica entre os elementos do registro algébrico e do registro gráfico. Na Figura 6, temos uma sequência de atividades com uso de *software*.

Figura 6. Atividade com o uso de *software*



1 Veja como é o gráfico das funções $f(x) = x$, $g(x) = x + 2$ e $h(x) = x - 3$.

Bissetriz dos quadrantes ímpares.

Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, 2).

Reta paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares deslocada de modo a passar pelo ponto (0, −3).

Agora, responda: como seria o gráfico das funções $p(x) = -x$, $q(x) = -x + 4$ e $t(x) = -x - 5$? Se for possível, construa esses gráficos usando um *software* matemático e confira suas respostas.

2 Imagine o que acontece se modificarmos o coeficiente a. Qual o papel do coeficiente a no gráfico de $f(x) = ax + b$?

3 Imagine se modificarmos o coeficiente b. Em seguida, responda:

a) Qual o papel do coeficiente b no gráfico de $f(x) = ax + b$?

b) Podemos associar esse coeficiente à ordenada de um ponto. Que ponto é esse?

Fonte: Bianchini (2018, p. 235).

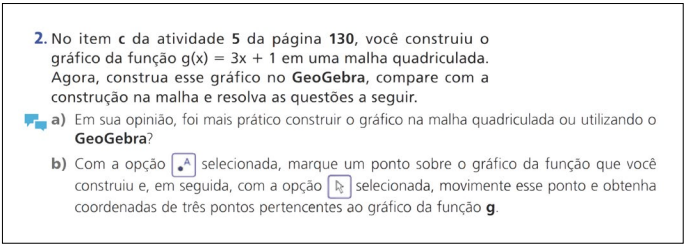
Trata-se de uma sequência que contribui para a interpretação global defendida por Duval (2011a), uma vez que explora a correspondência semântica entre as unidades simbólicas (registro algébrico) e as variáveis visuais (registro gráfico); em outras palavras, atribui significado ao estabelecer relações entre o coeficiente "a" e a inclinação da reta, e o coeficiente "b" e a posição da reta no gráfico. Silva (2022) considera que:

> [...] esta sequência de atividades pode auxiliar o estudante a correlacionar as unidades simbólicas e as variáveis visuais, como está estabelecido na abordagem global de propriedades figurais. O uso de softwares é mais uma possibilidade para o trabalho com funções e deve ser utilizado com propósitos claros, tais como nesta sequência de atividades (SILVA, 2022, p. 77).

Outra atividade analisada na pesquisa de Silva (2022) sugere o uso do *software* Geogebra. A atividade da Figura 7 propõe a conversão entre o registro algébrico → registro gráfico com o uso do *software* Geogebra.

A proposta da atividade da Figura 7 não explora as possibilidades do *software*, limitando-se a valorizar o aspecto de praticidade.

Figura 7. Atividade com uso de *software*



2. No item **c** da atividade **5** da página **130**, você construiu o gráfico da função g(x) = 3x + 1 em uma malha quadriculada. Agora, construa esse gráfico no **GeoGebra**, compare com a construção na malha e resolva as questões a seguir.

a) Em sua opinião, foi mais prático construir o gráfico na malha quadriculada ou utilizando o **GeoGebra**?

b) Com a opção selecionada, marque um ponto sobre o gráfico da função que você construiu e, em seguida, com a opção selecionada, movimente esse ponto e obtenha coordenadas de três pontos pertencentes ao gráfico da função **g**.

Fonte: Souza (2018, p. 135).

A partir da análise dessas atividades, Silva (2022) considera que as atividades propostas com uso de *softwares* podem ser aliadas na construção de significado para os estudantes, uma vez que estimulam a correlação de elementos dos dois registros; o autor, todavia, faz

uma ressalva: "[...] a atividade da Figura 7 é um exemplo de tarefa que não correlaciona as variáveis visuais com as unidades simbólicas e se detém apenas no aspecto prático do uso de softwares" (SILVA, 2022, p. 82).

Em relação ao fenômeno de congruência semântica, Silva (2022) conclui que predominam casos de congruência semântica nas atividades de conversão analisadas. Em relação às conversões registro algébrico → registro gráfico e registro gráfico → registro algébrico, a primeira conversão é um caso de congruência semântica utilizando a abordagem ponto a ponto, enquanto a segunda conversão (no sentido oposto) não é congruente.

De acordo com os critérios estabelecidos por Duval (2009), no caso das funções afins, a conversão registro gráfico → registro algébrico não satisfaz o segundo critério (univocidade semântica terminal), uma vez que o coeficiente "a" se relaciona com duas variáveis visuais (sentido da inclinação e ângulo formado com os eixos). Silva (2022) também constata que conversões envolvendo os mesmos registros podem ter custo cognitivo diferente, evidenciando que as conversões podem ser diretas e claras ou, a depender do par de registros, do sentido e dos tratamentos necessários, ter ou não congruência semântica.

Processo de conversão por estudantes do ensino médio

Resultados da pesquisa desenvolvida por Araújo (2021) com 45 estudantes de duas escolas públicas estaduais, localizadas na cidade de Garanhuns, no estado de Per-

nambuco, sob o título "Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim: análise a partir da interpretação global de propriedades figurais", apontam, a partir da elaboração e aplicação de um teste e da realização de entrevistas semiestruturadas, dificuldades dos estudantes da 3ª série do ensino médio no tocante a mobilizar e transitar entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim.

Partindo do pressuposto de que a conversão entre registros de representação diferentes de um objeto de conhecimento da matemática se trata da transformação que ocorre entre tais registros, conservando-se a referência ao objeto representado, Araújo (2021) apresentou aos estudantes participantes da pesquisa quatro questões envolvendo o processo de conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico. Aqui, apresentamos os resultados obtidos em duas dessas questões: uma solicitando que se realizasse a conversão da representação da função afim dada em seu registro gráfico para o registro algébrico, e outra solicitando a conversão no sentido inverso.

Para a análise dos resultados de sua pesquisa, Araújo (2021) utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), em especial a interpretação global das propriedades figurais, que se apresenta como o procedimento fundamental no processo de conversão da representação gráfica para a algébrica.

Na compreensão integrativa, abordada por Duval (2012), o estudante objetiva o conhecimento quando

consegue estabelecer a correspondência entre dois registros de representação semiótica, no caso, entre os registros gráfico e algébrico da função afim, identificando as unidades significantes simbólicas próprias de uma expressão algébrica e as unidades significantes cartesianas (variáveis visuais), estabelecendo as devidas correspondências entre as mesmas.

Na referida pesquisa foram priorizadas as três variáveis particulares definidas por Duval (2011a) para o traçado da reta (registro gráfico) no plano cartesiano: o sentido da inclinação do traçado, os ângulos formados entre o traçado e os eixos cartesianos, e a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical. Na Figura 8 são apresentadas essas variáveis e os seus respectivos valores.

Figura 8. Valores e variáveis visuais para reta no plano cartesiano

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
- o sentido da inclinação do traçado:	- a linha **sobe** da esquerda para a direita; - a linha **desce** da esquerda para a direita. OBSERVAÇÃO: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos.
- os ângulos do traçado com os eixos:	Há uma **repartição simétrica** do quadrante **percorrido.** - o ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical; OBSERVAÇÃO: no caso em que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto de intersecção da reta com o eixo horizontal.
- a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical:	- o traçado passa **abaixo** da origem; - o traçado passa **acima** da origem; - o traçado passa **pela origem**.

Fonte: Duval (2011b, p. 101).

Para que se tenham evidências da utilização, pelos estudantes, da interpretação global envolvendo a con-

versão da representação da função afim de seu registro gráfico para o algébrico, o estudante deve estar atento à correspondência entre as variáveis visuais do registro gráfico, com seus respectivos valores e as unidades simbólicas correspondentes no registro algébrico, de acordo com a TRRS, para $y = ax + b$, conforme apresenta a Figura 9, a seguir.

Figura 9. Correspondência entre variáveis e unidades simbólicas

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011b, p. 101).

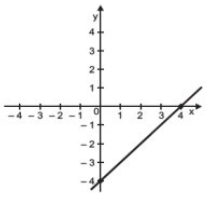
A realização de uma correspondência sistemática entre os valores das variáveis visuais pertinentes do registro gráfico e as unidades significativas, ou simbólicas, do registro algébrico, através da abordagem de interpretação global, concorrem para uma leitura e interpretação correta das representações gráficas, isso porque, de acordo com esta abordagem, não nos deparamos com a associação "um ponto – um par de números", mas com a associação "variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica" (DUVAL, 2011a, p. 99).

São apresentados a seguir os resultados obtidos nas questões três e quatro do instrumento de pesquisa. Os estudantes receberam as questões e lhes foi solicitada a

conversão do registro de representação gráfica da função afim para o registro de representação algébrica, e vice-versa, respectivamente.

Seguindo a ordem das questões, foram obtidos os resultados apresentados a seguir, na Figura 10, para a questão três, na qual foi fornecido o registro gráfico de uma função afim e solicitado que o estudante determinasse seu registro algébrico.

Figura 10. Resultados diagnosticados – Questão 3



Conversões realizadas				
y= -4x + 4	y= 4x – 4 y= -4 + 4x	y= 4x + 4	y= x – 4	y= x + 4
Número de estudantes: 3	**Número de estudantes: 16**	**Número de estudantes: 1**	**Número de estudantes: 4**	**Número de estudantes: 2**
Conversões realizadas				
+4x=-4	y=-4x+2	y=-x	f(x)=2x-2	y= 2x-4
Número de estudantes: 1	**Número de estudantes: 1**	**Número de estudantes: 3**	**Número de estudantes: 1**	**Número de estudantes: 2**

Fonte: Araújo (2021).

As análises do número de conversões apresentadas pelos estudantes estão contidas na Figura 9. Foi constatada uma diversidade de registros de representação

algébricos atribuídos ao registro de representação gráfico constante na questão, o que desvela indícios de dificuldades dos estudantes em transitar nesse sentido de conversão.

Esses resultados apontam que a maioria dos estudantes que responderam à questão não demonstraram conhecimentos referentes à abordagem de interpretação global ao realizarem a conversão solicitada, o que indica uma possível falta de conhecimento ou uma aplicação errônea dela.

Os dezesseis estudantes que associaram o registro de representação algébrico $y = 4x - 4$ ao registro gráfico apresentado associaram a abscissa do ponto de intersecção do traçado do registro gráfico com o eixo horizontal à taxa de variação da função afim, demonstrando não interpretarem que esse valor corresponde ao zero da função. Deram, assim, indícios da realização de uma associação da referida abscissa com o valor que multiplica o "x" na lei de formação da função, ou seja, a taxa de variação.

No que se refere ao ponto de intersecção do traçado do registro gráfico sobre o eixo das ordenadas, percebemos que os estudantes associaram sua ordenada, de forma correta, ao coeficiente linear no registro algébrico. Os estudantes não deixaram anotações de como procederam nessa situação, por isso conjecturamos que eles tenham procedido de forma intuitiva ao realizarem tal associação.

Apenas quatro estudantes obtiveram êxito no processo de conversão solicitado, determinando o registro

algébrico correspondente $y = x - 4$ de forma exitosa. No entanto, eles não deixaram apontamentos em seus protocolos que permitissem uma análise mais apurada do raciocínio e da estratégia empregados neste processo; semelhantemente, no diálogo estabelecido durante a entrevista semiestruturada, esses estudantes não apresentaram justificativas plausíveis, levando em consideração a abordagem global de propriedades figurais, para suas respostas.

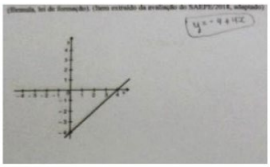
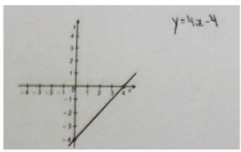
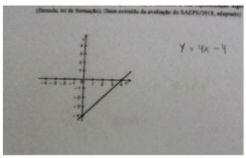
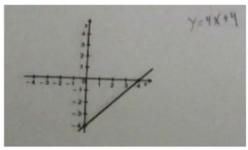
As considerações aqui realizadas levaram em conta as respostas exitosas e o número mais significativo das não exitosas. Destacamos que os resultados obtidos por Silva (2022) apontam a predominância das conversões do registro algébrico para o gráfico na abordagem dos livros didáticos analisados, enquanto os resultados de Araújo (2021) aqui discutidos apontam dificuldades dos estudantes para fazer a conversão no sentido oposto, ou seja, do registro gráfico para o algébrico. No Quadro 3, apresentamos algumas conversões exitosas realizadas pelos estudantes.

Na questão 4, a conversão solicitada aos estudantes trata do processo inverso do solicitado na questão 3, ou seja, os estudantes têm como registro de partida o registro algébrico da função afim e, de chegada, o registro gráfico.

O registro algébrico da função afim fornecido na questão foi $y = 2x + 4$, no qual temos como unidades simbólicas "coeficiente > 0", "coef. variável > 1" e "acres. de constante", de acordo com a abordagem interpretação

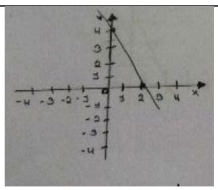
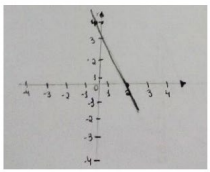
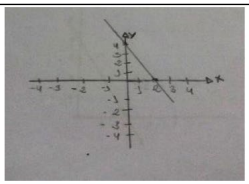
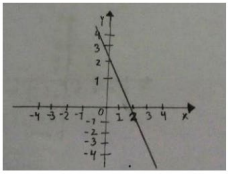
global. No Quadro 4, temos algumas conversões realizadas pelos estudantes.

Quadro 3. Exemplo das conversões exitosas

E6	E26
	
E8	**E33**
	

Fonte: Araújo (2021, p. 85).

Quadro 4. Conversões realizadas por alguns estudantes

E6	E26
	
E8	**E33**
	

Fonte: Araújo (2021, p. 86).

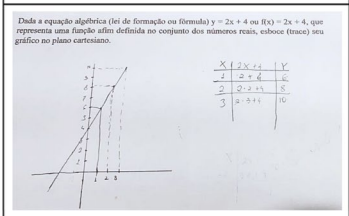
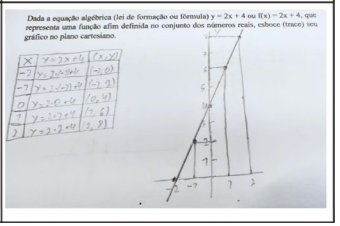
Observamos que os estudantes permaneceram com o mesmo procedimento realizado na questão 3, mesmo se tratando do sentido contrário da conversão. No entanto, as conversões não foram exitosas devido aos seguintes fatores: ao associarem a taxa de variação da função à abscissa do ponto de intersecção do traçado, os estudantes demonstraram desconhecimento do zero da função, que, no caso, seria igual a menos dois; não interpretaram de forma correta o valor da variável visual "sentido da inclinação" do traçado, que se apresenta como "descendente" na conversão realizada, sendo que o correto seria "ascendente", levando-se em consideração o caráter positivo do valor da unidade simbólica "coef. variável > 0".

Entre as conversões exitosas, foram identificadas as realizadas pelos estudantes E35 e E45, que utilizaram como estratégia de conversão a abordagem ponto a ponto com apoio do registro tabular e tratamentos na representação algébrica. No Quadro 5, temos apontamentos desses estudantes.

A prática profissional dos autores conduz a inferir que, de acordo com o Quadro 5, os estudantes passaram por um processo de ensino sobre o esboço de gráficos de funções, com base na seguinte sequência: construção de tabelas; atribuição de valores para as abscissas; tratamentos no registro algébrico; determinação das ordenadas; formação de pares ordenados; localização, no plano cartesiano, de pontos a partir das coordenadas calculadas; e constituição do traçado do registro gráfico,

caracterizando a utilização da abordagem ponto a ponto ao realizarem o processo de conversão.

Quadro 5. Conversões realizadas por E35 e E45

E35	E45
	

Fonte: Araújo (2021, p. 89).

Considerações finais

Neste texto, adotando elementos da TRRS, colocaram-se em diálogo os resultados obtidos em dois estudos distintos que tiveram como foco o processo de conversão entre os registros gráfico e algébrico da função afim. Uma delas, desenvolvida por Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva, parte de inquietações do próprio pesquisador, oriundas da sua prática como professor de matemática. As orientações curriculares que sugerem a abordagem de diferentes representações no ensino de função afim, a revisão de resultados de pesquisas anteriores, e também do papel desempenhado pelos livros didáticos para o ensino de matemática respaldaram suas inquietações.

Os dados do estudo realizado por Silva (2022) apontaram a predominância do registro algébrico na maior

parte dos tratamentos e conversões no conjunto de atividades analisadas. Silva (2022) analisa, além da diversidade dos registros, os fenômenos de congruência e não congruência semântica nas conversões propostas nos livros didáticos, e também se as atividades propostas contemplam, de maneira equilibrada, os dois sentidos nas conversões ou se privilegiam algum em específico.

Os dados coletados por Silva (2022) também apontam que, em virtude do predomínio do registro algébrico, as conversões que envolvem esse registro são as mais abordadas. Do mesmo modo, mostrou que, na conversão do registro gráfico para o registro algébrico, predominaram conversões congruentes. Por outro lado, na conversão do registro algébrico para o gráfico, as conversões eram não congruentes, reforçando, como já apontava Duval (2011a) na TRRS, que o custo cognitivo de uma conversão pode variar, mesmo que esta envolva os mesmos registros, sendo o sentido da conversão um fator importante a ser considerado.

A outra pesquisa, desenvolvida por José Robson de Araújo, defendida em 2021, teve como foco o processo de conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim, realizado por estudantes do ensino médio ao responderem a um teste diagnóstico e uma entrevista. Os dados apontam, como estratégias empregadas no processo de conversão entre esses registros, a abordagem ponto a ponto em conjunto com tratamentos na expressão algébrica e o apoio no registro tabular.

Ao analisar como os estudantes reconhecem a representação da função afim em seu registro algébrico, a partir do seu registro gráfico e vice-versa, foram diagnosticados falsos reconhecimentos das unidades significativas do registro de representação gráfica, ocasionando conversões não exitosas entre os registros gráfico e algébrico da função afim. Os resultados obtidos por Araújo (2021) permitem concluir e ratificar afirmações já preconizadas por Duval (2011): para uma leitura correta das representações gráficas, é necessária a utilização da interpretação global de propriedades figurais, permitindo que os estudantes discriminem as suas diferentes variáveis visuais e percebam as suas respectivas correspondências com as unidades simbólicas da representação algébrica. Araújo (2021), em suas análises, identificou conversões exitosas do registro algébrico para o gráfico através da abordagem ponto a ponto. No entanto, durante as entrevistas realizadas com os estudantes que obtiveram êxito na conversão, seus equívocos ao relacionarem as variáveis visuais e as unidades simbólicas puderam ser percebidos.

Ao colocarmos em diálogo a conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim realizada por estudantes do ensino médio (ARAÚJO, 2021) e fenômenos de congruência e não congruência semântica nas conversões propostas nos livros didáticos de matemática para o 9º ano do ensino fundamental (SILVA, 2022), conjecturamos ser possível refletir sobre uma possível relação de causa e efeito, uma vez que os dados apontam que predomina, nos livros didáticos

analisados, a conversão no sentido do registro algébrico para o registro gráfico, e não o contrário (SILVA, 2022); e os resultados de Araújo (2021) apontam dificuldades dos estudantes para realizar a conversão no sentido pouco abordado nos livros didáticos.

A partir dos recortes dos resultados das pesquisas apresentados neste capítulo, reforçamos a necessidade do trabalho com as diversas representações de função afim, e assinalamos que, nas conversões, um ponto fundamental deve ser o desenvolvimento dos dois sentidos da conversão, pois, conforme Duval (2003), os resultados demonstram que, ao contrário do que se pensa, explorar apenas um dos sentidos da conversão não desenvolve automaticamente o sentido oposto.

Sendo assim, para se obter êxito no processo de conversão entre os registros gráfico e algébrico de funções, na perspectiva da TRRS, é necessário romper com a adoção exclusiva da abordagem ponto a ponto, pois, segundo Duval (2011b), ela é inoperante, uma vez que não leva em consideração as variáveis, além de sua prática sistemática não favorecer a interpretação global que se apresenta como necessária para o processo de conversão em questão.

Referências

ARAÚJO, J. R. de. *Conversão entre os registros de representação gráfico e algébrico da função afim*: análise a partir da interpretação global de propriedades figurais. 2021. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021.

BIANCHINI, E. *Matemática – Bianchini –9º ano*. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2017.

DANTE, L. R. *Teláris matemática – 9º ano*. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DELGADO, C. J. B. *O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica*. 2010. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio Professor José de Souza Herdy, Duque de Caxias, 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em matemática:* registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. Gráficos e Equações: a articulação de dois registros. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Trad. Méricles T. Moretti, REVEMAT, Florianópolis, Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.bd/index.php/revemat. Acesso em: 7 out. 2019.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma:* entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. CAMPOS, Tânia M. M. (Org.). Trad. Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*, 1993. Trad. Méricles Thadeu Moretti. REVEMAT, Florianópolis, Santa Catarina, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

GITIRANA, V. Função Matemática: o entendimento dos alunos a partir do uso de *softwares* educacionais. *In*: BORBA, Rute; GUIMARÃES, Gilda. *A pesquisa em educação matemática*: repercussões em sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 212-240.

LAGO, W. J. S. *As contribuições dos r de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem da função afim*: um experimento com alunos do 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal do Maranhão/IFM-Campos Avançado Rosário. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Rede Profmat, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2018.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. *Currículo de Pernambuco*. 2018.

SILVA, A. S. da. *Registros de representação semiótica e função quadrática:* um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático. 2020. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SILVA, S. A. C. S. da. *Registros de representação semiótica da função afim em livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental*. 2022. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.

SOUZA, J. R. de. *Matemática realidade & tecnologia, 9º ano*. São Paulo: FTD, 2018.

11. Ensino de função afim no 1º ano do ensino médio: tecendo inter-relações entre o contrato didático e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica

José Edivam Braz Santana
Rosinalda Aurora de Melo Teles
Marcelo Câmara dos Santos

Introdução

O conceito de função está presente nos mais diversos ramos das ciências, tendo origem na tentativa de filósofos e cientistas de compreender a realidade a partir da busca de métodos que permitissem estudar e descrever fenômenos naturais. Passou por diversas modificações ao longo da história da humanidade, e é considerado um dos conceitos fundamentais da matemática (CARAÇA, 1984; PONTE, 1990). De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), é necessário que o ponto de partida para o estudo das funções seja o estabelecimento de relações entre grandezas, e "o aprofundamento dessa noção [de função] deve ter sua origem em atividades ligadas a situações do cotidiano do estudante, evitando-se a sistematização precoce" (p. 103).

De maneira particular, a função afim é um dos objetos matemáticos que comporta uma diversidade de representações: um gráfico, uma tabela, descrições em língua natural, notações simbólicas e expressões algébricas são representações que exibem conteúdos distintos desse objeto matemático.

Segundo Duval (2012a), sendo os objetos matemáticos não perceptíveis de imediato, diferentemente do que ocorre em outras áreas do conhecimento, a exemplo da física ou da química, o acesso a esses objetos passa pela produção de representações semióticas que não devem ser confundidas com os objetos que elas representam. Assim, no ensino de função, é importante oferecer aos estudantes a possibilidade de compreensão da noção de variável, a capacidade de se mover entre as múltiplas representações desse conceito e de representar matematicamente as relações em contextos diversos.

O estudo das funções está presente nos currículos escolares da disciplina de matemática desde o ensino fundamental (mais especificamente, no 9º ano), sendo aprofundado no ensino médio e estendendo-se ao ensino superior, dependendo da área de estudos escolhida. Entretanto, diversos estudos (DELGADO, 2010; REIS, 2011; LENARTOVICZ, 2013; MENESES, 2014; SOTO, HERRERA, PEREYRA, 2019) têm apontado dificuldades dos estudantes em relação à aprendizagem desse conceito, especialmente no que se refere à mobilização e articulação de suas representações.

Parte dessas dificuldades advém da forma como o conceito tem sido tratado em sala de aula, ou seja, como tem ocorrido o ensino do tema (ELIA; SPYROU, 2006). Partindo da perspectiva histórica do ensino da matemática no Brasil, ratificada por estudos e pesquisas, percebe-se – particularmente no que se refere ao ensino da álgebra, campo no qual as funções estão inseridas (BRASIL, 2017) – a tendência de um ensino baseado no uso exacerbado de simbolismo, procedimentos estanques e exercícios exaustivos. Essas práticas favorecem a reprodução "mecânica" de cálculos por parte dos estudantes, sem que haja compreensão das relações e conceitos que envolvem tais procedimentos.

Documentos de orientação curricular vigentes no Brasil e no estado de Pernambuco (BRASIL, 2019; PERNAMBUCO, 2019) sugerem que, no ensino da matemática, independentemente do objeto ensinado, os estudantes sejam levados a interpretar, argumentar, refletir, resolver problemas do cotidiano, utilizar modelos matemáticos em situações diversas e lançar mão de diferentes tecnologias.

Nesse contexto, discute-se, neste capítulo, parte dos resultados de uma pesquisa mais ampla, defendida pelo primeiro autor no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec), da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), sob orientação da segunda autora e coorientação do terceiro autor. Tal trabalho teve por objetivo geral "analisar inter-relações entre o contrato didático, estabelecido por uma

professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do ensino médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim" (SANTANA, 2022, p. 28), o que compõe o foco de discussão do capítulo.

A escolha da função afim se deu pela inquietação oriunda das premissas postas anteriormente, isto é, as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em relação a esse objeto e a necessidade de repensar os métodos de ensino utilizados pelo professor. São adotados como referenciais teóricos a noção de Contrato Didático (CD) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

O contrato didático regula a divisão de responsabilidades entre professor e estudantes na gestão de um saber, instituindo regras, em parte explícitas, mas implícitas na sua maioria (BROUSSEAU, 1986). Por sua vez, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica assume a importância e a necessidade, quando do ensino dos objetos matemáticos, da utilização de diferentes registros de representação, haja vista a natureza desses objetos (DUVAL, 2012a).

Função afim como objeto matemático em estudo

É possível aplicar o conceito de função em diversos contextos sociais e na própria matemática, o que justifica a necessidade de estar presente no ensino, bem como favorecer sua aprendizagem pelos estudantes. Caraça (1984) defende que o conceito de função está

relacionado a duas características essenciais da Realidade (assim grafado pelo autor) em que vivemos, que são a interdependência e a fluência. Essas características estão vinculadas à relação de dependência e à variação dos elementos envolvidos, respectivamente.

De acordo com esse autor, a primeira característica significa que todas as coisas estão relacionadas entre si, enquanto a segunda destaca que o mundo está em permanente evolução, ou seja, tudo muda o tempo todo.

De forma restrita, a função afim pode ser considerada um dos meios mais simples de descrever fenômenos das ciências e um dos modelos matemáticos utilizados para o estudo de relações entre grandezas, tanto no próprio campo da matemática como em outras áreas do conhecimento. Dessa forma, é necessário que o estudante seja levado a perceber que o conceito de função afim aparece nas mais diversas situações do seu dia a dia, como na hora de encher o tanque do carro, de acordo com a distância até o seu destino, ou no valor pago pela compra de determinado produto, que depende da quantidade de produtos comprada, entre outras.

Neste trabalho, adotamos a definição de função afim proposta por Souza e Garcia (2016, p. 75), para quem:

> Uma função $f : R \to R$, que a todo número $x \in R$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, é chamada de função afim.
>
> $$x \to ax + b$$
>
> $$f(x) = ax + b$$
>
> Dizemos que a e b são os coeficientes da função.

A função afim é uma função real, ou seja, tem domínio e contradomínio no conjunto dos números reais (R). O domínio é o conjunto de todas as entradas possíveis da função, o conjunto dos valores da variável independente "x" para os quais a função é definida; o contradomínio é o conjunto dos valores que a variável dependente "$y = f(x)$" pode assumir. O conjunto de todos os valores assumidos pela função "f" para todos os possíveis valores de "x" é chamado de conjunto imagem de f, e está contido em seu contradomínio.

Documentos de orientação curricular vigentes no Brasil e em Pernambuco recomendam que o pensamento funcional seja valorizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental por meio da noção de proporcionalidade, particularmente, utilizando situações ligadas ao cotidiano do estudante (BRASIL, 2017; PERNAMBUCO, 2012) como base para o ensino das funções.

De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), essa noção deve ser aprofundada nos anos finais do ensino fundamental, sem, no entanto, envolver uma sistematização precoce, o que deve ser realizado na etapa seguinte (o ensino médio), considerando, principalmente, o seu papel de modelo matemático para o estudo das variações entre grandezas em fenômenos do mundo natural ou social e as suas múltiplas representações.

Concordando com essas ideias, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) também defende a introdução da noção intuitiva do conceito de

função desde os anos iniciais do ensino fundamental, por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas; já nos anos finais do ensino fundamental, espera-se que os estudantes estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação, e utilizem esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Para além das recomendações dos documentos de orientação curricular, diversas pesquisas (RODRIGUES, 2021; PERON DA SILVA, 2021; DEZILIO; REZENDE, 2022) têm apontado que as ideias-base de função – correspondência, dependência, regularidade, variável e proporcionalidade – podem ser mobilizadas por estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental, fato que reforça a importância desse conceito ao longo dos anos de escolaridade.

Contrato didático: alguns elementos

O contrato didático é um fenômeno didático, estudado inicialmente por Guy Brousseau (1986). Segundo esse autor, o contrato didático pode ser entendido como "[...] uma relação que determina – explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente –, a cada parceiro, professor e estudante, a responsabilidade de gerir aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar contas perante o outro" (BROUSSEAU, 1986, p. 51).

Segundo Jonnaert (2002), três elementos importantes caracterizam o contrato didático: i) a ideia de

compartilhar responsabilidades, ou seja, o fato de que a relação didática não está sob controle excessivo do professor, uma vez que o aprendiz deverá aceitar realizar seu ofício de estudante; ii) a necessidade de se levar em conta o implícito, pois "[...] a relação didática funciona tanto, se não mais, sobre os não ditos do que sobre regras formuladas explicitamente" (JONNAERT, 2002, p. 178); e iii) a relação assimétrica do professor e do estudante em relação ao saber.

Nessa perspectiva, os elementos da tríade professor-estudantes-saber interagem entre si por meio de regras e convenções, e o contrato didático joga com os paradoxos da relação didática: implícito e explícito, unilateral e negociado, interno ao ambiente de sala de aula e externo a este, espontâneo e imposto. Além dos paradoxos citados, outro surge como essencialmente importante para a aprendizagem do estudante: a devolução didática.

No paradoxo da devolução, o professor deve agir na sala de aula de maneira a não deixar tudo explícito ao estudante, para não colocar em risco sua aprendizagem. Agir em contrário configura o que Brousseau (1986) denominou de "efeitos perversos do contrato didático". Por outro lado, se ele não fizer a mediação necessária entre o estudante e o saber em jogo, poderá comprometer a aprendizagem. O professor tem a obrigação social de ensinar ao estudante, mas, por outro lado, o estudante deve por si só construir seu conhecimento, não devendo, ao mesmo tempo, recusar as orientações do

professor, sob pena de fracasso da relação didática. Aí reside o paradoxo.

Assim, para aprender, o estudante precisa "sublimar o desconforto das incertezas ligadas à incompletude de seus conhecimentos, aceitando correr riscos na busca dos meios desse domínio. Tal risco é tanto a base quanto a condição para o funcionamento do processo de ensino/aprendizagem" (SARRAZY, 1995, p. 95).

Há uma tendência natural em manter "estável" o contrato didático, ou seja, cada parceiro da relação didática procura cumprir seu papel diante do outro, afinal, há expectativas recíprocas entre eles. Entretanto, poderão ocorrer momentos em que as regras negociadas sejam "transgredidas" por qualquer um desses parceiros, e daí teremos o que Brousseau (1986) denominou de "ruptura do contrato didático". A ruptura pode ser verificada no momento em que o sistema de obrigações recíprocas é desrespeitado por uma das partes e a confiança entre elas se desestabiliza.

Charnay (1996), baseado em Brousseau (1986), caracterizou três tipos de contratos didáticos: o contrato didático normativo, o contrato didático incitativo e o contrato didático aproximativo. O primeiro modelo evidencia uma forte relação entre o professor e o saber. Esse modelo é bastante comum nas metodologias tradicionais de ensino e segue basicamente a sequência definição-exemplos-exercícios. O segundo modelo defende uma forte relação entre o professor e o estudante; entretanto, o saber é colocado em segundo plano. Já o

terceiro modelo dá ênfase à relação entre o estudante e o saber, cabendo ao professor fazer as intervenções necessárias, considerando suas responsabilidades e as dos estudantes perante o saber em jogo.

Segundo Charnay (1996), nenhum professor utiliza exclusivamente um desses modelos, mas "[...] apesar de tudo, cada professor faz uma escolha, consciente ou não, e de maneira privilegiada, de um deles" (CHARNAY, 1996, p. 40). Neste trabalho, defendemos a negociação, pelo menos na maior parte do tempo didático, desse último tipo de CD, uma vez que ele considera o papel ativo do estudante frente ao saber em jogo e o papel de mediador do professor nesse contexto.

Dessa forma, analisar o contrato didático, uma das propostas dessa pesquisa, pode revelar aspectos importantes da relação didática. Entretanto, tendo em vista a natureza "abstrata" dos objetos matemáticos, conforme já mencionado neste texto, consideramos necessário o diálogo com outro aporte teórico, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para melhor compreensão do objeto matemático em estudo: a função afim. Essa teoria será discutida no próximo tópico deste capítulo.

Teoria dos Registros de Representação Semiótica: alguns apontamentos

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval, defende que os registros de representação semiótica exercem papel importante na aprendizagem da

matemática, configurando-se em elementos para a compreensão de conceitos, a argumentação e o raciocínio. Para Duval , as representações semióticas "[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" (2012a, p. 269), por exemplo: uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica e um gráfico exibem sistemas semióticos distintos (DUVAL, 2012a).

De acordo com Duval (2012a), as representações semióticas desempenham papel primordial no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos. Segundo esse autor, para que um sistema de representação semiótica seja considerado um registro de representação, três atividades cognitivas ligadas à semiose são necessárias: a formação de uma representação identificável, os tratamentos e as conversões.

Uma representação será considerada identificável quando, partindo de um registro de representação, sabe-se qual é o objeto matemático que está sendo representado, o que poderia ser comparado à realização de uma tarefa de descrição (DUVAL, 2012a), sendo necessário, para essa formação, o respeito às regras inerentes àquele sistema.

O tratamento é uma transformação que ocorre no interior de um mesmo registro de representação. Há regras de tratamento próprias para cada registro, sendo que a natureza e o número desses tratamentos variam

consideravelmente de um registro a outro (DUVAL, 2012a). Resolver uma equação do primeiro grau para encontrar o valor da incógnita, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtendo as equações equivalentes, é um exemplo de tratamento que ocorre no registro algébrico.

A conversão, por sua vez, é a transformação de uma representação em um sistema semiótico distinto daquele de partida, conservando a totalidade ou somente parte do conteúdo da representação inicial, ou seja, a conversão é uma transformação externa ao registro inicial, por exemplo: fazer a representação de uma função afim, dada em linguagem natural ou em linguagem algébrica, em outra no registro gráfico, é uma conversão, uma vez que, nessa transformação, saímos de um sistema semiótico (por exemplo, o algébrico) para outro (o gráfico), distinto daquele inicial.

Segundo Duval (2011), a variação de congruência ou não congruência semântica é um dos fatores que interfere nas transformações por conversão. Essas variações referem-se à proximidade ou distanciamento entre o registro de partida e o registro de chegada. Duval (2009; 2012a) propõe três critérios para estabelecer o nível de congruência semântica na conversão entre dois registros, os quais permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. São eles:

i) *correspondência "semântica" de elementos significantes*, isto é, possibilidade de se estabelecer uma relação de sentido entre cada unidade significante

simples presente nas representações dadas em dois registros que estão sendo colocados em correspondência;

ii) *univocidade "semântica" terminal*, ou seja, a cada unidade significante elementar da representação de partida corresponde uma única unidade significante elementar da representação no registro de chegada; e

iii) *conservação da ordem das unidades significantes*, isto é, conservação da sequência de aparecimento e utilização das unidades significativas nas representações nos dois registros de representação presentes no processo de conversão.

Conforme não satisfaça um, dois ou três dos critérios acima descritos, dizemos tratar-se de uma conversão com baixo, médio ou alto graus de não congruência semântica, respectivamente. O Quadro 1 apresenta um exemplo de conversão com baixo grau de não congruência semântica envolvendo os registros língua natural e algébrico, nesse sentido.

Quadro 1. Exemplo de enunciado com baixo grau de não congruência semântica

Uma pessoa obesa, com massa corporal de 196 kg, num certo momento, recolhe-se a um SPA onde se anunciam perdas de massa de até 2,5 kg por semana. Supondo que isso realmente ocorra, encontre uma fórmula matemática que expresse a massa mínima, M, que essa pessoa poderá atingir após n semanas no SPA.

Fonte: Os autores.

A fórmula matemática procurada no problema do Quadro 1 corresponde à seguinte expressão (função afim): $M(n) = 196 - 2{,}5 \cdot n$, em que M representa a massa mínima atingida e "n" o número de semanas decorridas. Analisando a conversão realizada em termos dos critérios de congruência semântica, temos que:

- o critério "i" é satisfeito, haja vista que unidades significantes no registro de partida mantêm o seu significado no registro de chegada, a exemplo da associação da palavra "perdas" à operação de subtração, mantendo, assim, a correspondência semântica dos elementos significantes;
- o critério "ii" *não é atendido*, pois a expressão em língua natural "por semana" é substituída pelo símbolo da operação de multiplicação, portanto, têm-se duas palavras correspondendo a um único símbolo ("·"); dessa forma, não mantém a univocidade semântica terminal;
- o critério "iii" é atendido, pois a conversão conserva a ordem das unidades significantes: "massa corporal inicial"; "perdas"; "2,5 kg por semana" $\Longrightarrow$ $M(n) = 196 - 2{,}5 \cdot n$.

Assim, como apenas um dos critérios propostos por Duval (2009, 2012a) não foi satisfeito, dizemos que esse é um problema com baixo grau de não congruência semântica. Segundo Duval, "[...] a variação de congruência ou de não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de inter-

pretação dos enunciados do problema para os alunos" (2012b, p. 121).

No que se refere particularmente às conversões entre representações dos registros algébrico e gráfico, Duval (2011) apresenta três abordagens possíveis, especificamente para a função afim: i) a abordagem ponto a ponto; ii) a abordagem de extensão do traçado efetuado; e iii) a abordagem de interpretação global de propriedades figurais.

A abordagem ponto a ponto consiste em atribuir valores particulares à variável "x", sem se preocupar com quaisquer propriedades, para encontrar pares de números, ou seja, pontos (DUVAL, 2011). Essa abordagem não propicia uma interpretação das propriedades do gráfico, mas apenas a visualização (associativa) de alguns valores particulares e dos pontos marcados no plano cartesiano, dificultando a percepção da articulação entre os registros, sobretudo quando a representação gráfica é o registro de partida.

Quanto à abordagem de extensão do traçado efetuado, ela não se vincula a um conjunto de pontos marcados, como no caso anterior, mas se apoia em um conjunto infinito de pontos marcados, isto é, nos intervalos dos pontos marcados. No entanto, essa abordagem, à semelhança da anterior, não leva em conta as variações visuais concernentes à representação gráfica, mas apenas o traçado do gráfico.

Por sua vez, na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, é analisada toda a modificação

visível "sofrida" no traçado do gráfico quando são modificados os seus parâmetros, observando o impacto dessas modificações nas representações (tanto algébrica quanto gráfica), pois "[...] ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação" (DUVAL, 2011, p. 99).

Essa abordagem, conforme visto anteriormente, favorece sobremaneira a transformação "representação gráfica → representação algébrica (equação)", fato pouco evidente nas duas abordagens anteriores, sendo exatamente neste sentido de conversão (gráfico → equação) que o grau de não congruência semântica aumenta e, por consequência, as dificuldades dos estudantes.

Coordenar adequadamente as representações dadas em diferentes registros de representação semiótica, ou seja, se mover espontaneamente entre diferentes representações do mesmo objeto matemático, constitui um desafio tanto para o estudante (aprender) quanto para o professor (ensinar). Cada registro apresenta especificidades, e a conversão entre as representações possíveis nesses registros não significa apenas uma modificação do modo de tratamento do objeto matemático, mas a explicação de propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto em um sistema semiótico diferente daquele inicial.

Este estudo teve como foco buscar evidências empíricas acerca das inter-relações estabelecidas entre o

contrato didático, estabelecido entre uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do ensino médio, e os registros de representação semiótica da função afim mobilizados na relação didática. No tópico que segue, delineamos o percurso metodológico adotado, apontando seus participantes, instrumentos de coleta de dados utilizados e categorias analíticas adotadas.

Percurso metodológico

Para o desenvolvimento da pesquisa, foram adotados procedimentos metodológicos de natureza qualitativa. Nesse tipo de pesquisa, "[...] o próprio pesquisador é um instrumento, ao observar ações e contextos e, com frequência, ao desempenhar intencionalmente uma função subjetiva no estudo, utilizando sua experiência pessoal em fazer interpretações" (STAKE, 2011, p. 30).

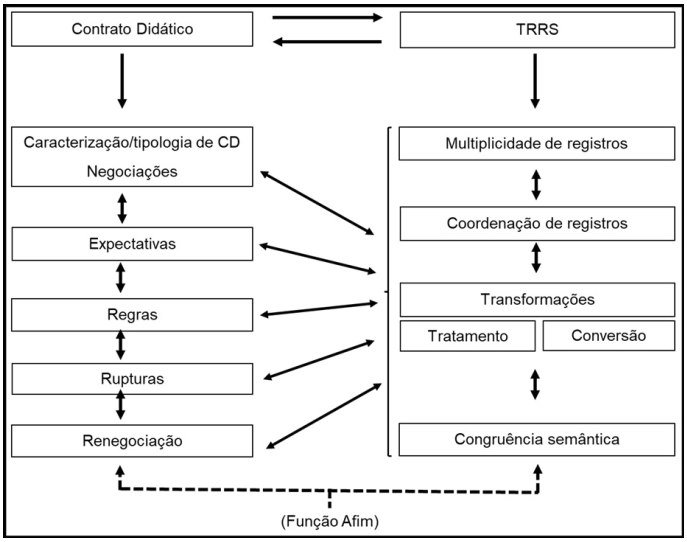
A pesquisa foi desenvolvida no 2º semestre do ano de 2021, durante o período de emergência de saúde pública de importância internacional – a pandemia de Covid-19 –, em uma escola pública da rede estadual de ensino de Pernambuco, localizada na cidade de Afogados da Ingazeira, e envolveu uma professora de matemática e 22 de seus estudantes do 1º ano do ensino médio. Os participantes foram identificados com pseudônimos; "Rita" foi o pseudônimo atribuído à professora.

Como instrumentos de coleta dos dados, foram utilizados: i) entrevista prévia (semiestruturada) com a professora participante; ii) observação, com videogravação das aulas ministradas sobre o conteúdo "função afim"; e

iii) diário de bordo do investigador. Os procedimentos da pesquisa foram organizados em quatro etapas.

Na primeira etapa, foi realizado o contato inicial com a escola e os participantes, para apresentação da pesquisa e assinatura dos devidos termos de autorização e consentimento; na segunda, ocorreu a entrevista semiestruturada (gravada em áudio e vídeo) com a professora da turma; *na terceira*, houve *o* momento de observação, com videogravação, das aulas da professora "Rita" (um total de 20 aulas gravadas); por fim, na quarta etapa, procedeu-se a análise e interpretação dos dados, que foram discutidos segundo o esquema da Figura 1.

Figura 1. Esquema de análise dos dados



Fonte: Os autores.

O lado esquerdo desse esquema (Figura 1) ilustra os elementos do CD que foram considerados na análise dos dados. Analogamente, o lado direito aponta os elementos da TRRS tomados nessa análise. As setas duplas entre os elementos de cada teoria sinalizam a não linearidade desses elementos, ou seja, na relação didática eles poderão aparecer em uma sequência distinta da apresentada. A estreita relação entre o CD e a TRRS, as inter-relações, são representadas pelas setas "⇄". As "setas duplas" entre os elementos de ambas as teorias significam que esses elementos foram tomados, nas análises, de forma inter-relacionada.

Discussão dos resultados

As análises realizadas, tanto por meio da entrevista semiestruturada quanto da videogravação das aulas da professora Rita, propiciaram evidências empíricas acerca das inter-relações estabelecidas entre o contrato didático e os registros de representação semiótica da função afim mobilizados na relação didática.

Uma primeira relação apontada diz respeito às negociações e à caracterização/tipologia de CD estabelecido na relação didática. Quanto a esse quesito, mesmo com o perceptível esforço da professora Rita na tentativa por estabelecer um CD mais aproximativo (CHARNAY, 1996), acabou se materializando na relação didática forte viés do CD tradicional. Nesse tipo de contrato, o professor traz definições, seguidas de uma série de exemplos; depois, propõe algumas atividades baseadas nesses

exemplos, e, por fim, propõe uma avaliação nos mesmos moldes das atividades propostas. O CD tradicional é também chamado de CD normativo (CHARNAY, 1996).

Observou-se que, na maior parte do tempo didático, a professora Rita tomou para si toda a ação didática, ou seja, ela "apresentou" aos estudantes as diversas representações da função afim, o objeto matemático de estudo, seus tratamentos e conversões. Também foi ela quem fez a coordenação da maior parte dos registros mobilizados, mostrando aos estudantes o "passo a passo" de como proceder para tal.

A professora Rita priorizou o registro algébrico e, nas conversões entre esse registro e o registro gráfico, utilizou uma abordagem que se aproxima da abordagem global das propriedades figurais, contrariando a nossa expectativa enquanto pesquisadores, de que, em virtude do tipo de contrato didático negociado, utilizaria a abordagem ponto a ponto, por ser mais "rápida" e metódica, do ponto de vista operacional.

Mesmo considerando que seja mais comum nesse tipo de CD o professor não propiciar a heterogeneidade dos sentidos (DUVAL, 2003; 2011), a professora Rita, por meio de situações com baixo ou médio graus de não congruência semântica, o fez ao longo da relação didática, mas, ainda assim, conduzindo a maior parte das conversões exigidas. O excerto seguinte ilustra o diálogo de um dos momentos em que a professora Rita propôs a conversão entre os registros algébrico e gráfico, nesse sentido, por meio de uma atividade do livro didático:

Aluna: [A professora se dirige ao quadro para mostrar como constrói o gráfico de uma função] Eixo horizontal é o quê?
Alunos: "*x*"!
Professora: E o vertical?
Alunos: "*y*"!
Professora: Esse gráfico vai ser crescente ou decrescente?
Alunos: Decrescente!
Professora: Por quê?
Alunos: Porque tem o menos no "*a*"!
Professora: Quem é o valor de "*b*"?
Alunos: Dez!
Professora: O valor de "*b*" fica na vertical ou horizontal?
Alunos: Vertical!
Professora: Sobre o eixo "*x*" fica algum valor, qual é?
Alunos: "*a*"!
Professora: Não! Sobre o eixo "*x*" fica um valor, quem é esse valor? A gente chama ele de quem?
Aluna: Raiz!
Professora: Quem é a raiz da função que a gente encontrou?
Alunos: Dois vírgula vinte e cinco!
Professora: Olho o meu coeficiente angular e determino se a minha reta vai ser crescente ou decrescente. Ela vai ser o quê?
Alunos: Decrescente!
(Recorte da transcrição da aula da professora "Rita" – 17 de ago. de 2021).

Esse recorte aponta o diálogo entre a professora Rita e estudantes no qual negociam, explicitamente, como proceder para a construção do gráfico da função afim. A proposta da professora, utilizando a abordagem que ela chama, em sua entrevista, de "uso das propriedades dos coeficientes", se aproxima da abordagem de interpretação global das propriedades figurais, segundo Duval (2011),

uma vez que, por meio dessa abordagem, a professora Rita mostra aos seus estudantes a relação entre esses coeficientes e o comportamento do gráfico da função.

Até certo ponto, essa estratégia leva o estudante a compreender o papel de cada coeficiente no comportamento do gráfico, ou seja, propicia ao estudante a associação entre as unidades significantes do registro algébrico e as unidades visuais no registro gráfico. No entanto, para que, de fato, essa relação entre unidades significantes e unidades visuais fique mais evidente para o estudante, é necessário "[...] *variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro* (ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão)" (DUVAL, 2011, p. 103, grifos do autor).

Dessa forma, o estudante poderá "[...] ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isso significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação" (DUVAL, 2011, p. 99).

Na aula seguinte, Rita propõe a conversão inversa, ou seja, a conversão entre representações do registro gráfico para o registro algébrico. O excerto que segue mostra parte das negociações estabelecidas entre a professora e seus estudantes acerca da conversão mencionada:

> **Professora:** Vamos lá! Vamos corrigir a atividade da aula passada. Vocês vão ter que olhar o gráfico, retirar os valores e substituir em "*a*" e em "*b*"! Vou fazer o gráfico 1: aqui tem

dois pontos no gráfico: menos três e três. Que ponto é esse aqui, "*a*" ou "*b*"? [apontando para o ponto sobre o eixo *y*]

Aluna: "*b*"!

Professora: "*b*" igual a quanto?

Aluna: Três.

Professora: O ponto sobre o eixo "*x*" é a raiz da função, que é o "*x*". E sobre o eixo "*y*" é quem? "*b*", que é o coeficiente linear. Falta encontrar quem?

Aluna: "*a*"!

Professora: Como é que a gente faz pra encontrar o "*a*"? [ninguém responde] A gente tem a fórmula da raiz da função que é "*x*" igual a menos "*b*" sobre "*a*", e a gente pode usar quantos valores nessa fórmula? [ninguém responde] A gente tem o valor de "*x*", o valor de "*b*" e o valor de "*a*", três valores. Mas, aqui a gente usa quantos?

Aluna: Dois.

Professora: Dois. Quem é que vai sobrar?

Aluna: "*a*".

Professora: Então a gente vai encontrar quem?

Aluna: O valor de "*a*".

Professora: Primeiro, substituir o valor de "*x*". Quem é o valor de "*x*"?

Aluna: Menos três.

Professora: Menos três igual... o valor de "*b*", quem é?

Aluna: Três.

Professora: Três, sobre o valor de "*a*". Como é que a gente resolve agora?

Aluna: Regra de três.

Professora: Meios pelos extremos, uma regra de três. Menos três vezes "*a*"? [ninguém responde] Menos três "*a*", igual um vezes menos três? [ninguém responde] Menos três! O menos três está multiplicando o "*a*", vai passar a...?

Aluna: Dividir.

> **Professora:** "*a*" igual menos três dividido por menos três. Menos com menos?
> **Alunos:** Mais!
> **Professora:** Três dividido por três?
> **Alunos:** Um!
> **Professora:** Então, agora eu tenho o valor de "*a*", que é um e o valor de "*b*", que é três. Quem será o meu "*f*(*x*)"? O que eu tenho que fazer? Substituir o valor de "*a*" e o valor de "*b*". Vai ficar como?
> **Aluna:** "*f*" de "*x*" igual, um "*x*" mais três
> (Recorte da transcrição da aula da professora "Rita" – 27 de ago. de 2021).

O excerto acima mostra parte da negociação entre a professora Rita e seus estudantes para o trabalho com a conversão entre representações dos registros gráfico e algébrico. Esse tipo de conversão requer do estudante compreensão global da relação existente entre as unidades visuais no registro gráfico e as unidades significantes do registro algébrico, colocando-as em correspondência.

Daí a importância de o trabalho na conversão entre representações dos registros algébrico e gráfico priorizar a abordagem global, em detrimento da abordagem ponto a ponto, para que o estudante possa, de fato, identificar cada um dos valores das variáveis visuais e integrá-las (DUVAL, 2011), fazendo-as corresponder às unidades significantes no registro algébrico.

A escolha didática da professora, de propiciar em suas aulas a conversão entre as representações de registros, nesse caso particular, o algébrico e o gráfico, nos

dois sentidos, favorece a coordenação entre esses registros. Segundo Duval, "[...] não basta que haja um desenvolvimento de cada registro. É essencial que os diferentes registros que o sujeito tem à sua disposição, ou que a educação se esforça por fazê-lo adquirir [...], sejam coordenados" (1996, p. 365).

Essa escolha sinaliza uma preocupação da professora em relação à natureza diferente dos conteúdos de cada representação, e contraria – o que é um fato positivo –, o que aponta Duval, a saber, que, "[...] geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado em um sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido" (2003, p. 20).

Quanto às expectativas, evidenciamos que a professora Rita, entre outros anseios, esperava que seus estudantes já tivessem dominado o conceito de função (relação funcional), haja vista a previsão desse conteúdo nos documentos de orientação curricular (BRASIL, 2017; PERNAMBUCO, 2019) desde o 9º ano do ensino fundamental e sua retomada no ensino médio, anteriormente ao ensino da função afim.

A professora Rita esperava também que os estudantes soubessem lidar com os tratamentos relacionados às equações do 1º grau, aos sistemas de equações do 1º grau e às coordenadas de pontos no plano cartesiano, e que conseguissem fazer conversões com baixo grau de não congruência semântica, pelo menos entre os registros dados em língua natural e o registro algébrico

(nesse sentido), por serem os mais comumente utilizados no ensino das equações do 1º grau.

A análise realizada evidenciou que essas expectativas foram frustradas, e que Rita precisou reorganizar o contrato didático, fazer novos esses conceitos já antigos – dialética novo-antigo, segundo Brito Menezes (2006) – para poder avançar com o novo saber em cena, a função afim.

Sob o ponto de vista das regras do contrato didático, explícitas ou implícitas, decorrentes das negociações em sala de aula, considerando as representações semióticas da função afim mobilizadas na relação didática, destacamos as seguintes:

- para converter um problema cuja representação é dada no registro em língua natural para outra no registro algébrico, devemos partir da definição: encontramos no problema os respectivos valores correspondentes ao coeficiente "*a*" e termo independente "*b*", e montamos a expressão algébrica desejada;
- para identificar a declividade da função afim, a partir do registro algébrico, devemos considerar o coeficiente "*a*" dessa função; se $a > 0$, a função afim será crescente, e se $a < 0$, a função afim será decrescente;
- teremos um caso particular de função afim sempre que um dos coeficientes da expressão algébrica dessa função estiver ausente, ou seja, for igual a zero. Para isso, temos três configurações possíveis: a =0 e "*b*" qualquer função constante; $a \neq 0$ e $b = 0$, função linear; e $a = 1$ e $b = 0$, função identidade;

- para determinar o zero (ou raiz, conforme a professora) da função no registro algébrico, basta identificar adequadamente no problema proposto quais valores representam o coeficiente "*a*" e termo independente "*b*", utilizar a fórmula "$x = \frac{-b}{a}$", e fazer as manipulações matemáticas necessárias para obter esse valor.

Essas e outras regras emergiram ao longo de toda a relação didática.

Sobre as rupturas e renegociações do CD, estas não foram evidenciadas na relação didática analisada. Embora as rupturas sejam essenciais para o avanço das aprendizagens (BROUSSEAU, 1986), observamos, na aula da professora Rita, momentos de tensão, questionamentos e contradições que, ao nosso entender, não consistiram em uma ruptura do contrato didático, mas apenas em uma "reorganização contratual", nos termos propostos por Almeida (2010), ou seja, uma "desestabilização momentânea" na relação didática, após a qual a professora Rita seguiu com sua negociação.

Considerações finais

Este estudo teve por objetivo analisar inter-relações entre o contrato didático, estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim. Nesse sentido, buscamos caracterizar o contrato didático negociado entre uma professora

de matemática e seus estudantes do 1º ano do ensino médio e as representações semióticas da função afim mobilizadas na relação didática, estabelecendo as inter-relações entre esses dois aportes teóricos.

Observamos, ao longo das aulas, que a professora Rita procurou seguir as orientações dos documentos de orientação curricular então vigentes (BRASIL, 2019; PERNAMBUCO, 2012) no que se refere ao ensino da função afim, buscando sempre contextualizar o ensino por meio de situações semelhantes àquelas vivenciadas pelos estudantes em seu cotidiano. No entanto, sobre os problemas contextualizados, chamamos a atenção ao fato de que a maioria desses tipos de problemas apresentam domínio discreto, fato que precisa ser cuidadosamente observado pelo estudante para evitar equívocos conceituais. A correta identificação do domínio de validade das situações propostas é fundamental para a correta solução do problema.

O fato de a professora Rita, na maioria das vezes, desenvolver as atividades com os estudantes, sem deixar que eles, por si sós, manipulassem as situações propostas em busca das soluções esperadas, pode tê-los levado a instituir uma regra implícita do contrato didático. Essa regra sugere "sempre esperar, pois a professora fará as atividades ou exercícios juntamente com os estudantes", o que pode levar à não devolução didática por parte dos estudantes, a alguns efeitos "perversos" do contrato didático e à não construção do conhecimento por parte deles.

Os estudantes manifestaram grandes dificuldades em lidar com o objeto matemático estudado, a função afim, sobretudo no que se refere aos tratamentos do registro algébrico, necessários para as conversões entre esse registro e o registro gráfico ou vice-versa, fato corroborado por outras pesquisas já desenvolvidas (DELGADO, 2010; REIS, 2011; CARDOSO *et al.,* 2013; entre outras). Quanto a esses tratamentos, as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes participantes do nosso estudo se referem à resolução das equações do 1º grau, dificuldades trazidas de etapas escolares anteriores.

No que tange aos registros de representação semiótica mobilizados na relação didática e evidenciados no CD analisado, pôde-se perceber predominância do registro algébrico, fato já esperado, tendo em vista ser esse o tipo de registro mais privilegiado no estudo das funções no tipo de CD estabelecido pela professora participante da pesquisa – o CD tradicional. Pôde-se perceber, ainda, o predomínio da transformação de conversão, embora os tratamentos também tenham sido evidenciados, particularmente quando do registro algébrico e sua utilização para o cálculo do zero da função afim, obtenção da expressão da função afim definida por dois pontos dados e estudo do sinal.

De forma geral, pudemos observar que todas as interações que ocorreram na sala de aula, bem como as negociações, as expectativas, as regras e as tensões, foram regidas pelo contrato didático e instituídas em termos de representações semióticas do objeto matemático em

estudo. Dessa forma, foi possível observar que as negociações do CD e demais elementos que circundam esse fenômeno didático ocorreram em termos de representações semióticas do objeto matemático, mobilizadas na relação didática. Assim, acreditamos que a análise do contrato didático com foco nas representações semióticas do objeto matemático estudado oportunizou melhor compreensão acerca das inter-relações existentes entre ele e as representações semióticas mobilizadas na relação didática.

Dessa forma, consideramos que existem inter-relações de estreita aproximação, ou seja, relações mútuas, entre o contrato didático estabelecido por uma professora de matemática e seus estudantes do 1º ano do ensino médio, e os registros de representação semiótica mobilizados na relação didática. Por exemplo, no tipo de contrato didático estabelecido pela professora "Rita", o CD tradicional – normativo (CHARNAY, 1996), ela toma para si toda a ação didática, privilegia as representações algébricas da função afim em detrimento das demais, e propicia atividades com baixo ou médio graus de não congruência semântica entre as conversões, favorecendo a coordenação entre representações, sobretudo entre aquelas dos registros algébrico e gráfico.

As expectativas, tanto dessa professora em relação aos estudantes quanto destes últimos em relação à professora, também estão intimamente inter-relacionadas com os registros de representação semiótica da função afim mobilizados. As expectativas da professora

em relação aos estudantes definiram, em certa medida, suas escolhas didáticas quanto aos RRS mobilizáveis na sala de aula. Por outro lado, as expectativas dos estudantes em relação a essa professora se alinham àquilo que eles esperavam dela: maneira de organizar a cena didática, fornecer informações e explicações a respeito do objeto de ensino, o que está diretamente relacionado ao contrato didático estabelecido.

As regras, implícitas e explícitas, negociadas ou impostas, se inter-relacionaram os com RRS da função afim mobilizados, uma vez que estes estão diretamente relacionados ao tipo de CD estabelecido.

Esperamos que este trabalho contribua com as reflexões acerca da articulação entre diferentes aportes teóricos no contexto da sala de aula, e, de maneira particular, com as discussões sobre as relações entre o contrato didático estabelecido entre professora de Matemática e estudantes do 1º ano do ensino médio, e os registros de representação semiótica da função afim mobilizados na relação didática.

Referências

ALMEIDA, F. E. L. *O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas:* analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 305 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7438. Acesso em: 10 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*: Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: ensino médio. Brasília: MEC, 2019.

BRITO MENEZES, A. P. A. *Contrato didático e transposição didática*: inter-relações entre fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 259 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/3811. Acesso em: 10 mar. 2019.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *In*: *Théorisation des Phénomènes D'enseignement des Mathématiques*. Tese (Doutorado em Mathématiques) – Université Sciences et Technologies, Bordeaux I, 1986, p. 281-362.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

CARDOSO, M. B. *et al*. Função afim: uma análise dos procedimentos de conversão de alunos do 2º ano do ensino médio. *In*: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013, Salvador. *Anais* [...]. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/671_1182_ID.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

CHARNAY. R. Aprendendo (com) a resolução de problemas. *IN*: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 36-47.

DELGADO, C. J. B. *O ensino da função afim a partir dos registros de representação semiótica*. 2010. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2010. Disponível em: http://tede.unigranrio.edu.br/bitstream/tede/15/2/Carlos%20Jos%c3%a9%20Borges%20Delgado.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

DEZILIO, K. REZENDE, V. Ideias de Função Afim e Problemas Mistos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Acta Sci.*, Canoas,

v. 24, n. 6, p. 89-117, 2022. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/7282/pdf_1. Acesso em: 6 mar. 2023.

DUVAL, R. Quel Cognitif Retenir en Didactique des Mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. França, v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996. Disponível em: https://revue-rdm.com/1996/quel-cognitif-retenir-en/. Acesso em: 20 mai de 2021.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* registros de representação semiótica. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano*: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Gráficos e Equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Tadeu Moretti. *REVEMAT:Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96. Acesso em: 20 mai. 2020.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 14 jul. 2020.

DUVAL, R. Diferenças Semânticas e Coerência Matemática: introdução aos problemas de congruência. Trad. Méricles Tadeu Moretti. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p97/22381. Acesso em: 20 jun. 2020.

ELIA, I.; SPYROU, P. How Students Conceive Function: a triarchic conceptual semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, v. 3, n. 2, p. 256-272, 2006. Disponível em: https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1053&context=tme. Acesso em: 15 mai. 2021.

JONNAERT, P. *Criar condições para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

LENARTOVICZ, I. G. *Aplicação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval no Estudo de Funções Polinomiais do 1º Grau no Curso de Administração*. 2013. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2013. Disponível em: https://bu.furb.br//docs/DS/2013/355715_1_1.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

MENESES, L. R. M. *Representações mobilizadas nas turmas de 1º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Sergipe no ensino de função afim e quadrática*. 2014. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/8906/2/LEONEL_RICARDO_MACHADO_MENESES.pdf. Acesso em: 20 jul. 2020.

PERNAMBUCO. *Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio*. Recife. Secretaria de Estado da Educação, 2012.

PERNAMBUCO. *Currículo de Pernambuco*: ensino fundamental. Recife. Secretaria de Estado da Educação e Esportes, 2019. Disponível em: http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf. Acesso em: 15 jul. 2019.

PERON DA SILVA, L. D. C. *As formas operatória e predicativa do conhecimento manifestadas por alunos do 5º ano mediante problemas*

de estrutura multiplicativa: uma investigação das ideias base de função. 2021. 555 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/handle/tede/5773#preview-linko. Acesso em: 06 mar. 2023.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. *Educação e Matemática*. Portugal, n. 15, p. 3-9, 1990. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4473/1/90%20Ponte%20EM%2015.pdf. Acesso em: 25 mai. 2021.

REIS, A. M. *Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no 1º ano do ensino médio*. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/10866/1/Adinilson%20Marques%20Reis.pdf. Acesso em: 15 jul. 2020.

RODRIGUES, C. L. H. *Invariantes operatórios associados ao conceito de função mobilizados por alunos do 5º ano do ensino fundamental*. 2021. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2021. Disponível em: https://tede.unioeste.br/bitstream/tede/5815/5/Carla_Rodrigues2021.pdf. Acesso em: 6 mar. 2023.

SANTANA, J. E. B. *Contrato Didático e Registos de Representação Semiótica*: inter-relações no ensino da Função Afim no 1º ano do Ensino Médio. 2022. 367f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2021. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/49494/1/TESE%20Jos%c3%a9%20Edivam%20Braz%20Santana.pdf. Acesso em: 30 abr. 2023.

SARRAZY, B. Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie*. França, n. 112, 1995. p. 85-118. Disponível em: https://hchicoine.

files.wordpress.com/2008/05/sarrazy-contrat_didactique_1995.pdf. Acesso em: 21 jul. 2019.

SOTO, M.; HERRERA, C. G.; PEREYRA, N. E. Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* nº 55. 2019. p. 71-84. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/17215/1/Soto2019Coordinación.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

STAKE, R. E. Pesquisa Qualitativa: como as coisas funcionam. *In*: *Pesquisa Qualitativa: estudando como as coisas funcionam*. Coleção Método e Pesquisa. Porto Alegre: Penso, 2011. Disponível em: http://www.larpsi.com.br/media/mconnect_uploadfiles/x/d/xdw.pdf. Acesso em: 16 out. 2014.

Sobre os autores

Andreza Santana da Silva

Licenciada em Matemática pela Universidade de Pernambuco (UPE). Mestra e doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) e do (Semear).
Lattes: http://lattes.cnpq.br/7034171739461717

Carla Larissa Broza Halum Rodrigues

Professora dos anos iniciais do ensino fundamental. Formada pelo Curso de Formação de Docentes no Colégio Estadual de Campo Mourão (2010). Graduada em Pedagogia pela Unicesumar (2014) e em Matemática pela

Unespar (2015). Pós-graduada em Neuropsicopedagogia pela Faculdade de Educação São Braz (2017). Mestra em Educação em Ciências e Educação Matemática, pelo PPGECEM, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná/Cascavel (Unioeste) (2021). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). Lattes: http://lattes.cnpq.br/0146978545242890

Clélia Maria Ignatius Nogueira

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Tupã (Fafit); mestra em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos (ICMSC) da Universidade de São Paulo (USP) e doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista (Unesp). Professora aposentada do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). É docente do corpo permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Universidade Estadual do Paraná (Unespar). Fundadora, coordenadora e atual vice-coordenadora do Grupo de Trabalho "Diferença, Inclusão e Educação Matemática – GT13", da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Membro do Conselho Editorial da SBEM e do Conselho Consultivo da Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM). Autora de livros e capítulos que versam sobre epistemologia genética,

educação matemática inclusiva, ensino de matemática para surdos; didática da matemática de influência francesa e de artigos publicados em periódicos. Colíder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa), do Grupo de Estudos e Pesquisas em Surdez e Ensino de Matemática (GEPSEM) e do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática e Educação Matemática Inclusiva (Gepedemi).
Lattes: http://lattes.cnpq.br/7001703570357441

Fabricia Bernardino

Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR, Campus de Campo Mourão. Mestra pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa. Atualmente é professora da Educação Básica dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio da rede pública de ensino do estado do Paraná.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/2624520412244444

José Edivam Braz Santana

Licenciado em Ciências com habilitação em Matemática pela Faculdade de Formação de Professores de Afogados da Ingazeira (atual Faculdade do Sertão do Pajeú) e em Pedagogia pela Universidade Cruzeiro do Sul. Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Doutor em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade

Federal de Pernambuco (UFPE). Professor do ensino básico, técnico e tecnológico no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE), *campus* Pesqueira, atuando nos cursos de Licenciatura em Matemática e Física.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4141666207667732

José Robson de Araújo

Licenciado em Ciências com habilitação em Matemática pela Universidade de Pernambuco (UPE); especialista em Ensino da Matemática (UPE); mestre em Educação Matemática e Tecnológica pelo Programa de Pós-Graduação (Edumatec) da UFPE. É professor de matemática do ensino fundamental anos finais e do ensino médio; formador de professores de matemática pela Secretaria de Educação de PE; colaborador na elaboração do Currículo do Ensino Fundamental Anos Finais e do Ensino Médio de PE (Formação Geral Básica e Itinerários Formativos de Matemática); membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa); membro do Grupo de Estudo e Pesquisa Semear.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5353901190533610

Karina Dezilio

Professora das redes municipal e estadual de ensino – ensino fundamental I e II e ensino médio. É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). Mestra em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

(PRPGEM) (2022). Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar/*Campus* de Campo Mourão) (2016) e em Pedagogia pela Rede Futura de Ensino (Polo de Umuarama) (2020). Pós-graduada em Ensino de Matemática pela Faculdade Venda Nova do Imigrante (Faveni) (2017); em Atendimento Educacional Especializado – Educação Especial e Inclusiva pela UniCesumar (2019); e em Educação do Campo pelo Centro Universitário Cidade Verde (UNIFCV) (2019). Lattes: https://lattes.cnpq.br/1788830974870495

Luciana Del Castanhel Peron da Silva

Possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste, 2001), *campus* de Foz do Iguaçu. É especialista em Psicopedagogia Institucional (2003) e em Docência do Ensino Superior (2012). Mestra em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM, 2007/2009). Docente pertencente ao quadro próprio do magistério do estado do Paraná no período de 2003-2017. Participante do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE) (2012-2014). Docente no ensino superior na Unioeste (*campus* Foz do Iguaçu). Professora colaboradora voluntária do PIBID/MAT/FOZ. Doutora pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), da Unioeste/Cascavel (2017-2021). Dedica-se ao estudo das áreas da Matemática, Educação Matemática e Ensino de Matemática.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/5380611529070405

Marli Schmitt Zanella

Professora do Departamento de Ciências da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Mestra e doutora em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM), com estágio de doutorado na Universidade de Kassel – Kassel, Alemanha. Pós-doutora em Educação para a Ciência e Educação Matemática (Unioeste). Docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências Ambientais (polo UEM).
Lattes: http://lattes.cnpq.br/0294897833824760

Regis Alessandro Fuzzo

Possui mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) (2022), pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Especialização em Gestão Pública pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) (2016). Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) (2013). Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Faculdade Estadual de Ciências e Letras de Campo Mourão (Fecilcam) (2010), atualmente Unespar. Graduação em Bacharelado em Engenharia Têxtil pela Universidade Estadual de Maringá (UEM) (2011). Atuou por 8 anos na Caixa Econômica Federal como gestor financeiro. Atualmente, é servidor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Atua nas áreas de educação matemática, educação financeira, matemática financeira, didática da matemática.

Renato Francisco Merli

Professor adjunto na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Toledo). Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* Cascavel (2022). Realizou período sanduíche na Rutgers University – Newark, New Jersey, Estados Unidos (agosto/2019 – agosto/2020); mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (2012) e mestre em Filosofia pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* Toledo (2016); Especialista em Educação à Distância pela Faculdade de Apucarana (2011) e licenciado em Matemática com Ênfase em Informática pela Faculdade de Apucarana (2010). Atua no curso de Licenciatura em Matemática. Pesquisa principalmente nos seguintes temas: didática francesa, matemática fuzzy, modelagem matemática, tecnologias no ensino de matemática, filosofia e história da matemática e formação de professores. Participa dos grupos Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) e Educação Matemática (GEPEEM). Foi coordenador do Pibid de Matemática da UTFPR – *campus* Toledo de 2013 a 2016, e coordenador de Tecnologias da Educação (Coted) de 2016 a 2018. Foi coordenador do projeto Clube da Matemática e membro do Comitê de Ética em Pesquisa da UTFPR (2017 a 2018). Foi coordenador voluntário do Pibid de Matemática da UTFPR – *campus* Toledo (2018 a 2019) e professor responsável das Atividades de Estágio do curso de Licenciatura em Matemática (PRAE) (2018 a

2019). Atualmente é membro do Núcleo Docente Estruturante (NDE), membro do Colegiado (COMAT), coordenador do Residência Pedagógica (RP) e professor responsável pelas Atividades de Internacionalização (PRAINT) do curso de Licenciatura em Matemática – Toledo.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4313837720967509

Rosinalda Aurora de Melo Teles

Licenciada em Matemática pela Universidade de Pernambuco, mestra e doutora em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco. Atualmente, é professora associada da Universidade Federal de Pernambuco, atuando no Departamento de Ensino e Currículo do Centro de Educação. Orienta pesquisas de mestrado e doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec). Atualmente, é vice-coordenadora do Programa. Coordena o Grupo de Pesquisa em Ciências e Educação Matemática (Semear), da UFPE. Ex- diretora da regional da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em Pernambuco. Autora de livros e artigos na área de Educação Matemática. Coordenadora do Grupo de Estudo e pesquisa Semear.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/8888500885370084

Saulo Augusto Coimbra Santos da Silva

Licenciado em Matemática pela Universidade de Pernambuco (UFPE). Mestre em Educação Matemática e Tecnológica pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec), da Univer-

sidade Federal de Pernambuco (UFPE). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) e do Semear. Atualmente, atua como Técnico Formador Pedagógico de Matemática na rede estadual de Pernambuco.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/2590801770753354

Suzana Domingues da Silva

Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (Unespar), *campus* de Campo Mourão (2016). Mestra pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Unespar de Campo Mourão (2021). Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) e do Grupo de Estudo e Pesquisa em Epistemologia Genética e Educação (Gepege).
Lattes: https://lattes.cnpq.br/3008286301589847

Veridiana Rezende

Graduada e mestra em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), doutora em Educação para as Ciências e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM), com estágio de doutorado na Universidade Charles de Gaulle – Lille 3 – França. Atualmente, é professora associada da Universidade Estadual do Paraná (Unespar), atuando no Colegiado de Matemática do *campus* de Campo Mourão. Faz parte do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PRPGEM) da Unespar e do Programa de

Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Atualmente, é editora da *Revista Paranaense de Educação Matemática* e líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa). Autora de livros e artigos na área de educação matemática.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/5630494004651939

Título Aspectos conceituais, cognitivos
e didáticos de função
Autoria Rosinalda Aurora de Melo Teles
Veridiana Rezende
Clélia Maria Ignatius Nogueira
Marli Schmitt Zanella

Formato E-book (PDF)
Tipografia Cambria (texto)
Lemon Sans Next Condensed (títulos)
Desenvolvimento Editora UFPE

Editora UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos, 20 | Várzea, Recife-PE
CEP: 50740-530 | Fone: (81) 2126.8397
editora@ufpe.br | editora.ufpe.br

